EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

januari
2003/nr.4
jaargang 78

ONDERZOEKS-VAARDIGHEDEN EN GEÏNTEGREERD WISKUNDEONDERWIJS

orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

4

januari 2003 JAARGANG 78

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen:

• goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
• platte tekst op diskette of per e-mail: WP, Word of ASCII.
• illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl

Voorzitter
Marian Kollenveld
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: M.Kollenveld@nvvw.nl
Secretaris
Wim Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: W.Kuipers@nvvw.nl
Ledenadministratie
Elly van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
foto omslag Peter Tahl, Groningen
produktie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie verenigingsjaar 2002-2003

Leden: € 40,00
Gepensioneerden: € 25,00
Studentleden: € 20,00
Leden van de VVWL: € 25,00
Lidmaatschap zonder Euclides: € 25,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgend nummer.
Voor personen: € 45,00 per jaar
Voor instituten en scholen: € 120,00 per jaar
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Opzeggingen vóór 1 juli.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor € 15,00.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Leen Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordrecht, tel. 078-639 08 90
fax 078-6390891
e-mail: lbozuwa@hetnet.nl
of Freek Mahieu, Dommeldal 12
5282 WC Boxtel, tel. 0411-67 34 68

INHOUD

Aan dit nummer werkten verder mee:
Peter Boelens, Peter Boonstra,
Chris van der Heijden, en Albert Ringeling.

Van de redactietafel

[Marja Bos]

Inhoud

Dit dubbeldikke nummer is een special gewijd aan onderzoeksvaardigheden en geïntegreerd wiskundeonderwijs, twee verschillende onderwerpen die in de ogen van de redactie toch prima te combineren waren. Vóórin de special vindt u met name artikelen over onderzoeksvaardigheden, daarna volgen bijdragen over geïntegreerd wiskundeonderwijs. De 'leeswijzer' op bladzijde 127 dient als korte inleiding op het thema.
Naast de thematische bijdragen vindt u in dit nummer uiteraard ook een aantal vaste rubrieken: '40 jaar geleden', zoals altijd weer voortreffelijk verzorgd door Martinus van Hoorn, 'Wiskunde in Vazen' met een verrassende berekening van Rob Bosch voor oud-flippo-verzamelaars, de altijd intrigerende recreatierubriek van Frits Göbel, en op de groene pagina's bestemd voor het 'Verenigingsnieuws' dit keer de jaarrede van voorzitter Marian Kollenveld.
Tot slot beschrijft Roel van Asselt in een interessant discussiestuk zijn zorgen met betrekking tot sommige ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs; hij doet tevens een aantal voorstellen ter verbetering.

Tweede fase

Op het moment dat ik dit stukje schrijf (oudejaarsdag 2002), is nog niet exact bekend wat de voorstellen van het ministerie zullen zijn voor de herinrichting van de Tweede fase havo/vwo, al gonst het van de geruchten – en die zijn niet erg bemoedigend voor het wiskundeonderwijs. Ook andere bètavakken dreigen gemarginaliseerd te worden, als de voortekenen ons niet bedriegen. Een zorgelijk perspectief voor veel van onze toekomstige leerlingen! Maar wie weet viel het uiteindelijk heel erg mee, in de versie die op 9 januari 2003 bekend gemaakt werd?

Op het moment dat u dit leest (eind januari) is inmiddels de mist opgetrokken en mag 'het veld' (wij docenten) reageren op die voorstellen. Het lijkt me goed, inhoud en consequenties van de voorstellen kritisch te bestuderen - en zo nodig massaal (en op korte termijn!) te reageren. Wellicht is bijstelling van de herijkingsplannen op zijn plaats. Maar oordeelt u zelf.

Vmbo-examens

Over een paar maand dienen de eerste landelijke vmbo-examens zich aan. Voor leerlingen èn docenten een spannende tijd! Is de voorbereiding op school en thuis adequaat geweest? Hoe valt de moeilijkheidsgraad in werkelijkheid uit? Kunnen de leerlingen uit de voeten met het taalgebruik in de examens? Ook voor de examenmakers blijft het lastig de mogelijkheden in te schatten van leerlingen onder druk van een formeel examen.
Uit de 'novemberbrieven 2002' citeer ik – hopelijk overbodigheidshalve - het volgende, van belang voor wiskunde BB (basisberoepsgericht):
'Voor wi GL/TL en wi KB is de CEVO-N-term voorgeschreven, zoals dat ook in 2002 en voorgaande jaren het geval was bij wiskunde C en D. Bij wi BB geeft de CEVO een referentie-N-term, maar staat het de school vrij een andere omzetting van score naar cijfer te hanteren. Deze tijdelijke vrijheid voor wi BB betreft alleen het laatste deel van de cijferbepaling. U bent ook bij wi BB wel gebonden aan het met het examen geleverde correctievoorschrift en stelt met de tweede corrector aan de hand hiervan de score vast.'
Zie voor meer informatie http://examenblad.kennisnet.nl

Tot slot

De lezers van Euclides vormen een brede doelgroep, ondanks hun gemeenschappelijke affiniteit met wiskundeonderwijs. Dat maakt het 'uitdagend' (lees ook: 'moeilijk') om een blad te maken dat ieder van u aanspreekt. In dat kader is het voor de redactie prettig om regelmatig feedback van lezers te krijgen, hoe kritisch ook. Welke onderwerpen mist u? Wat krijgt volgens u teveel nadruk? En wat moet beslist blijven? Reacties zijn altijd welkom, bijvoorbeeld per e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

113. Een lineaire afbeelding van een driedimensionale euclidische vectorruimte in zichzelf heeft ten opzichte van een orthonormale basis de matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & 7 \\ -3 & -4 & 7 \\ -3 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal de kern en de beeldruimte van de afbeelding.
b. Beschrijf de afbeelding meetkundig.
c. Bepaal alle in het vlak $x_1 = x_2$ gelegen vectoren die loodrecht op hun beeldvector staan.

114. Ten opzichte van een orthonormaal assenstelsel is gegeven het kwadratisch oppervlak Q met vergelijking

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 6xz + 2yz + 2y + 2z + k = 0,$$

waarin k een reëel getal is.
a. Bepaal de vergelijking van Q op de hoofdassen en de vergelijkingen van de hoofdassen.
b. Bepaal de soort van Q voor alle mogelijke waarden van k.

115. Een eindige groep met een oneven aantal elementen bevat geen element (verschillend van het neutrale element) waarvan het kwadraat gelijk is aan het neutrale element. Bewijs dit.

116. I is een ideaal in een commutatieve ring R. K is de verzameling van alle elementen x van R waarvoor een natuurlijk getal n bestaat zodanig dat $x^n \in I$. Toon aan dat K een ideaal in R is.

117. Gegeven is de functie f, die op $[1, \infty)$ continu en positief is en een continue eerste afgeleide bezit. Als verder gegeven is dat de integraal

$$\int_1^\infty |f'(x)|\,dx$$

convergent is toon dan aan, dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ en de integraal $\int_1^\infty f(x)\,dx$ of beide convergent of beide divergent zijn.

118. Bereken de volgende integralen:

$$\int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0)\,; \quad \int_0^1 \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \; \frac{x\,dx}{\sqrt{1 + x^4}}.$$

Vraagstukken uit het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, jaargang 50 (1962-1963)

De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mail: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).

LEESWIJZER

Ter inleiding op het thema 'Onderzoeksvaardigheden en geïntegreerd wiskundeonderwijs' [Marja Bos]

In het Nederlandse onderwijs verschuift de nadruk de laatste jaren van kennis naar vaardigheden, en van 'geïsoleerde schoolvakken' naar vakoverstijgend en zelfs geïntegreerd onderwijs. Ons jaarlijkse themanummer staat daarom dit keer in het teken van onderzoeksvaardigheden en geïntegreerd wiskundeonderwijs - twee actuele onderwerpen met een aantal onderlinge raakvlakken.

In het wiskundeonderwijs spelen onderzoeksvaardigheden een steeds grotere rol. Denk bijvoorbeeld aan de geïntegreerde wiskundige activiteiten (GWA) die bij de introductie van het leerplan 12-16 en de basisvorming hun intrede deden. Daarnaast zetten docenten hun leerlingen steeds vaker aan het werk met tamelijk open onderzoeksopdrachten, zowel toegepast als wiskundig van aard. Van recenter datum zijn de zogeheten Praktische Opdrachten, het profielwerkstuk en het sectorwerkstuk. Onderzoeksvaardigheden spelen uiteraard ook een grote rol in onderwijsvormen als probleemgestuurd onderwijs, projectonderwijs en case-onderwijs.
Op veel scholen worden onderzoeksvaardigheden wel degelijk *getoetst*, maar de wijze waarop daaraan voorafgaand de leerlingen of studenten deze vaardigheden kunnen *verwerven* krijgt nog niet altijd voldoende aandacht.
Op die onderwijsaanpakken en lange leerlijnen ten behoeve van de verwerving van onderzoeksvaardigheden wordt in dit themanummer ingegaan in bijdragen van Anne van Streun (p.128 èn p.163), Cor Hofstra, Ab van der Roest, Martha Witterholt, Hans Vogelzang en Bert Zwaneveld. Concrete suggesties voor onderzoeksonderwerpen zijn te vinden in bijdragen van Lucie Aarts, Lambert van Stratum, Jos en Léon Tolboom en Gert de Kleuver. Jacques Jansen beschrijft zijn ervaringen als vakinhoudelijk begeleider bij een profielwerkstuk. John Searl en Ruth Forrester houden een pleidooi voor daadwerkelijk *praktische* opdrachten.

In het beroepsonderwijs is wiskunde vooral een ondersteunend middel om praktijkproblemen op te lossen. Op dit moment is in het hbo, mbo en vmbo een trend gaande in een richting waarbij wiskundeonderwijs grotendeels of volledig geïntegreerd wordt binnen de praktijkvakken. Zie voor een beschrijving van die ontwikkeling het artikel van Henk van der Kooij.
Nu is uit onderzoek bekend, dat leren vanuit en/of binnen een context inderdaad bijzonder effectief kan zijn. Zo levert een praktijkprobleem uit een beroepssituatie een natuurlijke leeromgeving op die motiverend en activerend kan werken, ook op het leren van de desbetreffende wiskundeleerstof. Het is dus niet zo vreemd dat het pas aanbieden van wiskundige kennis en vaardigheden op het moment dat deze specifiek nodig zijn ('just in time learning') steeds meer ingang vindt in het beroepsonderwijs. Jan Jelle Claus doet verslag van een dergelijke aanpak van statistiekonderwijs, die zeker geslaagd is te noemen. Douwe Jan Douwes beschrijft een succesvolle werkwijze aan de Hogeschool Drenthe, waarin het onderwijs grotendeels via cases vormgegeven wordt – al wordt ter plekke toch wat meer wiskunde aangeboden dan strikt noodzakelijk is voor de specifieke cases die tijdens de opleiding doorgewerkt moeten worden.
Toch zijn er ook kanttekeningen te plaatsen bij geïntegreerd wiskundeonderwijs. Om een voorbeeld te noemen: Wanneer een algemene wiskundige techniek als een geïsoleerd stukje wiskunde binnen slechts één context verworven wordt, dan is de *transfer* naar andere situaties beslist niet gegarandeerd, en is het maar de vraag in hoeverre de leerlingen echt iets bruikbaars geleerd hebben dat ze ook elders kunnen inzetten. Op dergelijke deels fundamentele didactische bezwaren wordt nader ingegaan door Anne van Streun (p. 128), Bert Zwaneveld, Henk van der Kooij, Adri Treffers en Frans Martens. Henk van der Kooij ziet overigens mogelijkheden in een dubbelslag, waarbij zowel geïntegreerd als 'flankerend' wiskundeonderwijs wordt aangeboden.

De redactie dankt de auteurs van de diverse bijdragen voor hun inbreng, en hoopt met dit nummer een inhoudelijke discussie op gang te brengen ter verdere verbetering van ons wiskundeonderwijs.

Mededeling / Nieuwe ronde WereldWiskundeWeb [Ger Limpens]

Het Wereldwiskunde Fonds, werkgroep van de NVvW, begint op *1 februari 2003* met een nieuwe ronde van het WereldWiskundeWeb.
Het WereldWiskundeWeb is een internetveiling van (wiskunde-)boeken. Deze veiling heeft sinds zijn start in november 2001 meer dan 3000 euro opgebracht, geld dat ten goede komt aan projecten in de derde wereld die gekoppeld zijn aan wiskundeonderwijs op middelbare-school-niveau.
Nieuw bij de veilingronde van 1 februari aanstaande is de mogelijkheid dat nu ook particulieren zelf hun eigen boeken via het WWW kunnen aanbieden.
Het aanbieden van boeken kon tot 1 januari 2003 plaatsvinden.

Meer informatie over het WereldWiskundeWeb is te vinden op *www.nvvw.nl/www/*

Een stuiterend balletje en bètabrede onderzoeksvaardigheden

[Anne van Streun]

Experimenteel en wiskundig

In deze bijdrage aan het themanummer gaat het om de wisselwerking tussen modelvorming en experimenteel onderzoek, waarin bij de interpretatie van de resultaten van wiskundige methoden gebruik wordt gemaakt. Waarschijnlijk is dat ook de meest voorkomende toepassing van wiskunde in de techniek en de natuurwetenschappen. En voor onze leerlingen, vanaf vmbo tot vwo, is dat allicht ook het meest motiverende type onderzoek. In ieder geval is die koppeling van experimenteel en wiskundig onderzoek de natuurlijke ingang voor de ontwikkeling van onderzoeksvaardigheden die in de wiskunde, de techniek en de natuurwetenschappen van groot belang zijn. En passant leidt het zinvol moeten toepassen van wiskundige kennis tegelijk tot een verdieping en versteviging van die kennis.

Vragen formuleren rond een stuiterend balletje

Hier voor mij, op mijn bureau thuis, ligt een stuitballetje dat ik eens heb aangeschaft om een gezelschap onderwijskundigen duidelijk te maken dat het in de wiskunde en natuurwetenschappen niet voornamelijk gaat om het reproduceren van feiten en technieken. Welke vragen kun je jezelf over de eigenschappen van dat balletje stellen, vragen die je door middel van experimenten wilt beantwoorden?
Is het niet zo dat de hoogte exponentieel afneemt met een stuiterfactor k? Dus $h_n = k \cdot h_{n-1}$? En het aantal keren stuiteren zal wel afhangen van de ondergrond. Even proberen. Als ik mijn balletje op 2 meter hoogte loslaat boven de tegelvloer, dan stuit het 30 keer en hier in mijn werkhoek stuit het 15 keer op de houten vloer. Is de ene stuiterfactor nu twee keer zo groot als de andere? Hoe kan ik die stuiterfactor bepalen? Kan ik de afstand die het stuiterballetje in totaal aflegt ook berekenen? Wordt dat in mijn voorbeeld zoiets als de som van een oneindige meetkundige rij: $\sum 2 \cdot k^n$? Hoe zit het met de totale stuitertijd? En wat gebeurt er als ik het type balletje ga variëren, dus een pingpongballetje, een tennisbal enzovoort? Is het wel bevredigend om alleen experimentele gegevens te verzamelen, zonder een verklaring voor de verschijnselen? Er bestaan natuurkundige botsingswetten; wellicht speelt ook bij sommige typen balletjes de wrijving een rol, en kan de scheikunde niet een verklaring geven voor de meer en minder sterke elasticiteit van balletjes? Genoeg vragen om een onderzoeksgroepje weken lang bezig te houden. Maar die vragen zullen ze zelf moeten bedenken, want daar gaat het toch om?

Het experiment

Voordat ik het onderzoek naar stuiterende balletjes aan mijn leerlingen voorleg, wil ik even nagaan of er wel experimenten mogelijk zijn. Hier in mijn werkhoek kom ik niet verder dan het tellen van het aantal keren dat het balletje stuit en dat levert bij benadering de stuiterfactor al op. Na 30 keer stuiteren is de hoogte nog 1 cm, maar dan ga ik uit van een exponentiële afname van de hoogte. Het is mooier om iedere keer de grootste hoogte te meten. Dat moet kunnen met de meetapparatuur op school en misschien kan daar ook wel een computer of grafische rekenmachine aan worden gekoppeld, zodat de tabellen en grafieken onmiddellijk tevoorschijn komen. Anders moet het maar met de hand. De stuitertijd is natuurlijk ook direct te meten. Camiel Janssen (Praedinius Gymnasium, Groningen) maakte voor zijn profielwerkstuk gebruik van de diensten van het Bètasteunpunt van de Rijksuniversiteit Groningen (zie *www.betasteunpunt.rug.nl*). Bij de optische methode nam hij stroboscopische foto's om de maximale hoogte vast te stellen, bij de akoestische methode gebruikte hij een microfoon om de stuiterfrequentie vast te leggen.

Verwerving van de noodzakelijke wiskundige kennis

Met name in het hoger en middelbaar beroepsonderwijs is het mode om het gehele onderwijs op te bouwen rond technische of bedrijfseconomische cases. De studenten storten zich op een probleem of mogelijk onderzoek, zoals ik dat zojuist heb geschetst. Gaandeweg ontdekken zij dan, zo is de theorie, dat zij bepaalde wiskundekennis nodig hebben. Die moet dan op afroep beschikbaar zijn, bijvoorbeeld door een korte snelcursus goniometrie te volgen die de wiskundesectie verzorgt. De wiskunde is dan toegesneden op dat type toepassing waar de studenten mee bezig zijn. Op dat onderwijsmodel is heel wat af te dingen. Freudenthal betoogde eertijds al dat dergelijke toegepaste wiskunde het slechtst toepasbaar is, juist omdat het ontbreekt aan de opbouw van een flexibel en inzichtelijk begrippenapparaat. De wiskunde op afroep is alleen gekoppeld aan dat bepaalde type toepassing, terwijl je wilt dat er transfer van het wiskundig begrip optreedt naar alle mogelijke toepassingsgebieden. Daarover een andere keer meer.
Welke wiskunde is nu op een natuurlijke manier gekoppeld aan de experimenten met de stuiterende balletjes? De experimenten leveren tabellen op, bijvoorbeeld van de maximale hoogte na *n* keer stuiteren. Op het vmbo kan dat aanleiding geven tot het maken van een grafiek en het bedenken van mogelijke formules. Is de afname van de maximale hoogte inderdaad exponentieel? Wat is de stuiterfactor? Hoe varieert die per type balletje? En per ondergrond? Wat doet de stuitertijd, de tijd tussen twee stuiteringen? De basiskennis over formules en grafieken stelt die leerlingen in staat om veel van de onderzoeksvragen empirisch te beantwoorden.
In 6-vwo Natuur & Techniek doe je natuurlijk een verdergaand beroep op wiskundige en natuurkundige kennis. Formules voor de hoogte en de stuitertijden moeten worden afgeleid en de wiskundige kennis over rekenkundige en meetkundige rijen komt zeker van pas. De slotbeschouwing gaat natuurlijk over de relatie tussen de experimentele gegevens en de theoretische verwachting. Leerlingen doorlopen de gehele cyclus van het zelf formuleren van onderzoeksvragen tot en met het interpreteren en theoretisch onderbouwen van de uitkomsten. En passant verdiepen ze hun inzicht in de eerder verworven wiskundige kennis.

De vraagstelling van Camiel Janssen

Camiel Janssen, in 2002 genomineerd voor de jaarlijkse prijs van het Bètasteunpunt in Groningen, stelde zich voor zijn profielwerkstuk de vraag: *Waarom stuitert een balletje niet oneindig door?* (zie [1]) Als er steeds een fractie van de energie verloren gaat bij het stuiteren van een bal, dan moet die bal in principe een oneindig aantal keren stuiteren. U herkent in zijn redenering de bekende paradoxen over oneindig klein en oneindig groot waar de wiskunde 2000 jaar geleden al mee worstelde. Met behulp van de wetten over de botsingsenergie en de wet van behoud van energie komt hij na het nodige wiskundige rekenwerk tot de volgende formule voor de totale stuitertijd:

$$t_{totaal} = t_0(1 + 2\sqrt{k} + 2(\sqrt{k})^2 + 2(\sqrt{k})^3 + \ldots)$$

Toepassing van zijn wiskundige kennis over meetkundige rijen en de formule voor de vrije val leidt dan tot de gezochte uitdrukking voor de totaaltijd:

$$t_{totaal} = \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Bij een beginhoogte van 1 meter komt Camiel tot de in de tabel staande gemeten en berekende hoogten (zie tabel).

	stuiter-factor	totale stuitertijd (berekend)	totale stuitertijd (gemeten)
Golfbal	0,77	6,9	7,0
Pingpongbal (optisch)	0,70	5,1	8,5
Pingpongbal (akoestisch)	0,80	8,1	8,5
Nieuwe tennisbal	0,69	4,9	5,1
Oude tennisbal	0,65	4,2	4,4

Waar gaat het eigenlijk om?

In mijn ogen is dit het type onderzoek of praktische opdracht of profielwerkstuk waar wij in de sector techniek (vmbo) of in de natuurprofielen (havo-vwo) zwaar op moeten inzetten. Het gaat in het technisch en natuurwetenschappelijk vervolgonderwijs altijd om deze combinatie van het zelf formuleren van onderzoeksvragen met het benutten of ontwikkelen van experimentele vaardigheden en de wiskundige typering en argumentatie van de resultaten. Bij dit type opdrachten is er dan ook geen sprake van downloaden van andermans resultaten of van een bulk aan informatie van het internet. Eigen werk, zelf nadenken, bij voorkeur samenwerken in en groepje, experimentele en theoretische resultaten vergelijken en verschillen verklaren.
Wat wil je als leerling of als docent nog meer?

Noot

[1] Belangstellenden kunnen het werkstuk van Camiel Janssen opvragen bij Marijke de Wijs (e-mailadres: M.de.Wijs@fwn.rug.nl).

Over de auteur

Anne van Streun (e-mailadres: A.van.Streun@math.rug.nl) is sinds 1974 werkzaam aan de Rijksuniversiteit Groningen als wiskundedidacticus en sinds 2000 als hoogleraar in de didactiek van de wiskunde en natuurwetenschappen.

KRANTENKNIPSELS EN INTERVIEWS

Twee geïntegreerde wiskundige activiteiten voor de brugklas

[Lucie Aarts]

FIGUUR 1

Weerrapport en –vooruitzichten

	gisteren		vandaag		zaterdag		zondag		maandag	
Nederland	**Weer**	**°C**	**Weer**	**°C**	**Weer**	**°C**	**Weer**	**°C**	**Weer**	**°C**
Amsterdam	buien	18	h.bew.	18	regen	16	buien	16	buien	16
Arnhem	l.bew.	19	h.bew.	19	buien	17	buien	16	buien	16
Enschede	l.bew.	20	l.bew.	19	buien	17	buien	17	onweer	16
Groningen	h.bew.	16	h.bew.	18	h.bew.	17	buien	16	buien	16
Leeuwarden	l.bew.	17	buien	17	buien	15	buien	15	buien	16
Maastricht	l.bew.	20	l.bew.	21	buien	17	buien	17	buien	17
Middelburg	buien	18	h.bew.	18	buien	16	buien	16	buien	16
's-Gravenhage	buien	18	h.bew.	19	buien	16	buien	16	buien	16
's-Hertogenbosch	l.bew.	20	l.bew.	20	buien	17	buien	17	buien	16
Utrecht	buien	19	l.bew.	18	buien	16	buien	16	buien	16
Zwolle	h.bew.	17	h.bew.	18	buien	16	buien	16	buien	16

zaterdag was het in Enschede 17 °C en er waren buien. Op de verticale as staan de steden en op de horizontale as staan de dagen

bron: Volkskrant 28 december 2001

Jan-Willem

euro

half november: 88 eurocent.

de maanden

FIGUUR 2
FIGUUR 2

Inleiding

In mijn les wil ik mijn leerlingen graag bijbrengen dat wiskunde niet alleen beperkt is tot datgene wat ze in vier lesuren per week bij mij in de klas doen. Ik hoop dit voor een deel te bereiken door geïntegreerde wiskundige activiteiten met hen te doen.
Hieronder volgt een beschrijving van twee geïntegreerde wiskundige activiteiten die ik met mijn leerlingen uit de brugklas het afgelopen jaar heb gedaan. Ik sluit af met enkele algemene opmerkingen.

GWA 1

Voor de eerste opdracht namen de leerlingen van thuis een paar kranten mee waarin grafieken, tabellen en staafdiagrammen voorkwamen. Zelf nam ik voor de zekerheid ook nog enkele kranten mee. De leerlingen moesten in één lesuur minstens één tabel, één grafiek en één staafdiagram op een A4-tje plakken (zie figuur 1 en figuur 2). Ze kregen daarbij de opdracht bij elk plaatje te vermelden of het om een tabel, een grafiek of een staafdiagram ging. Verder moesten ze noteren wat er op de horizontale en wat er op de verticale as stond. Tenslotte vroeg ik de leerlingen om één punt uit de tabel, één uit de grafiek en één uit het staafdiagram te vertalen naar de context.
Sommige leerlingen deden uit zichzelf aan bronvermelding.
Ik heb deze opdracht in de klas laten uitvoeren om te voorkomen dat de ouders van de leerlingen zich op de opdracht zouden storten.

GWA 2

De tweede opdracht had ik uit Getal en Ruimte 1 HV 1. Ik liet de leerlingen deze opdracht buiten de les uitvoeren. De leerlingen moesten een interview afnemen met iemand uit hun omgeving (zie figuur 3). Ze moesten de respondent onder andere vragen, of hij of zij wiskunde op school had gehad (en wat voor soort wiskunde dan), en of hij of zij nog steeds wiskunde nodig had bij het uitoefenen van zijn of haar beroep.
Enkele leerlingen deden nogal moeilijk over het afnemen van het interview. Ze beweerden dat ze niemand konden vinden om te interviewen. Ik heb echter keer op keer benadrukt dat het soort beroep er niet toe deed. Enkele beroepen die naar voren kwamen waren: caissière, aannemer, kleuterjuf en architect. Een leuke bijkomstigheid was dat de docente Nederlands van deze brugklas haar les over interviewtechnieken koppelde aan deze opdracht.

Opmerkingen

Bij beide activiteiten heb ik de beoordeling van de resultaten laten meetellen als een SO-cijfer. De leerlingen uit deze klas voelden zich hierdoor uitgedaagd om extra hun best te doen. In het algemeen waren de werkstukjes en interviews van een zeer hoog niveau. Ik vond het interessant om te zien dat sommige leerlingen erg goed omgingen met de eigen verantwoordelijkheid die ze kregen. Er was echter ook een groep leerlingen die vrij veel sturing nodig had. Deze leerlingen waren erg onzeker doordat het eindresultaat niet van tevoren vast lag. (Het goede antwoord op deze vraag is ...) Dit is echter ook bij andere vakken heel vaak het geval.
Hoewel beide opdrachten individueel moesten worden uitgevoerd, mochten de leerlingen elkaar wel helpen. Bij de eerste opdracht met de kranten gebeurde dit ook veelvuldig.

De reacties van de leerlingen waren zeer positief. Het doen van dit soort activiteiten in de les is voor mij daarom zeker voor herhaling vatbaar!

FIGUUR 3

Ik heb mevrouw K De Looze geïnterviewd, zij is kleuterjuf.

Heeft u wiskunde nodig op uw werk? Ja

Kunt u mij daar wat van vertellen? Ik doe reken en wiskunde activiteiten met de kleuters, bijvoorbeeld tellen sorteren en meten.Bovendien moet ik grafieken kunnen maken over de vorderingen van leerlingen (hoofdstuk 4)

Wat voor opleiding heeft u gedaan? Ik heb de Pabo gedaan

Heeft u wiskunde gehad tijdens uw opleiding? Ja ik heb rekenen gehad op alle basisschoolniveaus en de achterliggende principes van hoe je dat aan leerlingen moet leren.

Kunt u een voorbeeld geven van een wiskundeles aan kleuters? "ik laat de kleuters houten speelgoedbeestjes sorteren op waar je het minste of meeste van hebt, zijn er meer, minder of evenveel van die of van die. Zo ook met glazen water voller of leger." Op het laatst laat ik ze de speelgoedbeestjes eerlijk verdelen.

JacoB je

Over de auteur

Ir. Lucie P. Aarts (e-mailadres: lucieaarts@hotmail.com) is docente wiskunde aan het Stanislascollege Westplantsoen in Delft.

Omschrijving:
Veel werk van Escher is van wiskundige aard. Denk maar eens aan de talloze vlakverdelingen en vlakvullingen. Escher werkte met spiegelingen: waterspiegelingen, bolspiegelingen en inversies (spiegelen aan een cirkel). Ook ontwierp hij onmogelijke bouwwerken, spiralen en cirkellimieten. Hij gebruikte bovendien niet-Euclidische meetkunde zoals de hyperbolische meetkunde. Zie bijvoorbeeld Cirkellimiet 3, een houtsnede uit 1959; een afbeelding hiervan is te vinden in het boek 'M.C. Escher: Grafiek en Tekeningen', eerste druk 1959.

Probleemstelling:
Het doorgronden van de wiskunde die met het werk van Escher is verweven.

Voor wie:
Leerlingen met het profiel NG of NT.

Voorkennis:
Er is geen speciale voorkennis vereist.

Wat wordt er van je verwacht?
Een stel opgaven maken over spiegelen aan een cirkel (inversietheorie). Je gaat o.a. een schaakbord binnenstebuiten keren.
Je schrijft een A4-tje over het leven van Escher. Vervolgens ga je de wiskunde verklaren die achter de drie cirkellimieten zit. Daarnaast kun je zelf figuren uitkiezen en de wiskundige kant in begrijpelijke taal uitleggen.
Tenslotte maak je een eigen ontwerp, bijvoorbeeld een vlakvulling of een onmogelijke figuur. Je voorziet deze ontwerpen van een wiskundige toelichting.
Je rondt het werkstuk af met terugblikken, conclusies en vooruitblikken.

Studiemateriaal:
Doctoraalscriptie 'Hyperbolische meetkunde' van J.A. Jansen, eerste hoofdstuk: INVERSIE.

Bronnen:
Tijdschrift Pythagoras, o.a. jaargang 37 nr. 4 (april 1998), jaargang 14 nr. 1 en 2 (1974).
Internet: digitale school (www.digischool.nl)
Talloze boeken over Escher (o.a. 'Grafiek en tekeningen').
Stichting Vierkant voor Wiskunde, Doeboek 17: 'Zelf Escher-achtige vlakvullingen ontwerpen'.
CD-rom: 'Escher interactief. Ontdek de kunst van het oneindige'.
'Wiskunde, wetenschap van patronen en structuren' door Keith Devlin.
'Geometric Pattern from Islamic Art & Architecture', door Robert Field.

FIGUUR 1 Uit: Begeleidingsboekje Profielwerkstuk 'M.C. Escher'

DE LAT TE HOOG GELEGD?

Vakinhoudelijke begeleiding van een profielwerkstuk over de wiskunde in Eschers kunst

[Jacques Jansen]

Doel

Dit artikel gaat over het profielwerkstuk *'M.C. Escher'* van mijn leerlingen Thomas Boeije en Koen Wijffelaars (vwo, profiel Natuur & Techniek), en over mijn begeleidingsactiviteiten daarbij.
De bedoeling van dit artikel is om een stukje ontwikkeling te laten zien, het proces van de totstandkoming van een profielwerkstuk. Daarnaast komt de interactie aan de orde tussen leerlingen en docent. Voor alle drie is het een groot leerproces.
Tenslotte wordt er aandacht besteed aan de inhoud van dit werkstuk. Wat gaat er goed? Wat gaat er mis? Hoe kan het beter? Wat is een begeleidingsboekje? Wat zet je erin?
En natuurlijk laat ik ook iets zien van de resultaten van de leerlingen, niet altijd even perfect, maar wel iets waaraan je kunt zien dat er met veel plezier aan gewerkt is.

Stand van zaken september 2002

Het profielwerkstuk *'M.C. Escher'* is eind januari 2002 afgerond en ingeleverd. Mijn begeleidingsboekje - daar later meer over - kan ik nu bijstellen. Dit nieuwe schooljaar ga ik drie nieuwe tweetallen leerlingen begeleiden bij hun profielwerkstuk, twee uit de havo-top en één tweetal uit het vwo.
Het schrijven van dit artikel dwingt mij, aan het begin van dit nieuwe schooljaar met een uitgeruste geest, terug te denken aan het profielwerkstuk over Escher, de balans op te maken en mijn aanpak voor de toekomst bij te stellen.

Structuur door een begeleidingsboekje

Mijn grote zorg van tevoren was:
'... hoe coach ik de leerlingen zó dat er in hun werk ook sprake is van echte wiskundige activiteiten, en zodat er sprake is van voldoende diepgang in de wiskunde?'
Eén ding was voor mij duidelijk: je kunt leerlingen niet zomaar in het diepe gooien; zo van: zoek het zelf maar uit. Je moet ze een structuur aanbieden, maar wel één die voldoende open is. Deze structuur heb je als begeleider niet zomaar voorhanden. Je kunt hem niet meteen aan de leerlingen aanbieden nadat het onderwerp van het profielwerkstuk is gekozen.
Structuur aanbieden, hoe doe je dat?
Mijn school, het Strabrecht College in Geldrop, heeft een algemeen werkboek 'Profielwerkstukken' voor de leerlingen waarin o.a. zaken staan beschreven zoals het stappenplan, gebruik van logboek, algemene vorm-eisen. Dit werkboek wordt bij alle vakken gebruikt.
Ik kwam op het idee om ook een meer vakinhoudelijk *begeleidingsboekje* te schrijven waarin structuur wordt gegeven (zie figuur 1). De bedoeling van een dergelijk boekje is begeleiding te bieden puur over het wiskundige onderwerp zelf, inclusief bronnen en internetsites.
Een boekje dat bij het aanbieden aan de leerlingen nog niet af is. Een boekje in wording dus, net zoals hun eigen product. Kortom, een tweesporenbeleid.
Op het eind van de rit heb je dan twee producten: het profielwerkstuk van de leerlingen en het begeleidingsboekje van de docent.

Opzet

Met een schuin oog heb ik gekeken naar de opzet van een drietal profielwerkstukken [1] van de TU Eindhoven:
- Foutje? Dat verbeteren we toch!
- Kun je me de kortste weg vertellen?
- Kun je die code kraken?

Hieraan ontleende ik de volgende aandachtspunten:
- Voor wie is het profielwerkstuk bestemd?
- Welke beginkennis heb je nodig?
- Wat wordt er van je verwacht?
- Welk studiemateriaal is beschikbaar?
- Welke sites zijn interessant?

Escher

Thomas en Koen stelden zich aanvankelijk de volgende hoofdvraag: 'Hoe heeft Escher wiskunde in zijn werken toegepast?' Het is duidelijk: het onderzoeksgebied is te breed.
In een eerste gesprek stimuleer ik beide leerlingen, verstandige deelvragen te verzinnen. Het te onderzoeken gebied moet worden afgebakend.
En ik ga zelf ook aan de slag.
Ik vind het nodig dat beide leerlingen zich gaan verdiepen in de *inversietheorie* (spiegelen aan een cirkel). Immers, dit komt voor in *Kubus met banden* en *Hol en bol*. Een van de hoogtepunten van het werk van Escher is *Cirkellimiet 3* waarin sprake is van hyperbolische meetkunde. Deze meetkunde steunt op de inversietheorie. Het ligt dus voor de hand om iets aan inversietheorie te doen om enige werken van Escher beter te kunnen begrijpen en er wat meer gevoel voor te krijgen.
Vandaar de opdracht die ik later aan de leerlingen zal geven: 'Probeer een schaakbord binnenstebuiten te keren.' Dat kan prachtig met het computerprogramma Cabri, zal later blijken. In het eerste gesprek met de leerlingen denk ik daar nog niet aan.

Eerste contact

In het eerste gesprek wisselen we bronnen uit. Thomas en Koen hebben een dik boek over Escher. Ik heb zelf een cd-rom [2] en verschillende artikelen uit het bekende tijdschrift Pythagoras.
In eerste instantie is het begin van het begeleidings-boekje snel geschreven: een eerste opzet en kopietjes van verschillende artikelen uit Pythagoras (zie figuur 2).

Tweede contact

In een tweede contact met Koen en Thomas blijken zij enkele deelvragen geformuleerd te hebben:
- Hoe zag het leven van M.C. Escher eruit?
- Wat voor verschillende werken heeft Escher gemaakt?
- Hoe is een vlakvulling opgebouwd?
- Kunnen we zelf ook vlakvullingen maken?
- Welke technieken heeft Escher gebruikt om zijn tekeningen te maken?
- Zijn er andere kunstenaars geïnspireerd door Escher?

In dit gesprek stimuleer ik met name het beantwoorden van de middelste deelvragen. Daar zitten immers de wiskundige activiteiten. De overige deelvragen zijn leuk, maar in dit kader van minder belang. Ik geef de leerlingen een tiental bladzijden, vol opgaven over inversie, uit mijn doctoraalscriptie van lang geleden. Ik had zelf mijn bedenkingen maar de factor tijd speelde een belangrijke rol.

Derde contact

En jawel hoor: van de opdrachten uit mijn doctoraalscriptie komt niet veel terecht (zie figuur 3). De vragen zijn in te formele taal gesteld. Dat werkt niet in 2002, het is een stukje tekst dat niet meer van deze tijd is. Dit gaat dus mis.
Ik word dus gedwongen om met een andere tekst te komen.
Ik doe dat als volgt.
Ik voeg aan mijn begeleidingsboekje (zoals eerder gezegd een boekje in wording!) een aantal vragen toe uit de twee nummers van Pythagoras (nummers 1 en 2, jaargang 14, 1974; zie ook figuur 2). Die formuleringen zijn nog steeds leesbaar:

OPDRACHTEN BIJ INVERSIE

Opmerking. Enkele vragen kunnen uitgevoerd worden met Cabri.

1. Leg uit wat men onder inversie verstaat.
2. Hoe spiegel je een punt aan een gegeven cirkel? Hoe voer je de constructie uit? Maak gebruik van Cabri.
3. Wat is de inverse figuur van een lijn door het middelpunt van de inversiecirkel?
4. Wat is de inverse figuur van een willekeurige lijn?
5. Wat is de inverse figuur van een raaklijn aan de cirkel?
6. Wat is de inverse figuur van de inversiecirkel zelf?
7. Hoe verhouden zich de middellijnen van de cirkels?
8. Spiegel een schaakbord aan een gegeven cirkel die binnen het schaakbord ligt. Doe dit met behulp van Cabri.

In overleg met je docent bekijk je de omslag van nummer 1 jaargang 14 (zie figuur 4) van het wiskundetijdschrift Pythagoras uit 1974.
De structuur van de figuur op de omslag is nu wel duidelijk. Je krijgt hem door over 'Fig. 2' (in figuur 2) nog eens dezelfde figuur te tekenen, maar dan 90 graden gedraaid.

9. Is het hele schaakbord op de omslag afgebeeld?
10. Is ook de hele inverse figuur van het schaakbord op de omslag weergegeven?
11. Waar vind je de inversen van de hoekpunten van het schaakbord?
12. Waarvan is het witte vlak, in de vorm van een klavertje vier, de afbeelding?

Cabri en Dick Klingens

Mijn beide leerlingen en ikzelf hebben nu inmiddels ervaring met het computerprogramma Cabri. Dit programma heeft ook een optie 'inversie'. Fantastisch. Mijn hoofdvraag voor de leerlingen bij inversie is: 'Hoe spiegel je een schaakbord aan een gegeven cirkel?'
Voordat ik het weet gaan de leerlingen met Cabri aan de slag.

FIGUUR 2
Uit: Pythagoras (jaargang 14, 1974)

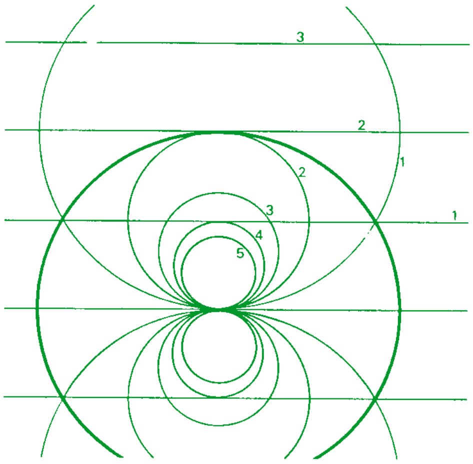
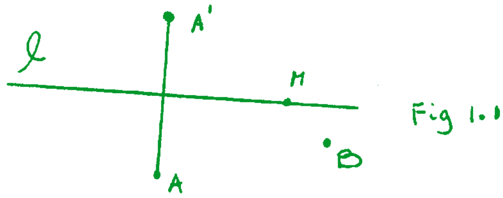


Fig. 2. De cirkels zijn de inverse figuren van de evenwijdige rechten.

In fig. 2 zie je een stel evenwijdige lijnen op onderling gelijke afstanden (hier gelijk aan $\frac{1}{2}r$) en de inverse figuren daarvan. Figuren met hetzelfde getal aangeduid, zijn elkaars inversen.

Deze theorie is ontwikkeld in het begin van de negentiende eeuw. Het eerste uitvoerige onderzoek danken wij aan Liouville (1887).
Wij beschouwen eerst het 'spiegelen aan een lijn'.



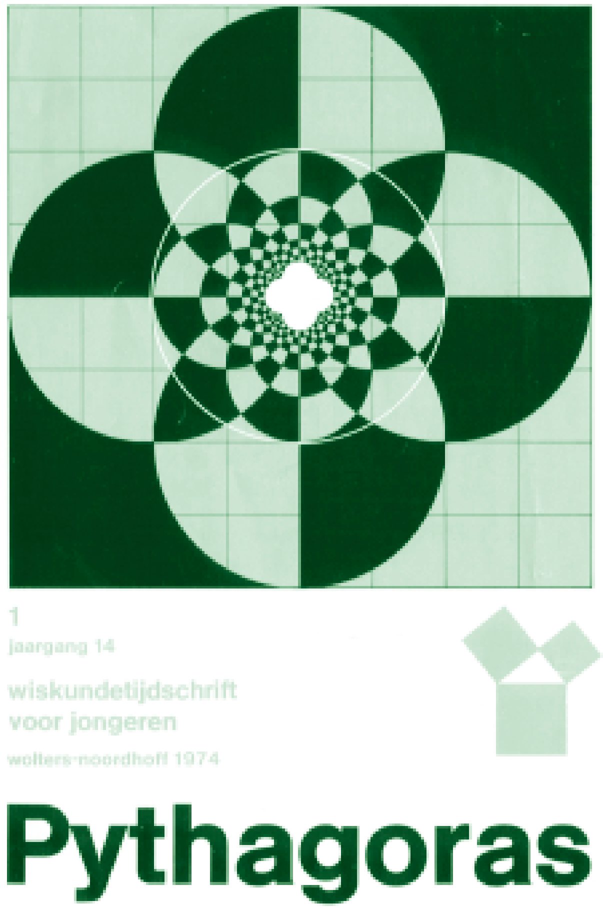
Neem figuur 1.1 over in je schrift. We gaan spiegelen aan de lijn l. A' is het beeldpunt van punt A.
a. Hoe groot is de hoek die l maakt met lijnstuk AA'?
b. Construeer het beeld van B bij spiegeling aan l; noem dit punt B'. Beschrijf nauwkeurig je constructie.
c. M is een punt van l. Wat is het beeldpunt van M bij spiegeling aan l?
d. Noem het snijpunt van l en lijn AB punt Q. Wat is het snijpunt van l en lijn A'B'?
We kunnen het platte vlak beschouwen als de verzameling van zijn punten. Die verzameling noemen we E.
Bij iedere lijn l uit E kunnen we een afbeelding S_l maken van het vlak naar het vlak die aan de volgende voorwaarden voldoet:

Voor elk punt X van het vlak geldt:
l is middelloodlijn van het lijnstuk $XS_l(X)$ als X niet op lijn l ligt
$S_l(X)$ = X als X op lijn l ligt.

We noemen deze afbeelding S_l, 'de spiegeling aan l'.

FIGUUR 3
Uit: Inversie Theorie; Spiegelen aan een lijn

FIGUUR 4
Omslag Pythagoras nummer 1 (jaargang 14, 1974)



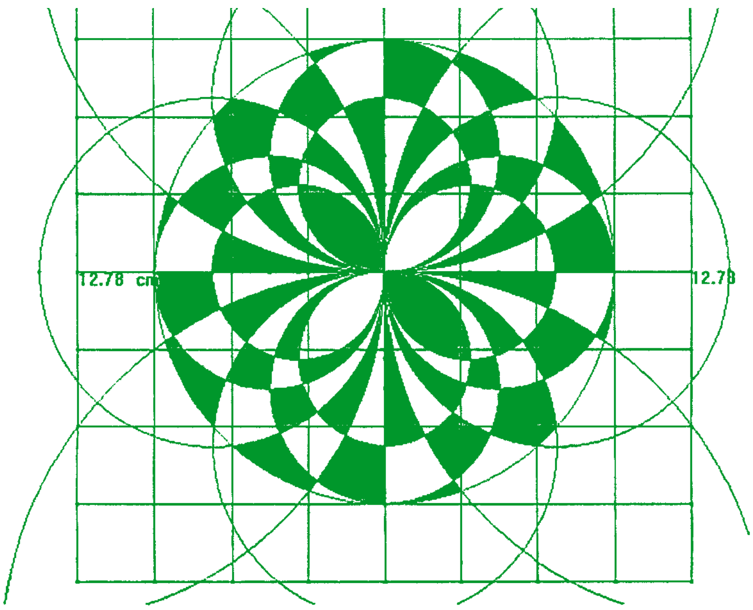
Een aantal dagen later bezoek ik de studiedag van de NVvW (november 2001). Hier volg ik de workshop van Dick Klingens, een schitterende workshop over inversie en het gebruik van Cabri hierbij. Dick deelt in die workshop een set werkbladen uit (zie [3]) waarvan het eerste deel mij zeer geschikt lijkt voor de leerlingen. Ik voeg dat toe aan het begeleidingsboekje in wording. Achteraf hebben de leerlingen er nauwelijks iets mee gedaan. Thomas en Koen waren allang begonnen en waren mij te vlug af.

Vierde contact (per email)

Per e-mail krijg ik verschillende schaakborden (zie de figuren 5 en 6) met het volgende stukje tekst uit hun werkstuk:
Het lijkt op het eerste gezicht misschien erg ingewikkeld om een schaakbord te spiegelen aan een cirkel, maar dit valt reuze mee. Een schaakbord bestaat namelijk alleen uit een serie horizontale en verticale lijnen, en we weten hoe we een lijn kunnen inverteren. Het is dus gewoon een kwestie van een aantal keer de constructie voor een lijn uitvoeren. Dit kan gelukkig vrij snel met behulp van het programma Cabri. Hier zit namelijk al een inversie-functie bij, waardoor je veel sneller constructies kunt maken. Hiermee heb ik (Thomas) zelf ook een schaakbord geïnverteerd, zoals je in figuur 5 kunt zien.
Met de eerste versie was ik echter niet helemaal tevreden, dus heb ik een tweede gemaakt (zie figuur 6) die er naar mijn mening beter uitziet. Bij de tweede versie heb ik de vlakjes in het schaakbord ook ingekleurd, zodat je duidelijker kunt zien welke vlakjes op het schaakbord horen bij de vlakjes binnen de cirkel. We hebben nu dus gezien hoe je een rooster met vierkantjes aan een cirkel kan spiegelen. Nu is het hopelijk wat beter voor te stellen hoe Escher verschillende roosters met de daarop horende figuren aan een cirkel heeft gespiegeld.

Vlakvulling

Belangrijk ook is het hoofdstuk ‘Kunnen we zelf een vlakvulling maken?’ Hieronder opnieuw een stukje werk van de leerlingen:
Nadat wij al deze kennis hadden opgedaan over het maken van vlakvullingen, was het tijd om deze kennis maar eens toe te gaan passen. Ik ging als volgt te werk. Je begint natuurlijk met het kiezen van een rooster. Als beginner in het vullen van vlakken koos ik voor een simpel rooster, bestaande uit vierkanten waar geen draaiingen of moeilijke bewegingen op werden toegepast. Door telkens een stukje uit het vierkant te verslepen, te veranderen of te verschuiven, en deze verandering ook op alle andere vierkanten in het rooster toe te passen, kwam er na een tijdje proberen dit schattige hondje (zie figuur 7) uit, genaamd: ‘Hondje Blaf’. Hoewel ik een vorm heb gevonden die heel vaag op een hondje lijkt, wist ik toen ik aan deze vlakvulling begon nog niet wat het eindresultaat zou worden. Het is namelijk erg moeilijk om snel te zien wat de verschuiving of het weghalen van een vlakje voor invloed heeft op het plaatje. Bij dit geval is het



FIGUUR 5 Schaakbord I

namelijk zo, dat als je een blokje aan de bovenkant toevoegt, dit er aan de onderkant af moet. Hoewel dit erg simpel klinkt, is het toch moeilijk om goed te kunnen voorspellen hoe een vorm eruit gaat zien. Vooral bij complexere roosters, waar bijvoorbeeld draaiingen aan te pas komen, is moeilijk om te voorspellen wat er door je volgende stap allemaal verandert aan de cel. In mijn geval was het dus gewoon een kwestie van proberen, totdat ik in mijn vervormde vierkant een enigszins herkenbare vorm waarnam. Door er oogjes en een neus bij te tekenen lijkt het al iets meer op een hondje. Maar het zou natuurlijk beter zijn, als men er een hondje in zou zien zónder dat ik er dingen bij had hoeven tekenen.

Om eerlijk te zijn, weet ik niet precies wat figuur 8 *voorstelt. Het is, net als het hondje, een probeersel. Hierbij heb ik echter gebruik gemaakt van een andere soort verschuiving als bij 'Hondje Blaf' en heb ik geëxperimenteerd met ronde bogen in plaats van rechte lijnen en hoeken.*
Maar om het een amateur als ik iets makkelijker te maken, bestaat er gelukkig handige software. Op de Escher-CD [2] staat namelijk een leuk programma waarmee je op een makkelijke manier vlakvullingen kunt maken. Hierbij begin je ook telkens met een vierkant, of je kan veranderingen aanbrengen in een al bestaande vlakvulling (wat natuurlijk lang niet zo leuk is). Snel en makkelijk kan je door punten te verslepen het vierkant veranderen in elke vorm die het rooster dat je kiest toelaat. Maar dit staat natuurlijk niet garant voor een mooie vlakvulling. Nog steeds was het voor mij een kwestie van proberen en proberen. Gelukkig gaat dit met behulp van een computerprogramma veel sneller dan met een potlood, en zijn er makkelijker veranderingen aan te brengen in je vlakvulling.
Figuur 9 *gaat uit van hetzelfde rooster als dat van Hondje Blaf, en zoals je misschien wel kan zien, lijkt het eindresultaat ook een beetje op een hondje. Dit ware kunstwerk heb ik daarom 'Schele Hond' genoemd.*

Beide leerlingen experimenteren met complexere roosters, schuifspiegelingen en draaiingen, en komen tot de volgende conclusie:
Nu ik meer inzicht in vlakvullingen heb gekregen en toch enigszins heb geleerd hoe ze zelf te maken zijn, weet ik hoe moeilijk en ingewikkeld het kan zijn om een geslaagde vlakverdeling te maken, waardoor ik zijn werken nu nog meer waardeer dan eerst.

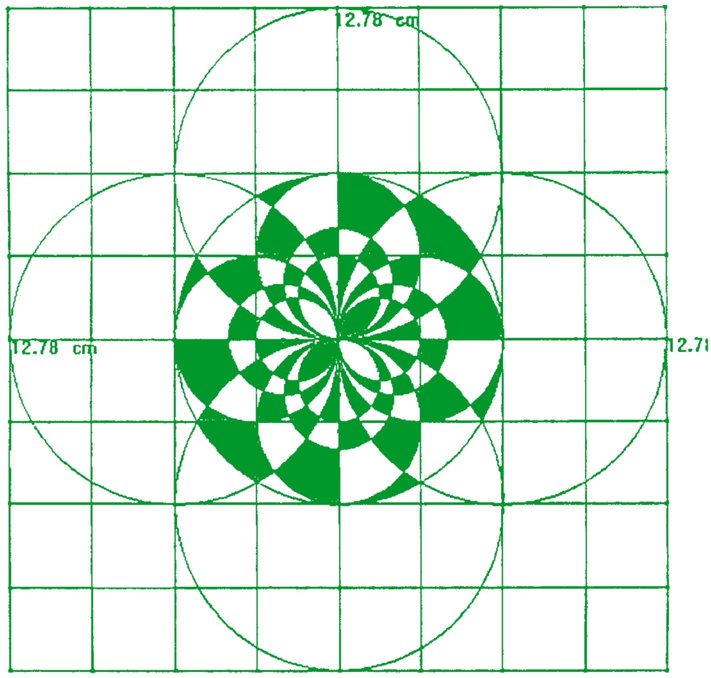
Resterende contacten

Thomas was in 5-vwo gedoubleerd. Koen zie ik in 6-vwo vier keer per week tijdens de contacturen. Er zijn veel tussendoortjes. De afronding vindt plaats in een eindgesprek. Ik ben enthousiast over hun inzet.

De lat te hoog?

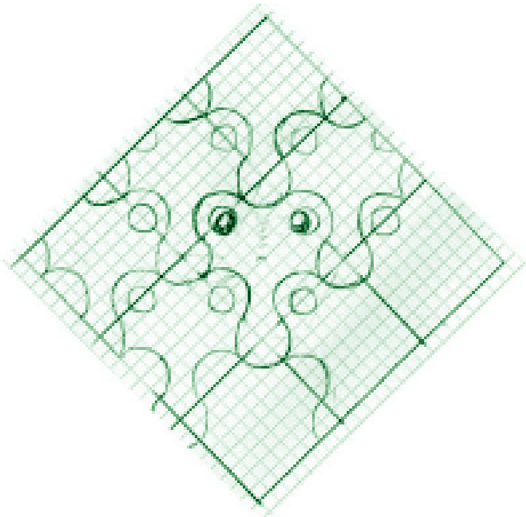
Samengevat kan ik zeggen dat beide leerlingen erin geslaagd zijn, iets te begrijpen van de inversietheorie. Het lukte echter niet om een brug te slaan tussen de inversiewerken van Escher en de inversietheorie zelf.

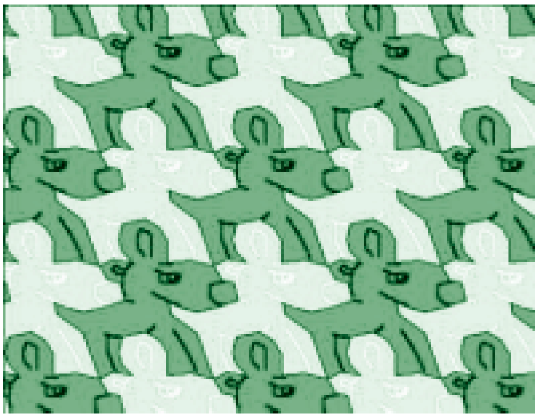
FIGUUR 6 Schaakbord II



FIGUUR 7 Hondje Blaf

FIGUUR 8 ???





FIGUUR 9 Schele Hond

De cirkellimieten, met name Cirkellimiet 3, werden niet door de leerlingen aangepakt. De verklaring van de wiskunde achter deze werken bleef uit. Hier had ik de lat te hoog gelegd.

Wat hebben de leerlingen eraan gehad?

Een stukje uit de conclusie van Koen en Thomas:
Nu we het werk af hebben, kunnen we terugkijken op een mooi werkstuk. Ons begrip voor wat Escher heeft gepresteerd in zijn leven is toegenomen. Hij heeft hele mooie werken gemaakt, en ook minder mooie, zoals zijn eerste vlakvullingen. Hoewel deze wel bijzonder zijn, omdat hij met behulp van deze werken zijn eigen theorie heeft gemaakt.
Van tevoren waren de werken mooi, nu zijn ze erg bijzonder. Bijna elk werk heeft zijn eigen verhaal, waarom Escher het heeft gemaakt. En waarom juist op die manier. Bewondering en respect. Dat is wat we gekregen hebben voor Escher.

Escher blijft actueel

Het begeleidingsboekje ga ik bijstellen en verbeteren voor een volgend tweetal.
Het stukje uit de Volkskrant van augustus 2002 met als kop ‘Leidse wiskundigen sluiten de blinde vlek van Escher’ zal ik er zeker in opnemen. In zijn wereldberoemde prent *De Prentententoonstelling* liet Escher namelijk een witte vlek achter. De getaltheoreticus en cryptoloog Hendrik Lenstra en zijn medewerkers zijn er in geslaagd, de witte vlek naadloos dicht te maken. Zie ook [4].

Terugblik en vooruitblik

Voor mij zijn profielwerkstukken en praktische opdrachten de krenten in de pap. Niet meer in hokjes denken, bruggen slaan, creatief bezig zijn, enzovoorts. Het kan het werkplezier verhogen voor zowel de begeleider als de leerling.
Samenwerking met collega´s is geboden, bijvoorbeeld op het gebied van de bronnen, en om elkaar te inspireren. Belangrijk is dat wij, docenten, onze ervaringen uitwisselen.

Noten

[1] TU Eindhoven: www.osc.tue.nl/profielwinkel/
[2] Cd-ROM ‘Escher interactief. Ontdek de kunst van het oneindige.’ Cordon Art B.V.(1996).
[3] Dick Klingens: Werkbladen Cabri (www.pandd.demon.nl/werkbladen/werkbladen.htm)
[4] Tijdschrift Pythagoras, 42e jaargang, nummer 1 (oktober 2002).

Over de auteur

Jacques Jansen (e-mailadres: Jacques.Jansen@wxs.nl) is als wiskundedocent verbonden aan het Strabrecht College in Geldrop. Vanaf het begin van zijn leraarschap is didactiek van de wiskunde een van zijn belangrijkste aandachtspunten geweest. De heer drs. A.J.Th. Maassen, vakdidacticus aan de KUN, was zijn inspirator.

ONDERZOEKSOPDRACHTEN ONMISBAAR IN MODERN WISKUNDEONDERWIJS

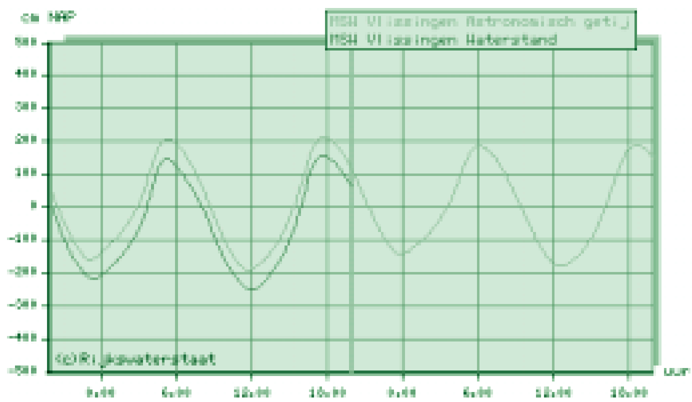
[Cor Hofstra]

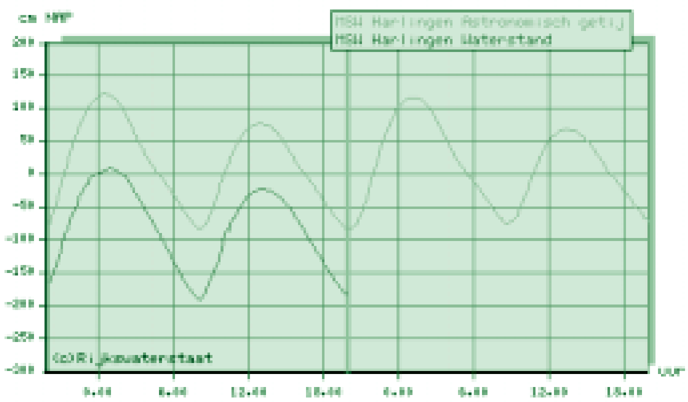
Overbodig of onmisbaar?

In het Nederlandse wiskundeonderwijs is een merkwaardige tegenstelling ontstaan. Aan de ene kant wordt het belang van het onderwijs in de wiskunde onderstreept door de benoeming van een hoogleraar in de didactiek van de wiskunde, aan de andere kant wordt het vak bedreigd door openlijke twijfels aan het nut van onderwijs in een vak waarvan de toepasbaarheid door critici als kunstmatig wordt omschreven. Men zou het vak maar beter kunnen integreren in een algemener vaag omschreven science-achtig curriculum. Opheffen dus.
Nu zullen er in onze kringen weinig supporters zijn voor opheffing van ons mooie vak. Nee, wat wij moeten doen is de nadruk leggen op het onmisbare nut van wiskunde. Daar kunnen de onderzoeksopdrachten een cruciale rol bij spelen, omdat nergens zo duidelijk wordt welke belangrijke rol wiskunde speelt als in situaties waar wiskunde in de praktijk wordt toegepast. Van de leerling wordt steeds meer zelfstandigheid gevraagd, en hoewel wij in de exacte vakken zeker de vinger aan de pols moeten houden, zullen we aan aandacht voor zelfstandigheid niet kunnen ontsnappen.
Juist vanwege die zelfstandigheid kan een onderzoekachtige opdracht een zinvolle verwerking zijn van geleerde theorie of nut hebben voor het vastleggen van bepaalde begrippen.

Kansspelen

Een voorbeeld. Bij kansspelen is de deelnemer natuurlijk geïnteresseerd in de vraag welke kans hij heeft op een prijs. Hoewel het al snel gecompliceerd wordt, zou de leerling een onderzoek kunnen doen naar de kansen bij bekende kansspelen. De leerling kan op het spoor gezet worden met een gerichte opdracht. Bij het kansspel ‘Lucky Day’ wordt een formulier geleverd met daarop de spelregels en de te winnen prijzen. Bij elke prijs staat de kans op die prijs, genoteerd in de vorm 1 op zoveel. Leerlingen kunnen die kansen narekenen. De formulering op het deelnameformulier wijkt echter af van het schoolboekjesjargon. Dus moet de leerling op zijn niveau de link leggen met de geleerde theorie, onderzoeken hoe de schooltheorie hier wordt toegepast. Hier is natuurlijk geen sprake van een uniek zelfstandig onderzoek, maar het is een begin: de leerling leert zichzelf vragen te stellen en verbanden te





leggen die niet zijn voorgekookt in een boekje. Omdat het resultaat direct te controleren is - jouw uitkomsten moeten overeenkomen met die van de folder - heeft de leerling succes, men krijgt de smaak te pakken. In een onderzoeksopdracht zou dit dan ook als eerste, inleidende opdracht opgegeven kunnen worden, waarna de leerling op zoek kan gaan naar eigen voorbeelden hoe het vaasmodel bij andere kansspelen wordt toegepast, of algemener hoe je kansen kunt berekenen bij de bekende loterijen. Zo'n gerichte beginopdracht, die je ook aantreft bij de bekende schoolwedstrijden als de A-lympiade en de Wiskunde B-dag, is essentieel om de leerling te motiveren. Vervolgens kan de hele onderzoeksopdracht leiden tot verdieping of verbreding van het begrip 'kans'.

Waterhoogte

Ander voorbeeld. Op de site *www.waterland.net* is na enig zoeken van vrijwel iedere badplaats een grafiek van de waterhoogte te vinden. Hoewel er niet een keurige goniometrische kromme staat, is elke grafiek wel redelijk te benaderen met zo'n goniometrische kromme en kan men van de leerling een bijbehorende formule vragen, van de hoogte afgezet tegen de tijd. Leerlingen die dat één keer hebben uitgezocht, begrijpen de parameters van de algemene formule beter dan leerlingen die de betekenis uit het hoofd hebben geleerd. Op de grafische rekenmachine kan men controleren of men er dichtbij is gekomen. B-leerlingen kunnen dieper ingaan op de vorm van de oorspronkelijke grafiek. Vervolgens zou men kunnen onderzoeken hoe het verloop is van de maximum-waterhoogte langs de Nederlandse kust.

Aanpak

De kansspelen en de waterhoogte zijn maar twee eenvoudige voorbeeldjes, gebaseerd op de slogan 'Wiskunde is overal'.
Er zijn voldoende opdrachten te vinden, met nauwe aansluiting op de leerstof. Denk ook maar eens aan snelheid van verandering bij beurskoersen. Leerlingen zullen dit als zinvol ervaren, omdat ze een beter inzicht krijgen in de stof die op school is behandeld. Bovendien is de leerling van binnen uit gemotiveerd, omdat er uiteindelijk vragen beantwoord moeten worden die hij zichzelf heeft gesteld. Zo'n aanpak, waarbij eerst een oriënterende gerichte opdracht wordt verstrekt, geeft de leerling houvast. We kunnen van kinderen op deze leeftijd niet verwachten dat ze meteen weten wat er van hen verwacht wordt in een onderzoek, we moeten hen op weg helpen. Daarna kun je, in overleg met de leerling, een onderzoeksvraag formuleren, bijvoorbeeld in de vorm van een hypothese. Leerlingen vinden het leuk zulke opdrachten te maken, zeker wanneer je daarbij de systematische probleemaanpak van Anne van Streun suggereert. Waar gaat het eigenlijk over, wat weet je, wat kun je er mee.

Ruimte voor onderzoeksopdrachten

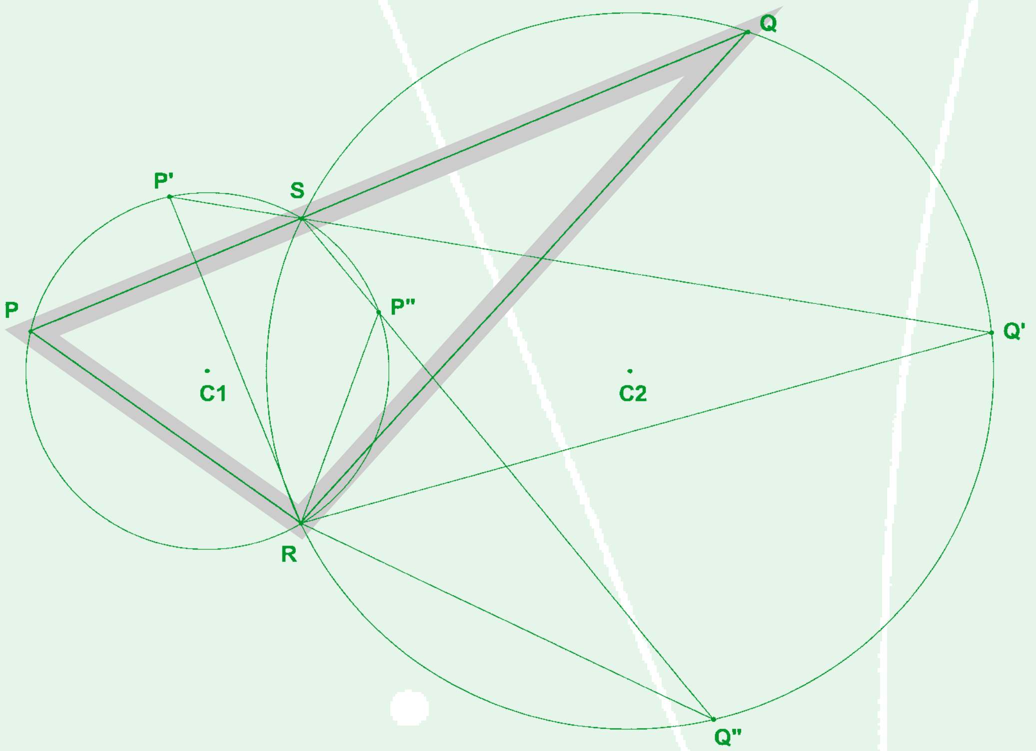
Onderzoeksopdrachten horen een onderdeel te zijn van ons wiskundeonderwijs in de komende jaren.
We moeten niet kiezen voor vrijblijvende algemene onderwerpen, want leerlingen zullen dan de opdracht te veel zien als een losstaande hindernis die ook nog even genomen moet worden; bovendien is de kans op fraude daarbij te groot.
We moeten opdrachten verzinnen die aansluiten op de bestaande theorie en er goed over nadenken hoe we ze aan de leerlingen gaan aanbieden. Het is net ouderwets onderwijs: een goede voorbereiding is het halve werk.

Over de auteur

Cor Hofstra (e-mailadres: c.b.hofstra@home.nl) is docent wiskunde aan OSG Piter Jelles locatie Aldlân te Leeuwarden.

Lucky Day is het dagelijkse kansspel van De Lotto. Lucky Day-spelers maken 6 dagen per week kans op prijzen tot € 2,2 miljoen. Hiervoor moeten ze 10 getallen kiezen tussen 1 en 80. Elke dag worden er 20 getallen getrokken. De hoogte van de prijs is afhankelijk van de inleg en het aantal juiste getallen.

FIGUUR 1 Twee cirkels snijden elkaar in *R* en *S*. Kies *P* op cirkel-1, trek *PS* naar *Q*. Alle driehoeken *PQR* zijn gelijkvormig.



HET DRAAIT OM DE RECHTE VAN EULER

[Lambert van Stratum]

Op zoek naar een geschikte opgave voor het school-examen vwo wiskunde-B12 vond ik in het leerboek waaruit ik zelf eens de vlakke meetkunde heb bestudeerd [1] een opgave die de aanleiding werd voor dit artikel:

Twee cirkels snijden elkaar in A en B. De rechte l door A snijdt de ene cirkel nog in P, de andere nog in Q. Een andere rechte m door A snijdt de ene cirkel nog in R, de andere nog in S. Bewijs dat driehoek PBQ gelijkvormig is met driehoek RBS.

De opgave zelf (zie figuur 1) leek me wel wat voor het schoolexamen en omdat tegenwoordig de meeste vraagstukken vergezeld gaan van tekeningen, werd Cabri ingeschakeld.

Spelend met Cabri ontdekte ik dat de meetkundige plaats van het zwaartepunt van elk van de driehoeken een cirkel opleverde. Het formele bewijs hiervoor is niet ingewikkeld; het is goed te leveren door leerlingen wiskunde-B12. Hetzelfde kan gezegd worden voor de meetkundige plaats van respectievelijk alle snijpunten van de middelloodlijnen en alle hoogtepunten.

De middelpunten van de drie genoemde meetkundige plaatsen blijken op een rechte lijn te liggen, netjes in de verhouding 1 : 2, zoals Euler ons leerde.

Na enig zoekwerk vond ik de driehoek waarvan de gevonden lijn de rechte van Euler is, en als je dat eenmaal weet, is het leveren van bewijzen wel zeer eenvoudig.

Het geheel is nogal omvangrijk geworden en wellicht geschikt voor een praktische opdracht (of zelfs profielwerkstuk). In de aangeboden vorm, als een stripverhaal bestaande uit 10 plaatjes, nodigt elke tekening uit tot een onderzoek met Cabri [2] naar hetgeen in elke figuur wordt beweerd (zie de figuren 2 tot en met 10 op pag. 142 en 143). Daarna zal een bewijs geleverd moeten worden. Ook zal men moeten onderzoeken wat *de rechte van Euler* is; dat begrip behoort immers niet tot de reguliere stof.

Noten

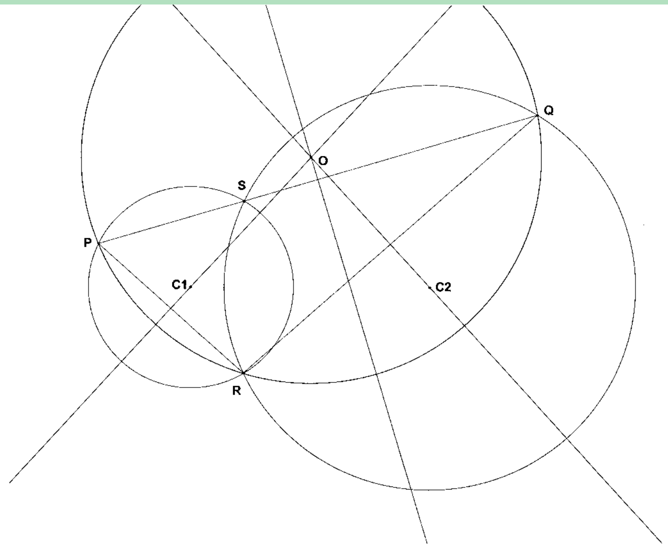
[1] Th.G.D. Stoelinga, M.G. van Tol: Planimetrie, leerboek voor H.B.S., Gymnasium en Lyceum, deel II (zesde druk), Tjeenk Willink (Zwolle, 1959), p.82, opgave 11.

[2] Voor belangstellenden zijn alle Cabri-tekeningen bij deze bijdrage te vinden via de Euclides-pagina van de NVvW-website (of direct via www.nvvw.nl/download/eucl784.zip).

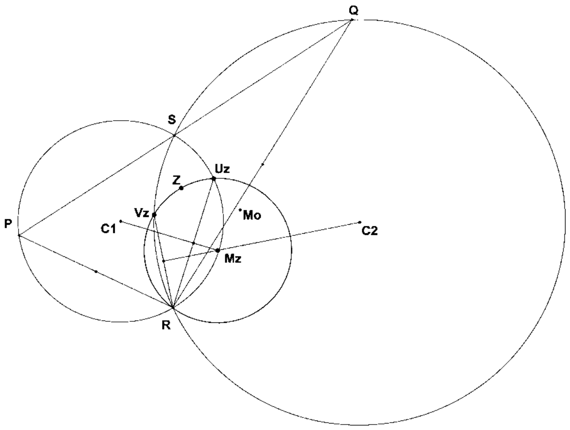
Over de auteur

Lambert van Stratum (e-mailadres: Lvanstratum@planet.nl) is leraar wiskunde aan het Mill-Hill College te Goirle en op de VAVO-afdeling van het Koning Willem I College te 's-Hertogenbosch.

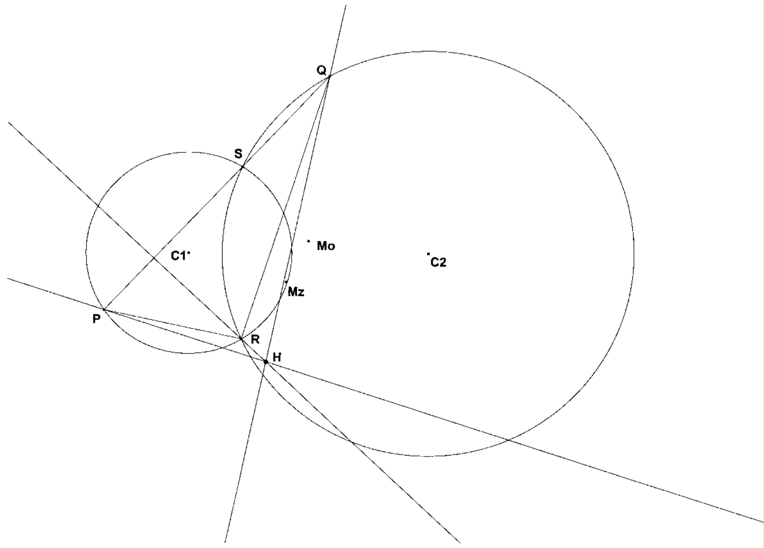
Cabri-stripverhaal



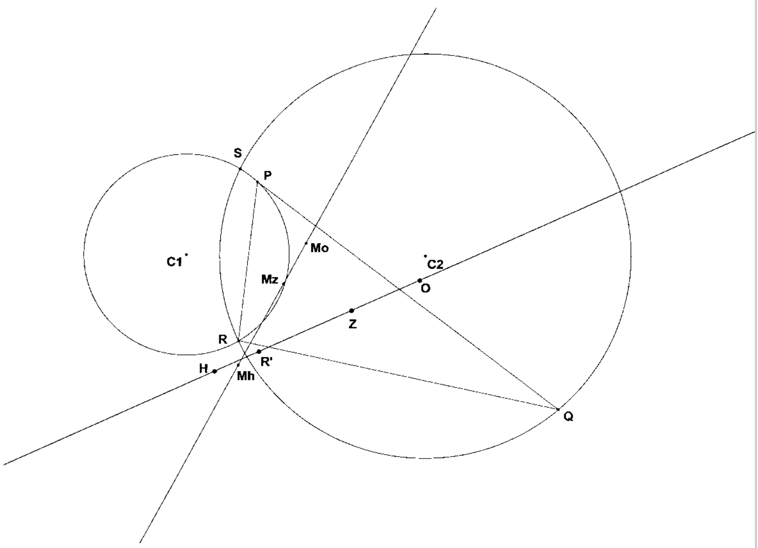
FIGUUR 2 Bekijk van elke driehoek *PQR* het middelpunt *O* van de omgeschreven cirkel.



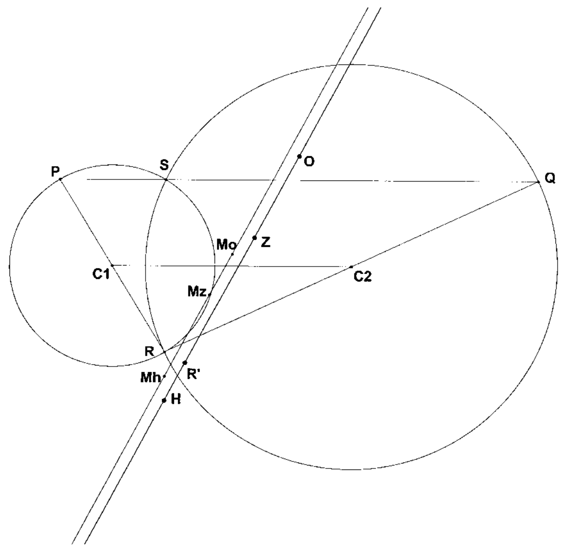
FIGUUR 5 Alle punten *Z* liggen op een cirkel door *R*, met middelpunt M_z. *PZ* snijdt cirkel-1 in een vast punt U_z; *QZ* snijdt cirkel-2 in een vast punt V_z. M_z is het snijpunt van de middelloodlijnen van RU_z en RV_z.



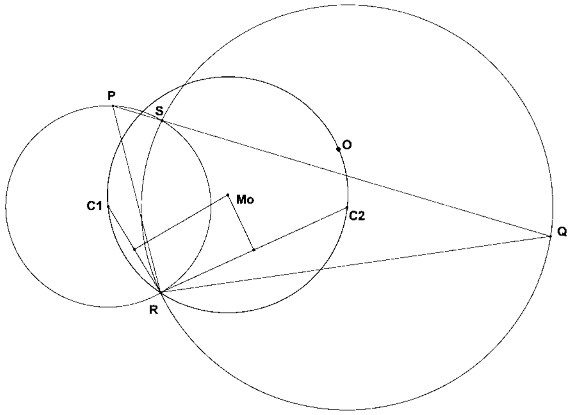
FIGUUR 6 Bekijk van elke driehoek *PQR* het hoogtepunt *H*.

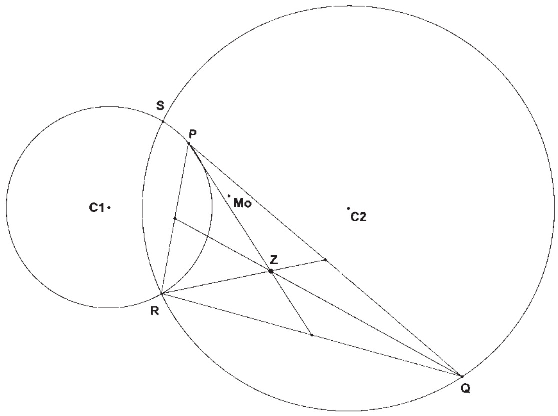


FIGUUR 9 Spiegel *R* in *MoMzMh*: *R'*.
Van elke driehoek *PQR* gaat de Euler-rechte door *R'*.



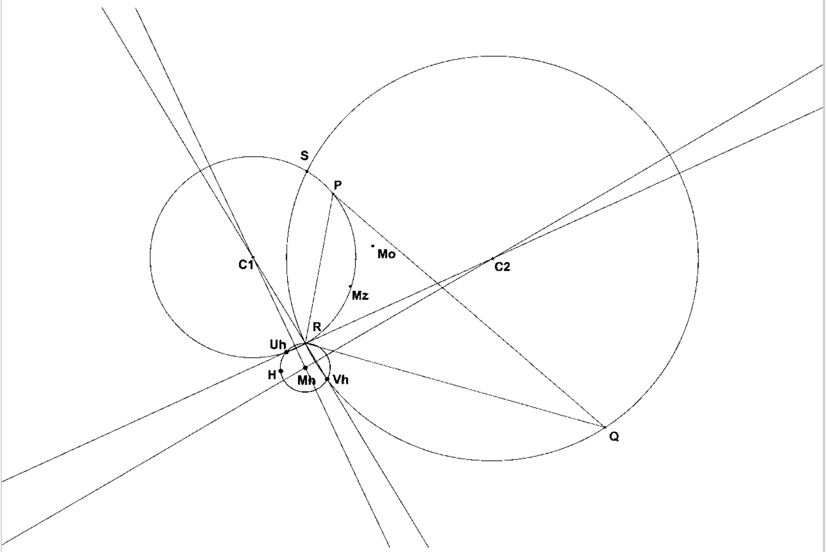
FIGUUR 10 De gevonden lijn $M_oM_zM_h$ is de Euler-rechte van driehoek RC_1C_2.

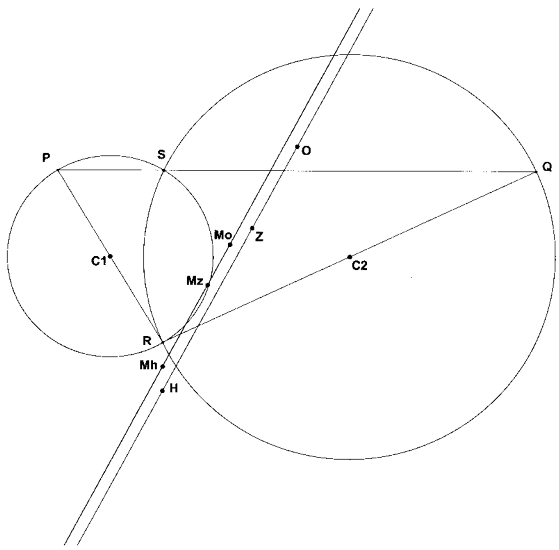




FIGUUR 3 Alle punten O liggen op een cirkel door R, met middelpunt M_o. M_o is het snijpunt van de middelloodlijnen van RC_1 en RC_2.

FIGUUR 4 Bekijk van elke driehoek PQR het zwaartepunt Z.





FIGUUR 7 Alle punten H liggen op een cirkel door R, met middelpunt M_h. RC_1 snijdt cirkel-2 in V_h; RC_2 snijdt cirkel-1 in U_h. M_h is het snijpunt van de middelloodlijnen van RU_h en RV_h.

FIGUUR 8 De punten M_o, M_z en M_h liggen op een rechte lijn. $M_oM_z : M_zM_h = 1 : 2$ (*Euler-rechte*). Driehoek PQR door de punten C_1 en C_2 heeft een Euler-rechte evenwijdig aan lijn $M_oM_zM_h$.

PRAKTISCHE OPDRACHTEN MET STUDYWORKS

Een experiment in de klas met een open en een gesloten praktische opdracht, met inzet van digitaal lesmateriaal

[Ab van der Roest]

Inleiding

Drie jaar heb ik met diverse groepen leerlingen meegewerkt aan het APS-project Digitale Leeromgeving Wiskunde. Dit project is geïnitieerd door het APS; drijvende kracht hierbij is Henk Staal (voor een uitgebreid verslag van dit project verwijs ik naar [1]).
In het kader van dit project verving ik gedeelten uit de methode Getal en Ruimte door digitaal lesmateriaal. Dit materiaal werd gemaakt met behulp van het programma Studyworks. Leerlingen kunnen tijdens het werken aan de computer met dit lesmateriaal gebruik maken van alle wiskundige mogelijkheden van het pakket Studyworks. Wanneer een experiment met het digitale lesmateriaal ten einde was, had ik meestal een ontevreden gevoel vanwege het feit dat er geen follow-up was voor de leerlingen; ze werkten slechts een korte periode met Studyworks. Daarom heb ik dit cursusjaar een follow-up gerealiseerd door leerlingen een praktische opdracht op te geven die verplicht met Studyworks gemaakt moest worden.
Hieronder beschrijf ik hoe dit experiment verlopen is.

Organisatie

De leerlingen maakten eerst kennis met Studyworks, in ongeveer vier lessen. Daarna werkten ze het lespakket 'Differentiëren' door. Dit lespakket verving hoofdstuk 3 uit deel NG/NT1 (differentiequotiënt) en hoofdstuk 1 uit deel NG/NT2 (differentiëren). Dit nam ongeveer 15 lessen in beslag.
Ongeveer een maand later startte de praktische opdracht waarover dit artikel gaat.
Ik had twee opdrachten gemaakt. Met opzet had ik een gesloten en een open opdracht genomen om de resultaten te kunnen vergelijken. De leerlingen werkten in groepjes van twee die ze zelf samenstelden. Elk groepje kreeg één van de twee opdrachten. Welke dat was werd door het toeval bepaald, leerlingen konden dus niet zelf kiezen. Er stonden vier vrijdagmiddagen (12.30-16.00) voorgeschreven waarop het computer-lokaal gereserveerd was. Daarnaast konden de leerlingen in tussenuren of na schooltijd aan de opdracht werken. Dit was echter niet nodig. Ze moesten een logboek bijhouden en het eindverslag digitaal inleveren.

Doelen

Bij een praktische opdracht toetsen we natuurlijk volstrekt andere vaardigheden dan we normaal toetsen. Bij beide opdrachten wilde ik het internet gebruiken om de leerlingen op deze manier te laten merken dat er ontzettend veel wiskunde te vinden is op het world wide web. Door Studyworks te gebruiken wilde ik de leerlingen in staat stellen, gemakkelijk voorbeelden te kunnen narekenen en snel grafieken te kunnen maken. Verder hoopte ik dat ze door veel mogelijkheden te onderzoeken zelfstandig verbanden zouden ontdekken. Een vaardigheid die verder van de leerlingen verlangd werd, was het maken van een verslag met Studyworks waarin tekstverwerker, algebraprogramma en grafiekenprogramma geïntegreerd zijn.

Salvinia

Opdracht 1 noem ik 'Salvinia'. Dit is een gedeelte uit het lespakket Groei. Het gaat over exponentiële groei. Het is een gesloten opdracht waarin de leerlingen eigenlijk sommen maken. Leerlingen konden niet volstaan met het uitwerken van de sommen, maar ze moesten van de uitwerkingen van de opgaven een goed lopend verhaal maken waarin de opgaven zelf niet meer voorkwamen. Bovendien was er een internetopdracht zodat de leerlingen zouden ontdekken dat het beschreven plantje Salvinia werkelijk bestaat en dat de opgaven realistisch waren (zie figuur 1 waarin twee van de opgaven).

Resultaten 'Salvinia'

De resultaten waren goed, dat wil zeggen dat de leerlingen kans hebben gezien de opdrachten zelfstandig uit te werken en dat ze tot goede oplossingen kwamen. Verder was het verrassend dat de leerlingen het programma Studyworks goed beheersten, en gemakkelijk grafieken produceerden en berekeningen lieten uitvoeren. De verslagen zagen er goed uit en de leerlingen hebben het realistische karakter van de opdrachten goed begrepen.

Tweede- en derdegraads functies

Opdracht 2 noem ik het classificeren van tweede- en derdegraads functies. De leerlingen hadden als

voorkennis uit de onderbouw en uit een eerder hoofdstuk dat tweedegraads functies als grafiek altijd een parabool hebben, dat dit een berg- of dalparabool is, en dat de grafiek geen, één of twee snijpunten met de x-as heeft (hoofdstuk 1 paragraaf 1.4 uit deel NG/NT2). Ze hadden ook geleerd dat toppen van een grafiek met behulp van de afgeleide functie te vinden zijn.
Ze moesten nu onderzoeken of er een classificatie mogelijk is bij derdegraads functies net als bij tweedegraads functies. Als internetopdracht moesten de leerlingen de formule van Cardano opzoeken.

In figuur 2 staat de complete opdracht. Deze is aanzienlijk korter dan 'Salvinia', maar juist daardoor werd veel meer eigen inbreng van de leerlingen verondersteld.

Resultaten 'Classificatie'

Ondanks het feit dat de leerlingen eerst weer de tweedegraads functies moesten aanpakken, kwamen ze niet door de opdracht heen. De opdracht was bewust ruim gegeven, zeker ook omdat de leerlingen altijd hulp van mij mogen inroepen. Het vragen om hulp gebeurde weinig. Ik denk dat leerlingen toch een soort angst hebben om vragen te stellen omdat ze bang zijn dat hun cijfer daardoor lager wordt. De internetopdracht was geen groot probleem. Het lastigste was dat de leerlingen Engels moesten lezen. De verslagen die ingeleverd werden waren qua inhoud onvoldoende, maar omdat ook vaardigheden als computergebruik en het maken van het verslag beoordeeld werden kregen de meeste leerlingen toch wel een voldoende voor deze praktische opdracht.

Ervaringen en conclusies

- Het digitaal inleveren gaf problemen omdat de schijfjes niet altijd leesbaar waren of omdat bestanden te groot waren voor een schijfje. De volgende keer zal er dus ruimte op de harde schijf geclaimd moeten worden.
- De leerlingen hebben opvallend weinig hulp gevraagd.
- Een gesloten opdracht biedt garanties op een goed resultaat. Het onbevredigende is dat er geen beroep gedaan wordt op het eigen initiatief van de leerlingen.
- Bij een te open opdracht komen leerlingen niet zelfstandig tot een goed eindresultaat. Het is voor leerlingen heel moeilijk om leerstof toe te passen in een geheel nieuwe situatie. Omdat ze toch weinig vragen, moeten er misschien verplichte tussentijdse besprekingen ingelast worden.
- Voor een volgende keer is het een mooie uitdaging om een goede middenweg te vinden tussen een open en een gesloten praktische opdracht.

FIGUUR 1

Opgave 4

a Bereken met de groeifactor van 1.32 per dag de begroeide oppervlakte na 10 dagen en vergelijk dit met de uitkomst in opgave 1. Je krijgt nu iets meer. Dat komt omdat 1.32 een benadering is van $4^{\frac{1}{5}}$.

b Geef ook een benadering van de groeifactor per dag in 4 cijfers achter de komma.
Zie hiervoor indien nodig de Handleiding Studyworks, hoofdstuk 2.

Opgave 5

Je kunt de groeifactor per dag ook krijgen door $g^5 = 4$ als vergelijking in Studyworks te typen en vervolgens door Studyworks te laten oplossen. Je kunt op die manier zowel een exacte oplossing als een benaderde oplossing krijgen. Voer dit uit. Je krijgt dan ook zogenaamde complexe oplossingen (te herkennen aan i) die je buiten beschouwing kunt laten. Voor een vergelijking moet je de vetgedrukte '=' van het Math Palette gebruiken. Zie voor het exact en benaderd oplossen van vergelijkingen de hoofdstukken 5 en 7 van de Handleiding Studyworks.

Derdegraadsfuncties

De algemene formule voor derdegraads functies is: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
De grafiek heeft altijd één snijpunt met de x-as en soms twee en soms drie. Dit kun je zien aan de grafiek. Eigenlijk zijn er maar zes verschillende grafieken die vervolgens in hoogte (ten opzichte van de x-as) kunnen verschillen.

a Er bestaat een formule waarmee je elke derdegraads vergelijking kunt oplossen. Deze heet de formule van Cardano.
Zoek op het internet deze formule op. Zet de formule in je verslag en vermeld ook de vindplaats.

b Los met behulp van Studyworks de vergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ op.
Hoeveel oplossingen heeft deze vergelijking eigenlijk?

Voor het classificeren van de grafieken is het belangrijk hoeveel toppen de grafiek heeft.

c Ga na - door van een aantal derdegraads functies de grafiek te laten tekenen - hoe je de functies kunt classificeren, en probeer daarbij te vermelden wat de voorwaarden voor a, b, c en d zijn.

FIGUUR 2

Noot

[1] Henk Staal: Project digitale leeromgeving wiskunde, Euclides 76 (5), pp.205-209 (2001)

Over de auteur

Ab van der Roest (e-mailadres: ro@ichthuscollege.nl) is werkzaam aan het Ichthus College te Veenendaal.

LANGE LIJN IN DE ONTWIKKELING VAN ONDERZOEKSVAARDIGHEDEN

Een eerste verkenning aan de hand van een inventarisatie en een case in 3-vmbo [1]

[Martha Witterholt]

Case: lesobservaties in 3-vmbo

Eind 2001 heb ik, ter oriëntatie op wat er nu precies gebeurt in het voortgezet onderwijs aan praktische opdrachten en onderzoekjes, een aantal lessen geobserveerd in een 3-vmbo klas (ik heb ook een dag meegelopen met een aantal leerlingen uit 5-gymnasium; deze observaties komen nu niet aan de orde).

Op 28 november 2001 krijgt klas 3-vmbo de allereerste praktische opdracht voor het vak wiskunde gepresenteerd. De docent deelt een instructie uit op papier (zie figuur 1) en licht deze mondeling toe. De leerlingen werken in groepjes van twee die de vorige les al gemaakt zijn.

Nadat ik me heb voorgesteld aan de groep en uitgelegd wat ik kom doen, namelijk twee groepjes observeren terwijl ze aan de opdracht werken, mag ik twee duo's uitzoeken die wel geobserveerd willen worden. Ja, ik heb duo's voor het uitzoeken: bijna alle leerlingen staken de vinger op! Natascha en Erik worden op de video opgenomen terwijl ik af en toe bij Daniël en Jurgen kom zitten om te kijken hoe ze aan het werk zijn en hoe ze overleggen.

De leerlingen mogen meteen aan de slag met de opdracht, te kiezen uit 'Quetelet' of 'Cirkels' (zie figuur 2 en figuur 3).

Opvallend is dat de meeste leerlingen meteen naar de docent stormen om een gekleurd A4-tje te halen voor de voorkant van het werkstuk. Vervolgens verdelen ze de taken: meestal gaat één leerling met de opdrachten aan de slag, terwijl de andere leerling op het internet een plaatje gaat zoeken en de voorkant gaat maken. Weinig overleg, niks nadenken over de opgave!

Deze leerlingen vinden het leuk om een werkstuk te maken, omdat ze dan samen mogen werken, informatie mogen zoeken op internet, het in de klas niet rustig hoeft te zijn (en het daardoor dus gezelliger is) en ze in het algemeen meer doen dan tijdens een gewone les. De nadelen zijn volgens deze leerlingen dat het maken van een werkstuk veel tijd kost, dat sommige personen meer doen dan anderen, dat de vragen moeilijk zijn en dat je er thuis aan moet werken.

Bij de tweede observatieles mogen Natascha en Erik in een rustig lokaal op de laptop van de docent werken.

Erik besluit dat het ècht belangrijk is om meteen op het internet te gaan zoeken naar een plaatje voor de voorkant. Mijn subtiele hint dat ik graag wil weten hoe ze samenwerken aan een opgave, wordt genegeerd.

Zo gezegd, zo gedaan. Erik gaat zoeken op internet en Natascha gaat verder met het maken van de opgaven. Ze typt de vraag uit het boek over en vervolgens typt ze het antwoord.

Even later zit ik bij Daniël en Jurgen. Jurgen maakt de opgaven op de bijgeleverde werkbladen, Daniël typt de vragen uit het boek over.

Eerst snap ik niet waarom beide tweetallen druk zijn met het overtypen van de vragen. Daarna lees ik in de uitgedeelde opdracht (zie figuur 1):

'*Werk de opdrachten samen uit. Maak daar een nette uitwerking van met de opdrachten erbij, zodat als iemand jouw opdracht leest, hij al meteen weet waar het over gaat*'.

Aha, dat is het dus. In plaats van in het antwoord de vraag te verwerken, wat de bedoeling van de docenten was, typen deze leerlingen gewoon de vraag over. Duidelijker kan immers niet?

Ik: 'Ik wil ontdekken hoe jullie een probleem aanpakken. Sommige groepjes overleggen, anderen verdelen de taken, zoals jullie. Voor mij is het interessant om te zien hoe jullie overleggen.'

Daniël besluit om samen de vragen te gaan maken (voor mij). Met wat hulp van mij, onder andere door te verwijzen naar een voorgaande opgave over het bepalen van het middelpunt van een cirkel, kunnen Jurgen en Daniël anders dan door meten het middelpunt van een willekeurige cirkel bepalen.

Tevreden met het geboren inzicht ga ik terug naar Natascha en Erik. Natascha werkt nog steeds aan de opgaven, terwijl Erik een voorkant op de computer heeft gemaakt. Opnemen had weinig zin vandaag!

Op woensdag 5 december ben ik alweer voor de laatste keer te gast bij Natascha, Erik, Daniël en Jurgen. Aan het einde van deze les moeten de werkstukken worden ingeleverd. Ik heb één korte les gemist, zodat ik even weer moet kijken waar iedereen mee bezig is. Erik zit in het computerlokaal en schrijft het voorwoord. Natascha moet nog twee vragen maken. Zij zit net als de vorige keer in een apart lokaal waar ze de laptop van de docent mag gebruiken.

Onder 'druk' van de docent en mij gaan Erik en Natascha de laatste twee vragen samen maken. Althans, dat is de bedoeling. Erik loopt weg om een

perforator te halen, Natascha typt rustig door. Als we ernaar vragen blijkt Erik niets te weten van de vragen die Natascha al heeft beantwoord.
Intussen is bij Jurgen en Daniël het opslaan gisteren misgegaan. Het voorwoord en de uitleg op de vragen is spoorloos. De antwoorden op de vragen hebben ze nog wel, die staan op de werkbladen.
Natascha en Erik overleggen over de laatste vraag.
Erik leest mee; de eerste keer dat hij bij het beantwoorden van een vraag is betrokken en zodoende wellicht nog iets van het onderwerp meekrijgt!
Jurgen en Daniël zetten het voorwoord op een diskette en doen deze bij de werkbladen voor de docent. Printen kan immers niet meer en bovendien heeft ze een laptop, dan kan ze thuis het voorwoord lezen!
Als ik langskom tekenen Daniël en Jurgen cirkels op de voorkant.
Ik: 'Hoe doen jullie dat nu met de uitleg op de vragen?'
Daniël: 'Zullen we dat er nog maar even bijzetten dan?'
Docent: 'Het is 5 over 9. Over 5 minuten moeten jullie het verslag inleveren.'
Daniël meteen: 'Lever maar in!'
Jurgen: 'Ach ja, de rest van de vragen is ook weer hetzelfde.'
Natascha typt het voorwoord uit. Het werkstuk is klaar om ingeleverd te worden.
Het verslag van Natascha en Erik ziet er verzorgd uit. Op de voorkant prijkt een weegschaal en alle vragen en antwoorden zijn getypt. Ieder A4-tje zit in een plastic mapje, maar de tekeningen die bij de betreffende opdrachten geplakt moeten worden, zijn apart bijgevoegd, dus niet geplakt. Over de samenwerking kunnen we kort zijn; er is amper overlegd. Natascha deed het denkwerk en Erik scharrelde wat plaatjes en andere benodigdheden bij elkaar. Opnames maken van dit groepje, maar waarschijnlijk ook van elk ander groepje uit deze klas, heeft weinig zin gehad.
Het verslag van Daniël en Jurgen is een ander verhaal. De voorkant heeft duidelijk met het onderwerp te maken, al vallen de met potlood getekende cirkels een beetje in het niet op de roze ondergrond. Na de inhoud vinden we meteen de slordige werkbladen met de uitleg tot en met opgave 2 (deze hebben we nog samen gemaakt, zie eerder in de tekst). Daarna vinden we een overzicht van de opgaven, die Daniël heeft uitgetypt maar niet voorzien heeft van de antwoorden. De diskette is bijgevoegd voor de docent, zodat ze het voorwoord kan lezen. Op mijn verzoek wilden Daniël en Jurgen best samenwerken, maar als ik weg was, gingen ze beiden weer hun eigen gang. Als ik erbij zat en vragen stelde, ging het samenwerken overigens prima en kwamen ze op goede ideeën.
Op het gebied van samenwerken en verslaglegging moeten deze leerlingen nog veel leren. Wellicht moet je daar als docent ook veel aandacht aan besteden. Niet alleen de opdracht beschrijven, maar ook aangeven wat je bedoelt en de groepjes hun (gezamenlijke) activiteiten (tussentijds) laten rapporteren blijkt nodig.

FIGUUR 1

Praktische Opdracht Wiskunde

Je kunt kiezen uit twee opdrachten: *Quetelet* of *Cirkels*.
Beide opdrachten staan in het boek.
Je maakt samen met een medeleerling deze opdracht; jullie krijgen samen een cijfer.
Dit cijfer telt mee als een toets, dus doe je best ervoor!!!

Je levert de opdracht uiterlijk in op woensdag 5 december 2001 (3MA) en op vrijdag 7 december (3MB).

We gaan ook letten op de inhoud, uiterlijke verzorging. Dat betekent dat de voorkant past bij je onderwerp. Je moet het werk zo maken dat wij het kunnen begrijpen zonder dat we weten wat de opdracht is (zie punt 4). Bedenk een leuke manier, niet alleen antwoord met antwoord!!
In de inleiding (zie punt 6) vertel je bijvoorbeeld al kort over de opdracht, je vertelt daar ook wat je ervan vond.
Je mag alles op de computer uitwerken, maar je mag het ook (leesbaar) schrijven.

Wat moet je doen?
1. Maak een tweetal.
2. Ga overleggen welke opdracht je gaat doen.
3. Werk de opdrachten samen uit.
4. Maak daar een nette uitwerking van met de opdrachten erbij, zodat als iemand jouw opdracht leest, hij al meteen weet waar het over gaat.
5. Zoek eventueel een aantal leuke plaatjes die je erbij kunt plakken.
6. Maak een inleiding, waarin je in het kort uitlegt wat de opdracht inhoudt en wat je ervan vond.
7. En als laatste, maak je een mooie voorkant, waarop de namen van de makers vermeld staan.

Je krijgt van je docent een kopie van de plaatjes, zodat je ook alle tekeningen die je moet maken, erbij kunt plakken. Maak je er zelf eventueel nog een aantal bij. En je krijgt een gekleurd blad voor de voorkant.

Succes ermee.

Introductie en de plaats van onderzoeksvaardigheden

Uit eigen onderzoek op een tiental grote scholengemeenschappen in het noorden van Nederland in de zomer van 2001 bleek dat op geen enkele school voor het vak wiskunde een plan klaar ligt rondom het uitvoeren van praktische opdrachten, laat staan dat er een programma bestaat voor het ontwikkelen van onderzoeksvaardigheden bij leerlingen. Bovendien bleek dat naast het 'kennismaken met het uitvoeren van een praktische opdracht' eigenlijk amper doelen worden geformuleerd door docenten rond het maken van praktische opdrachten. Het lijkt alsof 'het is nu eenmaal verplicht, ze moeten het gedaan hebben' de eerste en enige reden is voor het reserveren van tijd (liever nog buiten de les dan erin) voor het maken van een praktische opdracht. Bovendien geven de betrokken docenten aan, de tijd hard nodig te hebben voor het bespreken van de 'reguliere' leerstof.
Conceptueel is het dus vaak onduidelijk wat onderzoeksvaardigheden precies zijn en hoe daar systematisch in de verschillende leerjaren aandacht aan kan worden besteed. Bovendien varieert de uitvoering van dit type activiteit sterk met de persoonlijke opvattingen van de docent of de wiskundesectie.
In het kader van dit onderzoekstraject wordt onder andere gestreefd naar het ontwerpen van opdrachten die als prototype kunnen dienen voor de onderwijspraktijk.

Typen kennis bij de leerlingen van klas 3-vmbo

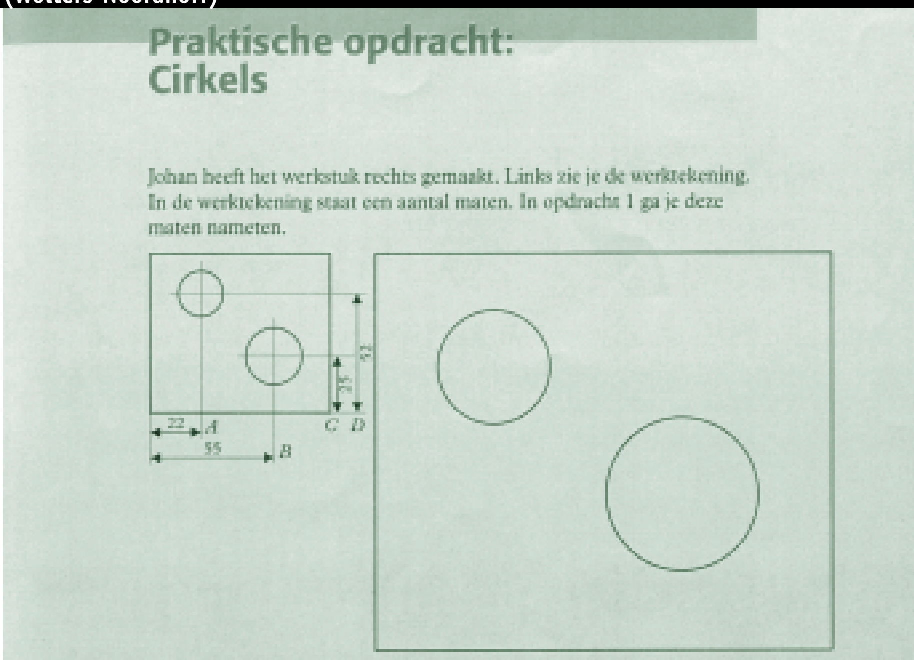
In zijn oratie heeft Van Streun onderscheid gemaakt tussen verschillende typen kennis [2], namelijk *Weten dat* (feitenkennis), *Weten hoe* (probleemaanpak en onderzoeksvaardigheden), *Weten waarom* (principes, abstracties, overzicht, cognitieve schema's) en *Weten over weten* (reflecteren, monitoren).
In deze paragraaf bekijken we hoe het met de leerlingen in klas 3-vmbo is gesteld voor wat betreft deze typen kennis.
Zoals al eerder opgemerkt was deze opdracht de eerste praktische opdracht voor wiskunde voor deze leerlingen. Dit is natuurlijk van invloed op de samenwerking tussen leerlingen. Samenwerken moeten ze leren en het is bovendien meer dan alleen het verdelen van taken (samenwerkingsvaardigheden, *Weten hoe)*. Je moet weten van elkaar wat je doet en je moet je groepsgenoot bijpraten als dat nodig is. Bij de leerlingen in 3-vmbo had ieder een eigen taak en wist bijvoorbeeld Erik niet wat Natascha aan het doen was. Jammer, want leerlingen kunnen elkaar zoveel leren. Misschien is het goed om leerlingen een logboek van activiteiten bij te laten houden. In dit logboek kan de docent aangeven wat belangrijk is, bijvoorbeeld momenten van overleg tussen groepsleden, informatie van internet scannen op geschiktheid en rapportage bij de docent. De docent kan de leerlingen dan aansporen tot nadenken en overdenken (monitoren, *Weten over weten*).

Bij de door de docent aangedragen onderwerpen speelde feitenkennis een minder belangrijke rol. Voor wat betreft het onderwerp over cirkels was wel wat inzicht nodig. Jurgen en Daniël zijn door middel van de gekozen probleemaanpak (van een specifiek voorbeeld naar een willekeurige cirkel, *Weten hoe*) verder gekomen in het abstraheren (*Weten waarom*), zodat ze het middelpunt van een willekeurige cirkel konden bepalen. Tenslotte wil je graag dat leerlingen iets van een opdracht leren, zodat ze het een volgende keer anders, beter zelfs, zullen doen. Hiervoor moet een leerling aan het einde van een opdracht nadenken over hoe het oplossen van een probleem is gegaan, hoe hij tot de oplossing is gekomen en wat hij de volgende keer anders zou doen (reflectie, *Weten over weten*). Op het moment dat de docent aangeeft dat het verslag over 5 minuten ingeleverd moet worden, zegt Daniël meteen: '*Lever maar in*'. Even overdenken zat er niet meer in.

Vervolgonderzoek

De volgende vragen lijken voor ons vervolgonderzoek relevant:
1. In hoeverre slagen leerlingen er in om hun wiskundige kennis (*Weten dat*) te benutten voor het aanpakken van hun onderzoeksopdracht?
2. In hoeverre ontwikkelt zich in de loop der tijd bij de leerlingen een systematische onderzoeksaanpak (*Weten hoe*)?

Figuur 2 Uit: Netwerk, 3 mavo/vmbo (k)gt, p.101 (Wolters-Noordhoff)


Praktische opdracht:
Cirkels

Johan heeft het werkstuk rechts gemaakt. Links zie je de werktekening. In de werktekening staat een aantal maten. In opdracht 1 ga je deze maten nameten.

3. Welke positieve en/of negatieve effecten hebben de verschillende vormen van hulp en voorstructurering van een opdracht (niveaus van *Weten hoe*)?
4. Wat zijn de effecten van de verplichting om over het eigen denken en samenwerken (*Weten over weten*) te rapporteren in een eindverslag?
5. Wat is een bruikbare hiërarchische structuur van de expliciet te formuleren onderzoeksvaardigheden?

Voor het verkrijgen van wetenschappelijke kennis over de geschetste problematiek ontwerpen we in eerste instantie kleinschalige onderwijsexperimenten, waarin de verschillende onderzoeksopdrachten systematisch op een aantal variabelen worden gevarieerd. Door middel van een aantal startopdrachten brengen we de beheersing van de genoemde vaardigheden in kaart, waarna leerlingen door middel van opdrachten hun onderzoeksvaardigheden moeten ontwikkelen. Die vaardigheden moeten ook voor de leerlingen expliciet worden geformuleerd en door middel van reflectie op het eigen werk worden verankerd. Uit vervolgopdrachten moet blijken of hun werkwijze in de loop van enkele jaren is verbeterd.

Noten

[1] Met dank aan Jan Folkert Deinum (RuG, UCLO) voor assistentie bij de verwerking van de vragenlijsten en dank aan de medewerkende leraren Fenna de Groot, Wout de Goede en Afiena de Boer.
Een samen met Anne van Streun geschreven uitgebreide versie van dit artikel is te vinden in: J.F. Deinum, e.a.: Werken aan de kwaliteit van onderwijs in de bètavakken, Bètawerkgroep UCLO (RuG, 2002).
[2] Zie ook A. van Streun: Heit en Kees, in Euclides 77-8 (2001), en A. van Streun: Het denken bevorderen, rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar in de Didactiek van de Wiskunde en de Natuurwetenschappen (RuG, 2001).

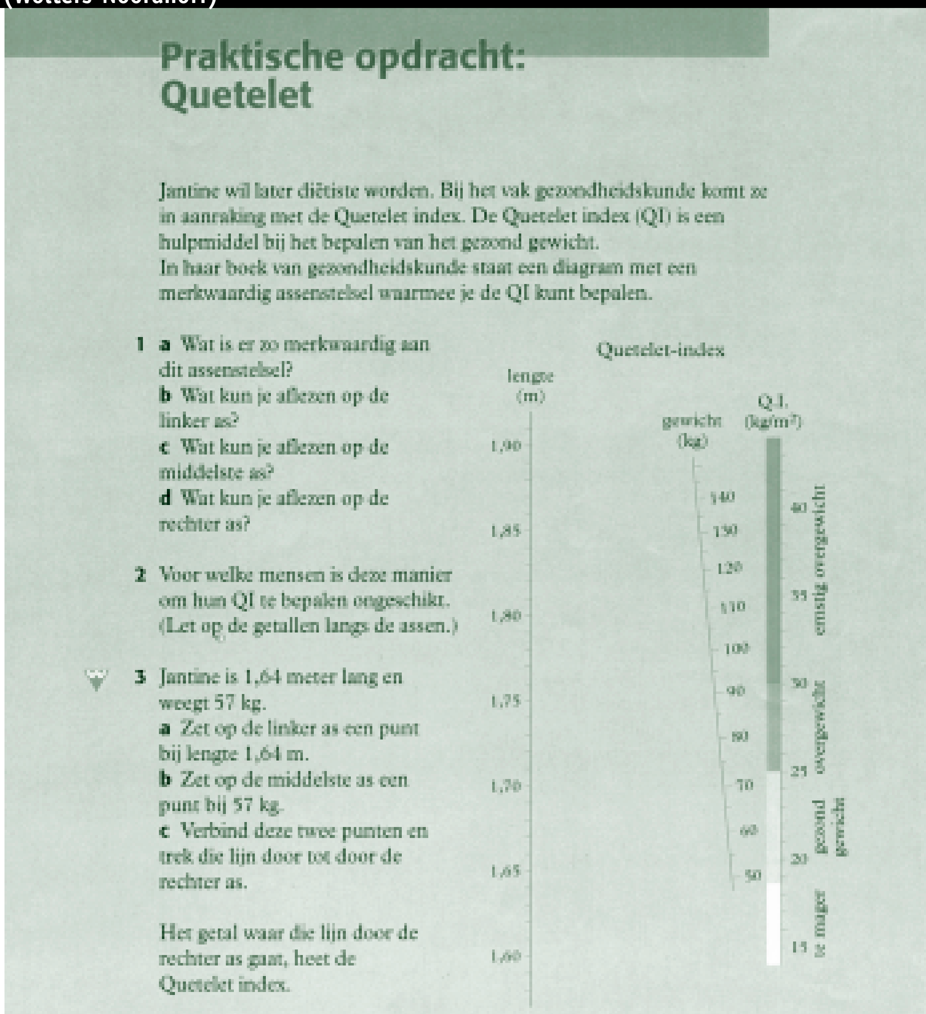
Literatuur

- D.C. Edelson: Realising Authentic Science learning through the Adaptation of Scientific Practice, in: B.J. Fraser, T.G. Tobin (eds.): International Handbook of Science Education, Kluwer Academic Publishers (1998).
- National Research Council: National Science Education Standards, National Academy Press (Washington, 1995).
- G. Polya: How to solve it, Princeton (1946).
- L.W. Anderson, D.R. Krathwol: A Taxonomy for Learning, Teaching and Assessing, Longman (New York, 2000).

Over de auteur

Martha Witterholt (e-mailadres: m.g.witterholt@math.rug.nl) is sinds 1995 werkzaam aan de Rijksuniversiteit Groningen, eerst alleen als docent in de pre- en postdoctorale lerarenopleiding wiskunde, maar sinds 2000 ook als onderzoeker.

FIGUUR 3 Uit: Netwerk, 3 mavo/vmbo (k)gt, p.53 (Wolters-Noordhoff)



Praktische opdracht: Quetelet

Jantine wil later diëtiste worden. Bij het vak gezondheidskunde komt ze in aanraking met de Quetelet index. De Quetelet index (QI) is een hulpmiddel bij het bepalen van het gezond gewicht.
In haar boek van gezondheidskunde staat een diagram met een merkwaardig assenstelsel waarmee je de QI kunt bepalen.

1 a Wat is er zo merkwaardig aan dit assenstelsel?
b Wat kun je aflezen op de linker as?
c Wat kun je aflezen op de middelste as?
d Wat kun je aflezen op de rechter as?

2 Voor welke mensen is deze manier om hun QI te bepalen ongeschikt. (Let op de getallen langs de assen.)

3 Jantine is 1,64 meter lang en weegt 57 kg.
a Zet op de linker as een punt bij lengte 1,64 m.
b Zet op de middelste as een punt bij 57 kg.
c Verbind deze twee punten en trek die lijn door tot door de rechter as.

Het getal waar die lijn door de rechter as gaat, heet de Quetelet index.

PRAKTISCHE OPDRACHTEN, PROFIELWERKSTUK EN HET WEB

[Jos Tolboom en Léon Tolboom]

Inleiding

Sinds de invoering van de Tweede Fase in het voortgezet onderwijs in 1998 is het leren en het lesgeven behoorlijk veranderd. In het schoolexamen zitten meer dan ooit opdrachten die niet alleen een beroep doen op de kennis van de leerling in een bepaald vakgebied, maar ook op bepaalde vaardigheden (zowel in algemeen als vakspecifiek gebied) en op een actievere onderzoekende houding. Vroeger had een leerling voor het vak wiskunde een boek, een schrift en een docent (in willekeurige volgorde). Dat heeft hij tegenwoordig nog steeds, maar daarnaast is een - vaak - uitgebreide mediatheek gekomen en is er vakspecifieke software (voor het vak wiskunde bijvoorbeeld Cabri, ORStat2000, Geocadabra, Vu-Grafiek, Vu-Stat, Dynasys, enzovoorts). Bovendien is er het world wide web, waarop een schat aan informatie te vinden is wanneer men goed zoekt.

In het schoolexamen zitten tegenwoordig praktische opdrachten. De wiskundemethoden doen suggesties voor onderwerpen die leerlingen daarvoor kunnen bestuderen en bijpassende onderzoeksvragen. Om het gevaar van recyclen van uitgewerkte opdrachten tegen te gaan en om de eigen geest en die van de leerlingen fris te houden kan het raadzaam zijn het web te gebruiken als bron van materiaal voor PO's. Daarnaast biedt het web behoorlijke mogelijkheden voor het kiezen van een geschikt profielwerkstuk.
Onder het motto 'Een docent heeft nooit genoeg goede opdrachten' wordt in dit artikel ingegaan op de diensten die enkele websites bieden op bovenstaand gebied.

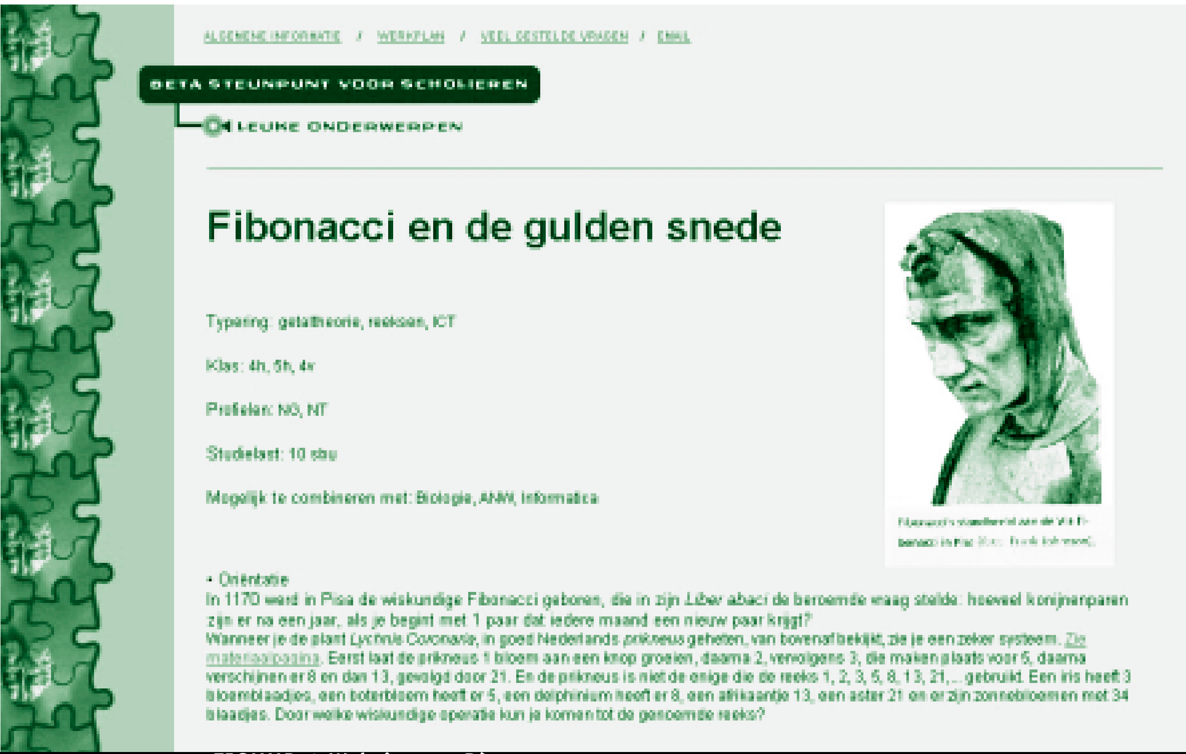
Het web, wiskunde en PO's

Het vak wiskunde heeft in het onderwijs bij lange na niet zo'n rijke traditie als het gaat om het doen van zelfstandig onderzoek als de natuurwetenschappelijke vakken. Het begrip EXO (examenopdracht waarin zelfstandig een (praktisch) onderzoek gedaan moest worden) bestond al lang voordat er zelfs maar sprake was van de Tweede Fase. Bij het invoeren van praktische opdrachten is er op het web wel materiaal verschenen waarmee leerling en docent in het vak wiskunde hun voordeel kunnen doen.
Uitputtend zijn is in het geval van het web onmogelijk, maar de adressen van een aantal interessante sites hiervoor zijn:

- *www.phys.uu.nl/~wwwnatdc/lokaal/lokaal.html#exo*
- *www.profielwerkstuk.net/helpdesk/vragenformulier.html*
- *www.few.vu.nl/voorlichting/aanstaande/exoform-nl.html*
- *http://www-exo.sci.kun.nl/*
- *www.osc.tue.nl/profielwinkel/Default.htm*
- *www.wisfaq.nl*
- *www.betasteunpunt.rug.nl*

De meeste van deze sites bieden daarnaast ook 'helpdesking': een leerling met een probleem op het gebied van wiskunde of natuurwetenschappelijk vak kan dat via e-mail of een web-formulier voorleggen aan een expert op het betreffende gebied. Deze problemen hoeven dus niet perse te zijn gerezen tijdens een praktische opdracht, maar ook tijdens bijvoorbeeld een profielwerkstuk of een huiswerk-opdracht. De bewuste expert is uiteraard zo getraind dat hij of zij niet zomaar antwoorden gaat geven, maar een onderwijsleergesprek met de betreffende leerling probeert op te bouwen. De docent op school zal dus het proces van de leerling goed moeten volgen, zodat er geen vertroebeld beeld ontstaat van de geleverde prestatie.

In dit artikel beperken we ons tot de sites die concreet, in feite kant en klaar lesmateriaal bieden. Daarnaast



FIGUUR 1 Website van Bètasteunpunt voor scholieren

zijn er talloze goede sites met software, ideeën, applets enzovoorts.
Alle bovenstaande sites bieden goed materiaal; wij bespreken die laatste site uitgebreider, omdat wij als bouwers van opzet en detail goed op de hoogte zijn.

Op de homepage van het Bètasteunpunt (zie figuur 1) staat een aantal links; kies 'Leuke onderwerpen' en daarna 'Wiskunde'. Vanaf deze pagina kan een keus gemaakt worden uit op dit moment een veertigtal opgaven, die allemaal volgens een vast format zijn opgebouwd:
<titel>
<leerstof>
<profielen>
<aantal slu>
<mogelijk te combineren met>
<oriëntatie>
<probleemstelling>
<probleemverkenning>
<plan van aanpak en eindprodukt>

Wanneer het onderwerp zich daarvoor leent, zit achter de eerste pagina per opdracht een 'materiaal-pagina' waarop extra achtergrondinformatie is verzameld, nog meer relevante websites, een java-applet of java-script waarmee met het onderwerp kan worden geëxperimenteerd. De gevolgde didactiek is die van het halffabrikaat: met de gepresenteerde informatie wordt een leerling op weg geholpen bij de beeldvorming van een probleem en bij de mogelijke oplossingwijzen. De bedoeling is uiteraard dat een leerling zelf tot activiteiten komt. Het gepresenteerde materiaal is ter beantwoording van de twee bekende leerlingkreten:
- Ik weet niet wat ik moet doen;
- Ik weet niet hoe ik moet beginnen.
Wanneer een docent niet opziet tegen veel begeleidingswerk, is het vanaf deze site dus mogelijk (groepjes van) leerlingen zelf een opdracht te laten uitkiezen, hetgeen motiverend kan werken.
Gezien de vele uitwerkingen die er van vele opdrachten op het web te vinden zijn komt een docent er bijna niet onderuit om het proces van vraagstelling naar rapportage te volgen en af en toe tussenproducten te controleren. Een oplossing waar de auteurs goede ervaringen mee hebben, is een groepje leerlingen een eigen web-gebaseerde werkplaats te laten inrichten [1] en daar als docent ook een login voor te vragen. Zo kun je op gezette tijden kijken hoe de vorderingen in het project zijn.

Het web, wiskunde en profielwerkstuk

In de eerste herziening van de Tweede Fase heeft de toenmalige staatssecretaris Adelmund de eis dat een profielwerkstuk meerdere profielvakken moet beslaan geschrapt. Het is nu aan de school om beleid op dit punt te bepalen.
Er zijn niet zoveel leerlingen die een profielwerkstuk willen maken voor alleen het vak wiskunde. Als tweede vak in het profielwerkstuk is wiskunde voor de profielen Natuur en Gezond en – zeker - Natuur en Techniek vrijwel onontbeerlijk. De volgende sites bieden zeer nuttige opstapjes (halffabrikaten) naar een profielwerkstuk over een origineel en aansprekend onderwerp waarin wiskunde een belangrijke rol speelt.

- *www.phys.uu.nl/~wwwnatdc/lokaal/lokaal.html#exo*
- *www.profielwerkstuk.net/helpdesk/vragenformulier.html*
- *www.few.vu.nl/voorlichting/aanstaande/exoform-nl.html*
- *http://www-exo.sci.kun.nl/*
- *www.osc.tue.nl/profielwinkel/Default.htm*
- *www.werkstuknetwerk.nl*

Op de laatste site zullen we dieper ingaan omdat we er door eigen bijdragen goed in thuis zijn. Het betreft een

FIGUUR 2 Website van Werkstuknetwerk

website waarop momenteel acht universiteiten en een hogeschool halffabrikaten voor profielwerkstukken (zogenaamde *werkstukpakketten*) gepubliceerd hebben. Deze werkstukpakketten zijn geschreven door studenten.

Ook op de site van Werkstuknetwerk (zie figuur 2) wordt het materiaal volgens een vast format geleverd:
<beschrijving van en oriëntatie op het thema>
<mogelijke uitwerkingswijzen>
<mogelijke informatiebronnen>
<informatie over de studie van de auteur>

Doordat de werkstukpakketten geschreven zijn door studenten, is er veelal sprake van een onderwerpkeuze, moeilijkheidsgraad en presentatievorm die veel middelbare scholieren aanspreekt. Het moge duidelijk zijn dat er hier sprake is van een win-win situatie: de middelbare scholen (lees: de docent) wordt werk uit handen genomen en de universiteiten kunnen rechtstreeks contact met scholieren krijgen en zich aldus profileren.

Tot slot dient vermeld te worden dat er diverse prijzen voor profielwerkstukken te verdienen zijn. Zie voor een overzicht de overkoepelende site van een vijftal universiteiten (*www.betasteunpunt.nl*).

Conclusie

Op het web zijn verschillende sites die goed materiaal bieden voor praktische opdrachten wiskunde en voor profielwerkstukken waarin wiskunde een belangrijke rol speelt. Deze bieden voor veel docenten en scholieren een gewenste aanvulling op het in de methodes geboden materiaal en voor de vervolgopleidingen een geschikte manier om de aandacht van aspirant-studenten te trekken.

Noot

[1] Web werkplaatsen via bijvoorbeeld: www.blackboard.com, www.projectplace.nl, www.viadesk.com, http://yahoo.groups.com, www.clubs.nl, www.eproject.com

Over de auteurs

Léon Tolboom (e-mailadres: l.tolboom@math.rug.nl) is docent Wiskunde in het voortgezet onderwijs. Hij heeft meegewerkt aan het Bètasteunpunt en is nu coördinator van de inbreng van de Rijksuniversiteit Groningen aan het Werkstuknetwerk.

Jos Tolboom (e-mailadres: j.tolboom@math.rug.nl) was docent Wiskunde en Informatica en projectleider Bètasteunpunt. Hij is nu docent en onderzoeker aan de faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen van de Rijksuniversiteit Groningen en tevens projectleider van de invoering van de digitale leeromgeving aan die Faculteit. Daarnaast is hij redacteur van Euclides voor de afdeling ICT.

WISKUNDE IN VAZEN

Flippo's

[Rob Bosch]

Een van de meest succesvolle reclameacties van de afgelopen jaren was die van de zogenaamde flippo's, grappige ronde plaatjes verpakt in zakken chips. De begeleidende reclameboodschap 'spaar ze allemaal' leidde tot een aanzienlijke verhoging van de afzet. Dit is niet zo verwonderlijk, want om bijvoorbeeld 20 flippo's te sparen moet men gemiddeld aanzienlijk meer dan 20 pakken chips verorberen. Hoeveel pakken chips denkt de lezer in dit geval gemiddeld te moeten inslaan om de complete set flippo's bij elkaar te sparen, uitgaande van één flippo per zak en een gelijkmatige verdeling van de flippo's over de chipszakken?

Als we inderdaad uitgaan van één flippo per pak en een uniforme verdeling van de flippo's over de zakken chips, dan kunnen we bij een groot aantal zakken chips het volgende vaasmodel opstellen:

Een vaas bevat n balletjes genummerd 1, 2, ..., n.
We trekken met terugleggen balletjes uit de vaas totdat alle nummertjes verschenen zijn.
Vraag: hoe groot is de verwachtingswaarde van het aantal trekkingen?

We beginnen met het eenvoudige geval van slechts twee balletjes. Bij de eerste trekking krijgen we uiteraard een nummertje dat we nog niet hebben. Daarna moeten we wachten totdat het tweede nummertje verschijnt. Laat X_2 de stochast zijn die na de eerste trekking het aantal trekkingen aangeeft tot en met het verschijnen van het tweede nummertje. Er geldt:

$$P(X_2 = k) = pq^{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

waarin p de kans is op het tweede nummertje na de eerste trekking. Uiteraard is $q = 1 - p$.
De stochast X_2 heeft een zogenoemde *geometrische verdeling.*
De verwachtingswaarde $E(X_2)$ van X_2 is:

$$E(X_2) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X_2 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} \tag{2}$$

De laatste reeks in (2) is de afgeleide van de meetkundige reeks $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$, en dus is

$$E(X_2) = p \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) \tag{3}$$

zodat

$$E(X_2) = p \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\frac{1}{1-q}\right) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} \tag{4}$$

Het gemiddeld aantal trekkingen tot en met het verschijnen van het tweede nummertje is dus $1 + \dfrac{1}{p}$
In ons vaasmodel is $p = \frac{1}{2}$ en derhalve moeten we gemiddeld 3 keer trekken om beide nummertjes te krijgen.

Uit het voorgaande kunnen we op eenvoudige wijze de verwachtingswaarde afleiden voor een vaas met n balletjes. Na de eerste trekking geeft de stochast X_2 weer het aantal trekkingen aan tot en met het eerste nog niet verschenen nummertje. Omdat er na de eerste trekking nog n - 1 nummertjes niet verschenen zijn, heeft deze stochast een geometrische verdeling met $p = \dfrac{n-1}{n}$

Volgens (4) is de verwachtingswaarde $E(X_2) = \dfrac{n}{n-1}$

De stochast X_3 geeft na het verschijnen van het tweede nummertje het aantal trekkingen tot en met het volgende nog niet verschenen nummertje. Aangezien er nu nog $n - 2$ nummertjes niet verschenen zijn, heeft deze stochast een geometrische verdeling met

$p = \dfrac{n-2}{n}$

De verwachtingswaarde van X_3 is $E(X_3) = \dfrac{n}{n-2}$

De stochasten X_4, X_5, ..., X_n definiëren we op eenzelfde manier. Als S_n de stochast is die het aantal trekkingen aangeeft tot alle nummertjes verschenen zijn, dan geldt:

$S_n = 1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_{n-1} + X_n$

Voor de verwachtingswaarde $E(S_n)$ van S_n vinden we:

$E(S_n) = 1 + E(X_2) + E(X_3) + \ldots + E(X_{n-1}) + E(X_n)$

waaruit eenvoudig volgt:

$$E(S_n) = 1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \ldots + \frac{n}{2} + \frac{n}{1}$$

Het gemiddeld aantal trekkingen dat nodig is om alle n nummertjes te verzamelen, is dus

$$n\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)$$

Voor $n = 20$ vinden we dan een gemiddeld aantal trekkingen van ongeveer 72.

Een mogelijke variatie van het probleem krijgen we door een of meer zeldzame flippo's in de serie op te nemen. De lezer kan zelf nagaan welke invloed dit heeft op het gemiddeld aantal trekkingen.

Literatuur

G.R. Grimmett, D.R. Stirzaker: Probability and Random Processes, Oxford University Press (1991).

OP WEG NAAR HET PROFIELWERKSTUK

Aanpak van lange leerlijnen in de bètavakken op het Greijdanus College te Zwolle

[Hans Vogelzang]

Inleiding

Leerlingen in het havo en vwo sluiten hun schoolloopbaan sinds de invoering van de Tweede Fase af door een profielwerkstuk te maken. Met deze zogenoemde 'meesterproef' laten ze zien welke vaardigheden zij in de loop van de tijd hebben aangeleerd. Vaardigheden staan momenteel erg in de belangstelling omdat 'kale' kennis in de snel veranderende samenleving niet langer voldoet. Op school worden deze vaardigheden onder andere ingeoefend door leerlingen - op een actieve manier en vaak in groepjes - praktische opdrachten te laten maken (zie ook het artikel van Martha Witterholt, pp.146-149). Binnen scholen is dan ook het accent verschoven van 'Kennis als Doel' naar 'Kennis als Gereedschap' (zie [1] en [4]). Het inoefenen van vaardigheden start al als leerlingen de middelbare school binnenstromen en gaat door tot in de examenklas.
In dit artikel worden een aantal opmerkingen gemaakt over de aanpak van lange leerlijnen in de bètavakken op het Greijdanus College te Zwolle. Verder komen de organisatie en begeleiding van het profielwerkstuk aan de orde. Ook wordt aandacht gegeven aan een systeem van kwaliteitszorg.

Op weg naar zelfverantwoordelijk leren

Leerlingen die een profielwerkstuk maken nemen zelf actief de verantwoordelijkheid voor het bijbehorende proces en voor het uiteindelijke product. Leerlingen zijn enthousiast!
Joska uit 6-vwo bestudeerde samen met drie anderen de 'Emergency Room' van een ziekenhuis. Hier worden mensen na een ongeval binnengebracht voor de allereerste hulp. Ze ontwierpen een nieuw model om de behandelsnelheid te laten toenemen. Uiteindelijk presenteerden ze dit aan de directie van het ziekenhuis.

FIGUUR 1 Het Adviesbureau

Joska: 'Het was een heel gedoe om alle afspraken en interviews zelf te regelen. Het was ook best lastig om gebruik te maken van de profielvakken, maar wij zijn heel erg trots op het uiteindelijke resultaat!'
In de vooropleiding moeten dus elementen aangebracht zijn waardoor leerlingen de gewenste verantwoordelijkheid aankunnen. Dat vraagt van de docenten een wat andere rol. Alleen directe instructie (docentsturing) voldoet niet langer. Naarmate de schoolopleiding vordert zullen leerlingen steeds meer moeten aangeven welke accenten de docent in zijn lessen moet aanbrengen (gedeelde sturing). Dat vraagt om activerende lesvormen en een meer begeleidende functie voor de docent. Leerlingen moeten niet alleen kennis beheersen en kunnen gebruiken tijdens een toets maar ze moeten deze kennis leren toepassen in nieuwe praktijksituaties.
Hoe bevorder je als docententeam dergelijke leersituaties? Na diverse cursussen zijn we op het

Greijdanus College in 2001 gestart met een zogenaamde Expert Groep Activerend Leren (EGAL) onder begeleiding van het APS. Vanuit elke sectie draait een collega mee die heeft toegezegd in eigen lessen te experimenteren met het toepassen van kennis in voor leerlingen nieuwe praktijksituaties.
Een voorbeeld: Bij het vak scheikunde in de bovenbouw van het vwo bespreken we niet alleen de theoretische achtergronden van polyesters, maar bieden we leerlingen (open) opdrachten aan over de toepassing van polyesters in verf. Ook verzorgt een medewerker van het chemieconcern DSM een gastles. Een aantal leerlingen bezoekt het DSM-laboratorium en voert een profielwerkstuk uit bij het bedrijf. Zo ervaren leerlingen aan den lijve hoe de aangeboden kennis in de praktijk functioneert.
Een ander voorbeeld: De vaardigheden die leerlingen bij wiskunde hebben opgedaan met de grafische rekenmachine proberen we een plek te geven bij de andere bètavakken. Daarbij kan gedacht worden aan het oplossen van een tweede- of derdegraads vergelijking bij de vakken natuurkunde en scheikunde, of aan het plotten van een grafiek met behulp van gegevens die verkregen zijn tijdens practica. Tijdens dit soort verwerkingsopdrachten hebben leerlingen het initiatief. Ze beheersen de grafische rekenmachine veel beter dan de collegae die natuurkunde of scheikunde geven...
De docent komt automatisch in een begeleidende rol terecht en de leerling ervaart hoe het vak wiskunde ingezet wordt bij andere vakken.

FIGUUR 2 Prikbord in het Adviesbureau

Op weg naar het profielwerkstuk

Bovenstaande voorbeelden geven aan dat vormgeven aan onderwijsontwikkelingen staat of valt met de motivatie van het onderwijzend personeel. Docenten moeten betrokken en gestimuleerd worden om hun eigen ideeën concreet te formuleren. Pas dan ontstaat vruchtbare grond voor een onderwijsontwikkeling als actief en zelfverantwoordelijk leren. Probleem is vaak het fragmentarische karakter van allerlei ontwikkelingen binnen een school. Bovendien zijn deze ontwikkelingen vaak afhankelijk van individuele initiatieven van docenten. Er ligt vrijwel nooit een systematische en structurele aanpak achter vanuit de school. Daarom is het opstellen en aanpassen van een Programma van Toetsing en Afsluiting (PTA) en het schrijven van studiewijzers een goede zaak. Hierin kunnen docenten hun creativiteit kwijt met betrekking tot het onderwijsprogramma en ten aanzien van bijvoorbeeld activerende werkvormen. Valkuil is dat deze documenten niet functioneren en onderin een bureaula of boekentas belanden. Leerlingen moeten kunnen werken met de studiewijzers en de meerwaarde ervan ervaren. Docenten moeten zien wat de winst is van het door hen ontwikkelde PTA. Om dit te bereiken moeten studiewijzers zo snel mogelijk geïntroduceerd worden binnen de school. Na de introductie in de bovenbouw (1996), is een vereenvoudigde versie voor de derde klassen bedacht (1998). Hierna ontstond een 'terugroleffect'. Inmiddels wordt ook in de tweede klas en in de brugklas gebruik gemaakt van nog eenvoudiger studiewijzers. Geen opgedwongen keurslijf maar een manier om leerlingen in de loop van hun schoolloopbaan steeds beter te leren omgaan met complexere studietaken. Stap voor stap wordt zo de zelfverantwoordelijkheid voor het leerproces gestimuleerd.
Iets dergelijks geldt ook voor de vaardighedenlijn op weg naar het profielwerkstuk. Het PTA staat (in een uniforme lay-out) op de website van de school - goed bereikbaar voor leerlingen, ouders en docenten. Wie goed leest ontdekt de doorgaande (vaardigheden)lijn binnen de verschillende vakken van de Tweede Fase. In de vierde klassen zijn de praktische opdrachten eenduidig, is de eigen inbreng van leerlingen relatief gering en is de studielast meestal niet meer dan 10 slu. De docenten in de vierde klassen geven vaak een verplichte hoofd-onderzoeksvraag. Een voorbeeld vanuit het vak ANW: 'Maak een schematisch overzicht van alle productiestappen van de synthese van aluminium.' Elk groepje leerlingen kiest een andere stof en verzint zelf een aantal deelvragen zoals: 'Welke milieumaatregelen moet de fabrikant nemen?' Door deze manier van werken leren leerlingen hoe je een onderzoekje moet opzetten. Een reactie van een leerling: 'Ik vond het niet leuk dat we een verplichte hoofd-onderzoeksvraag kregen. Maar de systematische aanpak en de systematische beoordeling kan ik denk ik nu toch toepassen bij andere vakken.'
Het PTA kan dus een heel goed instrument zijn om de vaardighedenlijn in een vak of binnen een school zichtbaar te maken. Daarom komt op termijn in de personeelskamer een groot bord (4 bij 2 meter) te hangen met daarop alle vakken en alle perioden. Elk vak noteert middels een kleurcode of een tekstbordje welke vaardigheden geoefend of aangeboden worden in een bepaalde periode (voor een voorbeeld zie figuur 3 op pag. 156). Zo ontstaat ineens een totaaloverzicht

vak	Periode 1	P2	P3	P4	P5	P6	P...
ANW	geen les	geen les	practicum met eigen onderzoeks-vraag	literatuur onderzoek	praktische opdracht met Engelstalige website	Lagerhuis-debat	
Biologie	gesloten practicum	debat in viertallen	literatuur-onderzoek	praktische opdracht	leren waarnemen: determineren	klein eigen onderzoek	
CKV		praktische opdracht	leren waarnemen: excursie	zelf ontwerpen	analyse kunstwerk mbv meerdere bronnen		
Duits	leesdossier	samenvatting	luistertoets	schrijven brief	praktische opdracht		
Engels	praktische opdracht	schrijven recensie	leesdossier	samenvatting	leesdossier		
Frans							
...							

FIGUUR 3 Gedeelte van een gevisualiseerd PTA voor de havo-afdeling (alleen de vaardigheden zijn genoteerd)

dat stimulerend zal werken voor onderling overleg en wellicht ook vakoverstijgende activiteiten zal bevorderen. Docenten kunnen gebruik maken van vaardigheden die al door collegae zijn ingeoefend met leerlingen.
Een voorbeeld: De ANW-docent wil in periode 6 een ‘Lagerhuisdebat’ organiseren. De voorbereiding van zo’n debat kost veel tijd. Door nu gebruik te maken van wat de leerlingen hebben geleerd bij biologie in periode 2 (debatvorm in viertallen) wint hij tijd en maakt hij effectief gebruik van de bij de leerlingen aanwezige voorkennis. Zo ontstaat samenhang in het totale lesprogramma. Opdrachten worden voor leerlingen betekenisvoller, nu duidelijk is waarom een bepaalde oefening gedaan moet worden. Er zijn veel meer dwarsverbanden te ontdekken.
Bij biologie werkt men in periode 1 de eisen voor een verslag nog eens uit doordat leerlingen een ‘gesloten practicum’ krijgen aangeboden. In periode 3 kan men bij ANW naar biologie verwijzen voor de eisen voor een verslag en aandacht besteden aan het opstellen van een goede onderzoeksvraag. Verder maakt het overzicht duidelijk dat de complexiteit van de opdrachten toeneemt. In periode 1 staat bij biologie een ‘gesloten practicum’ op het programma. In periode 6 voeren de leerlingen al een klein ‘eigen onderzoek’ uit. Zo wordt expliciet gemaakt dat leerlingen steeds meer zelfverantwoordelijkheid krijgen en toegroeien naar hun ‘meesterproef’.
De genoemde voorbeelden hebben steeds betrekking op de bovenbouw van havo/vwo. Wordt er dan niets gedaan in de basisvorming? Jawel, maar daarvoor hebben we onvoldoende aandacht gehad. Aan de invoering van de Tweede Fase hadden we de handen meer dan vol. Nu de herijking van de basisvorming eraan zit te komen (2004) en de aansluitingsproblemen tussen basisvorming en Tweede Fase steeds beter in beeld komen, wordt het tijd om de complete vaardighedenlijn uit te schrijven.

Begeleiding en beoordeling profielwerkstuk in 6-vwo

Op het vwo werken leerlingen in groepjes van tenminste twee personen aan een profielwerkstuk dat een verdieping geeft aan tenminste één van de profielvakken. Alle leerlingen besteden tenminste 80 studielasturen aan hun profielwerkstuk. In het rooster zijn een paar dagen opgenomen die gebruikt kunnen worden: een rapportvergaderingsdag en een studiedag voor docenten. Verder mogen leerlingen – na toestemming van de adjunct-sectordirecteur - drie dagen opnemen voor het afnemen van bijvoorbeeld interviews of het uitvoeren van een experiment op een universiteit. De laatste week voor de kerstvakantie vindt er geen toetsweek plaats. Leerlingen kunnen de hele week besteden aan het afronden van hun profielwerkstuk.
Alle leerlingen zijn verplicht, op de laatste lesdag van het kalenderjaar een (mondelinge) presentatie te geven over hun onderzoek. Bij deze presentaties nodigen we (groot)ouders, vrienden, vriendinnen, broers, zussen en de voorexamenklassen uit. Op zo’n presentatiedag gonst het hele gebouw van de activiteiten. Er zijn tentoonstellingen van leerlingen te bezoeken, zelfgebouwde apparatuur is te bewonderen en overal vinden geanimeerde discussies plaats. Iedereen is enthousiast. Over betekenisvolle contexten gesproken…
Alle docenten uit de bovenbouw zijn betrokken bij de begeleiding van profielwerkstukken. Ook de docenten die geen examenklassen hebben of die geen profielvak geven. Zo wordt werkdruk bij de docenten van de profielvakken voorkomen en krijgt het profielwerkstuk een plek in de taak van alle docenten. Hiermee hopen we te bevorderen dat docenten van niet-profielvakken inzien dat de vaardigheden die zij door de jaren heen aanbieden ook van invloed zijn op de kwaliteit van het uiteindelijke profielwerkstuk.

In totaal hebben we in de bovenbouw ongeveer 140 groepjes aan het werk, ca. 90 op de havo-afdeling en ca. 50 op het vwo. Van deze 140 groepjes noemen slechts 9 groepjes *wiskunde* als een van de profielvakken die ze gebruiken. De vijf wiskundedocenten uit de bovenbouw begeleiden dus ook een aantal profielwerkstukken waarbij wiskunde geen rol speelt. Voor vrijwel alle 9 groepjes geldt dat wiskunde gebruikt wordt als ondersteunend vak. Dit seizoen zijn leerlingen bezig met bijvoorbeeld de relativiteitstheorie van Einstein, het ontwerpen van een raket met een PET-fles en met rekenen aan de meest ideale vorm van een binnenvaartschip.
De eerste jaren werkten we met een procesbegeleider en een vakinhoudelijke begeleider. Dit onderscheid was te gekunsteld en werkte niet. Leerlingen vonden het verwarrend om met twee begeleiders te werken, zeker als de onderlinge afstemming tussen de docenten niet optimaal was. Nu werken we met één begeleider die èn het proces volgt èn de inhoud beoordeelt. Als er vragen zijn bij de begeleider dan wel bij de leerlingen, dan kan een vakdocent worden geconsulteerd tijdens één van de begeleide zelfstudie-uren. Dat gebeurt vooral als er twijfel is over het vakinhoudelijke niveau van het geleverde werk.
De beoordelingslijsten van het Cito hebben we inmiddels aangepast. Deze waren teveel procesgericht waardoor het moeilijk was, het inhoudelijke niveau te honoreren. Het onderwerp van het profielwerkstuk noteren we op het diploma om aan te geven dat de school het profielwerkstuk serieus neemt (zie verder: *www.greijdanus.nl/adviesbureau* en *www.cito.nl*).

Adviesbureau

Als school willen we graag dat leerlingen profielwerkstukken maken waarin ze antwoord geven op voor hen betekenisvolle onderzoeksvragen. Daarmee bedoelen we dat leerlingen 'iets met hun onderzoek moeten hebben'. Daarom is het decanaatsbureau - waar leerlingen zich kunnen oriënteren op hun toekomst - uitgebreid met een zogenoemd 'Adviesbureau' (zie figuur 1 en 2 op pag. 154). Bij dit Adviesbureau kunnen bedrijven, instellingen en ouders onderzoeksvragen indienen. Leerlingen kunnen hieruit een keuze maken. Ook kunnen leerlingen hier advies krijgen hoe ze buiten de school op een universiteit of in een bedrijf een profielwerkstuk kunnen uitvoeren. Zo zijn in 2000 en 2001 toch zo'n 30 leerlingen op bezoek geweest bij diverse instellingen als de Universiteit Twente en de Technische Universiteit Delft (zie NVOX 2001, nummer 3). Zo hebben leerlingen een biogasinstallatie ontworpen. Anderen hebben een ontwerp gemaakt om het afvalwater van een autowasstraat te recyclen. Ook zijn we als school een samenwerkingsverband aangegaan met de Universiteit van Amsterdam en DSM. Leerlingen kunnen dan hun profielwerkstuk bij het bedrijf zelf uitvoeren. Zo ontstaat een intensiever contact tussen school en maatschappij. En leerlingen krijgen een idee wat er speelt binnen een bedrijf of instelling.

Hoe blijf je op weg?

Hoe zorg je ervoor dat het ingezette beleid niet verzandt? Elke sector (afdeling binnen school; bijvoorbeeld: bovenbouw havo/vwo of vmbo) stelt ieder jaar een activiteitenplan op. Daarin wordt beschreven wat de plannen voor het komende seizoen zijn. Aan het eind van elk jaar wordt dit geëvalueerd en worden prioriteiten gesteld voor het daarop volgende seizoen. Er vindt niet alleen een procesmatige maar vooral ook een inhoudelijke beoordeling plaats. Sinds september 2001 maken we gebruik van de zogenaamde PDCA-cyclus (Plan-Do-Check-Adapt). In het algemeen kan gesteld worden dat men binnen scholen vol enthousiasme begint aan allerlei ideeën. Wat vaak mist is een check-moment waarbij gecontroleerd wordt of gedane beloften waargemaakt zijn. Tijdens de check-fase maken we gebruik van 'kritische vrienden', vaak afkomstig uit de eigen sector, soms ook van buiten de sector of zelfs van een andere school. Pas als hun kritische, opbouwende analyse besproken is wordt vervolgbeleid afgesproken. De eerste ervaringen met dit eenvoudige, systematisch en zich periodiek herhalend zelfevaluatiesysteem zijn positief (zie [6], en verder ook *www.q5.nl*).

Literatuur en noten

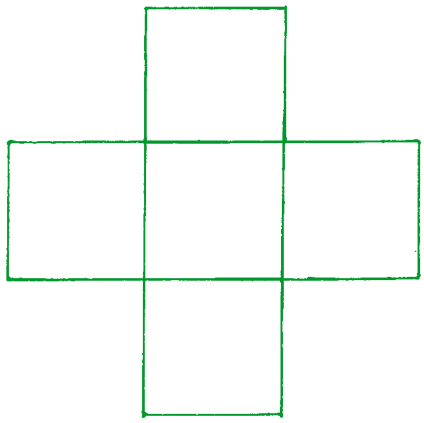
[1] M. Boekaerts in: J. Ahlers (et al.): Handboek Basisvorming (1994).
[2] S. Ebbens, S. Ettekoven: Effectief leren in de les, Wolters-Noordhoff (Groningen, 1996).
[3] S. Ebbens, S. Ettekoven: Samenwerkend leren – Praktijkboek, Wolters-Noordhoff (Groningen, 1997).
[4] S. Ebbens, S. Ettekoven: Actief Leren, Wolters-Noordhoff (Groningen, 2000).
[5] E. Vos, E. Reehorst: Scenario's voor actief leren, Wolters-Noordhoff (Groningen, 1999).
[6] A. de Wolf: 'Kijk eens wat vaker in de spiegel: scholen aan de slag met zelfevaluatie' in: SBM; maandblad van de besturenraad voor schoolbestuur en management, nummer 8, april 2002, p.24.
[7] A. de Wolf: 'Keep it small and simple' in: Qvijver, jaargang 3, nummer 3, juni 2002 , p.7.
[8] Handleiding 'Profielwerkstuk' (1998), te bestellen via www.cito.nl.

Websites

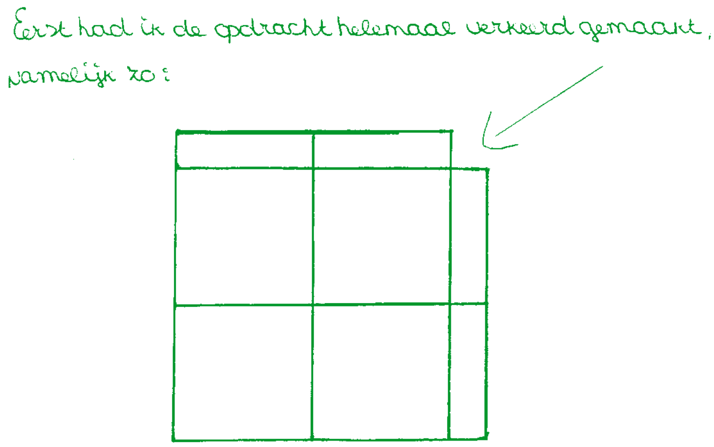
www.greijdanus.nl/profielwerkstuk
www.educatief-ontwerpen.nl
www.verhalendontwerpen.nl
www.q5.nl

Over de auteur

Hans Vogelzang (e-mailadres: j.vogelzang@greijdanus.nl) is docent scheikunde en algemene natuurwetenschappen aan het Greijdanus College te Zwolle.



FIGUUR 1

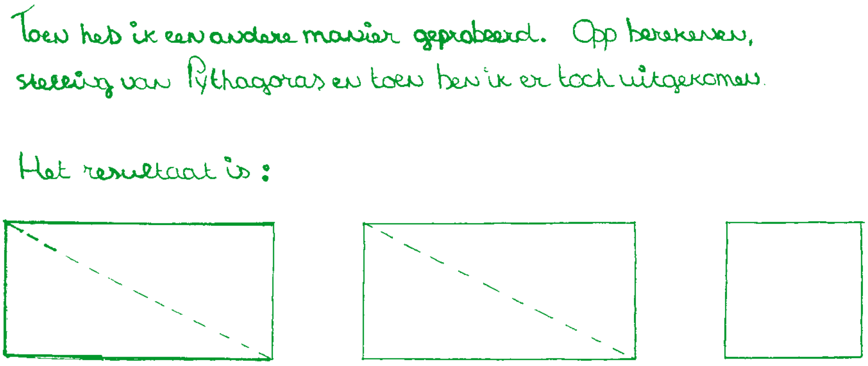


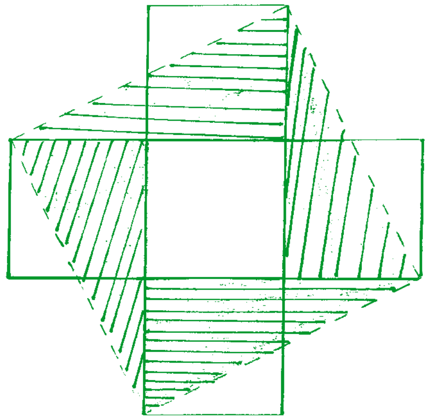
FIGUUR 2

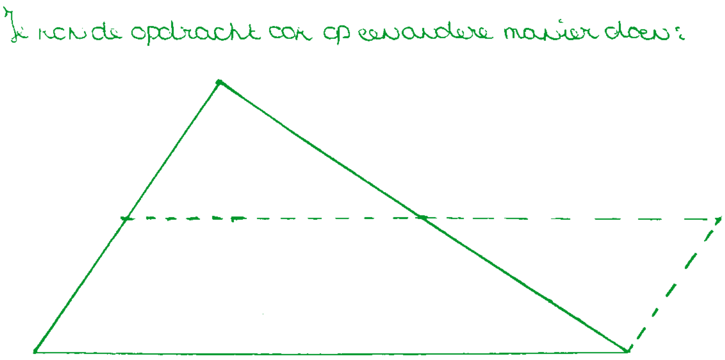
EEN PLAK- EN KNIPOPDRACHT VOOR 4-HAVO A12

Een lezing volgen op een universiteit - en vervolgens met een idee voor een praktische opdracht naar huis gaan...

[Gert de Kleuver]







FIGUUR 3a, 3b (boven) en 4 (onder)

Contact WO/VO

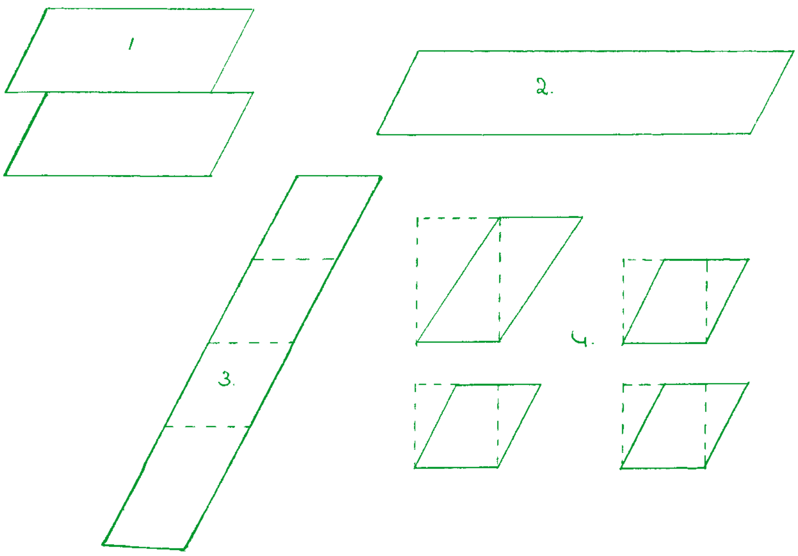
In september 2001 werd voor de eerste keer een docentendag aan de Katholieke Universiteit Nijmegen gehouden. Uit de inleiding van prof. Keune bleek dat het aantal eerstejaars studenten wiskunde dramatisch laag was. Een aantal van negen eerstejaars is inderdaad niet erg hoopvol en zeker niet genoeg om een faculteit te handhaven. Een eerste aanzet om de contacten tussen universiteit en voortgezet onderwijs te verbeteren was de organisatie van deze dag, waarvoor men sprekers had uitgenodigd met verschillende boeiende onderwerpen.

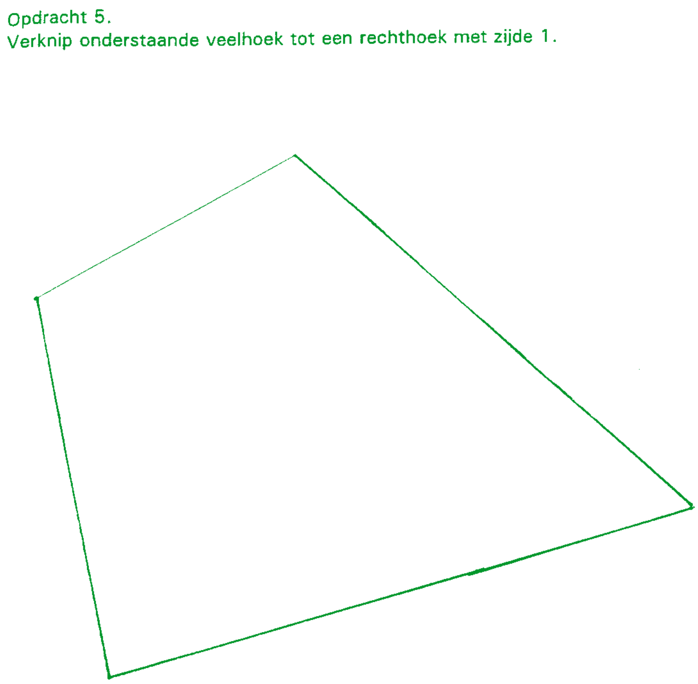
Lezing van Van Rooij

Tijdens de docentendag gaf prof. Van Rooij een lezing over knippen en plakken bij wiskunde. Deze lezing vormde voor mijn collega, drs. A.B. van der Roest, de basis voor zijn praktische opdracht voor een 4-havo-groep met profiel Economie & Maatschappij.
Mijn collega gebruikte voor zijn praktische opdracht alleen het verknippen van *vlakke* figuren, terwijl Van Rooij niet alleen het verknippen van vlakke, maar juist ook van *ruimtelijke* figuren demonstreerde.
Van Rooij verknipte een kruis tot een vierkant om daar vervolgens een driehoek van te maken. Dit alles met behoud van de oppervlakte. Van Rooij ging tijdens zijn lezing redelijk snel over op driedimensionale figuren, maar dat was voor de bestemde doelgroep, 4-havo, nu net een dimensie te ver.

De praktische opdracht

De inleidende opdracht voor de leerlingen luidde: 'Verknip figuur 1 en maak van de stukjes een vierkant.'
Niet alle leerlingen vonden dit een makkelijke opdracht. Willekeurig knippen en plakken leidde bijvoorbeeld tot figuur 2.
Een van de leerlingen, Joanne, die in eerste instantie met deze onjuiste oplossing kwam, is vervolgens gaan rekenen met de oppervlakte en met de stelling van Pythagoras. Dit leidde alsnog tot de juiste figuur (zie de figuren 3a en 3b).
Van Rooij liet tijdens zijn lezing zien dat elke willekeurige veelhoek te verdelen is in driehoeken. Deze driehoeken zijn weer te herleiden tot rechthoeken met zijde 1.
Zo moesten de leerlingen een parallellogram verknippen tot een rechthoek en een driehoek tot een parallellogram. Nu werd de eis gesteld dat er alleen volgens rechte lijnen geknipt mocht worden - dit ter voorkoming van Escher-achtige figuren.
Na deze knipoefeningen konden de leerlingen een driehoek tot een parallellogram verknippen om uiteindelijk tot een rechthoek te komen. Een opmerking in de tekst over een middenparallel zorgde voor nogal wat onrust. Die opmerking was bedoeld ter voorbereiding op de laatste vaardigheid (zie daartoe figuur 4): 'Maak een rechthoek waarvan één zijde lengte 1 heeft.'
Het midden werd meestal gevonden door de zijde op te meten. Veel leerlingen gebruikten de hokjes van het





FIGUUR 5

FIGUUR 6

ruitjespapier. Een constructie met de passer werd jammer genoeg niet gebruikt. Nu is dat ook niet te verwachten bij A12-leerlingen voor wie meetkunde niet in het programma opgenomen is (zie figuur 5). De slotopdracht (zie figuur 6) werd door enkele leerlingen goed begrepen. Zij moesten een veelhoek verknippen tot een rechthoek met één zijde met lengte 1.
Een leerling schreef: 'Bij deze opdracht moet je alle kennis gebruiken die je in de vorige opdrachten hebt opgedaan. Bij deze opdracht moest je de volgende stappen behandelen: driehoek – parallellogram – rechthoek – parallellogram met zijde 1 – rechthoek met zijde 1'.
Vervolgens werkte zij alle stappen uit om de veelhoek te verknippen tot een rechthoek met zijde 1.

Slotopmerkingen

- Sommige leerlingen werkten individueel aan dezelfde opdracht. Dit vond meestal plaats buiten de reguliere lessen. Zij moesten een logboek bijhouden waarin zij de gewerkte tijd moesten verantwoorden. De uitwerkingen lieten duidelijk zien dat de leerlingen eigen werk hadden ingeleverd.
- Enkele leerlingen kwamen redelijk goed door het onderwerp heen. Veel leerlingen haakten af bij de opdracht om de figuur te knippen tot een rechthoek met zijde 1. Het vinden van het midden van een lijnstuk zal in een verbeterde versie van deze opdracht meer aandacht moeten krijgen.
- Meetkunde is geen item in het A12-programma, maar kan bij deze leerlingen wel een verrassende kijk op wiskunde teweeg brengen.
- Deze opdracht kan in de toekomst wel gebruikt worden, maar dan zal de eindopdracht minder gesloten zijn. De leerlingen leren dat allerlei bekende figuren te verknippen zijn tot rechthoeken met zijde één.
- Ideeën voor praktische opdrachten staan niet alleen in de schoolboeken of op de bekende sites op internet, ook een bezoek aan een bijeenkomst zoals deze docentendag van de KUN kan een basis vormen voor een praktische opdracht.

Met dank aan drs. A.B. van der Roest.

Over de auteur

Gert de Kleuver (e-mailadres: g.de.kleuver@wanadoo.nl) is wiskundedocent en brugklascoördinator aan het Ichthus-College te Veenendaal. Ook is hij lid van de redactie van Euclides.

Aankondiging / 39e Nederlands Mathematisch Congres

Nijmegen: donderdag 1 en vrijdag 2 mei 2003 [Mascha Honsbeek]

Onder auspiciën van het Wiskundig Genootschap organiseert de Katholieke Universiteit Nijmegen op 1 en 2 mei 2003 het 39e Nederlands Mathematisch Congres.
In verband met het 225-jarig bestaan van het Wiskundig Genootschap is er een speciaal programma op donderdagmiddag 1 mei:
- een *lustrumvoordracht* door Nobelprijswinnaar M. Veltman, en
- een *Symposium 'Wiskunde, nodig en in nood'* (H. Brandt Corstius, P. Nijkamp en J. Veldhuis).

Andere programma-onderdelen tijdens deze twee dagen:
- twee hoofdvoordrachten, door R. Hartshorne en R. Dijkgraaf;
- vier speciale sprekers: F. Beukers, B. Jacobs, J. Koenderink en K. Landsman;
- 12 minisymposia (over o.m. cryptologie, didactiek van de wiskunde, discrete wiskunde, geschiedenis van de wiskunde, en wiskunde toegepast);
- presentaties van promotieonderzoek;
- aangemelde voordrachten;
- en meer ...

Zie voor aanmelding en nadere informatie de website:
http://www-math.sci.kun.nl/nmc2003/

Aankondiging / HKRWO symposium 2003

Symposium IX van de Historische Kring Reken- en Wiskunde Onderwijs

Datum en plaats:
zaterdag 17 mei 2003
Hogeschool Domstad te Utrecht (Koningsbergerstraat 9)
Tijd: 10.15 - 16.00 uur

Thema: Oude meesters
Reflecties op het didactische werk uit de jaren '50 en '60 van Pierre van Hiele, Wim Bos, Rudolf Troelstra en Jan Nieland

Prof. Heinrich Bauersfeld (Bielefeld, Dld)
What shall we do? - New demands for old perspectives (algemene inleiding).

Harrie Broekman en Pierre van Hiele
Vectoren in en vanuit de visie van Pierre van Hiele. Over de methode 'Van A tot Z'.

Fred Goffree en Harm Jan Smid
De klas kan verder. Het leerboek als hulpmiddel tot zelfwerkzaamheid.
De meetkundeboeken van Wim Bos (met video-interview van Wim Bos).

Wim Groen
Van Euclides naar Felix Klein. Over het transformatiemeetkunde project van Rudolf Troelstra c.s.

Tineke Brinkman en Jan Nieland
Structuurrekenen, nog steeds ter zake?

En verder
Tentoonstelling over boeken en materialen uit de jaren '50 en '60.
Eenieder is uitgenodigd om een poster op te hangen en/of iets te exposeren.

Deelname door overmaking van € 22,- op giro 4657326 t.n.v. HKRWO te Amsterdam (koffie, thee en lunch inbegrepen).
Het symposium wordt mede mogelijk gemaakt door subsidies van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO), de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW), de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs (NVORWO) en ondersteuning van het Freudenthal Instituut (FI).
Contactpersoon: Ed de Moor (*e.demoor@fi.uu.nl*) telefoon 020-6121382 of 030-2635575 (Sylvia Eerhart).


BROERE
VanDerVelden
wielersport

MODELLEREN VAN DE TOUR DE FRANCE

Over een kerndoel van het wiskundeonderwijs

[Anne van Streun]

Hoe zwaar is een fietstocht?

Nederlanders fietsen graag. Er zijn elke zomer heel wat Nederlandse fietsers te vinden op de flanken van bergen zoals Mont Ventoux, Alpe d'Huez, Tourmalet en Puy de Dôme. Thuisgekomen brandt de discussie los over de zwaarte van de cols. En hoe kun je die zwaarte vergelijken met een tocht door het Limburgse heuvelland? Is er een methode te vinden waarmee je de zwaarte van cols en heuvels onderling betrouwbaar kunt vergelijken? Typisch een realistische en ongestructureerde vraagstelling die voor onze leerlingen uitgangspunt kan zijn voor het leren modelleren.

In het maandblad *Fiets* (no. 8, 1987) vraagt Jan Bijma zich af hoe zwaar het beklimmen van een col is. Voor het schatten van die zwaarte formuleert hij een wiskundig model, waar in de latere jaargangen van *Fiets* regelmatig op terug wordt gekomen. Aan de hand van die artikelen is voor leerlingen heel mooi te demonstreren wat het maken, toetsen en gebruiken van een wiskundig model eigenlijk inhoudt. De meeste gegevens uit dit artikel zijn ontleend aan het maandblad *Fiets*.

De aannames

Voor het opzetten van een wiskundig model moet je eerst goed nadenken over alle factoren die een rol kunnen spelen. Het brainstormen over de variabelen die een rol kunnen spelen bij de bepaling van de zwaarte van een fietstocht tegen een berg of heuvel op, gaat vooraf aan het kiezen van de aannames. In de werkelijkheid spelen deskundigen op het toepassingsgebied een belangrijke rol in dat keuzeproces. In dit voorbeeld volg ik Jan Bijma. Hij neemt als uitgangspunt dat een beklimming moeilijker is naarmate de af te leggen weg een groter hoogteverschil overbrugt en steiler is.

Een wiskundig model

Dit is het moment om de leerlingen in groepjes een formule te laten bedenken die ze op zelfbedachte cols kunnen toepassen. Aanvullende informatie over de Mont Ventoux (30 km weg en 1915 m hoog) en de Alpe d'Huez (34 km weg en 1780 m hoog) kan helpen om de realiteit in het oog te houden. Na wat discussie zijn er wel wat redelijke eisen te stellen aan de maat voor de zwaarte, de index i. Bij gelijke steilheid s zal een twee keer zo groot hoogteverschil h ook een twee keer zo groot getal voor de index i moeten opleveren. En omgekeerd zal een col A die even hoog is als een col B, maar twee keer zo steil, ook twee keer zo zwaar zijn als die col B. In het wiskundige model van Jan Bijma is de maat voor de zwaarte, index i genoemd, gelijk aan het hoogteverschil h in meters keer de steilheid s. Dat klopt met de voorgaande redelijke aannames. De steilheid wordt gedefinieerd als het hoogteverschil h gedeeld door de weglengte w in km. De index i is nu in de vorm van de volgende formule van Jan Bijma samen te vatten:

De zwaarte i van een beklimming is:

$$i = h \cdot s = h \cdot \frac{h}{w}$$

Om de getallen wat beter hanteerbaar te maken wordt de index nog gedeeld door 10 000, zodat de formule wordt:

$$i = h \cdot \frac{s}{10\,000} = h \cdot \frac{h}{10\,000w}$$

(h is het hoogteverschil in meters, w is de weglengte in kilometers)

Toegepast op enkele cols geeft dan voor de Mont Ventoux (richting west) de index 12,1, voor de Alpe d'Huez (richting zuid) wordt dat 9,2, de Tourmalet (richting west) geeft 10,9 en de Vaalserberg (vanuit Vaals) komt op een zwaarte van 0,46.

Het model en de werkelijkheid

Zelfs aan de hand van dit eenvoudige model voor de zwaarte van een beklimming is snel vast te stellen dat het model in zijn algemeenheid niet de werkelijkheid beschrijft. De zwaarte hangt van meer omstandigheden af dan alleen van de twee variabelen die in de formule voorkomen. Denk bijvoorbeeld maar aan het wegdek of aan tegenwind of andere weersomstandigheden. Het enige wat je kunt zeggen is dat bij overigens gelijkblijvende omstandigheden de bedachte index een goede maat kan zijn om de zwaarte van verschillende beklimmingen te kunnen vergelijken. Afgaande op de hellingen kun je zo de zwaarte van een fietstocht voorspellen.

Heel veel politieke, economische, medische en industriële besluiten zijn gebaseerd op voorspellingen over de toekomst waar een wiskundig model aan ten grondslag ligt. Meestal kennen de betrokken beslissers dat wiskundig model en de beperkingen van dat model niet eens. Je zou wensen dat alle beleidsmakers en politici verplicht een cursus moeten volgen om te leren begrijpen wat een model inhoudt. Zij hebben een forse kennisachterstand op bijvoorbeeld de meteorologen, die wel weten dat zij met modellen van de werkelijkheid werken. Zij kennen de beperkingen van hun wiskundige modellen. En wij merken het direct als zij er naast zitten. Dat duurt bij die beleidsbeslissingen meestal langer...

In algemeen vormend wiskundeonderwijs zou het leren kritisch bevragen van modellen een belangrijk leerdoel kunnen zijn (zie de examenprogramma's havo/vwo).

De gegevens uit de praktijk

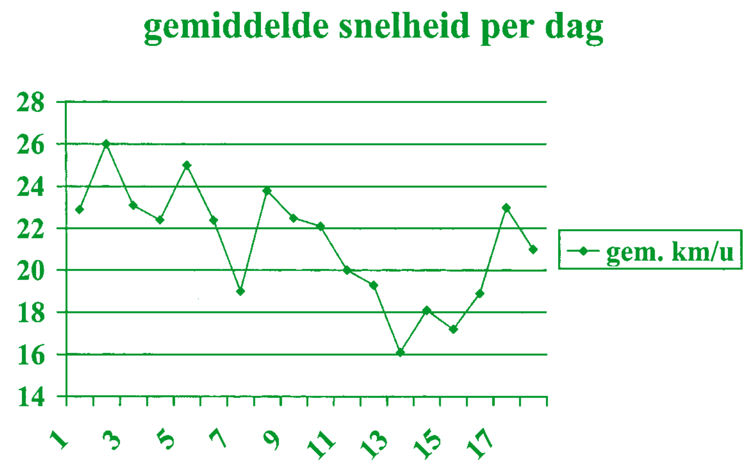
Dit model voor de zwaarte van een col berust op twee aannames die wellicht aan te vechten zijn. Hoe kunnen we onderzoeken of het model een acceptabele beschrijving van de werkelijkheid geeft? Daar hebben we gegevens van een echte toertocht voor nodig. In *Fiets* (no. 4, 1988) beschrijft sportmedicus Kor van Hulten de sportmedische aspecten van 'de zwaarste toertocht ter wereld' die gaat over 100 cols en ruim 4000 km in Frankrijk. De liefhebber Jarich Renema heeft die tocht gemaakt en zijn logboek levert de gegevens over de gemiddelde snelheid per dag en de route (zie figuur 1).

Om het wiskundig model te kunnen toetsen heeft Van Hulten vervolgens voor elke col de zwaarte i berekend in Jan-Bijma-Eenheden, afgekort tot JBE. De zwaarte per dag is vervolgens berekend door de zwaarte van alle cols op te tellen (zie figuur 2).

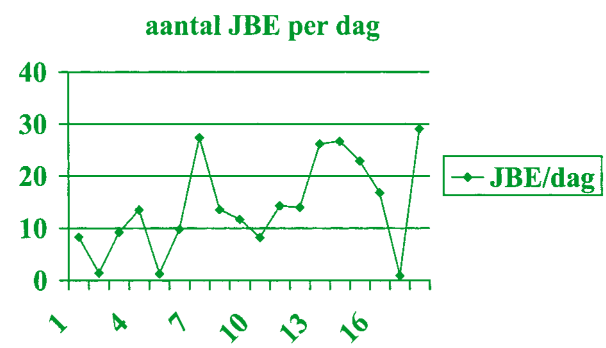
De toetsing van het model

We hebben nu twee maten voor de zwaarte van een toerdag, namelijk de gemiddelde snelheid in km/u van Jarich Renema en het aantal JBE. De onderzoeksvraag moet nu scherp worden geformuleerd. Hoe goed voorspelt die index i in JBE de zwaarte van een col? Een lage gemiddelde snelheid op een dag geeft aan dat de tocht op die dag zwaar was. Dat moet worden voorspeld door een hoge waarde van de zwaarte i, gemeten in JBE. Bijzondere omstandigheden daargelaten!

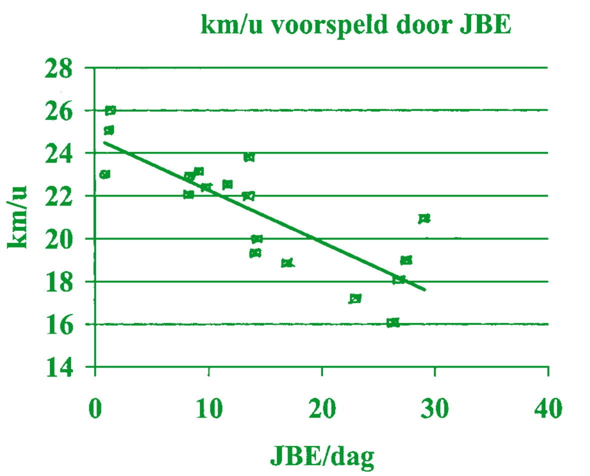
FIGUUR 1 De Tour de France van Jarich Renema



FIGUUR 2 De zwaarte per dag in JBE



FIGUUR 3 Het verband tussen de gemiddelde snelheid en de zwaarte



Het wordt tijd voor een plan om te toetsen of beide variabelen redelijk bij elkaar in de pas lopen. Via een tabel waarin per dag de JBE en de km/u zijn weergegeven, komen we op figuur 3.
Een grafiek is altijd een goede manier om enig zicht te krijgen op een mogelijk verband tussen twee variabelen. Uit de probleemstelling volgt dat de voorspelde zwaarte van een toerdag in JBE horizontaal moet worden uitgezet (de onafhankelijke variabele) en de behaalde gemiddelde snelheid in km/u (de wellicht daarvan afhankelijke variabele) verticaal.
Klopt het wiskundig model voor de volle 100%, dan moet bij elke toename van de zwaarte de gemiddelde snelheid afnemen. Sterker nog, uit de zwaarte moet de gemiddelde snelheid zijn te berekenen. Maar zo werkt een model natuurlijk niet. Elke dag zijn er weer andere invloeden, variabelen, die ook op de gemiddelde snelheid inwerken. Toch willen we graag weten of het model ongeveer klopt. Er lijkt een trendlijn in te zitten die goed bij de gegevens past. In de onderbouw kun je op het oog een passende trendlijn trekken waarbij intuïtief het gewicht van elk punt wordt meegewogen. Met wat wiskunde of een grafische rekenmachine is de best passende lijn snel uit te rekenen. Naar behoefte kun je dan bij elke waarde van de zwaarte van een toerdag de gemiddelde snelheid aflezen of met een formule berekenen.

Hoe goed klopt het Jan-Bijma-model?

We hebben nu wel een mooie lijn door de punten getrokken, maar hoe goed past die lijn nu bij de werkelijkheid, de echte gegevens van Jarich Renema? Of beter: hoe goed past het model van Jan Bijma voor de zwaarte van een tocht met cols bij de echte gemiddelde snelheden van Jarich Renema? Voeren we de tabel van km/u tegen JBE (zie figuur 3) voor alle 18 Tour-dagen in in een grafische rekenmachine, het programma PowerPoint of een grafisch of statistisch programma, en laten we de lineaire regressie van km/u op basis van JBE berekenen, dan geeft dat een correlatiecoëfficiënt $r = 0{,}81$. De gemiddelde snelheid is voor 66% ($r^2 = 0{,}66$) te voorspellen uit het wiskundige model voor de zwaarte van een etappe, een redelijke mate van overeenstemming tussen de formule van Jan Bijma en de echt gemeten gemiddelde snelheden van Jarich Renema.
We hebben nu een fundamentele fout gemaakt, want we zijn onmiddellijk met alle praktijkgegevens gaan rekenen. Andere factoren dan de hoogte en lengte van de cols kunnen de zwaarte van een etappe beïnvloeden (zie daarvoor het genoemde artikel uit *Fiets* waarin het logboek van de eenzame fietser is opgenomen).
Extreme uitslagen worden door die andere factoren veroorzaakt en zeggen niets over de waarde van het model. Uit de grafiek van figuur 3 valt al op te maken dat de achtste dag (13,6 ; 23,8) en de achttiende dag (29,1 ; 21,0) er wat raar uitschieten. Berekening (zie hierna) bevestigt dat. In zo'n geval rekenen we daar niet domweg mee door, maar laten we die uitschieters gewoon weg. Die zeggen niets over ons model.
Berekenen we opnieuw de correlatiecoëfficiënt, nu voor 16 dagen, dan blijkt die 0,91 te worden. Het wiskundig model van Jan Bijma voor de zwaarte van een col verklaart blijkbaar 83% van de gemiddelde snelheid per dag. Dat is een mooi resultaat! We kunnen daar in het vervolg gerust een beroep op doen bij het uitzetten van een toertocht. De zwaarte is goed in te schatten, bijzondere omstandigheden daargelaten.

Modelleren als kernactiviteit

Er is nationaal en internationaal weinig discussie over de vraag wat het belangrijkste leerdoel van algemeen vormend wiskundeonderwijs zou moeten zijn. Polya schreef al dat het leren maken van een wiskundig model van een echte situatie centraal zou moeten staan. Alle toepassingen van wiskunde draaien daar om. Je kunt vervolgens wiskundigen inhuren (tegenwoordig veelal mathematische software gebruiken) om aan dat model te rekenen, waarna de resultaten weer terugvertaald moeten worden naar de echte situatie. Waarschijnlijk blijkt dan dat het model moet worden bijgesteld, enzovoort. Het is merkwaardig dat het zo lang heeft geduurd voordat het modelleren zelf als belangrijkste onderzoeksvaardigheid expliciet werd onderwezen. In het hoger en universitair onderwijs werd het modelleren vaak uitgesteld tot de afstudeeropdracht, in het voortgezet onderwijs kwam het nauwelijks voor. Nu is dat anders. Onder verschillende namen wordt in het hbo vanaf het eerste jaar werk gemaakt van het modelleren, terwijl aan de universitaire wiskundeopleidingen lange leerlijnen voor het ontwikkelen van deze onderzoeksvaardigheid van de grond zijn gekomen. Volgens de recente onderwijsvisitatie gaan de ingenieursopleidingen van Twente en Eindhoven in die ontwikkeling het verst. Vanaf het eerste jaar moeten studenten daar leren, grote en ongestructureerde probleemsituaties wiskundig te modelleren. De visitatiecommissie adviseert de andere universitaire opleidingen, dat voorbeeld te volgen.
Ondanks mooie woorden in examenprogramma's, voor het eerst bij wiskunde A in havo/vwo, is in het voortgezet onderwijs nog weinig van het leren modelleren terecht gekomen. Net als aanvankelijk bij het hbo en wo is er het gevoel dat de leerlingen eerst maar veel wiskunde moeten leren voordat zij kunnen leren modelleren. Net als bij het hbo en wo hebben wiskundeleraren de nodige twijfel bij het geven van opdrachten waarvan de goede uitkomst niet bij voorbaat vast ligt. Sterker nog, de enig goede uitkomst bestaat zelfs niet!

Berekening van de samenhang tussen model en werkelijkheid

Alle rekenwerk is aan machines uit te besteden, maar voor een goed begrip is het soms te verdedigen dat leerlingen ook eenvoudig en inzichtelijk handwerk moeten leren uitvoeren. Zo is de Spearman-rangcorrelatiecoëfficiënt een eenvoudige maat voor het verband tussen twee variabelen. De berekening gaat in dit voorbeeld als volgt. De 18 gemiddelde snelheden worden in volgorde genummerd van laag naar hoog. De 18 berekende indices voor de zwaarte van een

etappe worden eveneens genummerd, van hoog naar laag. Theoretisch moeten die rangnummers per dag precies dezelfde zijn, want naarmate de zwaarte groter is moet de gemiddelde snelheid lager worden.
In de tabel staan voor elke dag de rangnummers. In de vierde rij staat het kwadraat van het verschil v tussen beide rangnummers. Hoe groter $v \cdot v$, hoe slechter het model past bij de werkelijkheid.

- Een wiskundig model maken
Op grond van de aannames is een wiskundig model te maken. In dit geval is aangenomen dat de zwaarte i van een beklimming evenredig is aan het te overwinnen hoogteverschil h en aan de steilheid s van de weg:
$i = \text{constante} \cdot h \cdot s$
De constante is vrij te kiezen en hangt mede af van de gekozen eenheden en de wens er hanteerbare (niet extreem hoge of kleine) getallen uit te krijgen.

dag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
zw	5	3	6	9	2	7	17	10	8	4	12	11	15	16	14	13	1	18
sn	6	1	4	10	2	8	14	3	7	9	12	13	18	16	17	15	5	11
v^2	1	4	4	1	0	1	9	49	1	25	0	4	9	0	9	4	16	49

Tellen we alle v^2 bij elkaar op (notatie Σv^2), dan is dat een maat voor het niet bij elkaar passen van beide variabelen voor 18 paren getallen. De Spearman-rangcorrelatiecoëfficiënt voor het wel bij elkaar passen van twee variabelen is

$$r = 1 - \frac{6\Sigma v^2}{n(n^2 - 1)}$$

n is het aantal paren getallen, v is het verschil in rangordenummer binnen een paar.
Als Σv^2 gelijk is aan 0, dan is de samenhang perfect, $r = 1$.
Aan de tabel is goed te zien dat de achtste en de achttiende dag uitschieters zijn: beide met een verschil in het kwadraat van 49, samen meer dan alle andere dagen bij elkaar.

Terugblik
In dit artikel heb ik laten zien dat ook op een relatief eenvoudig wiskundig niveau alle belangrijke aspecten van het wiskundig modelleren van een reële situatie aan de orde kunnen komen.
Verschillende fasen en denkmethoden zijn te onderscheiden:

- Vraagstelling
Het gaat soms om een situatie waarin een wiskundig model enige ordening kan aanbrengen. Of er is behoefte aan het voorspellen van de verdere ontwikkeling van de situatie. Of het lijkt gewenst om aan een kwalitatieve situatie een kwantitatieve meting te koppelen.

- Probleemanalyse
Een uitgebreide analyse van de situatie en van het doel moet verhelderen welke variabelen allemaal een rol spelen en wel of niet moeten worden meegenomen.

- Aannames
Niet alle variabelen zijn even belangrijk en niet alle variabelen zijn meetbaar of kunnen in een wiskundig model worden opgenomen. In het overleg tussen de contextdeskundigen en de wiskundigen worden essentiële en bruikbare aannames geformuleerd. Alleen onder voorbehoud dat die aannames de situatie adequaat beschrijven is het model waardevol.

- De beperkingen formuleren
Het model is bij voorbaat niet onbeperkt toepasbaar en beschrijft niet de gehele werkelijkheid. Lang niet alle relevant geachte variabelen zijn meegewogen.

- Toetsing van het model
Wil het wiskundig model de gebruiker kunnen helpen bij diens vraagstelling, dan moet het tenminste een deel van de werkelijkheid beschrijven. De beste toets is dan ook het experiment of het verzamelen van statistieken over de situatie. In dit geval gaat het om een beperkt experiment, de toertocht van één fietser die elke dag ruim tien uur fietst. Zijn gemiddelde snelheid per dag is een plausibele experimentele maat voor de zwaarte van een etappe. Die twee variabelen, de berekende zwaarte op grond van het model en de experimenteel vastgestelde gemiddelde snelheid, moeten redelijk bij elkaar in de pas lopen.

- De sterkte van een samenhang onderzoeken
De eenvoudigste berekening is nog goed te volgen. Uitschieters mogen niet meedoen!

Wordt vervolgd
Het kenmerk van modelleren is ook dat het nooit af is. Het kan altijd anders of beter of breder. Waar baseren de bazen van de Tour de France bijvoorbeeld hun indeling van de cols in vijf categorieën op? Spoort dat met ons model? Leidt dat tot nieuwe inzichten? Waar het op den duur om gaat is dat leerlingen zelf bewust de verschillende fasen en denkmethoden doorlopen en hun eigen aanpak daarop afstemmen.

Foto op pagina 162

Erik van Huuksloot, lid van W.C. De Waardrenner te Schoonhoven, beklimt de Alpe d'Huez (zomer 2001)

Over de auteur

Anne van Streun (e-mailadres: A.van.Streun@math.rug.nl) is sinds 1974 werkzaam aan de Rijksuniversiteit Groningen als wiskundedidacticus en sinds 2000 als hoogleraar in de didactiek van de wiskunde en natuurwetenschappen.

Verschenen / De Nederlandse Wiskunde Olympiade 100 opgaven met hints, oplossingen en achtergronden

Auteurs: Jan van de Craats en Thijs Notenboom

Uitgever: Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade • ISBN: 90 76976 12 0 • Prijs: € 12,00

Een nieuw olympiade-boek

Van vier positieve reële getallen a, b, c en d wordt elk tweetal met elkaar vermenigvuldigd.
Vijf van de zes uitkomsten zijn 2, 3, 4, 5 en 6. Wat is de zesde uitkomst?
Dit is een opgave uit bovengenoemd boek, waarvan de publicatie mede mogelijk is gemaakt door een bijdrage van het WisKids-project. Het bevat de honderd mooiste, spannendste en leukste olympiade-opgaven van de afgelopen twintig jaar. Negentig opgaven zijn gekozen uit de eerste ronde en tien uit de tweede. De sommen zijn in zestien korte hoofdstukken naar thema bij elkaar gezocht. Elk hoofdstuk bevat één voorbeeldoplossing, hints voor de andere opgaven en een korte toelichtende tekst. De opgavenhoofdstukken worden afgewisseld met hoofdstukken over wiskundige achtergronden. De onderwerpen daar zijn meetkunde, breuken, decimale ontwikkelingen en irrationale getallen. Het boek eindigt met een algemeen hoofdstuk over *problem solving*.
Leerlingen kunnen deze opgavenverzameling gebruiken als training voor de wiskunde-olympiade, maar ook als verrijkingsstof naast de gewone schoolwiskunde. Ook kunnen zij een eigen keuze uit de opgaven maken als basis voor een werkstuk over meetkunde, combinatoriek, getaltheorie of een van de vele andere stukken wiskunde uit het boek.
Maar het hoofddoel van het boek is om te laten zien hoe leuk het is om zelf oplossingen te vinden van sommen waar je aanvankelijk kop noch staart aan kunt ontdekken. Iedereen die zich aangesproken voelt door breinbrekers en hersenkrakers, zal aan deze bundel uren puzzelplezier beleven. Haast ongemerkt maakt de lezer dan ook kennis met allerlei nieuwe stukken wiskunde, en vooral ook met de wiskundige manier van denken.

Het boek is verkrijgbaar in de boekhandel, maar het is ook rechtstreeks te bestellen via de website van de Nederlandse Wiskunde Olympiade: *http://olympiads.win.tue.nl/nwo/*

Doelen van WisKids zijn: enthousiasme voor wiskunde bevorderen bij jongeren, het imago van wiskunde verbeteren, jongeren uitdagen via wiskunde, en belangstelling bevorderen voor de exacte vakken. WisKids is een gezamenlijk initiatief van het Wiskundig Genootschap (WG), de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) en de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde-Onderwijs (NVORWO). Partners in WisKids zijn Ratio (KUN), Perspectief (STW/NWO en NVvW), Vierkant voor Wiskunde, Pythagoras, Wiskunde Olympiade en het Freudenthal Instituut. WisKids werkt samen met APS en SLO. Financieel is WisKids mogelijk gemaakt door het ministerie van OC&W, de Stichting Axis en de Stichting Arbeidsmarkt en Opleiding Metalektro. Meer informatie: *www.fi.uu.nl/wiskids* of per e-mail: *wiskids@fi.uu.nl*

PRAKTISCH WERKEN: HAAL ER ALLES UIT!

De waarde van praktisch werken wordt in het basisonderwijs allang erkend. Veel leraren beseffen dat leren-door-doen een meerwaarde heeft boven leren door te kijken of te luisteren.

[Ruth Forrester en John Searl]

Doel

Praktisch en concreet bezig zijn is uiterst belangrijk bij het ontwikkelen van begrip, het moedigt niveauverhoging aan tussen de concrete, schematische en theoretische fasen, het belicht misvattingen en verschaft de leerling de gelegenheid terug te vallen op een eerdere fase. Er zijn ook aanwijzingen dat het leren van wiskunde in contexten zorgt voor een grotere motivatie en bijdraagt aan het ontwikkelen van vaardigheden om problemen aanschouwelijk te maken en dan op te lossen. Ondanks deze voordelen wordt praktisch werken zelden toegepast bij de lessen wiskunde in het vervolgonderwijs. De meeste leraren wijten dit aan de beperkte tijd.
In dit artikel wordt de rol van praktische activiteiten besproken bij het ontwikkelen van een 'holistische' visie op de wiskunde, en er wordt een specifiek voorbeeld uit de klas gegeven. Met een holistische benadering bedoelen we hier het opzetten van een totaal netwerk van concepten. De wiskundige elementen worden dus niet afgebroken tot stukjes informatie zonder onderling verband; het geheel is groter dan de som van de delen.

Inleiding

Leermethoden voor wiskunde bevatten een groot aantal feiten en technieken. We kunnen deze rangschikken in 'families' (differentiaalrekening, algebra, ...), maar als deze feiten en technieken geen samenhangend geheel vormen, zullen ze de leerling niets zeggen. Vaak wordt op scholen gewerkt met een leerplan dat sterk rekening houdt met de beoordeling, en die beoordeling vindt dan meestal plaats in de vorm van korte en zeer beperkte toetsen. De vragen in dergelijke gerichte toetsen worden soms kleinerend aangeduid als 'afvinkbare onderwerpjes'. Zulke onderwerpen kunnen heel geschikt zijn om de vorderingen te beoordelen, maar ze vormen een zeer zwakke basis voor een samenvattend eindoordeel. Het gebruik van dit soort toetsen is soms het gevolg van het feit dat begrip wordt gezien als iets wat overdraagbaar is. Men zou dit kunnen weergeven in een karikaturale afbeelding waarop de leerling het lege vat is waarin de leraar kennis moet gieten. Feitelijk is de ontwikkeling van begrip een organisch proces. Het vereist betrokkenheid van de leerling.

De rol van praktische en/of concrete activiteiten

Praktisch bezig zijn lijkt belangrijk te zijn voor de begripsontwikkeling. Bruner (1966) beschrijft de zogeheten 'enactive', 'iconic' en 'symbolic' fasen [concreet niveau, schemaniveau en theorieniveau; zie Van Hiele, Lagerwerf e.a. Deze niveaus worden hierna aangegeven met opvolgend A, B, C; red.], waarop de wereld kan worden weergegeven en die de leerling moet doorlopen om eigen ideeën te ontwikkelen [1]. Praktische activiteiten dienen een zeer belangrijke rol

te spelen bij het ondersteunen van het leerproces in deze drie manieren van weergeven. ‘Voor de meeste kinderen is praktisch werken de meest doeltreffende manier om wiskundig begrip te ontwikkelen. Het stelt ze in staat te bepalen welke wiskundige ideeën van invloed zijn; vervolgens wordt van het hanteren van echte objecten overgestapt op de fase waarin, als weergave van deze objecten, beelden of schematische voorstellingen kunnen worden gebruikt om tot slot de laatste fase te doorlopen waarin symbolen worden gebruikt die op een abstracte manier kunnen worden gemanipuleerd’ (Cockcroft Report, 1982).
Pirie (1992) beschrijft een gedetailleerdere hiërarchie van fasen die worden doorlopen om tot begrip van een idee te komen, en een proces waarbij de leerling terugvalt op een eerder begripsniveau wanneer het bestaande, geformaliseerde onderwijs onvoldoende houvast biedt om een nieuw probleem het hoofd te kunnen bieden. Praktisch bezig zijn wordt beschouwd als ondersteuning van dit proces, aangezien de vroegere niveaus in het denken van de leerling goed toegankelijk zijn in de vorm van een concreet voorbeeld. Behalve dat het leerlingen helpt om schema’s op te stellen en nieuwe ideeën te verwerken, kunnen de gebruikte materialen ook de middelen verschaffen om een idee te onderzoeken, met als gevolg dat de leerlingen zelf constateren wanneer er sprake is van een foutief begrip en dat ze het nieuwe concept een plaats kunnen geven tussen eerder verworven concepten. ‘Bij het lesgeven aan een klas tienjarige kinderen kreeg ik onlangs te maken met twee meisjes die hadden geteld hoeveel bladzijden van een plaatselijke krant waren gewijd aan nieuws, advertenties, sport en zo verder. Ik vroeg ze welk gedeelte van de krant – uitgedrukt in een breuk – aan elke categorie was gewijd. Ze hadden breuken ‘gehad’, maar die vrijwel zeker nooit gebruikt. Hun eerste reactie was om van ‘19 bladzijden’ $\frac{1}{19}$ te maken, van ‘2 bladzijden’ $\frac{1}{2}$, en zo verder. Toen ontdekten ze dat volgens hen de krant dan voor de helft was gewijd aan geboorte-, huwelijks- en overlijdensberichten en voor de helft aan bioscoopadvertenties. Deze interpretatie van resultaten waarmee ze zelf waren gekomen, was dermate belachelijk dat ze opnieuw gingen nadenken over wat breuken eigenlijk inhielden, met als gevolg dat ze met een verbeterde en juiste lijst breuken kwamen. Eén uur praktisch bezig zijn leerde ze meer over breuken dan uren rekenles’ (McIntosh, 1982).
Praktisch werken kan leerlingen dus helpen inzien wat ze niet of niet goed begrijpen, en leraren kunnen daardoor vaststellen welke vaardigheden en ideeën hun leerlingen nog onvoldoende beheersen.

Door een gemis aan voldoende concrete ervaring kunnen leerlingen vaak problemen ondervinden. ‘Afwezigheid van hogere-orde-vaardigheden (conceptuele structuren en algemene strategieën) is vaak een gevolg van onvoldoende variatie in de aangedragen praktijkervaring’ (DES, Curriculum Matters 3, 1985). Een dergelijk gebrek uit zich bij veel leerlingen gewoonlijk in een afkeer voor algebra. Hoewel ze misschien best wel met ‘letters’ kunnen werken, bestaat er geen verband tussen die letters en andere concepten, kunnen ze niet terugvallen op een vorig niveau, hebben de aangereikte praktijk-voorbeelden geen context en staan die totaal los van de werkelijkheid. Het lijkt aannemelijk dat praktisch werken in dit verband een belangrijke rol zou kunnen spelen door het gebruik van variabelen in een context te plaatsen.

Grant en Searl (1997) voeren aan dat ‘praktisch werk leerlingen helpt bij het verwerken van nieuwe ideeën, omdat daardoor tijd wordt geboden om erover na te denken’. Dit stemt overeen met een opmerking van Polya: ‘Bij het oplossen van een wiskundig probleem beginnen we vanuit zeer heldere begrippen die we in onze geest vrij goed geordend hebben. Bij het oplossen van een praktisch probleem zijn we vaak genoodzaakt om uit te gaan van nogal vage ideeën; dan kan het verhelderen van begrippen een belangrijk onderdeel van het probleem gaan vormen’ (Polya, 1957).
Leerlingen hebben tijd nodig om met een idee te spelen, het een fundament te geven en er later, misschien in een andere vorm, naar terug te keren. Bruner (1966) pleit ervoor om dit formeel te implementeren in een ‘spiraalvormig leerplan’. Het lijkt aannemelijk dat praktische activiteiten een waardevolle rol kunnen spelen in een dergelijk soort leerplan, omdat ze de leerling de mogelijkheden kunnen verschaffen om een idee vanuit een andere invalshoek of in relatie met andere begrippen te benaderen.
Er zijn andere voordelen. Praktisch werken kan zorgen voor de ontwikkeling van gevoelselementen. Het kan de gelegenheid bieden, op een goede manier samen te werken en over wiskunde te praten. En wat belangrijk is, praktisch werk beïnvloedt de manier waarop de leerling tegen het onderwerp aankijkt.

Ondanks al deze voordelen zijn praktische activiteiten in het verleden slechts spaarzaam toegepast in de wiskundelessen van het voortgezet onderwijs. De Cockcroft-commissie meldde in 1982: ‘Zelfs op scholen waar in het algemeen een levendige en stimulerende sfeer heerste, werd de noodzaak om kinderen op een praktische manier met wiskunde te laten omgaan niet altijd ingezien, zodat in sommige klassen de houding tegenover wiskunde sterk verschilde met de houding tegenover andere vakken.’ Deze constatering werd in 1985 bevestigd in het (Engelse) rapport Curriculum Matters 3 (DES, 1985): ‘Er bestaat een tendens om het belang van (...) praktisch werken in het laatste gedeelte van het basisonderwijs en in het vervolgonderwijs te bagatelliseren. Zonder voldoende praktische ervaring zijn leerlingen niet in staat abstracte wiskundige concepten op enigerlei wijze in verband te brengen met de werkelijkheid. Alle leerlingen hebben baat bij een juiste vorm van praktisch werken, ongeacht leeftijd of bekwaamheid.’

Het bewijsmateriaal, afkomstig uit ervaringen in de klas en uit de ontwikkelingspsychologie, duidt erop dat praktisch werken een actieve ondersteunende rol kan spelen in het wiskundeonderwijs, maar dat het met name in het voortgezet onderwijs te weinig wordt toegepast. Dit kan het gevolg zijn van het onder leraren heersende gevoel dat eerst moet worden gekeken naar de exameneisen, waardoor er zorgen ontstaan over tijdgebrek bij het afwerken van het programma.

Op het Edinburgh Centre for Mathematical Education (ECME) hebben wij onderzocht of het - bij een benadering waarin praktisch werken is opgenomen - mogelijk is zowel te voldoen aan de korte-termijn-doelen van het examenprogramma als aan het lange-termijndoel van het kweken van inzicht. Wij hebben een reeks lessen samengesteld voor 16/17-jarigen die zich voorbereidden op Intermediate 2 Mathematics (Scottish Qualifications Authority) [2]. Elke les omvat een praktische taak of activiteit en maakt gebruik van een 'holistische' benadering om het begrip te versterken door verschillende wiskundige begrippen bij elkaar te brengen en onderlinge verbanden aan te geven. Hieronder geven wij de opzet van zo'n les. De beknopte beschrijving suggereert dat de leraar de les sterk stuurde; in feite was deze les echter het resultaat van de interactie tussen leerling en leraar.

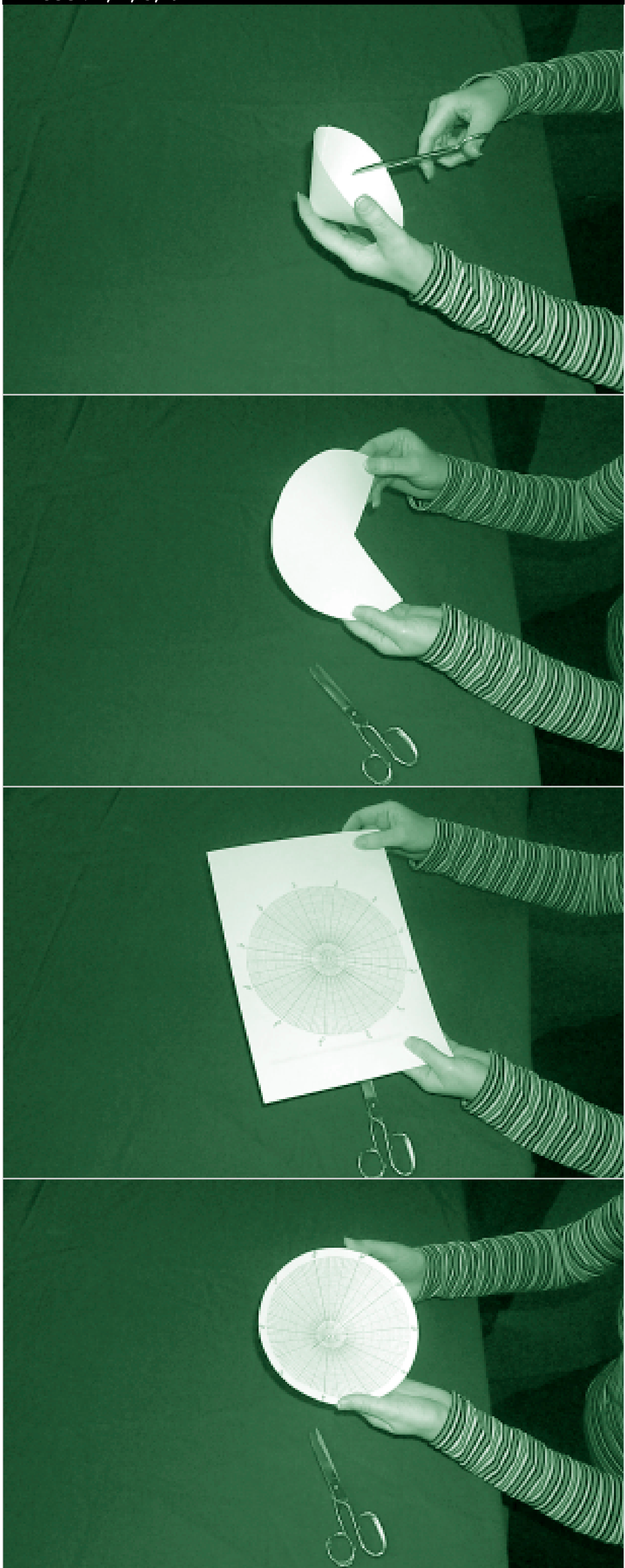
Een voorbeeld uit de klas

De opgave is om een open kegel te ontwerpen met een zo groot mogelijke inhoud. Om te beginnen wordt de probleemstelling besproken en verduidelijkt. Hoe wordt een open kegel gemaakt? Wat is de uitslag?
Het vraagstuk wordt vervolgens opnieuw geformuleerd, nu wat formeler: 'Gegeven een schijf met een bepaalde straal, welke sector van die schijf levert dan de kegel op met de grootste inhoud?'.
We gaan uit van een schijf met een straal van 10 cm die van tevoren van stevig papier is gemaakt met evenredig over de omtrek verdeelde stralen (zie de figuren 1 t/m 4). Knip de schijf vanuit het middelpunt open langs één van de stralen; vorm vervolgens een kegel door de zijkanten te laten overlappen.
Kies een overlaphoek, bijvoorbeeld 90º, en zet de kegel vast met plakband of lijm. Vul de kegel vervolgens met zeezand (zeezand is schoner en fijner dan metselzand en gemakkelijker te gebruiken!) en strijk de bovenkant zorgvuldig glad.
Het zand wordt in een maatbeker of maatglas gegoten en het volume wordt nauwkeurig gemeten (zie de figuren 5 t/m 7).
Dit proces wordt zorgvuldig herhaald bij verschillende overlaphoeken en er wordt een tabel opgesteld.

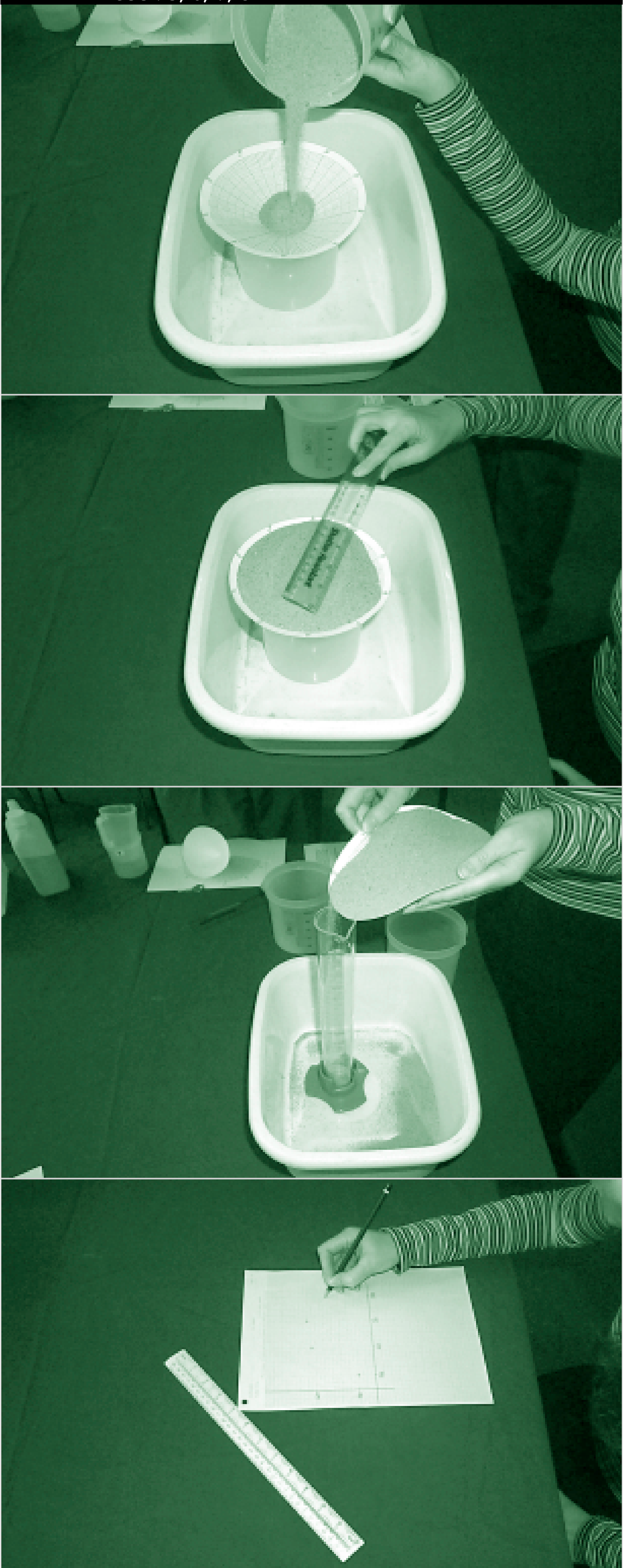
Overlaphoek (graden)	50	60	70	80	90
Volume zand (cm^3)	390	401	402	397	

De resultaten worden besproken. De 'beste' hoek wordt geschat en aan de hand van die schatting wordt een andere kegel gemaakt om meer gegevens te krijgen: een overlap van 65º geeft een inhoud van 403 ml.
Om de resultaten weer te geven worden de gegevens

FIGUUR 1, 2, 3, 4



FIGUUR 5, 6, 7, 8



van de tabel uitgezet op ruitjespapier en met een flexibele liniaal wordt de grafiek getekend van de inhoud afgezet tegen de overlaphoek (zie figuur 8 en figuur 9).
Tot slot maken we een kegel met een overlap van 65° en laten we zien dat de inhoud groter is dan de waarden in de tabel.
(Niveau A [volgens Bruner; red.] van de opdracht is nu voltooid.)

Het idee om een maximum te vinden is nu ingeburgerd en het verband tussen kegel en sector van een schijf is inzichtelijk gemaakt. Het volgende niveau (B) behelst het ontwikkelen van een wiskundig model voor het praktische probleem. Dit stelt aanzienlijk hogere eisen aan veel leerlingen. De meeste leerlingen van zestien jaar en ouder kennen de formule voor het volume van piramides en kegels alleen uit een boek of tabel. Het volume van een kegel wordt berekend met de formule

$$\textit{volume} = \tfrac{1}{3} \text{ maal } (\textit{oppervlakte grondvlak}) \text{ maal } (\textit{hoogte})$$

Wanneer r (in cm) de straal van het grondvlak is en h (in cm) de hoogte van de kegel, dan is de oppervlakte van het grondvlak πr^2 cm² en het volume $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ cm³. Met de gegevens die al bekend zijn, kunnen we deze formule verifiëren. Het is moeilijk om de hoogte van een kegel te meten, dus berekenen we die uit de andere gegevens. De straal r van het grondvlak en de hoogte h zijn via de stelling van Pythagoras in verband te brengen met de lengte l van de mantelhoogte:

$$l^2 = h^2 + r^2$$

Omdat de kegel wordt gemaakt uit een sector van de schijf met een straal van 10 cm, kunnen we zeggen dat

$$l = 10 \quad \text{en} \quad h^2 = 10^2 - r^2 \quad \text{en} \quad r^2 = 10^2 - h^2$$

Voor elke kegel meten we de straal van het grondvlak en berekenen daaruit de hoogte en dan het volume. Deze worden vergeleken met de experimentele waarden.

Overlaphoek (graden)	50	60	70	80
Volume zand (cm³)	390	401	402	397
Gemeten straal grondvlak (cm)	8,80	8,40	8,05	7,8
Berekende hoogte (cm)	4,75	5,43	5,93	6,26
Berekende inhoud (ml)	385	401	402	399

Nadat we tot de overtuiging gekomen zijn, dat de formule klopt, keren we terug naar het oorspronkelijke probleem.

Dus om te beginnen zoeken we het maximum van de functie

$$I = \tfrac{1}{3}\pi(10^2 - h^2)h \quad \text{of van} \quad I = \tfrac{1}{3}\pi r^2\sqrt{10^2 - r^2}$$

Om van deze functies een grafiek te kunnen tekenen moeten we de waarden van h en r kennen die voor

deze functie zinvol zijn. Die waarden zijn $0 < h < 10$ en $0 < r < 10$. De eerste formule ziet er aantrekkelijker uit en met een grafische rekenmachine wordt de grafiek getekend (zie figuur 10).
Met *trace* vinden we dat het maximum bereikt wordt in de buurt van $h = 5{,}744605$, en dan is $I = 403{,}05$. Voor een nauwkeuriger resultaat vinden we, door aanpassing van het venster:
$h = 5{,}776$ en $I = 403{,}07$
Door de stelling van Pythagoras weer toe te passen krijgen we de overeenkomstige waarde voor r, namelijk $r = \sqrt{100 - 33{,}37} = 8{,}1627$
Maar we moeten de overlaphoek berekenen. Dit brengt ons terug naar de constructie van de kegel (zie figuur 11). Daaruit kunnen we zien dat de omtrek van het kegelgrondvlak gelijk is aan de lengte van de cirkelboog van de sector waaruit de kegel is gevormd. De omtrek van het grondvlak van de kegel is $2\pi r$. Dit moet overeenkomen met de rand van de sector. De lengte is een gedeelte van de omtrek van de cirkel met straal 10, en wel

$$\frac{360-\theta}{360} \cdot 20\pi$$

Zo vinden we $r = 10 \cdot \dfrac{360-\theta}{360}$, waaruit we θ kunnen berekenen:
$8{,}1627 = 10 - \dfrac{\theta}{36}$
$\theta = 66{,}14$
Keren we terug naar de praktische context, dan is $\theta = 66$ een zinvolle oplossing van het vraagstuk.
(Niveau B van de opdracht is voltooid.)

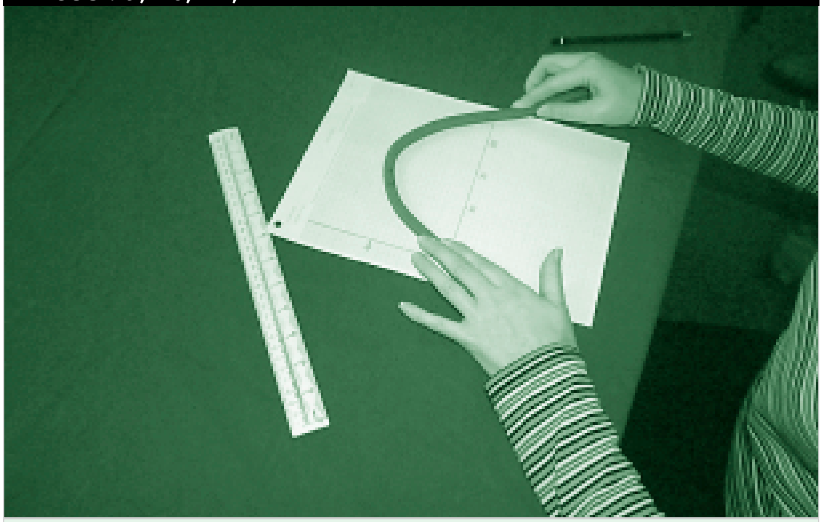
Ook met differentiaalrekening is het mogelijk de waarde van de hoogte h te berekenen waarbij de inhoud I maximaal is:

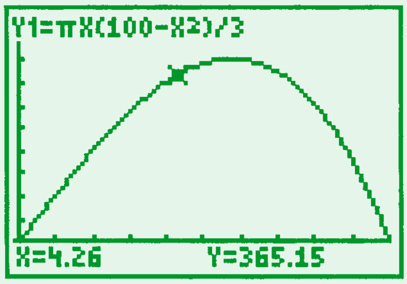
$$\frac{dI}{dh} = \tfrac{1}{3}\pi(10^2 - 3h^2)$$

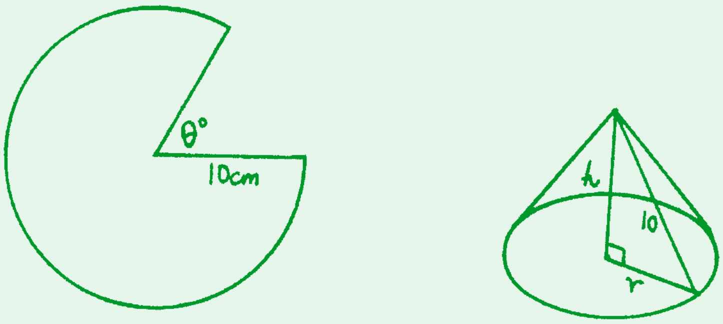
De afgeleide $I'(h)$ is gelijk aan 0 voor $h = \frac{10}{\sqrt{3}}$.
Het is eenvoudig na te gaan dat $I'(h)$ positief is links van $h = \frac{10}{\sqrt{3}}$ en negatief rechts van $\frac{10}{\sqrt{3}}$, waaruit we kunnen opmaken dat $I(\frac{10}{\sqrt{3}}) = 403{,}07$ de maximale inhoud is. Dit komt overeen met een overlaphoek die wordt verkregen uit
$\theta = 360\,(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$, zodat
$\theta = 66{,}06$
(Niveau C van de opdracht is voltooid.)

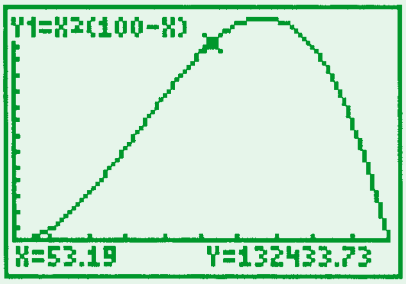
Natuurlijk zijn dit niet de enige methoden om het vraagstuk op te lossen. Het vinden van de maximumwaarde van de functie $I = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{10^2 - r^2}$ komt bijvoorbeeld overeen met het vinden van de maximumwaarde van $y = x^2(100 - x)$.
Met behulp van de grafische rekenmachine vinden wij een maximum bij $x = 66{,}7$ met $y = 148148{,}037$ (zie figuur 12). De waarde van x lijkt verdacht veel op $x = \frac{200}{3}$ waarbij dan $y = 148148{,}148$.
We kunnen bewijzen dat het een maximumwaarde is door de onafhankelijke variabele x te substitueren. Zij $x = \frac{200}{3} + z$, waarbij z de nieuwe variabele is. Dan is

FIGUUR 9, 10, 11, 12









$y = (\frac{200}{3} + z)^2 \cdot (\frac{100}{3} - z)$
Hieruit kunnen we afleiden dat
$y < \frac{400.000}{27} = 148148{,}148$
voor waarden van z dicht bij 0, ofwel voor waarden van x dicht bij $\frac{200}{3}$. Dit houdt in dat $y = \frac{400.000}{27}$ een lokaal maximum van de functie is.

Vaardigheden en concepten inventariseren

Het is niet eenvoudig om activiteiten te bedenken die tegemoetkomen aan de nauwgezette en gedetailleerde eisen van een examenprogramma. Het is dus in dit geval, en bij andere soortgelijke activiteiten, nuttig om een lijst op te stellen van de vaardigheden en concepten die in het spel zijn. Natuurlijk kan zo'n lijst niet uitputtend zijn. In wezen bedachten we natuurlijk een belangwekkende activiteit en persten daar zoveel mogelijk wiskunde uit als we konden. Aan leerlingen vragen een audit [3] uit te voeren op de vaardigheden en concepten die ze hebben toegepast, geeft hun de zekerheid dat de activiteit aansluit op hun behoeften en dat ze hun tijd niet verdoen. Concepten en vaardigheden houden vaak zeer nauw verband met elkaar, zodat niet altijd is uit te maken welke is toegepast, met daarnaast de mogelijkheid dat ze allebei zijn gebruikt. In het hierboven gegeven voorbeeld zou een dergelijke 'audit' de volgende inventarisatie-tabel kunnen opleveren.

Concept	Vaardigheid
Kegel met uitslag?	Een kegel maken
Inhoud	Een tabel maken
Volume	Een grafiek tekenen
Nauwkeurigheid	Meting
Eenheden: ml, cm^3	Een grafiek interpreteren
Verhouding	Een formule gebruiken
Maximum waarde	Formules herleiden
...	Modelleren
...	Een eenvoudiger gelijkwaardig probleem identificeren
...	...

Conclusie

Een deel van het leerproces zelf is, dat wij beter gemotiveerd zijn om te leren als wij zien waartoe die kennis leidt. Praktisch werken, zij het met slechts vereenvoudigde vraagstukken, helpt bij het verschaffen van die motivatie. Het legt feiten voorgoed vast, en vaardigheden die de leerling eerder heeft gebruikt worden nogmaals geoefend. Begripsmatige onvolkomenheden en fout aangeleerde vaardigheden komen erdoor aan het licht. Over een breed terrein worden kennis en begrip bij elkaar gebracht waardoor geïntegreerde wiskundekennis wordt gestimuleerd, en waardoor er geen sprake meer is van een verzameling onsamenhangende wiskundige feiten en vaardigheden. Praktisch werken maakt het mogelijk het doel te bereiken dat Bruner (1966) heeft verwoord:

'Wij onderwijzen een onderwerp niet om wandelende naslagwerken over dat onderwerp te vervaardigen, maar eerder om een leerling zover te krijgen dat hij of zij zelf wiskundig gaat denken ... zodat die leerling de belichaming wordt van het proces van kennis opdoen.'

Noten

[1] Bruner (1966) gebruikt de termen 'enactive = bepalend', 'iconic = beeldend' en 'symbolic = symbolisch' om de verschillende methoden te beschrijven waarop een idee wordt weergegeven, methoden die zijn gebaseerd op fysieke eigenschappen, picturale/grafische kenmerken en taal/symbool.
[2] Intermediate 2 Mathematics, Scottish Qualifications Authority, 1999. Dit is het derde van vijf studieniveaus uit een opleiding voor niet meer leerplichtige jongeren (16 jaar en ouder) in Schotland.
[3] Nauwgezet onderzoek van de activiteit om de toegepaste wiskundige vaardigheden en concepten te inventariseren.

Referenties

- J. Bruner: Towards a Theory of Instruction, Harvard University Press (1966).
- W.H. Cockcroft: Mathematics Counts / Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools, HMSO (1982).
- S. Pirie: Watching Their Understanding Grow / Conference Report Mathematics Teaching 1992, ECME (Edinburgh, 1992)
- A. McIntosh: Practical Materials and Practical Work, in: Some Reflections, Mathematics Teaching 100, pp.15-17 (1982)
- DES (Department of Education and Science): Curriculum Matters 3, in: Mathematics from 5 to 16, HMSO (1985).
- F. Grant, J.W. Searl: Practical Activities in the Mathematics Classroom, in: Mathematics in School (26,4) 4, pp.27-28, (1997).
- G. Polya: How to Solve It, Princeton University Press (1957).

Over de auteurs

John Searl (e-mailadres: searl@maths.ed.ac.uk) is hoofd van het Edinburgh Centre for Mathematical Education (ECME) van The University of Edinburgh. Onderzoeksmatig is zijn belangstelling vooral gericht op de implementatie van de psychologie van het leren in klassikaal verband.
Ruth Forrester (e-mailadres: ruth@education.ed.ac.uk) is voormalig lerares in het voortgezet onderwijs. Ze doet nu onderzoek en doceert aan het Edinburgh Centre for Mathematical Education.

Nadere informatie over het ECME kan gevonden worden op www.education.ed.ac.uk/ecme

WISKUNDE: INTEGREREN OF DIFFERENTIËREN?

Over het verwerven van onderzoeksvaardigheden

[Bert Zwaneveld]

Inleiding

Wiskunde heeft het niet gemakkelijk. In het voortgezet onderwijs lijkt het er soms op dat wiskunde verbannen is naar het natuur- en techniekprofiel. Want, zo wordt een beetje badinerend gezegd, wiskunde in de eerste fase en wiskunde A in de tweede fase zijn niet meer dan een veredeld soort rekenen. En die wiskunde B in het N&T-profiel van de tweede fase is maar een beperkt, marginaal uithoekje van het voortgezet onderwijs.

Leerlingen in het vwo kiezen nauwelijks voor een studie wiskunde aan een universiteit. Uit het visitatierapport over het universitaire wiskundeonderwijs dat in juni 2002 is verschenen (VSNU, Vereniging van Universiteiten) blijkt dat het aantal instromers bij wiskunde tussen de studiejaren 1988/1989 en 1999/2000 is gezakt van 427 naar 178. Voor de afgestudeerde havo- en vbo/mavo-leerlingen geldt ongeveer hetzelfde. Hier is het effect zelfs nog wat sterker, want wiskunde is geen apart vak in het hbo en in het mbo. En soms worden opleidingen met een groot wiskundeaandeel zelfs opgeheven, zoals medio 2002 met technische natuurkunde bij de Fontys hogescholen gebeurd is. Opleidingen zonder wiskunde liggen veel beter in de markt dan opleidingen op het gebied van natuur en techniek.

Leerlingen vinden wiskunde saai. De vraag is of dit met de wijze van aanbieden als toepassingsgericht vak te maken heeft. Ten gevolge van deze aanbiedingswijze krijgen de leerlingen de indruk dat wiskunde in wezen ondergeschikt is aan andere vakken. Voor hen zal het daardoor in ieder geval een vak met minder perspectief zijn.

Vraagstelling

De vraag is vervolgens, wat er aan deze in mijn ogen zorgelijke positie van wiskunde gedaan kan worden. In het hbo, het mbo (eigenlijk de bve-sector; bve staat voor beroeps- en volwasseneneducatie) en universitaire opleidingen met wiskunde als ondersteunend vak is de laatste jaren ervaring opgedaan met wiskunde geïntegreerd in het vak waarvoor het ondersteuning moet bieden.

Leidt dit tot goede resultaten? Zo ja, dan kan het voortgezet onderwijs er misschien zijn voordeel mee doen.

Een beeld van wiskunde in het voortgezet onderwijs

Veel leerlingen vinden wiskunde niet alleen een saai, maar ook een moeilijk vak. Je moet als leerling het een en ander weten, terwijl je dat in de praktijk vaak snel weer vergeet en vaak ook zonder enig probleem kúnt vergeten. Dit geldt vooral voor zaken met een algebraïsch aspect, zoals de *abc*-formule, maar zelfs ook voor de stelling van Pythagoras. Leerlingen halen immers veel 'wiskunde' uit steeds geavanceerdere rekenapparaten, waardoor wiskunde lijkt te verworden tot knoppen drukken. Wiskunde heeft een niet al te best imago. En dat kan tot (verdere) marginalisering leiden.

Desondanks moet het voortgezet onderwijs de leerlingen voorbereiden op de technische of natuurwetenschappelijke vervolgopleidingen van de universiteiten, het hbo en het mbo, zodanig dat de gesignaleerde negatieve tendens in zijn tegendeel verkeert. Gegeven het noodzakelijke kennisniveau van

de Nederlandse bevolking blijft het immers noodzakelijk dat iedereen in het voortgezet onderwijs zich bepaalde wiskundige competenties eigen maakt. (De verschillen tussen de wiskundige competenties die in de verschillende sectoren van het voortgezet onderwijs verworven moeten worden, zijn in mijn ogen gradueel, niet essentieel.) Met ‘competentie’ wordt veelal bedoeld dat men in een concrete taaksituatie goed kan opereren door adequaat gebruik te maken van de verworven kennis, vaardigheden en attitudes. Maar kennis en *echte* vaardigheden, dus niet: het kunnen bedienen van knoppen, staan in een kwaad daglicht. Al is er wel enige verbetering ten opzichte van een aantal jaren geleden te bespeuren: bewijzen is weer een beetje terug, maar beperkt zich tot wiskunde B van het N&T-profiel. Een echte doorlopende leerlijn die hierop voorsorteert en in de brugklas begint, is er helaas niet. Verder zijn er in de bovenbouw van havo en vwo praktische opdrachten en profielwerkstukken. Maar een heel voorzichtige conclusie uit de eindexamenresultaten van het eerste tijdvak van 2002 is, dat het met name met de algebraïsche vaardigheden nog slechter gesteld is dan een jaar geleden gedacht of op zijn minst gehoopt werd.
Dit moet welhaast verband houden met het studiehuis. Bij de invoering ervan zijn zeker fouten gemaakt waardoor er te weinig uren zijn. Zie bijvoorbeeld *Het denken bevorderen*, de oratie van Anne van Streun uit 2001. Maar ook bij de uitvoering verloopt niet alles vlekkeloos. ‘Vaardigheden, waaronder onderzoeks-vaardigheden’ is een kernbegrip van het studiehuis.

integreren van wiskunde-onderwijs lijkt een goed idee

Doordat er minder uren beschikbaar zijn, moeten wiskundeleraren en wiskundesecties keuzes maken. Waaraan wordt prioriteit gegeven: aan de basale wiskundige (kennis en) vaardigheden, waaronder die algebraïsche vaardigheden, of aan iets anders?

Hbo-dag van de NVvW, medio 2001

Medio 2001 werd onder auspiciën van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren een studiedag gehouden gericht op wiskundeonderwijs in het hbo. Ik leidde daar een workshop onder de titel: *Wiskunde apart of geïntegreerd?* De context was de volgende. Veel hbo-opleidingen organiseren hun onderwijs in de vorm van probleemgestuurd onderwijs of project-onderwijs. Wiskunde wordt daarbij geïntegreerd in het betreffende toepassingsgebied. Een voorbeeld is het vak logistiek management waarbij de studenten onder andere moeten lineair programmeren. De bedoeling van de workshop was om ervaringen met een geïntegreerde aanpak van wiskundeonderwijs uit te wisselen en om de voor- en nadelen van zo’n geïntegreerde aanpak te inventariseren. Hieronder volgt een deel van het verslag dat ik na afloop van die workshop heb gemaakt.

Bij deze werkgroep waren ongeveer 30 deelnemers aanwezig van wie ongeveer een kwart ervaring heeft (gehad) met de geïntegreerde aanpak van wiskunde-onderwijs, waarbij wiskundedocenten samen met collega’s van andere vakken aan de hand van een thema en een of meer problemen wiskundeonderwijs verzorgen. In de inleiding heb ik deze geïntegreerde aanpak tegenover de aparte aanpak (met een voor de hand liggende definitie) gesteld.
De opdracht aan de deelnemers was als volgt. Veronderstel dat je bij een zelf te definiëren thema, c.q. probleem, geïntegreerd wiskundeonderwijs moet verzorgen. Probeer, in groepjes van drie tot vier deelnemers, dit wiskundeonderwijs zo concreet mogelijk te beschrijven.
In de korte terugrapportage vanuit een aantal van de groepjes, waarin ook praktijkervaringen werden meegenomen, kwam duidelijk naar voren dat de geïntegreerde aanpak niet de voorkeur van de deelnemers heeft.
De belangrijkste argumenten hiervoor waren:
- de samenhang tussen wiskundige begrippen, methoden en onderdelen gaat helemaal verloren; hierbij werd wel opgemerkt dat die in de aparte aanpak ook al niet erg groot is;
- voor de geïntegreerde aanpak is enige ervaring in het werken met wiskundige modellen een vereiste; hiermee wordt bedoeld: zelf een (eenvoudig) model opstellen, c.q. bewerken, dan wel er ook echt mee aan de slag gaan; dergelijke (basale) voorkennis ontbreekt;
- studenten laten het wiskundige werk in de geïntegreerde aanpak de sluitpost van hun activiteiten zijn.

De conclusie die ik hieruit getrokken heb is, dat in theorie het integreren van wiskundeonderwijs een goed idee lijkt, maar dat het in feite bijdraagt aan het negatieve imago en dus aan de marginalisering. Want studenten realiseren zich heel goed dat (basale) voorkennis en vaardigheden in het werken met modellen essentieel is. Het feit dat die kennis en vaardigheden niet eerst worden aangebracht door hun wiskundedocent interpreteren zij als: ‘Onze wiskunde-leraar (of –lerares) neemt wiskunde kennelijk niet helemaal serieus.’ En dit leidt er weer toe dat de studenten het vak wiskunde niet serieus nemen en tot sluitpost van hun activiteiten maken.

Onderzoeksvaardigheden bij wiskunde

Mijn conclusie was en is dat de geïntegreerde aanpak niet de oplossing is om iets aan de zorgelijke positie van wiskunde te doen. De eerste twee van de drie genoemde argumenten maken duidelijk dat enige ervaring in het werken met wiskundige modellen een vereiste is, alvorens een eventuele geïntegreerde aanpak kan functioneren. Een nadere uitwerking hiervan is te vinden in de onderzoeksvaardigheden die genoemd worden in domein A, 'vaardigheden', van het examenprogramma voor wiskunde A voor het vwo. De bijbehorende eindtermen luiden als volgt:

12 logische relaties tussen gegevens, beweringen en resultaten aanbrengen en beoordelen en relevante gegevens scheiden van minder relevante gegevens;
13 gegevens met elkaar en met de probleemstelling in verband brengen, op grond daarvan een passende aanpak kiezen en deze zo mogelijk opsplitsen in deeltaken;
14 in een tekst verstrekte gegevens doelmatig weergeven in een geschikte wiskundige representatie (model);
15 vaststellen of een gekozen model voldoet en, indien nodig, een bijstelling hiervan suggereren;
16 vaststellen of er aanvullende gegevens nodig zijn en zo ja, welke;
17 onderzoeken in hoeverre het model bijgesteld moet worden ten gevolge van wijzigingen in de gegevens;
18 een bij het model passende wiskundige oplossingsmethode correct uitvoeren;
19 resultaten betekenis geven in de context en binnen die context kritisch analyseren;
20 de nauwkeurigheid van de gegevens of werkwijzen betrekken bij de beoordeling van het eindresultaat;
21 reflecteren op de gemaakte keuzen voor representatie, werkwijze, oplossingsmethode en resultaten en deze onder woorden brengen.

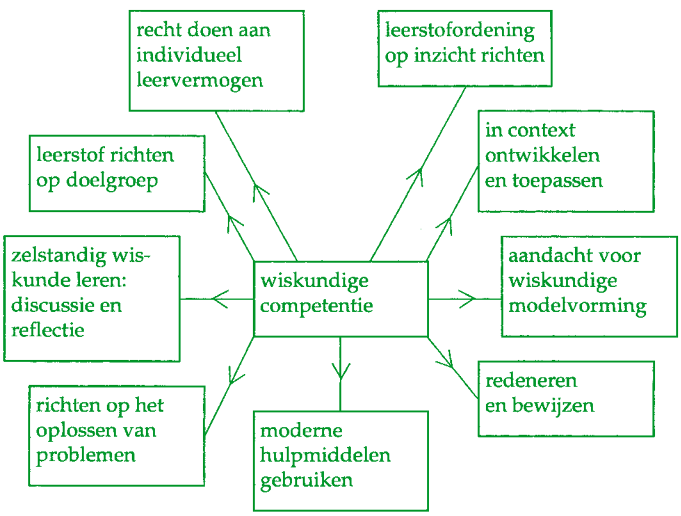
Deze tien onderzoeksvaardigheden vereisen heel wat parate wiskundige kennis. Zo wordt er gesproken over een geschikte wiskundige representatie of model. Die representatie kan algebraïsch van aard zijn, met behulp van vergelijkingen, formules (dus inclusief variabelen), meetkundig door middel van een tekening, of statistisch met tabellen of grafieken. Ook wordt gesproken over een bij het model passende wiskundige oplosmethode. Dat betekent dat allerlei algebraïsche, meetkundige of statistische kennis en vaardigheden moeten worden beheerst. In de laatste eindterm wordt over reflectie gesproken. Reflectie zonder kennis van zaken is echter uitgesloten.

Onderzoeksvaardigheden verwerven zonder eerst basale wiskundige vaardigheden op te doen is dus niet mogelijk.

De volgende vraag is hoe een en ander onderwezen c.q. geleerd moet worden. In mijn proefschrift *Kennisgrafen in het wiskundeonderwijs* in 1999 heb ik wiskundige competenties niet vanuit de eindtermen maar vanuit de vigerende schoolwiskunde zelf geanalyseerd: wat zijn de relevante kennis- en vaardigheidselementen? Verder heb ik de *kennisgraaf* als een hulpmiddel hierbij ontwikkeld en getest om wiskundige kennis en vaardigheden gestructureerd in kaart te brengen. In de figuren 1 en 2 is het resultaat van die analyses gevisualiseerd. Uit het onderzoek kon ik, met enig voorbehoud, de volgende conclusies trekken:
1 In de huidige schoolwiskunde leren de leerlingen niet, wat de samenhang en de structuur van de verschillende wiskundige onderwerpen is.

FIGUUR 1

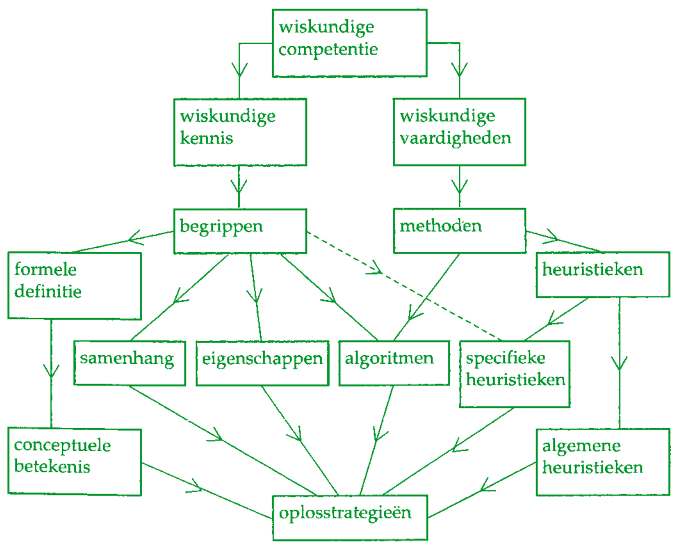
Schematische weergave van de didactische aspecten van wiskundeonderwijs dat gericht is op het verwerven van wiskundige competentie



FIGUUR 2

Nadere uitwerking van de interne structuur van wiskundige competentie

(De leesrichting is van boven naar beneden. Een verbinding betekent 'bestaat uit' of 'heeft' of nog algemener 'houdt verband met'. Het verband tussen begrippen en specifieke heuristieken is zwakker dan tussen begrippen en algoritmen. Daarom is het eerste verband met een stippellijn aangegeven.)



2 Leren structureren, mits regelmatig beoefend, kan helpen bij het aanpakken en oplossen van complexe problemen. (Complexe problemen zijn, kort en krachtig geformuleerd, problemen die met de hiervoor genoemde onderzoeksvaardigheden aangepakt en opgelost kunnen worden.)
3 Voorwaarde voor leren structureren is het op enig niveau beheersen van de afzonderlijke wiskundige kennis en vaardigheden.
De conclusies van de hbo-dag van onze vereniging sluiten hier bij aan.

Integreren, differentiëren of nog iets anders?

En dan is nu de volgende vraag aan de orde: Als het integreren van wiskunde niet de oplossing is, wat dan wel? Om te beginnen moge het duidelijk zijn dat ik niet terug wil naar oude tijden, toen de wiskunde 'gedifferentieerd' (lees: gefragmenteerd of geïsoleerd) onderwezen werd. Anne van Streun heeft in zijn proefschrift *Heuristisch wiskundeonderwijs* in 1989 al laten zien dat 'wiskunde eerst, dan toepassen' niet goed werkt. En Jan de Lange heeft in zijn proefschrift *Mathematics, insight and meaning. Teaching, Learning and Testing of Mathematics for the Life and Social Sciences* in 1987 laten zien dat contexten positief kunnen functioneren.

Uitgaande van de drie conclusies naar aanleiding van de workshop *Wiskunde apart of geïntegreerd?* is mijn aanbeveling:

Breng een goede balans aan tussen de wiskunde zelf en de toepassing ervan.

Dat betekent dat de wiskundige begrippen aan concrete contextrijke situaties ontleend worden, conform de ideeën van Freudenthal en zoals die verder ontwikkeld en in praktijk gebracht zijn door de medewerkers van het Freudenthal instituut. Hun samenhang, de bijbehorende wiskundige methoden en technieken en de bijbehorende wiskundige redeneringen en eventuele bewijzen worden ook in een 'kale' wiskundige context geleerd en geoefend. Maar dat betekent ook dat elke keer het geleerde steeds weer opnieuw in nieuwe contexten wordt toegepast. Daarbij wordt, naarmate de leerlingen vorderen in hun schoolloopbaan, steeds uitdrukkelijker aandacht gegeven aan onderzoeksvaardigheden, te beginnen met de notie dat de werkelijkheid in de geabstraheerde vorm van een wiskundig model wordt gerepresenteerd, tot en met het binnen dat model oplossen van het probleem en het interpreteren van de resultaten in de situatie van het oorspronkelijke probleem.

Een voorbeeld

Hoe kan dergelijk wiskundeonderwijs er concreet uit zien? Hier volgt een voorbeeld waarbij over een aantal leerjaren heen aandacht aan onderzoeksvaardigheden wordt besteed. Het is ontleend aan de statistiek. De beschrijvingen hierna zijn globaal gehouden.
Het betreft het geboortegewicht van baby's. De onderzoeksvraag is, of er verschil is tussen het geboortegewicht van de baby's uit twee landen van de Europese Unie, bijvoorbeeld Nederland en Ierland. Men beschikt over de gegevens van steekproeven uit de twee landen.
De eerste onderzoeksaanpak, bij leerlingen in de eerste fase, kan zijn: het vergelijken van het gemiddelde geboortegewicht; noodzakelijke maar vrijwel zeker aanwezige voorkennis is het begrip 'gemiddelde'.
Als het ene gemiddelde groter is dan het andere, wil dat echter nog niet zeggen dat elke baby van het ene land bij de geboorte zwaarder is dan elke baby van het andere land. De (onderzoeks)vraag is: hoe kun je het uiteraard negatieve antwoord inzichtelijk maken? Kennis van grafische voorstellingen en van het begrip 'spreiding' is hierbij noodzakelijke voorkennis.
De in de tweede fase toe te passen onderzoeksaanpak kan zijn kan zijn, de gewichten van paren baby's uit de twee landen te vergelijken en met de tekentoets de hypothese te toetsen of het geboortegewicht van de baby's significant verschilt. Ook hier is behoorlijk wat voorkennis en beheersing van bepaalde vaardigheden essentieel.
Tenslotte kan de onderzoeksvraag gesteld worden, hoe groot de kans is dat het ene geboortegewicht groter is dan het andere. (De leerlingen zullen wel geholpen worden met het vinden van de verdeling van het verschil tussen beide geboortegewichten.)
Dergelijke onderzoeken kunnen niet uitgevoerd worden zonder degelijke wiskundige kennis en vaardigheden. Het opdoen van dergelijke kennis en vaardigheden tegelijk met het uitvoeren van het betreffende onderzoek zal noch tot het beklijven van die kennis en vaardigheden, noch tot het beklijven van de betrokken onderzoeksvaardigheden leiden.
Dat moet vooraf gebeuren.

Literatuur

- *J. de Lange: Mathematics, insight and meaning. Teaching, Learning and Testing of Mathematics for the Life and Social Sciences, proefschrift Universiteit Utrecht (1987).*
- *H. Sormani e.a.: Exacte vakken en competenties in het beroepsonderwijs, CINOP, 's-Hertogenbosch (2002).*
- *A. van Streun: Het denken bevorderen, oratie Rijksuniversiteit Groningen (2001).*
- *A. van Streun: Heuristisch wiskundeonderwijs, proefschrift Rijksuniversiteit Groningen (1989).*
- *Onderwijsvisitatie Wiskunde, 2002, Vereniging van Universiteiten (VSNU), Utrecht (2002).*
- *B. Zwaneveld: Kennisgrafen in het wiskundeonderwijs, 1999, proefschrift Open Universiteit Nederland (1999).*

Over de auteur

Dr. Bert Zwaneveld (e-mailadres: bert.zwaneveld@ou.nl) is universitair hoofddocent bij de Open Universiteit Nederland, waar hij samen met anderen verantwoordelijk is voor de wiskundecursussen van de wetenschappelijke opleidingen Technische informatica en Milieu-natuurwetenschappen. Daarnaast is hij op tal van terreinen actief ten behoeve van het wiskundeonderwijs in Nederland.

'JUST IN TIME'-ONDERSTEUNING STATISTIEK IN PROJECTONDERWIJS TOEGEPASTE NATUURWETENSCHAPPEN

In projectonderwijs pakken studenten een praktijkprobleem aan door het in subproblemen te verdelen. Als een begrip, methode of techniek precies op dát moment aan de orde komt waarop het voor de student een ontbrekende schakel vormt bij de oplossing van zijn subprobleem, dan is het onderwijs volgens de 'just in time'-methodiek ingericht. Op die manier zaai je in vruchtbare bodem, ondanks het feit dat theoretische consistentie niet altijd volledig gegarandeerd is.

[Jan Jelle Claus]

Inleiding

De rol die het statistiekonderwijs speelt in het hbo is veelal ondersteunend. Statistiek wordt in het hoger technisch onderwijs vooral gebruikt om verzamelde gegevens van gemeten grootheden te karakteriseren, om uitspraken te doen over onbekende onderliggende parameters, om grootheden te vergelijken en om het toekomstig verloop ervan te voorspellen.
Tot voor kort werd statistiek bij de toegepaste natuurwetenschappen vaak gegeven in de vorm van enkele opeenvolgende zelfstandige ‘vakken’ naast ‘vakken’ die tot de kern van de desbetreffende opleiding behoorden. De onderliggende bedoeling daarvan was de volledige abstracte structuur van het begrippenkader uit de statistiek duidelijk te maken. Leidraad daarbij was theoretische consistentie. Van ieder begrip dat later gebruikt wordt, zijn alle theoretische aspecten eerder behandeld. Uiteindelijk zou dit de ontwikkeling van het probleemoplossend vermogen bij de studenten ten goede komen. In een laatste vervolgvak kregen de studenten een probleem voorgelegd, dat gemotiveerd werd door een kernvak uit de toegepaste natuurwetenschappen. Oplossing van dit praktische probleem vereiste dat statistische begrippen, theorieën en methoden uit de voorafgaande vakken bij elkaar gebracht werden.

Sinds de invoering van projectonderwijs in het hbo is de zelfstandigheid van het statistiekonderwijs steeds meer onder druk komen te staan, juist door het ondersteunende karakter. In projectonderwijs pakken studenten een praktijkprobleem aan door het in subproblemen te verdelen. Deze subproblemen komen in de verschillende fasen van het projectmatig werken aan de orde, zie [7]. De indeling in fasen en subproblemen is bij projectonderwijs niet meer vakmatig georiënteerd. Het probleem dat de studenten in een project aanpakken, stelt het kader vast waarbinnen bijbehorende vakonderdelen geïntegreerd aan de orde moeten komen. Deze vakonderdelen worden volgens het ‘just in time’-principe (JIT) in ondersteunende cursussen opgenomen. Dat houdt in dat nieuwe begrippen, methoden of technieken precies op dat moment aan de studenten aangeboden worden waarop zij voor het oplossen van een subprobleem vereist zijn.

Veel gehoord is de vrees dat op die manier de samenhang van het totale begrippenkader van de statistiek verloren zou gaan en dat de studenten de competentie zouden verliezen om hun meetgegevens kritisch te analyseren en te beoordelen.
In [4] en [5] wordt een soortgelijke vrees beschreven voor het wiskundeonderwijs. Kort samengevat wordt in [5] geconstateerd dat wiskunde als ondersteunend vak de concurrentie met voor studenten veel interessantere projectonderwerpen niet aankan, terwijl [4] stelt dat de verbrokkeling van het wiskundeonderwijs ook in nieuwe onderwijsvormen tegengegaan dient te worden door een continue opbouw in een vaste stroom van ondersteunend onderwijs.

In dit artikel plaats ik enkele kanttekeningen bij de vrees voor achteruitgang van het vermogen problemen op te lossen en bij de noodzakelijkheid van een continue theoretisch consistente stroom van ondersteunend onderwijs. Ik doe dat als ontwerper en docent van een ondersteunende statistiekcursus binnen een curriculum van projectonderwijs in de toegepaste natuurwetenschappen volgens de JIT-methode.
Ik zal dit illustreren aan de hand van die nieuwe statistiekcursus voor studenten toegepaste natuurwetenschappen. Daarin heb ik gekozen voor een andere opbouw van het statistiekonderwijs. Die maakt dat studenten vanaf het begin van hun studie de praktische onderzoeksvaardigheid verwerven, statistisch gefundeerde uitspraken te doen gebaseerd op eigen metingen. Dit sluit naadloos aan bij de competentie dat een afgestudeerde hbo’er in de toegepaste natuurwetenschappen meetgegevens kritisch kan beschouwen en beoordelen.

Kanttekeningen

De stelling dat het inzicht van studenten in de samenhang van het statistische begrippenkader verloren gaat bij het verlaten van de oude aanpak volgens theoretische consistentie, veronderstelt dat iedere student dit inzicht bezat. Dit valt te betwijfelen. De verdeling van de statistiek in een aantal logisch opeenvolgende ‘vakken’, bijvoorbeeld beschrijvende statistiek, kansrekening, kansverdelingen en toetsing, leidt bij veel studenten tot even zoveel verschillende begrippenkaders. De verbindingen tussen deze begrippenkaders zijn vaak zwakke schakels. Nadeel van deze aanpak is bovendien dat toepassingen uit de beroepspraktijk pas in een later stadium uitgewerkt kunnen worden, omdat dwarsverbanden die in praktijksituaties naar voren komen onderbelicht blijven.

Om de toepassingen uit de beroepspraktijk van de hbo-ingenieur eerder tot zijn recht te laten komen, heb ik gekozen voor een indeling van de statistiek naar praktijktoepassing. Door verschillende soorten toepassingen naast elkaar te zetten, leert de student voor iedere toepassing:

- het soort gegevens statistisch te karakteriseren,
- de kans op een mogelijke uitkomst te berekenen,
- de betrouwbaarheid weer te geven van uitspraken over onderliggende parameters.

Voorbeeld van studieboeken die zo’n indeling ook volgen zijn [2] over chemometrie in analytische chemie en [3] over biometrie.
In vergelijking met de oude indeling (zie bijvoorbeeld [1]) komen zo per toepassing toch onderdelen uit de beschrijvende statistiek, kansrekening, kansverdelingen en toetsing aan bod. Als alle toepassingsgebieden van statistiek in de toegepaste natuurwetenschappen in verschillende ondersteunende cursussen naast elkaar gezet worden, blijken alle onderwerpen uit het ‘oude theoretisch consistente’ curriculum ook aanwezig te zijn in de nieuwe toepassingsgerichte indeling.
Het is duidelijk dat de ‘oude vertrouwde’ formele

theoretische consistentie terrein verliest bij deze indeling, omdat vergelijkbare theoretische begrippen bij verschillende toepassingen aan de orde komen. Een groot winstpunt is echter dat reeds in een vroeg stadium van de studie voorbeelden uit de latere beroepspraktijk van de hbo'er uitgewerkt worden. In het bijzonder worden op het hbo binnenkomende havisten, veelal met de studieprofielen Natuur & Gezondheid en Natuur & Techniek, hierdoor veel meer gemotiveerd dan door formele theoretische consistentie.

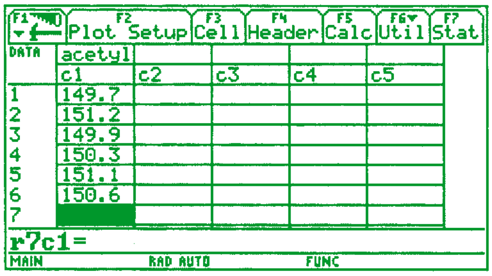
De indeling naar praktijktoepassing van de statistiek is bovendien goed in te passen in het projectonderwijs in de toegepaste natuurwetenschappen aan het hbo. Per project houden de studenten zich bezig met één soort toepassing uit de praktijk van hun latere beroepsbeoefening. Als juist die statistische begrippen en methoden aan de orde komen die bij die toepassing centraal staan, wordt precies voldaan aan het 'just in time'-principe.

Voor een correct begrip van sommige statistische methoden blijft het echter wel vereist dat niet rechtstreeks in het project toepasbare onderwerpen een plaats krijgen in het onderwijsprogramma. In die zin ben ook ik, als ontwerper en docent van zo'n JIT-statistiekcursus, niet ontkomen aan het toevoegen van enkele 'theoretisch consistente' onderdelen.
Verklarende onderdelen mogen echter geenszins ballast voor de student gaan vormen. Dan treedt een scheiding op tussen het project en de ondersteunende statistiekcursus en is er geen sprake meer van een geïntegreerde ondersteunende statistiekcursus. Om zo'n scheiding te voorkomen is het noodzakelijk dat de projectopdracht om een statistisch resultaat vraagt.

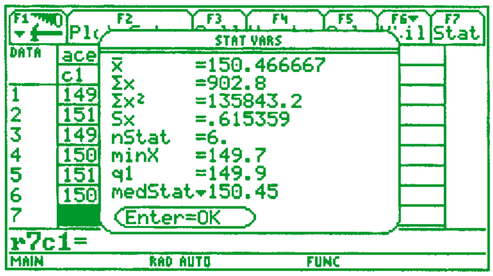
Een ondersteunende statistiekcursus: Doel, motivatie en faciliteiten

Als voorbeeld van een JIT-cursus bespreek ik de ondersteunende statistiekcursus bij de projectopdracht 'Aspirine'. Het ontwerp van deze cursus heb ik in het najaar van 2001 voltooid. In het voorjaar van 2002 heb ik deze cursus voor de eerste maal gegeven. De projectopdracht 'Aspirine' wordt uitgevoerd door instromende havisten in de tweede helft van het eerste studiejaar.
In de opdrachtformulering voor het project 'Aspirine', zie [6], staat:
Maak tien aspirinetabletten van gelijke samenstelling en bepaal het gehalte aan werkzame stof.
De vereiste garantie van gelijke samenstelling wordt in de studiehandleiding ([6]) vertaald in de statistische vraag, een betrouwbaarheidsinterval op te stellen voor het gehalte werkzame stof in de aspirines. Door de aard van de opdracht wordt kritische beschouwing en beoordeling van meetgegevens alleen geoefend voor metingen van grootheden die aan normale verdelingen voldoen.
Iedere student die de statistiekcursus volgt, heeft een TI-92Plus tot zijn beschikking (zie [9]). Op deze

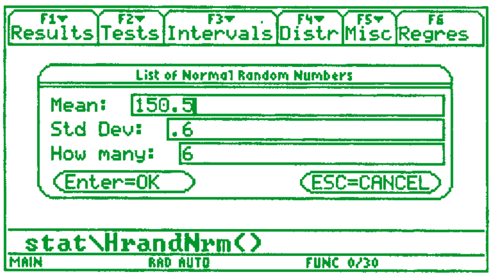
FIGUUR 1A Voorbeeld van gemeten data



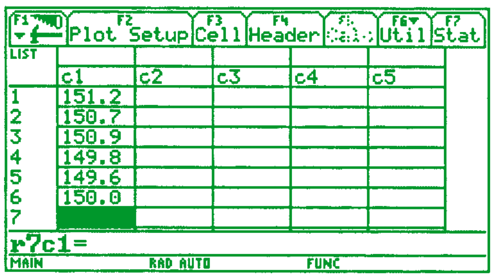
FIGUUR 1B Maatstaven van de data uit figuur 1A



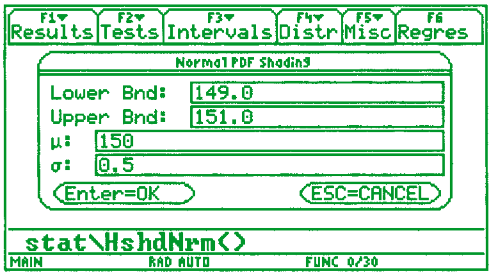
FIGUUR 2A Simulatie van trekkingen uit de normale verdeling



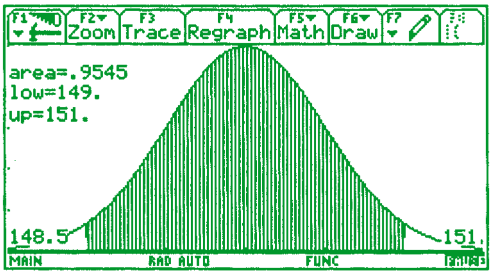
FIGUUR 2B Resultaat van de simulatie uit figuur 2A



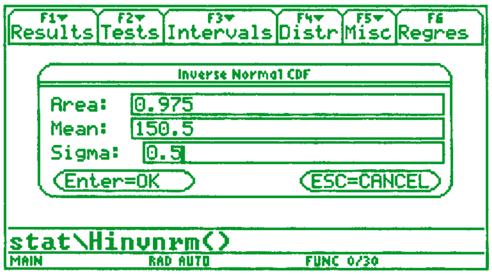
FIGUUR 3A Kansberekening bij willekeurige normale verdeling



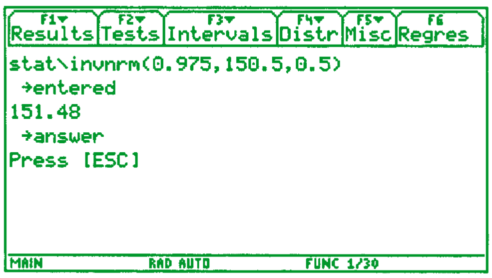
FIGUUR 3B Resultaat van kansberekening uit figuur 3A



FIGUUR 4A Bepaling grenswaarde bij bekende '≤-kans' met 'inverse' normale verdeling



FIGUUR 4B Resultaat voor grenswaarde uit figuur 4A



grafische rekenmachine wordt gebruik gemaakt van standaardfuncties en van mogelijkheden die het programma *infstat.9xg* biedt (zie [8] en [10]).

Een ondersteunende statistiekcursus: Inhoud

In het project 'Aspirine' dienen de studenten zich eerst te realiseren dat er vaste laboratoriumvoorschriften zijn voor de synthese van de werkzame stof in aspirine en voor de bepaling van de hoeveelheid werkzame stof in een aspirine. Daarna liggen de volgende vragen van de studenten voor de hand, als het ondersteunende onderwijs hints in deze richting geeft:

- Als wij aspirines produceren en controleren volgens deze vaste voorschriften, kunnen we de hoeveelheid werkzaam bestanddeel die we in elk van onze aspirines bepalen dan opvatten als trekkingen uit een normale verdeling?
- Als wij van bekende identieke normale verdelingen voor al onze aspirines uitgaan, hoe wordt dan de spreiding in de gemiddelde dosering van onze aspirines beïnvloed door het aantal aspirines?
- Wat verandert in de spreiding in de gemiddelde dosering van onze aspirines als wij alleen van identieke normale verdelingen voor al onze aspirines mogen uitgaan?
- Hoeveel aspirines moeten gecontroleerd worden om een voldoend kleine spreiding te kunnen garanderen?

Antwoorden op deze vragen komen voort uit de JIT-onderwerpen:

- normale verdelingen,
- sommen en gemiddelden van normaal verdeelde kansvariabelen,
- betrouwbaarheidsintervallen voor gemiddelden van onderling onafhankelijke identiek normaal verdeelde kansvariabelen bij onbekende standaarddeviatie,
- vereiste steekproefomvang bij gegeven marge.

Ten behoeve van de theoretische consistentie worden twee onderwerpen toegevoegd:

- de maatstaven gemiddelde en standaarddeviatie uit de beschrijvende statistiek,
- betrouwbaarheidsintervallen voor gemiddelden van onderling onafhankelijke identiek normaal verdeelde kansvariabelen bij bekende standaarddeviatie.

De projectvraag tien aspirinetabletten van gelijke samenstelling te maken is in de ondersteunende cursus verwerkt door de volgende onderzoeksvragen.

Onderzoeksvraag 1

Hoe kun je de metingen uit figuur 1A van de hoeveelheid werkzame stof in een zestal aspirines karakteriseren?
Oplossing:
Maatstaven die deze metingen karakteriseren staan in figuur 1B. Hierbij staat $\bar{x}$ voor het gemiddelde, Sx voor de standaarddeviatie en nStat voor het aantal metingen.

Onderzoeksvraag 2

Zou het zestal gegeven metingen kunnen voortkomen uit een normale verdeling?

Oplossing:
Neem een normale verdeling met een gemiddelde en standaarddeviatie gelijk aan de waarden uit figuur 1B. Genereer een zestal trekkingen uit die normale verdeling, zoals in figuur 2A gebeurt. Vergelijk de resultaten uit figuur 2B met de zes voorbeeldmetingen.

Hoe kansberekening bij gegeven normale verdelingen verloopt, blijkt uit de figuren 3A en 3B voor gegeven grenzen met een te bepalen kans en uit de figuren 4A en 4B voor een gegeven kans en een te bepalen grens. In de laatste situatie werkt het *infstat.9xg*-programma altijd met kansen in '$\leq$-vorm', zodat slechts één onbekende bovengrens bepaald kan worden.

Voor gemiddelden van n onderling onafhankelijke identieke normale verdelingen met gemiddelde μ en standaarddeviatie σ geldt de situatie van figuur 5. Een onbekende gemiddelde steekproefuitkomst $\bar{x}$ ligt dan

tussen $\mu - z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ en $\mu + z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ met kans $1-\alpha$.

Als, omgekeerd, het gemiddelde μ van de identieke normale verdelingen onbekend is en de gemiddelde steekproefuitkomst $\bar{x}$ bekend uit metingen, ontstaat de situatie van figuur 6. Een onbekend gemiddelde μ ligt

dan tussen $\bar{x} - z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ en $\bar{x} + z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ met kans $1-\alpha$.

Onderzoeksvraag 3

Wat is het 95%-betrouwbaarheidsinterval dat hoort bij de 6 metingen uit figuur 1A, onder veronderstelling dat $\sigma = 0{,}6$?
Oplossing:
In figuur 7A worden de metingen ingevoerd bij List, hun frequentie bij Freq en de betrouwbaarheid (in procenten) bij Conf-Level. Het betrouwbaarheids-interval $150{,}0 < \mu < 151{,}0$ volgt uit figuur 7B.

Waar figuur 7A een invuloefening is, is voor het bepalen van een minimale steekproefomvang om een vereiste precisie voor het onbekende gemiddelde te bereiken wel vereist dat met figuur 6 gerekend wordt.

Onderzoeksvraag 4

Hoeveel metingen moeten er verricht worden om het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het onbekende gemiddelde maximaal 0,2 breed te laten zijn?
Oplossing:
Uit figuur 6 volgt dat $z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0{,}1$. De z-waarde wordt

verkregen met de 'inverse' standaardnormale via een

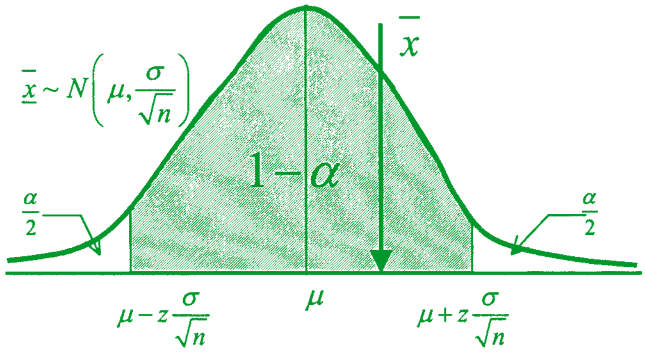
$\leq$-formulering met onbekende kans $0{,}95 + \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975$.

Analoog aan figuur 4A en 4B volgt $z = 1{,}96$. Het

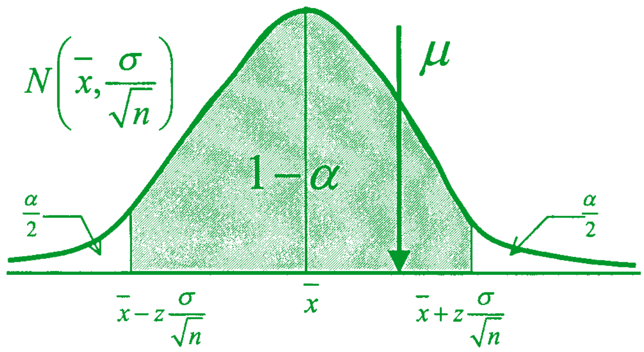
oplossen van n uit $1{,}96\,\dfrac{0{,}6}{\sqrt{n}} \leq 0{,}1$ geeft $n \geq 139$.

Tot slot volgt de meest praktijkgetrouwe situatie met onbekende standaarddeviatie σ in de normale verdeling. Deze wordt geschat door de standaard-deviatie s van de gedane metingen. Daarom heeft het onderliggende kansmodel voor deze situatie een

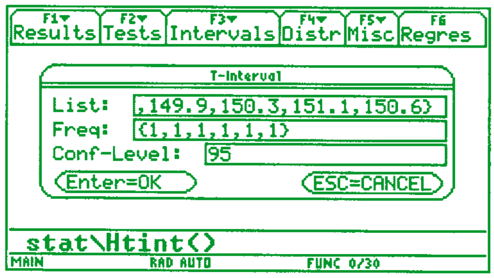
FIGUUR 5 Kansinterval voor onbekend steekproefgemiddelde $\bar{x}$ bij normale verdeling met gegeven μ en σ



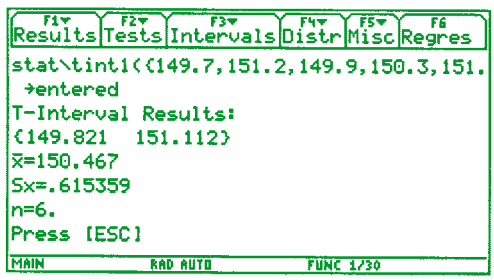
FIGUUR 6 Betrouwbaarheidsinterval voor onbekende μ bij normale verdeling met gegeven steekproefuitkomst $\bar{x}$ en bekende σ



FIGUUR 7A Opdracht betrouwbaarheidsinterval voor gemiddelde μ te bepalen met *t*-waarde voor normale verdeling met onbekende σ



FIGUUR 7B Resultaat betrouwbaarheidsinterval uit figuur 7A



grotere standaarddeviatie dan bij bekende standaarddeviatie van de normale verdeling die de metingen verklaart. Er wordt dan met een t-verdeling met $n - 1$ vrijheidsgraden gewerkt in plaats van een normale verdeling. Analoog aan de aanpak bij de normale verdeling wordt met de t-verdeling een betrouwbaarheidsinterval bepaald dat het onbekende gemiddelde μ met kans $1 - \alpha$ bevat bij bekende gemiddelde steekproefuitkomst $\bar{x}$. Het resultaat is weergegeven in figuur 7.

Onderzoeksvraag 5

Wat is het 95%-betrouwbaarheidsinterval dat hoort bij de zes metingen uit figuur 1A?
Oplossing:
In figuur 7A worden de metingen ingevoerd en het resultaat staat in figuur 7B: $149{,}8 < \mu < 151{,}1$.

Ook bij de t-verdeling kan naar steekproefomvang gevraagd worden, waarmee een onbekend gemiddelde μ binnen vooraf gegeven marge vastgesteld kan worden. Deze vragen zijn ingewikkelder dan voor de normale verdeling, omdat de t-waarde afhangt van het aantal vrijheidsgraden.

Evaluatie en conclusie

Mijn eerste ervaringen met de ondersteunende JIT-cursus statistiek bij het project 'Aspirine' zijn afkomstig uit het voorjaar van 2002. Zij zijn onverdeeld positief. Die cursusonderdelen die voldoen aan het principe van JIT-ondersteuning motiveren de studenten zeer om het antwoord uit te zoeken op het statistische deel van de praktische projectvraag hoe zij een gelijke dosering van het gehalte werkzame stof in hun aspirines kunnen garanderen. In het bijzonder betreft het hier de methoden voor het opstellen van betrouwbaarheidsintervallen en de betekenis daarvan.
Ook de voorbereidende onderdelen, die binnen de JIT-aanpak niet strikt noodzakelijk zijn om de garantie voor gelijk samengestelde tabletten te kunnen leveren, worden door de studenten als positief ervaren. De deelnemende hbo-studenten wilden zeker de achtergrond van de procedure doorgronden waarmee uiteindelijk de geschikte betrouwbaarheidintervallen bepaald worden. Zij willen duidelijk kennis verwerven die aansluit bij hun vooropleiding, willen die integreren en tenslotte toepassen in het projectresultaat.
Mijn eindoordeel is dat de studenten door de statistische eisen in de projectvraag inderdaad de vaardigheid verwerven om gegevens die soortgelijke eigenschappen hebben als de aspirinedoseringen kritisch te beoordelen en hierover een statistisch verantwoorde uitspraak te doen. Daarmee hebben zij een deel van de competentie verkregen, metingen kritisch te beoordelen op een statistisch verantwoorde manier.
De studenten geven in de evaluatie positieve reacties over de praktische bruikbaarheid van de cursus in hun projectwerk.
Ondanks het feit dat een iets bredere aanpak gevolgd is dan JIT-ondersteuning, vormt dit artikel een pleidooi om praktische toepasbaarheid van het ondersteunende statistiekonderwijs voorrang te geven boven theoretische consistentie van het logisch opbouwende onderwijs, waar de echte praktijktoepassingen te lang op zich laten wachten.

Bronnen

[1] A. Buijs: Statistiek om mee te werken (6e druk), EPN (1997).
[2] J.N. Miller, J.C. Miller: Statistics and chemometrics for analytical chemistry (4th edition), Prentice Hall, Pearson Education (Harlow, UK, 2000).
[3] G.R. Norman, D.L. Streiner: Biostatistics - The bare essentials (2nd edition), B.C. Decker Inc. (Hamilton, 2000).
[4] NVvW: Wiskunde in het nieuwe hoger beroepsonderwijs (Utrecht, juni 2000).
[5] H. Staal: Perspectieven voor de wiskunde in het hbo - Verslag van de tweede conferentie, Euclides 77-2 (oktober 2001).
[6] J. Uijlen, M. van Dongen: Studiehandleiding Thema Gezondheid - Gemeenschappelijk Project 'Aspirine' (Propedeutische fase), Fontys Hogeschool Toegepaste Natuurwetenschappen (voorjaar 2002).
[7] G. Wijnen, W. Renes, P. Storm: Projectmatig werken, Het Spectrum B.V. (Utrecht, 1999).
[8] www.fontys.nl/natuurwetenschappen/procesregeling/ voor ondersteunend TI-92 programma infstat.9xg (kies de link naar TI-92).
[9] http://education.ti.com/us/educatorms/product/graph/92p.html voor informatie over TI-92Plus en zijn opvolger Voyager 200.
[10] ftp://ftp.ti.com/pub/graph-ti/calc-apps/92plus/math/stat/ voor de nieuwste versie van infstat.9xg.

Over de auteur

Jan Jelle Claus (e-mail: jj.claus@fontys.nl) is verbonden aan Fontys Hogeschool Toegepaste Natuurwetenschappen. Hij verzorgt onderwijs in wiskunde, statistiek en informatica en is actief in de begeleiding van studenten in de propedeuse. Zijn overtuiging is dat wiskunde en statistiek veel beter doordringen bij hbo-studenten als directe toepassing in praktijkproblemen in het onderwijs verankerd zit.

IS WISKUNDE INTEGREERBAAR?

Wordt wiskunde weggestopt in de praktijkvakken van het beroepsonderwijs (zoals bij natuurkunde al vrijwel geheel is gebeurd) of moet het vak toch nog zelfstandig voortbestaan, en zo ja, hoe dan wel?

[Henk van der Kooij]

Competenties en PGO

Het beroepsonderwijs is voortdurend in beweging. Veel meer dan het algemeen vormend onderwijs wordt het aangestuurd vanuit de eisen die de arbeidsmarkt stelt. De snelle technologische ontwikkelingen maken dat toekomstige werkers niet meer zozeer vakspecialist moeten worden, maar personen die veel breder in het arbeidsproces kunnen worden ingezet. Cursisten moeten worden voorbereid op vaardigheden die het leren hanteren van de huidige generatie werktuigen en instrumenten te boven gaat. Deze tools kunnen immers al weer verouderd zijn tegen de tijd dat cursisten de opleiding afsluiten. De nieuwste trend in zowel hbo als mbo wordt verwoord in de modieuze kreet ‘competentiegericht opleiden’. In diverse publicaties (zie [1]) worden beroepscompetenties omschreven als *die vermogens van een individu waarmee de kernopgaven van een beroep op een adequate, procesgerichte en productgerichte wijze kunnen worden aangepakt.* Competenties zijn in dat kader een samenhangend geheel van kennis, vaardigheden en houding, waarmee (per definitie complexe) probleemsituaties in de beroepspraktijk (de kernopgaven) te lijf worden gegaan. Van de acht soorten competenties die worden onderscheiden zijn voor dit verhaal alleen de zogenaamde vakmatige en methodische competenties van belang. De vakmatige competenties hebben te maken met kennis van technieken en beheersing van vaardigheden in het gebruiken van die technieken in probleemsituaties. De methodische competenties kennen elementen als systematisch werken, planning, probleemoplossen en reflectie.

De onderwijsvorm van het Probleem Gestuurd Onderwijs (PGO) laat zich goed inpassen in het idee van competentiegericht opleiden. In het hbo en mbo (en op korte termijn schuift volgens mij dit hele idee ook het vmbo binnen) is het PGO al breed omarmd. In deze onderwijsvorm staat het leren werken aan authentieke beroepsproblemen (en die zijn per definitie complex van structuur en de aparte vakken

een wiskundige vertaalt het probleem naar de abstracte wereld ...

overstijgend) centraal. Daarom wordt terecht gesteld dat binnen deze onderwijsvorm het aanbieden van geïsoleerde vakken weinig zinvol is en dat er moet worden gewerkt aan het integreren van kennis en vaardigheden uit de verschillende bestaande vakken *voorzover die bijdragen aan efficiënte en effectieve productie.*

En, of je het nu leuk vindt of niet, wiskunde leren om de wiskunde zelf of omdat het goed is voor de algemene ontwikkeling (van het denken), past niet in het denken van beleidsmakers of van het onderwijsmanagement binnen het beroepsonderwijs. In die kringen maakt men zich hooguit zorgen over het feit dat veel cursisten struikelen over dat abstracte vak. Uit ervaring weet ik dat wiskunde gewoon uit beroepsopleidingen wordt geschrapt, als niet overtuigend kan worden duidelijk gemaakt dat wiskunde wezenlijk bijdraagt aan de doelstellingen van de (competentiegerichte) opleiding. Op beleidsniveau (o.a. ministerie van OC&W en AXIS; zie [2]) wordt ook zeer hard gewerkt aan het softer maken van de sector Techniek, teneinde meer studenten die Techniek in te lokken. Het

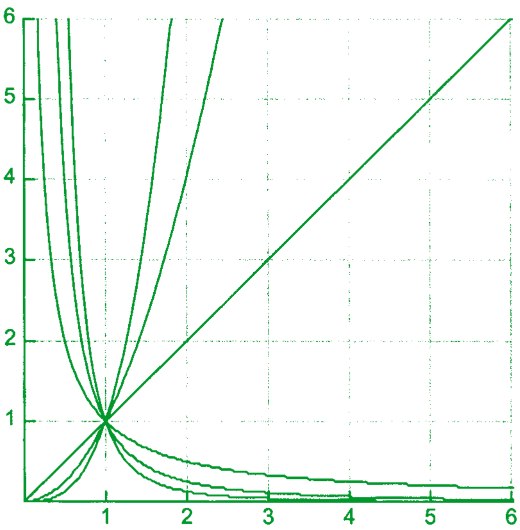
spreekt welhaast vanzelf dat wiskunde daarbij wordt aangewezen als een van de grote boosdoeners voor die te geringe keuze voor Techniek. In diverse projecten van AXIS rond het herontwerp van techniek-opleidingen merk je ook het bijna ongemerkt verdwijnen van het traditionele vak wiskunde. En als er geen invulling gevonden wordt die afwijkt van de traditionele aanpak, dan wordt het vak gewoon niet meer opgenomen in het studieprogramma.
Er zijn dus tenminste twee externe redenen voor een herbezinning op het vak wiskunde: de inrichting van het onderwijs (competenties en PGO) en het beleid ten aanzien van datzelfde onderwijs (softe Techniek). Daarom moeten antwoorden geformuleerd worden op twee fundamentele vragen:
- *Waarom* draagt wiskunde bij aan de ontwikkeling van competenties?
- *Welke* wiskunde draagt bij aan het ontwikkelen van competenties?
En die antwoorden moeten komen van de wiskundegemeenschap; anders komen ze helemaal niet, doodeenvoudig omdat niemand binnen het beroeps-onderwijs deze vragen stelt.

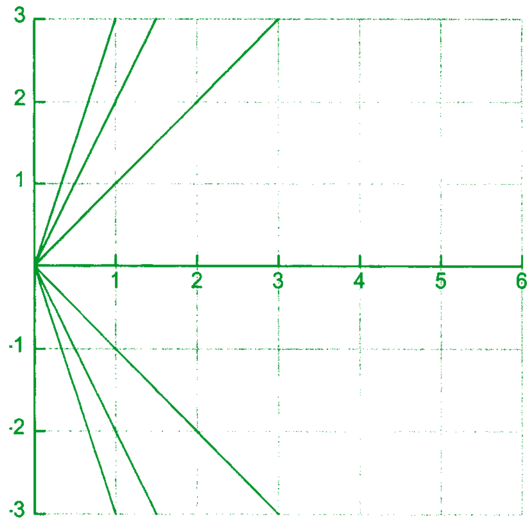
Waarom wiskunde?

Eerst wil ik proberen te beschrijven hoe wiskunde in de beroepspraktijk niet en hoe wel wordt toegepast. Omdat ik bezig ben geweest in het middelbaar *technisch* onderwijs, beperk ik me daarbij tot de sector Techniek. Dat is overigens de sector waar je de grootste behoefte aan ‘harde’ wiskunde mag verwachten. Voordat in 1996 het TWIN-project (zie [3]) startte, is uitgebreid onderzocht welke wiskundige onderwerpen en methodieken zinvol genoeg zijn om, als ondersteuning voor de praktijkvakken, binnen een technische beroepsopleiding te onderwijzen. Dan kom je tot de treurige conclusie dat de manier waarop de meeste onderwerpen in het oude programma aan bod kwamen weinig bijdraagt aan de vorming van goede beroepsbeoefenaars. Verder was de abstracte, formele manier van wiskunde bedrijven voor veel cursisten een zodanig groot struikelblok dat het ze daardoor onmogelijk werd gemaakt de opleiding van hun keuze af te maken. Cursisten die het bij de techniekvakken goed doen werd na het eerste jaar een halt toegeroepen vanwege onvoldoende resultaten bij wiskunde en/of natuurkunde. Rond 1995 was dit voor veel directies van het mto aanleiding, het vak dan maar af te voeren van de lessentabel. De belofte om wiskunde dienstbaar te maken aan de praktijkvakken heeft de dreiging van het afvoeren op veel scholen voorlopig afgewend. In het TWIN-project zijn andere accenten gelegd bij wiskundige kennis en vaardigheden dan in het oude programma. Door de onderwerpen en de behandeling ervan zo te kiezen dat ze aansluiten bij wat er in de praktijkvakken wordt gedaan, is er erkenning afgedwongen voor het belang van wiskunde. De vraag ‘waarom is wiskunde belangrijk voor een beroeps-opleiding’ moet dus niet vanuit de wiskunde worden bezien, maar vanuit de praktijk(vakken) en sinds kort dus ook vanuit het idee van competenties en PGO. Maar de eisen en wensen moeten wel door wiskundigen worden geformuleerd, omdat de praktijkvakkers alleen het traditionele beeld hebben van wiskunde met sterk algoritmisch gekleurde aspecten als de *abc*-formule en de stelling van Pythagoras.

... praktijkmensen blijven binnen de context van de probleem-situatie

Hoe wordt wiskunde in de (beroeps)praktijk dan wel gebruikt? Literatuur op dit gebied bevestigt hoofdzakelijk de ervaringen in het TWIN-project die verderop worden besproken. Er is een groot verschil tussen de manier waarop wiskundigen een probleem aanpakken en de manier waarop praktijkmensen dat doen. Een wiskundige vertaalt het probleem naar de abstracte wereld van de wiskunde, zoekt daar naar een oplossing en gaat met die oplossing terug naar de wereld van de praktijk. Als praktijkmensen een probleem oplossen waarbij wiskunde een rol speelt, dan blijven ze binnen de context van de probleem-situatie en zullen, bij het zoeken naar een oplossing, altijd gebruik maken van de specifieke kenmerken van die probleemsituatie.
Bij onderzoek in Engeland naar het gebruik van wiskunde in verschillende beroepspraktijken bleek bijvoorbeeld dat piloten heel goed een koers kunnen uitzetten voor hun vliegtuig bij gegeven windrichting en windkracht, maar dat ze een wiskundig volledig identiek probleem waarbij een koers moet worden uitgezet voor een roeibootje dat een rivier moet oversteken niet konden oplossen omdat de gegeven snelheden *geen betekenis* hadden. Ook bleek dat sommige piloten de vertrouwde omgeving van de cockpit nodig hadden om het koersprobleem op te lossen (Noss & Hoyles, 1998). De Engelse onderzoekers spreken bij dit typische aanpakgedrag van beroeps-beoefenaars over *anchors* in de probleemcontext waaraan het wiskundig bezigzijn is vastgeknoopt en pleiten voor aandacht in het onderwijs voor wat zij noemen *situated abstraction*: abstractie die niet boven de gegeven context uitstijgt, maar rekening houdt met de eigenheid van diezelfde context.

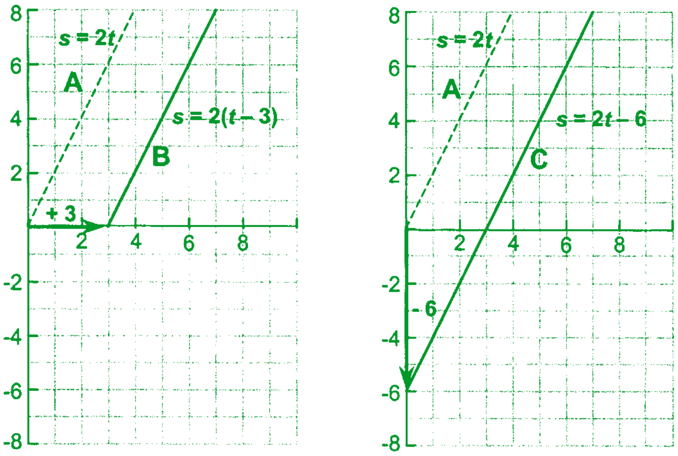




FIGUUR 1 $y = x^n$ **voor** $n = -3, -2, -1, 1, 2, 3$ **met lineaire schaling**

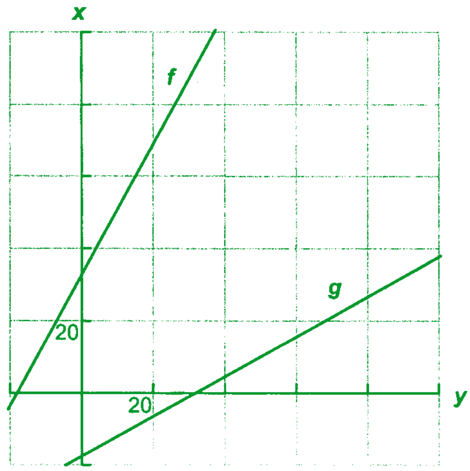
FIGUUR 2 $y = x^n$ **voor** $n = -3, -2, -1, 1, 2, 3$ **met logaritmische schaling**

In Amerika is Lynn Arthur Steen (zie [4]) een voorvechter van programma's in de High School die meer recht doen aan het toekomstperspectief van de meeste leerlingen: een beroep uitoefenen in plaats van naar een universiteit te gaan. Hij beweert (en ik ben het daar mee eens) dat het gebruik van wiskunde in praktijktoepassingen veelal neerkomt op het 'geraffineerd gebruiken van (een combinatie van) relatief elementaire wiskundige gereedschappen' en dat een *wiskundige grondhouding* (mathematical habits of mind) die is ingebed in contexten van de beroepsuitoefening bijdraagt aan kwalitatief goede beroepsbeoefenaars. Deze kenmerkende wiskundige denkpatronen liggen ten grondslag aan veel aspecten van brede beroepscompetenties, maar worden (in tegenstelling tot eenvoudig herkenbare wiskundige vaardigheden van het rekenen, in de meetkunde en in de algebra) nu nog slechts sporadisch als wiskundige vaardigheden erkend (Steen, 2000). In beide gevallen komt naar voren dat voor beroepsbeoefenaars niet zozeer het kennen van de formele wiskunde voorop moet staan, maar het leren hanteren van (tamelijk elementair) wiskundig gereedschap in complexe toepassingssituaties.
'Waarom wiskunde' kan daarom het best benaderd worden vanuit de methodische competenties. De betekenis van wiskunde voor het beroepsonderwijs moet volgens mij gezocht worden in haar bijdrage aan het analyseren van problemen die in de context van het beroep spelen: het stimuleren van een problem solving houding, het leren structureren van problemen om er zo beter greep op te krijgen en het leren reflecteren op een (oplossings)proces. Dit houdt in dat het belang van wiskunde niet wordt bekeken vanuit de kennis van specifieke vakinhouden, maar vanuit het idee dat cursisten 'geëigende wiskundige methodieken moeten leren hanteren om een probleemstelling uit het vakgebied aan te pakken en tot een oplossing te brengen'. (Deze formulering is gebruikt in het eindtermendocument voor de doorstroom van mto naar hto; het hele document is te vinden op de website van TWIN: www.fi.uu.nl/twin/.) Het sluit goed aan bij de manier waarop in het PISA-project (zie [5]) wordt gesproken over *mathematical literacy*. Ook daar wordt wiskundige geletterdheid niet beschreven vanuit leerstofinhouden, maar vanuit wiskundige competentie (onder andere vaardigheden op het gebied van wiskundig denken en redeneren, modelleren, problem posing en problem solving, en het verstandig inzetten van hulpmiddelen; dit is wat Steen de *mathematical habits of mind* noemt) en deze competenties moeten blijken op het gebruiken ervan op overkoepelende wiskundige concepten (kwantitatief redeneren, verandering en verbanden, ruimte en vorm, onzekerheid).
Als wiskunde op deze manier wordt gepresenteerd blijkt dat beleidsmakers en management (h)erkennen dat wiskunde nuttig en nodig is voor de beroepsopleiding (bijvoorbeeld Onstenk, 2002). Natuurlijk is in dit kader het leren van wiskundige technieken en specifieke leerstofinhouden nodig, maar deze zijn wel ondergeschikt aan het doel waarvoor ze worden geleerd en ingezet. Zo kan beslist worden dat, bij het oplossen van praktische problemen, het doelmatig en verstandig kunnen inzetten van een grafische rekenmachine of een computeralgebrapakket belangrijker is dan het handmatig kunnen manipuleren van algebraïsche expressies.



$s = 2(t - 3)$ en $s = 2t - 6$: algebraïsch gelijk, maar (als de getallen betekenis hebben) toch ook verschillend.
Persoon A loopt met snelheid 2 m/s; de personen B en C lopen met dezelfde snelheid achter persoon A aan. Persoon B start 3 sec later vanaf dezelfde plek; persoon C start op hetzelfde moment, met een achterstand van 6 m.
De formule $s = 2(t - 3)$ heeft als structuur *afstand* = *snelheid* × *tijd*
De formule $s = 2t - 6$ heeft de structuur *afstand* = *afstand* – *afstand*

FIGUUR 3 en FIGUUR 4 Betekenisvolle getallen



De grafiek van de lineaire functie f gaat door (0, 32) en (20, 68). De formule bij de rechte lijn is dan $y = \frac{5}{9}x + 32$. De rechtlijnige grafiek van de inverse functie g is het spiegelbeeld van de grafiek van f in de lijn $y = x$ en heeft als formule $y = \frac{9}{5}(x - 32)$.

FIGUUR 5 Correct binnen de wiskunde

Het lijkt wat arrogant om te claimen dat methodische competenties bij voorkeur bij wiskunde worden ontwikkeld, maar het is een feit (en dit wordt onderschreven door beleidsmakers en management) dat de praktijkvakken zich weinig of geheel niet bezighouden met aspecten als problem solving en reflectie. Daar staat het maken van een product centraal en niet (kennelijk typisch wiskundige) vragen als 'wat gebeurt er met het proces en het eindproduct als er iets wordt veranderd in bepaalde onderdelen van dat proces?', die duiden op kritische reflectie en die gericht zijn op kwalitatieve verbetering van het te maken product of op optimalisering van het proces.

Welke wiskunde?

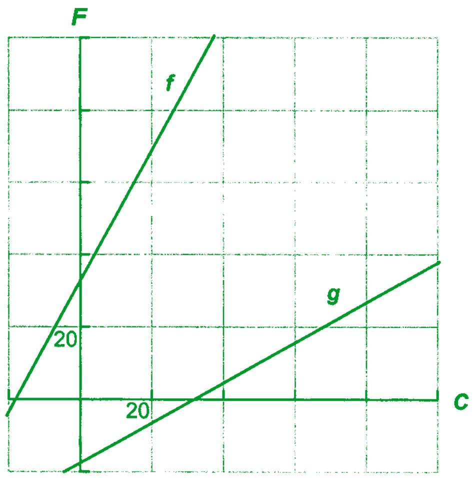
Bij de inventarisatie binnen TWIN van zinvolle wiskundige activiteiten voor de sector Techniek is onder andere geconstateerd dat:
- functies alleen optreden als verbanden tussen grootheden;
- grootheden per definitie gekoppeld zijn aan dimensies en eenheden;
- *recht evenredig* en *omgekeerd evenredig* sleutelbegrippen zijn in de techniek en bijna de enige vorm waarin machtsverbanden voorkomen.

Ik noem deze twee aspecten uit een uitgebreidere rij, omdat ze duidelijk maken dat zinvolle wiskundige activiteiten hierbij zo anders kunnen zijn dan we van de wiskundelessen gewend zijn. Eén van de kernactiviteiten in wiskundelessen lijkt nog steeds het ontbinden in factoren. Maar in de techniek komen veeltermfuncties eigenlijk niet voor, dus het ontbinden in factoren van kwadratische expressies is niet nuttig.

In dit kader past wellicht een uitspraak van een Amerikaanse wiskundedocent van een Two Year College die jarenlang als mijningenieur ondergronds had gewerkt, in een discussie over het nut van het ontbinden van veeltermen: 'You better believe me, in 40 years I never saw any of those damned polynomials down there'.

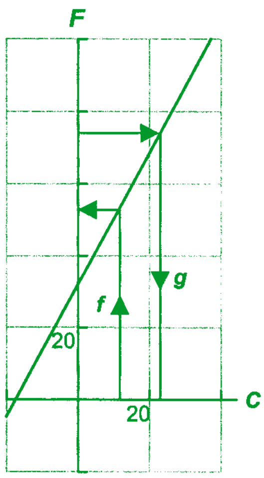
Wel zinvol is het kunnen weergeven in een formule van uitspraken als 'de aantrekkingskracht is recht evenredig met de massa's van de twee voorwerpen en omgekeerd evenredig met het kwadraat van hun afstand' en het besef dat een verandering in één van de grootheden verschillende gevolgen heeft voor de kracht: verdubbeling van één van de massa's verdubbelt de kracht, maar verdubbeling van het kwadraat van de afstand halveert de kracht. Ook het herkennen van dergelijke (globale) verbanden in tabellen en in grafieken met lineaire schalen en met dubbellogaritmische schalen is een krachtig middel om greep te krijgen op mogelijke (machts)verbanden tussen grootheden (zie figuur 1 en figuur 2).
Dat wiskunde bij voorkeur niet meer geïsoleerd van de andere vakken wordt onderwezen, probeer ik duidelijk te maken met de volgende wiskundige vraag.

Het vermogen P dat een windmolen levert is recht evenredig met het kwadraat van de wieklengte D en met de derde macht van de windsnelheid V.
Welke formule beschrijft dit verband:
$P = c \cdot D^2 \cdot V^3$ of $P = c \cdot (D^2 + V^3)$?



Het principe van figuur 5, maar nu met *C*(elsius) voor *x* en *F*(ahrenheit) voor *y*. De wiskunde, blind toegepast, levert hier twee verschillende formules voor het omrekenen van *C* naar *F*: $F = \frac{5}{9}C + 32$ en $F = \frac{9}{5}(C - 32)$. Oorzaak: de namen van geslachtsloze variabelen kun je verwisselen; betekenisvolle grootheden laten zich niet uitwisselen!

FIGUUR 6 Incorrect buiten de wiskunde



Functie en inverse functie zijn twee tegengesteld gerichte verbanden, die in één grafiek in twee richtingen worden uitgelezen.
Bij *f* hoort de formule $F = 5/9C + 32$ en bij *g* hoort de formule $C = 9/5(F - 32)$.

Figuur 7 Correcte wiskunde in toepassingen

Aantonen dat de tweede formule niet deugt is wiskundig niet simpel, een common sense redenering is dat wel: Bij windstilte ($V = 0$) levert de molen nog steeds vermogen en dat deugt niet. Maar een wiskundige zal niet snel op het idee komen waarop een natuurkundige spontaan komt: een formule waarin de dimensies niet kloppen kan niet goed zijn, dus je kunt nooit D^2 (met dimensie m^2) en V^3 (dimensie m^3/s^3) bij elkaar optellen. En daarmee zijn we bij de eerste constatering: in toepassingen zijn getallen niet zomaar geslachtsloos zoals in de wiskunde; ze stellen altijd wat voor. Het zijn grootheden die betekenis hebben en die dimensies met zich meedragen. Dat gegeven helpt studenten om te kunnen rekenen en redeneren (de ankers van de probleemsituatie; zie Noss & Hoyles, 1998) en het kan ze ook helpen om wiskunde beter te begrijpen (zie figuur 3 en figuur 4). In feite ben je dan met wiskunde bezig in het grensgebied met natuurkunde en techniek, waarbij argumentaties en redeneringen uit die vakgebieden een eigen plaats krijgen. Als je bij variabelen en constante getallen de dimensies meeneemt, word je als wiskundige ook geconfronteerd met het feit dat binnen het systeem van de wiskunde juistheden bestaan die erbuiten niet bruikbaar, dus onjuist, blijken te zijn (zie ook Van der Kooij, 2001). Zie figuren 5, 6 en 7.

Is wiskunde dus integreerbaar?

Op basis van bovenstaande bespiegelingen lijkt het voor de hand te liggen om wiskunde als zelfstandig vak overbodig te verklaren. De gerichtheid (competenties) en de inrichting (PGO) van het beroepsonderwijs smeken bijna om volledige integratie. De hierboven genoemde voorbeelden van zinvolle wiskunde zijn een pleidooi voor een invulling van wiskunde op het grensgebied met de techniek en de natuurkunde. Dus gooi alles maar op een hoop en laat de wiskunde aan bod komen als een praktische probleemstelling er om vraagt. Het is aantrekkelijk en motiverend voor cursisten om de benodigde wiskunde te leren op het moment dat er behoefte aan is, omdat ze zonder het wiskundig gereedschap het gestelde probleem niet kunnen oplossen. Maar wiskunde beperken tot dit soort incidentele verschijningen ervan, alleen maar gekoppeld aan de momentane behoefte, heeft naast de positieve effecten (met name voor de motivatie) ook negatieve aspecten. De belangrijkste is dat wiskunde in die zin al snel verwordt tot een verzameling hapklare brokjes van techniekjes en slimmigheidjes zonder onderlinge samenhang en overkoepelende concepten. Om het begrip recht en omgekeerd evenredig als concept te begrijpen en als zodanig te leren hanteren, zijn losstaande contextgebonden ervaringen niet voldoende. Juist de verschijning ervan in verschillende probleemsituaties vormt de aanleiding om het begrip als zodanig (de structuur van bijbehorende formules, de vorm van de grafieken, het karakteristieke veranderingsgedrag) boven de toevallige context uit te tillen. En dat hoeft niet door het begrip volledig te abstraheren van de betekenis van de variabelen in de verschillende contexten. Dat kan ook heel goed gebeuren door per context te bezien welke karakteristieken bij zo'n verband contextafhankelijk zijn en welke daarvan onafhankelijk zijn. Daarmee bereik je transfer op een andere manier dan tot nu toe gebruikelijk in het wiskundeonderwijs. Dit zou ik (in navolging van Noss & Hoyles, 1998) *gesitueerde abstractie* willen noemen,

in tegenstelling tot de volledige abstractie die vaak wordt nagestreefd in het wiskundeonderwijs. In de vormen van PGO die ik ken van het mbo is gelukkig ruimte gereserveerd voor tenminste een uur wiskunde in wat wordt genoemd lintonderwijs. Naast het werken aan een integraal beroepsthema kunnen afzonderlijke vakken daar 'flankerend' onderwijs aanbieden. In zulke uren kunnen met name de methodische competenties aandacht krijgen en, zoals eerder gezegd, dat zijn bij uitstek de competenties die binnen de wiskunde kunnen worden verworven. En wat mij betreft hoeft zo'n vak niet eens wiskunde te heten (want dat schrikt kennelijk teveel af), maar dekt een naam als 'methoden en technieken' de lading ook.
Natuurlijk brengt dit weer andere problemen met zich mee. Niet alle cursisten zijn op hetzelfde niveau geschoold in de wiskunde en dus is aandacht voor technische vaardigheden ook nodig. Om te voorkomen dat de spaarzame wiskundelessen te nadrukkelijk worden gebruikt voor het aanleren en inslijpen van technieken, wordt serieus overwogen een wiskunde-database te ontwikkelen waarin cursisten op eigen niveau en op eigen kracht wiskundige concepten en technieken kunnen bestuderen.
In een vervolgartikel zal aandacht worden besteed aan de manier waarop wiskunde is ingevuld binnen een PGO-opzet van het mbo en aan de manier waarop een wiskunde-database daarin een belangrijke rol kan spelen.

Noten

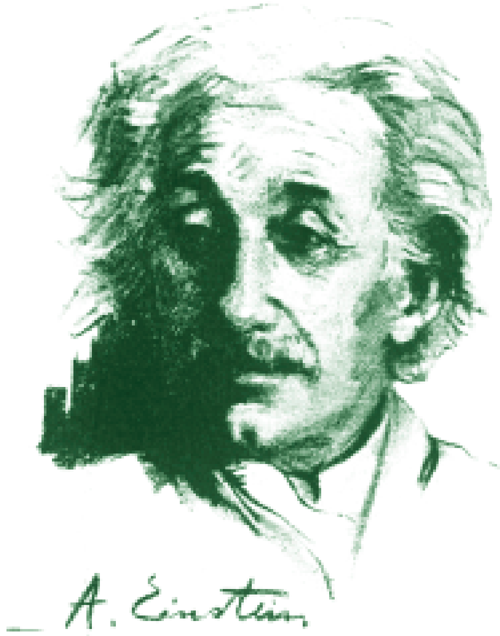
[1] Een verhandeling over de noodzaak van een omschakeling naar competentiegericht opleiden is te vinden in een publicatie van de Advies Commissie Onderwijs-Arbeidsmarkt:
ACOA: Een wending naar kerncompetenties, ACOA ('s-Hertogenbosch, 1999).
Bij het Cinop is een publicatie verschenen waarin de betekenis van wiskunde en natuurkunde binnen competentiegericht beroepsonderwijs wordt besproken in bijdragen over competenties (Jeroen Onstenk), het onderwijsmodel Probleem Gestuurd Onderwijs (Regina Mulder), wiskunde (Henk van der Kooij) en natuurkunde (Eric Payens).
Cinop: Exacte vakken en competenties in het beroepsonderwijs, Cinop ('s-Hertogenbosch, 2002).
[2] AXIS, een subsidiefonds opgezet op initiatief van de overheid en werkgevers, geeft financiële steun aan projecten die gericht zijn op imagoverbetering van de sector Techniek om daardoor de keuze voor techniek te stimuleren. Binnen het vmbo, mbo en hbo zijn specifieke projecten gestart onder het kopje Herontwerp Techniekopleidingen. Bij al die projecten klinkt door dat de techniek minder hard moet worden om er voor te zorgen dat de sector aantrekkelijker wordt, zodat meer leerlingen ervoor gaan kiezen. Zo zijn de ICT-opleidingen, die tot voor kort onder de afdeling elektrotechniek vielen, nu ingericht vanuit een samenwerkingsverband van economie en elektrotechniek. Om de economie-gerichte cursisten niet te veel af te schrikken werd achteloos besloten om wiskunde uit het programma te schrappen.
[3] Het TWIN-project (Techniek, Wiskunde, ICT, Natuurkunde) was er op gericht om de twee vakken wiskunde en natuurkunde daadwerkelijk ondersteunend te maken voor de beroepsvakken. Daartoe zijn geheel nieuwe programma's ontwikkeld die veel beter dan in het verleden gekoppeld zijn aan directe bruikbaarheid binnen de praktijkvakken van de opleiding en in de beroepspraktijk, met ook ruime aandacht voor ICT-gebruik.
[4] Lynn Arthur Steen is professor aan een Two Year College in Amerika en mede vanuit die functie zeer betrokken bij het wiskundeonderwijs. Quantitative literacy en wiskundeonderwerpen in High School die meer beroepsnabij zijn dan die van het huidige curriculum, zijn de twee belangrijkste drijfveren voor een grote stroom aan publicaties van zijn hand. Op zijn eigen website (www.stolaf.edu/people/steen/) zijn veel interessante artikelen en zelfs boeken te downloaden. In het PISA-project is zijn idee overgenomen om wiskundeonderwijs te benaderen vanuit overkoepelende wiskundige concepten. Een paar van zijn belangrijke publicaties:
- On the Shoulders of Giants / New Approaches to Numeracy, National Academy Press (1990);
- Everybody Counts, National Academy Press (1989);
- 'Beyond Eighth Grade / Functional Mathematics for Life and Work' (with Susan L. Forman). In: Maurice Burke (ed.): Learning Mathematics for a New Century (2000 Yearbook), National Council of Teachers of Mathematics (Reston, VA, 2000), pp.127-157;
- Why Numbers Count / Quantitative Literacy for Tomorrow's America (ed.), The College Board (1997).
[5] PISA (Programme for International Student Assessment) is een internationaal project van de OECD, waarin om de drie jaar in alle deelnemende landen 15-jarigen worden getest op taalkundige, natuurwetenschappelijke en wiskundige geletterdheid. In 2000 was taal het hoofdonderwerp; in 2003 is dat wiskunde. Zie bijvoorbeeld het artikel 'Nederland nummer 1, maar buiten mededinging' in de Nieuwe Wiskrant, 21(4), juni 2002 (Kees Lagerwaard en Gerben van Lent).

Referenties

- H. van der Kooij: Dimensievolle algebra. In: Nieuwe Wiskrant 20(2), december 2000, pp.33-38.
- R. Noss, C. Hoyles: Anchoring Mathematical Meanings in Practice. Presentatie op de internationale 'Conference on Symbolizing and Modeling in Mathematics Education'; Freudenthal Instituut (Utrecht, juni 1998).
- L.A. Steen: Making Authentic Mathematics Work For All Students. In: Education for Mathematics in the Workplace, Kluwer Academic Publishers (Dordrecht, 2000).
- J. Onstenk: Beroepscompetenties, kernproblemen en exacte vakken. In: Exacte vakken en competenties in het beroepsonderwijs, Cinop ('s-Hertogenbosch, 2000).

Over de auteur

Henk van der Kooij (e-mailadres: henk@fi.uu.nl) werkt bij het Freudenthal Instituut en is daar nu vooral gericht op wiskunde voor de hele beroepskolom (vmbo-mbo-hbo). Hij was coördinator van het TWIN-project en is lid van de Landelijke Examen Commissie mbo wis- en natuurkunde en van de hbo-werkgroep van de NVvW. Verder is hij betrokken bij het project TechMAP van COMAP (COnsortium for Mathematics and its APplications) in de VS, waarin wiskundemodules gericht op technische toepassingen worden ontwikkeld voor High School. Ook werkt hij bij de vakgroep wiskunde van de Archimedes lerarenopleiding, Hogeschool van Utrecht.



SCHOOLWISKUNDE, DE RESTAURATIE VAN EEN LEERGEBIED

Hoe krijgen we wiskunde als schoolvak weer op orde en aantrekkelijk?

[Roel van Asselt]

Inleiding

Mijn nichtje Yvonne is twaalf jaar en ze leest Nicci French. Wat motiveert haar om op – en boven - de toppen van haar bevattingsvermogen te lezen? Wellicht zit dat in zaken die ze nog niet helemaal begrijpt, maar die al wel een vage betekenis hebben; het boek confronteert haar met de grote wereld, waarnaar ze soms moet gissen hoe die werkelijk in elkaar zit. Dat er ook geheel witte vlekken zijn, maakt het nog spannender: ze hoort er immers - door het lezen – dan toch al een beetje bij. De leeszin wordt verder gestimuleerd omdat al lezend de kwartjes kunnen gaan vallen; ze groeit een beetje mee met het boek.
Lezen en leren is niet hetzelfde. Maar er is genoeg samenhang om in dit artikel aan te tonen dat het manco van de huidige schoolwiskunde is, dat ze de nieuwsgierigheid van de leerling onvoldoende prikkelt en weinig 'mysterieus' te bieden heeft van een soort dat jonge mensen aanspreekt. In dit artikel wordt de situatie van de schoolwiskunde nader geanalyseerd en worden voorstellen ter verbetering gedaan.

Wat is Wiskunde ?

Wisconst is vanouds de 'leer der zekerheden'. Niet de zekerheden van Nicci French, maar die van systemen die met een aantal basisafspraken zijn vastgelegd en waarbinnen door juiste redeneringen een heel bouwwerk van zekerheden kan worden opgetuigd. Voorbeeld. Vanuit een paar eenvoudige afspraken over lijnen en punten wordt een hele logische wereld van de (Euclidische) meetkunde opgebouwd, een wereld die steeds verder groeit, waarin alles klopt en waarmee veel – maar niet alles - van de werkelijkheid verhelderd en beredeneerd kan worden.
Einstein – ook op zijn twaalfde – ontdekte het op de volgende wijze.
'Het waren beweringen, bijvoorbeeld over de snijding van drie hoogtelijnen van een driehoek in één punt die – ofschoon ze enigszins evident waren – met een dusdanige zekerheid aangetoond konden worden, dat ze boven alle twijfel verheven werden. Deze helderheid en zekerheid maakte een onbeschrijfelijke indruk op mij.'
Naast verklaringen roept de wiskunde ook vragen op. Soms valt het kwartje niet: waarom kunnen alle rationale getallen – op een oneindig lange getallen-rechte afgebeeld - worden opgesloten op een intervalletje van willekeurig kleine lengte, en waarom lukt dat bij reële getallen niet? Dat soort dingen intrigeert. We moeten soms nog gissen naar hoe het werkelijk zit: Nicci French in een kinderhoofd. In dat kinderhoofd zal het wel goed aflopen, maar de wiskundige Cantor is krankzinnig geworden van dit soort ogenschijnlijke paradoxen uit de verzamelingen-leer, omdat hij sommige dingen niet op een rij kon krijgen en daar niet in berustte. Kijk, dat hoeft nou ook weer niet. Maar het geeft wel aan dat wiskunde iets te bieden heeft dat meeslepend kan zijn, in proportie ook voor scholieren.

Wiskunde als schoolvak

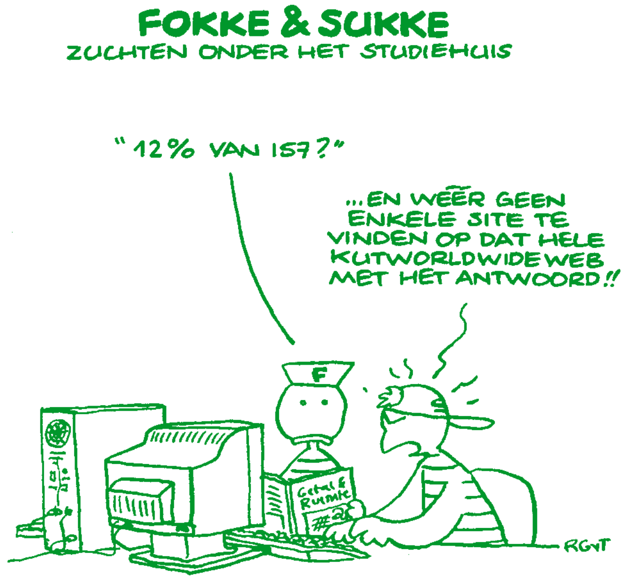
Waarom is wiskunde bij leerlingen minder in trek dan twintig jaar geleden en waarom kiezen zo weinig studenten wiskunde als een vervolgstudie? Of preciezer: waarom is de wiskunde in de brugklas nog wel in trek, maar vermindert het enthousiasme met het stijgen der schooljaren? Mijn vermoeden is dat daarvoor drie verklaringen zijn te geven die terug te voeren zijn op de wijze waarop wiskunde tegenwoordig als schoolvak wordt aangeboden, waarbij een aantal boeiende kenmerken van wiskunde te weinig aan bod komen.
Een eerste aanwijzing is dat de schoolwiskunde het imago heeft van een discipline waarin alles al is of wordt opgelost. Het schoolvak wiskunde reikt leerlingen nauwelijks dilemma's aan. Het vak wordt gepresenteerd als een vak zonder witte vlekken. Wat leerlingen wel te zien krijgen is een gevarieerde verzameling van concrete contexten (als toepassingen van de wiskunde). Nieuwe onderwerpen beginnen er mee en sluiten er mee af. Dat alles roept de sfeer op van een vakgebied dat ontworpen is om dagelijkse probleempjes op te lossen. Op die manier, zegt men, ontstaat 'realistische wiskunde'. Argwanend zou je je moeten afvragen wat dan 'onrealistische wiskunde' zal zijn. Natuurlijk is het constructivisme (al lerend de werkelijkheid construeren) van grote betekenis voor het leren. Maar dan gaat het wel over *grote thema's* zoals het ontstaan van het leven, de omvang van het heelal, de verwondering van het begrijpen, het omgaan met dilemma's. Dat spreekt meer aan dan rechthoeken die chocoladerepen zijn geworden, blokken die voor zwembad spelen of punten en lijnen die doen alsof ze vliegtuigen en landingsbanen zijn.
In de achttiende eeuw waren complexe toegepaste vraagstukken (zoals de kettinglijn, de sleepcurve etc.) onder wiskundigen overigens een ware rage (een hype) náást de ontwikkeling van de zuivere wiskunde; door de eeuwen heen was dat de speltheorie. Als didactisch uitgangspunt én sluitstuk van de schoolwiskunde lijken contexten door de nog beperkte mogelijkheden naar aard en diepgang evenwel geen goede keuze om de nieuwsgierigheid van leerlingen te prikkelen.
Een tweede reden waarom wiskunde grote groepen leerlingen niet 'pakt' is de vorm van toetsing en afsluiting. De schooltoetsen en landelijke examens in het voortgezet onderwijs zijn nogal product- en uitkomstgericht, en nodigen niet direct uit tot reflectie. Een complexe examenopgave is vaak uit elkaar gehaald in een aantal deelvragen en deelstappen, zeg (a) tot en met (f), waarbij (f) het eindresultaat is van deze niet door de leerling zelf bedachte oplossingsroute. Bij de leerlingen moet dat wel haast het gevoel oproepen dat zij iets volbrengen dat ze op eigen kracht nooit zouden hebben bereikt. Dat leidt niet tot verwondering en daagt niet uit tot reflectie, daarvoor is het teveel het resultaat van andermans redenering. Het is op die manier even oninteressant en saai als de detectiveroman waarin op de laatste bladzijde voor het eerst de tuinman ten tonele wordt gevoerd die de moord heeft gepleegd. Het meedenken wordt niet beloond, anderen voeren de regie. Waarom zou je zo'n vak gaan studeren in het wetenschappelijk onderwijs of op een hbo-lerarenopleiding?

Anderzijds weten we gelukkig ook dat mede door de inzet van de grafische rekenmachine (GR) er meerdere oplossingsroutes voor leerlingen mogelijk en bereikbaar zijn bij de aanpak van enkelvoudige vragen en vraagstukken. Dat kan de motivatie weer positief beïnvloeden.
Een derde motief waarom leerlingen kunnen afhaken is 'het gedoe' met de elementaire algebra. Wordt het namelijk wel spannend, dan wordt dat vaak teniet gedaan door een gebrek aan routineuze vaardigheden, door een gebrekkige algebraïsche ondergrond. Een voorbeeld uit wiskunde B12 vwo. De stelling is: iedere begrensde monotoon dalende of stijgende rij heeft een limiet. Om via deze stelling te bewijzen dat $u_n = \frac{n}{2n+1}$ een limiet heeft, moet o.a. worden aangetoond dat $u_n < u_{n+1}$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ Leerlingen lopen hier vast, te beginnen met de uitdrukking voor u_{n+1}. Niet vanwege de complexiteit, maar vanwege de geringe vaardigheden op elementair niveau – in dit geval het uitvoeren van een substitutie. Hier heeft de basisvorming, zo lijkt het, steken laten vallen. En waarom eigenlijk? Is het juist niet stimulerend voor leerlingen om zelfvertrouwen op te bouwen in het ontwikkelen van wat algebraïsche vaardigheden, waarbij blijkt dat ze er steeds beter in worden naarmate ze langer oefenen?
Wellicht dat sommigen menen dat dit soort problemen juist goed met behulp van de GR kan worden opgelost. Feitelijk klopt dat, maar het maakt de leerling wel afhankelijk en het vergroot niet het zelfvertrouwen in situaties waarin het niet meer met de GR zou kunnen, bijvoorbeeld in vervolgopleidingen. De situatie is dan vergelijkbaar met personen die zeggen een vreemde taal te beheersen maar in dat buitenland in een woordenboek moeten snuffelen om te kunnen communiceren.
Maar ook minder ver van huis loopt het gebruik van wiskunde stroef. Economieleraren constateren dat C&M- en E&M-leerlingen op het havo massaal afhaken als het woord 'percentage' in een opgave voorkomt. Mts-docenten constateren dat a^{-2} een onhanteerbare uitdrukking is voor mavo-D leerlingen die wiskunde hebben gehad.
Mijn nichtje heeft ook eerst de Nederlandse taal moeten leren om French te kunnen lezen. Zo ook zal de wiskundige grammatica en het idioom eerst een beetje beheerst moeten worden om iets *met* en iets *in* wiskunde te kunnen ontdekken en er met enig zelfvertrouwen mee om te kunnen gaan.

Reflecties op het programma en de leermiddelen

Bladerend door de huidige wiskundeboeken valt het op dat deze voor wat betreft de didactiek kwalitatief zeer hoogwaardig zijn. Er is goed nagedacht over de wijze van inzichtelijke stofbehandeling en de mogelijkheden van zelfstudie. Het didactisch repertoire is afwisselend en origineel. Gelet op het grote aantal onderwerpen moet het tempo wel erg hoog zijn en moeten leerlingen vaak schakelen tussen de verschillende onderwerpen. Wat de lay-out van de boeken betreft: het komt over als een vreemde mengeling van een encyclopedie, een fotoalbum en de Donald Duck. De vraag is of dat echt allemaal nodig is om de belangstelling van leerlingen voor wiskunde te trekken. Maar misschien ook wèl, gelet op de illustraties bij dit artikel...
Wat in alle wiskundeprogramma's van de Bavo tot en met wiskunde B2 opvalt is de 'invisible hand' die de wiskunde transformeert in ict-ondersteunde, contextgestuurde oploswiskunde. Deze Nescafé legt het, naar mijn smaak, af tegen echte koffie: wiskunde die zijn oorsprong vindt in ook zelfbedachte probleemstellingen (Descartes) of vanuit een fysische context (Newton) of vanuit de speltheorie, enzovoorts. Waar het in het schoolwiskunde-programma hoe dan ook om zou moeten gaan, is dat je leerlingen kunt laten zien wat een theorie eigenlijk is, dat een theorie zich zelfstandig kan ontwikkelen en hoe geweldig ver je daarin kunt meegroeien. Juist de beslotenheid van de wiskunde enerzijds en de universele toepassing van het wiskundig denken anderzijds zijn zo intrigerend. Het wiskundeprogramma zou dus een balans moeten zijn tussen enerzijds wiskunde om de wiskunde zelf, net als poëzie en muziek (wat is daar op tegen?), en anderzijds natuurlijk ook wiskunde om de toepasbaarheid, maar dan wat minder verkrampt dan in de huidige programma's en methodes. Max Planck ontwikkelde zijn theorie niet omdat hij daarmee televisies kon laten werken; dat bleek pas veel later. Hetzelfde geldt voor de getaltheorie en de daarop gebaseerde praktische cryptologie. Er is niets zo praktisch als een goede theorie... met inachtneming van de volgorde der dingen.
De eerder aangegeven overdosering aan 'praktische voorbeelden' in het wiskundeonderwijs zal mede terug te voeren zijn op de Nederlandse situatie waarbij in alle havo- en vwo-programma's iets van wiskunde verplicht is. Om dat leefbaar te houden voor alle leerlingen wordt er veel vanuit, en naar, alledaagse toepassingen toegewerkt. De vraag is of dat een goede aanpak is. Niet iedereen heeft aanleg voor de wiskunde die er achter zit en waar het uiteindelijk om zou moeten gaan. Zij die er wel aanleg voor hebben, snappen heus wel dat er voldoende toepassingen te bedenken zijn. Voor hen geldt juist dat ze een grotere gereedschapskist en meer wiskundige intuïtie moeten kunnen ontwikkelen voor nu en later. De huidige A-programma's in het voortgezet onderwijs en de wiskunde op het mbo voorzien daar in onvoldoende mate in. Er lijkt een grote terughoudendheid voor abstracties in die schoolwiskunde en de leerboeken, terwijl die juist zo kenmerkend is voor wiskunde als denkdiscipline.
Het beeld dat de boeken (en ook de wiskunde-examens uit de natuurprofielen) verder oproepen is een robuust beheersniveau van algebraïsche vaardigheden van de leerlingen. Gelet op de constateringen over dat type vaardigheden kan dat haast niet worden waargemaakt. Ook in de vervolgopleidingen blijken studenten onvoldoende op routine te kunnen terugvallen.
Beweringen als

$\sqrt{a^2+b^2} = a+b$, $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, zijn na een wel-



Fokke en Sukke in het studiehuis, NRC-Handelsblad

verdiende zomervakantie na het eindexamen aan de orde van de dag.
Wat bovendien opvalt is het brede repertoire aan min of meer onafhankelijke onderwerpen die in de programma's aan bod komen; de diepgang kan niet al te groot zijn. Het beheersniveau van de onderwerpen zal – mede gelet op de beperkte algebraïsche vaardigheden - onvoldoende groot zijn om de leerlingen het gevoel te geven of ze iets nu wel of niet begrijpen. Het verschil tussen iets kennen en iets herkennen wordt diffuus voor ze; als leerlingen iets herkennen menen zij dat ze het ook weten en begrijpen, terwijl de stof onvoldoende doorleefd is, met alle gevolgen voor het gebruik ervan in de andere schoolvakken en in de vervolgopleidingen.

Handicaps

Los van bovenstaande problemen heeft het vak wiskunde een paar handicaps die het moeilijk maken het vakgebied in deze tijd aantrekkelijk te maken voor leerlingen.

1. De eerste handicap lijkt de no-nonsense cultuur waardoor ook adolescenten zich al gauw over vakinhouden afvragen: 'Wat heb je hier nou aan', of liever: 'Wat heb *ik* hier nu aan'. Een langer-termijn-perspectief (wat een onderdeel van het antwoord op deze vragen is) spreekt heden ten dage niet zo aan. Ook de overladenheid van de programma's maakt het leraren soms moeilijk de nuttigheid van onderwerpen en deelvaardigheden steeds weer uit te leggen. Om 'het nut' van wiskunde zichtbaar te maken worden dan maar huis-, tuin- en keukenvoorbeelden opgevoerd, die de ware aantrekkingskracht en de mystiek van de wiskunde te zeer verborgen houden. Vanuit het vaklokaal is er bovendien in de ogen van de leerlingen weinig directe verbinding met het deel van de buitenwereld waarin ze (wel) geïnteresseerd zijn. Anders dan bij de talen, de zaakvakken, de overige exacte vakken en de cultuurgerichte leergebieden is er buiten de school weinig direct zichtbaar van de schoolwiskunde. Overigens ook niet van 'techniek', hoe vreemd dat ook klinkt: van de hele techniek van een liftinstallatie in een gebouw zie we alleen het knopje voor 'naar beneden' en 'naar boven'. Als we de motorkap van onze auto openen, zien we bijna helemaal niets meer dat ons aan techniek of werktuigbouw doet herinneren, hooguit aan elektronica.

2. Een andere handicap is dat wiskunde geen idolen heeft. Van welke wiskundige zal een zestienjarige nu zeggen: 'Zo wil ik ook worden'? Een docent kan nog wel iets bereiken met jongens als Evariste Galois of met meisjes als Maria Agnesi of Sonja Kovalevski. Maar ja, het is al zo lang geleden dat die jong waren en hun wiskunde was zo extreem superieur dat jongeren zich er nauwelijks mee kunnen identificeren. Een 'slimme' en 'charmante' mts'er of ingenieur in een tv-soap zou veel goeds kunnen doen voor de bèta-vakken. Het recent verschenen boek 'Een schitterend brein' over de wiskundige en Nobelprijswinnaar John Nash leverde wel een mooie film op (met Russell – Gladiator - Crowe in de hoofdrol), maar zal als boek niet snel op de boekenplank of boekenlijst van een 17-jarige staan.

3. Waar wiskunde en technische disciplines als vervolgstudie mee worstelen is het feit dat zij moeten opboksen tegen modieuze vervolgstudies met associaties naar 'management', 'communicatie', 'business' of 'international'. Stuk voor stuk beroeps-opleidingen die in een vorige generatie opleidingen niet meer dan een stevige afstudeeropdracht waard zouden zijn geweest. Dramatisch, maar wel een onderdeel van onze westerse werkelijkheid. De keuze voor bijvoorbeeld economische vervolgstudies en de keuze voor het profiel E&M en die voor een mbo-opleiding in de economische sector wordt vaak ingegeven door het idee dat daarmee later veel snel geld te verdienen is. In veel gevallen blijkt dat wenkend loopbaanperspectief uit te lopen op het verkopen van hypotheken en levensverzekeringen aan echte yuppen die een bèta-opleiding, of helemaal geen opleiding, hebben volbracht...

Verbeteringen

Hoe krijgen we de wiskunde als schoolvak weer op orde en aantrekkelijk?
Hierbij een aantal suggesties gerubriceerd naar inhoud (programma) en vorm.

Programmaveranderingen

1. Schrap 50% van de onderwerpen uit de school-wiskunde, en handhaaf de studielast. Programmeer geen onderwerpen waarvan bekend is dat de leerwinst – ook met veel studielast - maar zeer beperkt is als de leerling er geen aanleg voor heeft, zoals bij ruimte-meetkunde, kansrekening of ingewikkelde notaties. Zet de overgebleven onderwerpen voldoende diep neer en vermijd oppervlakkigheid. Voor vervolgopleidingen is de afwezigheid van een onderwerp een duidelijker en

beter hanteerbaar gegeven dan het oppervlakkig verwerkt zijn ervan. Schuif verdere complexe verdiepingen door naar de 'vrije ruimte' voor de echte liefhebbers en talenten. Een suggestie die zowel voor de vmbo-, de mbo- en de tweede fase-programma's zou mogen gelden. Laat vervolgopleidingen in de inhoud van die verrijkingen meedenken.
2. Verbeter het beheersniveau van de elementaire wiskundige vaardigheden in de basisvorming. Het zelfvertrouwen en het plezier in de wiskunde zullen er voor de leerlingen door toenemen, en de toegankelijkheid van onderwerpen zal - verderop in het mbo, de tweede fase en de vervolgstudies - worden vergroot. In combinatie met bovenstaand punt kunnen dan ook contexten worden opgevoerd die echt 'realistisch' zijn, dat wil zeggen: het model van de werkelijkheid kan de complexiteit ervan beter benaderen.
Ook computergebruik is, bijvoorbeeld bij de invoer van formules, zeer gebaat bij een grote algebraïsche hygiëne.
3. Schaf wiskunde af als voor-iedereen-verplicht vak; het brengt meer schade toe aan het beeld van het vakgebied en aan de persoonlijke ontplooiing van de leerling, dan dat het bijdraagt aan de studieloopbaan en aan het studiesucces in de vervolgopleidingen.
4. Stem de bètavakken beter op elkaar af. Let er op dat in ieder geval de leerplannen longitudinaal op elkaar aansluiten. Een bijkomend voordeel hiervan kan zijn dat - naast het doorbreken van het isolement van de wiskunde – de toepassingen en de contexten vanzelf en op meer pedagogisch/didactische wijze aan de orde komen.
5. Voer als rode draad een evenwichtige mix in van de goede wiskundige gereedschapskist (uitvoerbare algoritmen) en een wiskundige intuïtie (te hanteren heuristieken); een kenmerkende eigenschap daarvan is het aanleren van een bewijsvoering. Wiskunde is pas leuk als je echt weet dat het goed zit, en als mondige burger van onze ingewikkelde samenleving is het een goede attitude om eens te vragen naar bewijzen van beweringen en het formuleren van doelen (wat willen we precies bewijzen en wat weten we al zeker).
Hetzelfde geldt voor het zelf opzetten van logische en overtuigende redeneringen en het afronden in een sluitend betoog, als onderdeel van het programma-onderdeel presentatievaardigheden. Het hoeft ook allemaal niet zo ingewikkeld te zijn: het is opvallend hoe gemotiveerd leerlingen in de tweede fase omgaan met eenvoudige vraagstukjes uit de vlakke meetkunde, waarin ze gewoon zelf (!!) iets moeten en kunnen aantonen of bewijzen. Het even kunnen vertoeven in een afgesloten 'eigen' veilige denkwereld kan leerlingen sterk aanspreken, ook al zijn het geen Einsteins. Hun vasthoudendheid is verbazingwekkend en opmerkelijk groter dan de vasthoudendheid waarmee ze het minimum aantal tegeltjes in een zwembad moeten berekenen.

Wat betreft de vormgeving van het wiskundeonderwijs

6. Laat zien waar witte vlekken zitten en waar we aan de rand van het huidige weten en kennen zitten. Draai eens een video over een actueel, technisch probleem dat nog niet is opgelost; kortom laat zien dat alle werk mensenwerk is. Pak actuele, grote thema's als context, als dat passend is in het programma en er bij leerlingen behoefte aan is.
7. Formuleer ook vak- en profielopdrachten die niet alleen eenduidige oplossingen van problemen moeten opleveren, maar ook alternatieven of dilemma's, afhankelijk van te kiezen uitgangspunten of ontwerpkeuzes.
8. Vertel als docent eens wat over hetgeen al die 'grote' wiskundigen in hun vrije tijd deden, of hoe anderen naast hun gewone dagelijkse werk de wetenschap in hun vrije tijd vooruit hebben geholpen (Simon Stevin, Antonie van Leeuwenhoek, Christiaan Huygens). Delen uit de documentaire over het bewijs van de stelling van Fermat door Andrew Wiles lenen zich goed voor bovenbouwleerlingen, zeker als ze eerst zelf even aan het probleem uit de stelling hebben gesleuteld, al dan niet met een computer.
9. Wees argwanend ten opzichte van overheidsbeleid gericht op ICT-gebruik dat doelen dient van het type: 'het vergemakkelijken van het leren', 'tijd- en docentonafhankelijkheid stimuleren', 'leerwinst boeken', 'de communicatie verbeteren en versnellen'. Wat van belang is, is dat computers ingezet worden als *middel;* het middel waarvoor de computer ook is bedacht: het uitbesteden van veel en saai reken- en tekenwerk. Krachtige hulppakketten, zoals de VU's en Cabri, kunnen de wiskunde aanschouwelijker maken, prima. Maar schiet daar niet in door. Het feit dat een computer een primitieve kan bepalen, is nog geen argument om het dan ook alleen maar met een computer te doen. Toen de auto was uitgevonden, zijn we ook niet gestopt met het wandelen of met de atletiekwedstrijden hardlopen. Anders gezegd: laat de behandelwijze binnen de schoolwiskunde niet afhangen van wat we – op dit moment - met computers kunnen oplossen.
10. Maak de wiskundeboeken qua vormgeving wat minder kinderlijk. Men hoeft niet steeds op de hurken te gaan zitten om iets uit te leggen. Kinderen trekken zich graag aan iets op als er wat te leren valt. Hoe zou mijn nichtje anders uren kunnen lezen in haar leerboek met alleen maar tekstregels?

Over de auteur

Roel van Asselt (e-mailadres: r.v.asselt@wxs.nl) was leraar wiskunde en informatica in het hbo en is betrokken bij een wiskundemethode voor het hoger onderwijs. Als directeur van COO Partners heeft hij bijgedragen aan het ontstaan van een aantal ICT-pakketten voor het hoger onderwijs.
Hij is lid van de Werkgroep HBO van de NVvW en lid van de Nationale Onderwijscommissie Wiskunde (NOCW).
Hij is thans werkzaam op de Saxion Hogescholen als afdelings-manager, vervult een aantal bestuursfuncties en is directeur van het LICA.
Het artikel is op persoonlijke titel geschreven.

BREUKEN IN HET DENKEN OVER GEÏNTEGREERD REKEN-WISKUNDEONDERWIJS

Evolutie in de ontwikkeling van het reken-wiskundeonderwijs: van integratief en veelsporig naar het denken in lange leerlijnen

[Adri Treffers]

Inleiding

In het denken over reken-wiskundeonderwijs zoals zich dat vanaf het begin van de jaren zeventig heeft ontwikkeld, zijn duidelijk breuken en breukenovergangen waar te nemen. De volgende uitspraak van Freudenthal uit 1976 laat dat zien.

'Hoe zal het wiskundeonderwijs er in 2000 uitzien? Er is geen wiskundeonderwijs meer in 2000, het is verdwenen. Er is geen vak meer, wiskunde geheten, geen wiskundeles op het rooster, geen wiskundeboekje om te onderwijzen. (...) Het is er om beleefd en uitgeleefd te worden, net als lezen, schrijven, knutselen, tekenen, zingen, ademhalen, in een geïntegreerd onderwijs.' [1]

Freudenthal toont zich hier een vurig voorstander van projectonderwijs à la Decroly door wie hij sterk is beïnvloed. Hij hoopte toen dat het wiskundeonderwijs er zo geïntegreerd zou uitzien - de laatste geciteerde regel geeft dit aan. Later is hij daar op teruggekomen, maar daarover straks meer.

Horizontale zienswijze

Feit is in ieder geval dat medio jaren '70 de Wiskobas-publicaties en de internationaal gepubliceerde IOWO-snapshots wemelden van projecten en thema's. De achterliggende gedachte daarvan was dat in deze onderwijssettings de leerlingen rekenen-wiskunde als betekenisvol zouden ervaren. En het moet gezegd: toentertijd ging van deze geïntegreerde onderwijsaanpak een grote innovatieve werfkracht uit, niet in het minst omdat daarin het contrast met het schrale mechanistische rekenen zo scherp zichtbaar werd. Dat rekenen met de realiteit en de werkelijkheid van kinderen van doen kan hebben, was in het traditionele rekenonderwijs namelijk steeds meer uit zicht geraakt, om over de New Math die vanaf medio jaren '60 internationale opgang maakte maar te zwijgen: verzamelingen, relaties, transformaties, talstelsels, redeneren met logiblokken, ...

Freudenthals prognose anno 2000 dient dan ook mede vanuit die relatief nieuwe kijk op wiskunde begrepen te worden. We zouden dit de horizontale zienswijze kunnen noemen die toen opgang maakte [2].

Horizontaal vanwege de sterke verbinding met de realiteit, de leefwereld, maar met (te) weinig zicht op een natuurlijke verbinding met de opbouw van leergangen leidend naar het formele, vaksystematische opereren, en met name ook horizontaal omdat toen nog geen duidelijk zicht was op de functie die contextproblemen en –modellen bij de verticale opbouw zouden kunnen vervullen.

Horizontaal en verticaal mathematiseren

Laat ik deze begrippen van horizontaal en verticaal mathematiseren toelichten met een voorbeeld uit het begin van een breukenleergang:

Aad krijgt $\frac{3}{4}$ pannenkoek en Berna krijgt $\frac{5}{6}$ pannenkoek.

Wie krijgt het meest, Aad of Berna?

En hoeveel meer is dat?

Deze opgave staat in het perspectief van het vergelijken en aftrekken van breuken via gelijknamig maken. Indien leerlingen de pannenkoek met een wijzerplaat van een klok associëren – de leraar kan daarop desgewenst aansturen – dan sporen hun rekenhandelingen met het beoogde doel.

Ze mathematiseren horizontaal, wat wil zeggen dat ze het probleem toegankelijk maken voor een wiskundige bewerking. Maar de vraag is of deze aanpak ook een passende stap is op weg naar het formele aftrekken van breuken. Heeft de genoemde oplossingsstrategie ook verticale potentie? Of anders gezegd: is de pannenkoek of wijzerplaat een goed model om het proces van het verticale mathematiseren op gang te brengen? En zo niet: is er dan een geschikter model of modelsituatie te vinden? Of moeten juist meerdere modellen worden ingezet teneinde die formele doelstelling te kunnen bereiken? Al deze vragen betreffen de kernkwestie van de breukendidactiek i.c. die van het verticale mathematiseren om vanuit het informele, contextgebonden opereren tot het formele vakmatige opereren te komen.

Integratief en veelsporig

Tekenend is dat Freudenthal toentertijd niet bijster gelukkig was met dit onderscheid in horizontaal en verticaal mathematiseren dat in 1978 geïntroduceerd werd: hij wilde deze componenten niet uit elkaar halen maar (ook weer) geïntegreerd beschouwen. Het gevolg van een en ander was dat het onderwijs, leergangmatig bezien, veelsporig werd ingericht [3]. De leerlingen werden van meet af aan met een fenomenale diversiteit aan contextopgaven en visuele modellen geconfronteerd waarin allerlei aspecten van het breukbegrip besloten liggen, zo blijkt uit de 'rijke didactische sequentie voor het breukrekenen' die Freudenthal medio jaren '70 in een interne IOWO-publicatie schetste [4]. Een heldere verticale verbindingslijn met het formele opereren van breuken zal men echter moeilijk in deze didactische beschouwing kunnen onderkennen.

Lange leerlijnen

Binnen het Wiskobasteam, althans bij een aantal leden van deze groep, groeide in de loop van de jaren '70 geleidelijk aan steeds meer het besef dat de genoemde integratieve en veelsporige aspecten te veel accent kregen en het verticale mathematiseren (ver)hinderden – bijvoorbeeld ook bij het breukrekenen.
Deze ontwikkeling in het didactisch denken komt helder tot uitdrukking in de publicaties van Streefland over dit onderwerp, te beginnen bij het integratieve, veelsporige Breukelerdam uit het begin van de jaren '70 en uitmondend in de geïsoleerde, éénsporige leergang die hij aan het eind van de jaren '80 presenteerde – althans éénsporig wat het verticale mathematiseren betreft [5]. En uiteraard betekent 'geïsoleerd' in dit verband niet dat de voorgestelde leergang geen integratieve elementen meer bevat, maar dat het denken in lange leerlijnen voorop stond en dat pas nadat daarover klaarheid bestond aan de inkleding in aansprekende, wellicht integratieve contexten werd gedacht en niet andersom zoals eerder gebeurde.
Daarbij past nog de belangrijke aantekening dat ook puur formeel gestelde problemen en beknopte tekstopgaven voor de leerlingen en leraren uitdagend zijn.
Een voorbeeld:
Op een feest danst op een gegeven moment $\frac{3}{4}$ *deel van de vrouwen met* $\frac{5}{6}$ *deel van de mannen.*
1. Zijn er meer vrouwen of mannen op het feest?
2. Welk deel van de aanwezigen danst op dat moment?
3. Toon aan dat dit deel tussen de gegeven delen $\frac{3}{4}$ *en* $\frac{5}{6}$ *moet liggen en dat dit algemeen geldt bij verschillende breuken.*

Freudenthal

Freudenthal heeft deze evolutie in de ontwikkeling van het realistische reken-wiskundeonderwijs vanaf 1980 niet meer, zoals eerder, geleid en begeleid maar met grote belangstelling en toenemende waardering gevolgd – ook op het terrein van het breukenonderwijs – wat onder meer tot uitdrukking komt in zijn laatste boek 'Revisiting Mathematics Education - China Lectures' uit 1991. Ruim een jaar ervoor, om precies te zijn op 11 augustus 1989, had ik een gesprek met Freudenthal over een researchartikel, toen hij tamelijk abrupt zijn eigen rol en betekenis voor het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs ter sprake bracht en zijn onzekerheid uitte ('... een mens twijfelt wel eens') of hij die (hoofd)rol wel goed had vervuld. Daarbij doelde hij met name ook op het te grote accent dat hij destijds op de integratieve en veelsporige benaderingswijze had gelegd - andere kritische punten die hij toen eveneens naar voren bracht, laat ik hier onbesproken. En het was duidelijk dat deze kwesties hem persoonlijk en emotioneel bezig hielden. Had hij de 'verticale' ontwikkeling die in de jaren '80 met het opzetten van nieuwe leergangen werd aangezet niet zelf al in de jaren '70 moeten stimuleren?

Huidige situatie

Thans alle ontwikkelingen overziend stel ik vast dat de integratieve oriëntatie in het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool op een gevarieerde en evenwichtige wijze in de nieuwste methoden tot uitdrukking komt: de auteurs hebben de juiste balans gevonden voor de onderscheiden wensen uit het onderwijs. Tevens zijn de leergangen van een behoorlijke tot goede kwaliteit.
Ook is er een toenemende belangstelling voor puur getalsmatige en vakmatige puzzels en problemen te constateren, zoals magische vierkanten, visuele getallen (driehoeks- en vierkantsgetallen), priemgetallen, getalpatronen, opmerkelijke en verrassende uitkomsten van specifieke berekeningen, klassieke raadsels en zo meer [6].
(Alleen de tendens om kinderen steeds meer zelfstandig in niveaugroepen te laten werken – een trend van onderwijs-op-maat die vooral ook door sommige schooladviesdiensten en onderwijsinspecteurs wordt gestimuleerd - is een zorgelijke ontwikkeling voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Zorgelijk omdat het verticale mathematiseren, zoals bij het geleide heruitvinden van het breukrekenen, slechts

FIGUUR 1 Het Wiskobas-team in de jaren '70 (5e van rechts H. Freudenthal, 7e van rechts A. Treffers)

goed mogelijk blijkt te zijn binnen een interactief klassikaal onderwijskader waarin de leraar niet alleen als methodische begeleider maar ook als didactische leider fungeert. Maar dit terzijde.)
Kortom, het realistische reken-wiskundeonderwijs wordt steeds realistischer in de zin zoals het is bedoeld, namelijk niet alleen geënt op de fysische realiteit maar op de betekenisvolle werkelijkheid van en voor leerlingen, waartoe uiteraard ook de formele vakmatige wereld van de wiskunde behoort en steeds meer gaat behoren naarmate het leerproces voortschrijdt. Of deze tendens zich ook in het voortgezet wiskundeonderwijs voltrekt, kan ik niet goed beoordelen. Maar gelet op het onderwerp van dit themanummer zou je geneigd zijn te denken van niet. Krijgt Freudenthal misschien toch nog gelijk met zijn prognose uit 1976 – zij het wat verlaat? De Freudenthal van 1989 zou dat betreuren, en degenen die zijn gedachtegoed hebben verwerkt en bewerkt, zouden dat met hem doen.
Ik zou het begincitaat dan ook als volgt willen wijzigen tot *mijn* slotsom:
'Hoe zal het wiskundeonderwijs er in 2020 uitzien? Er is een simpel antwoord. Er is een vak, wiskunde geheten, de wiskundeles staat op het rooster, er is naast allerlei software ook nog een wiskundeboekje om te onderwijzen. (...) Het is er om beleefd en uitgeleefd te worden in een vakmatig opgezet onderwijs waarbinnen een passende plaats voor geïntegreerd onderwijs is gereserveerd.'
Ook deze prognose is net als die van Freudenthal toentertijd een wensdroom. In een dergelijke opvatting over wiskundeonderwijs past uiteraard wèl een themanummer over geïntegreerd onderwijs.

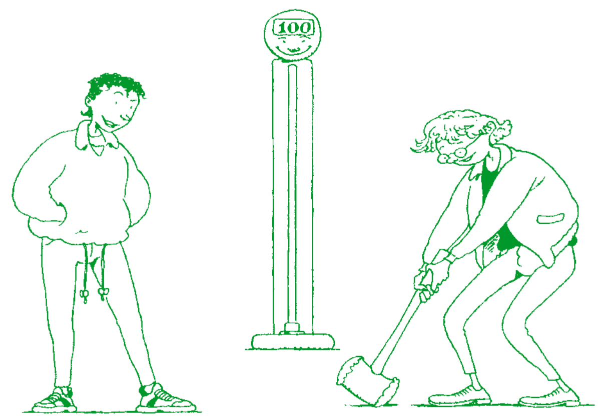
Noten

[1] Dit citaat uit 1976 is gepubliceerd in:
H. Freudenthal: Wiskunde-onderwijs anno 2000 – afscheidsrede IOWO, Euclides (52), p.290–295 (1977).
[2] Het onderscheid in horizontaal en verticaal mathematiseren is gemaakt in:
A. Treffers: Wiskobas doelgericht (dissertatie), IOWO, p.79 (Utrecht, 1978).
[3] Freudenthal vermeldt dit zelf en ook dat hij later dit onderscheid juist is gaan waarderen:
H. Freudenthal: Revisiting Mathematics Education - China Lectures, Kluwer (Dordrecht, 1999).
[4] Later is deze didactisch fenomenologische analyse van breuken gepubliceerd in:
H. Freudenthal: Didactische fenomenologie van wiskundige structuren, IOWO (Utrecht, 1984).
[5] Een reis door Breukelerdam staat in:
L. Streefland: Breuken beoefenen, Wiskobasbulletin (3), p.391-417 (1974).
De breukenleergang is beschreven in:
L. Streefland: Realistisch breukenonderwijs (dissertatie), IOWO (Utrecht, 1987).
De leergang is geënt op het eerlijk verdelen van pannenkoeken, repen, plakken, dropveters, etc. in situaties van (gelijkwaardige) tafelschikkingen. Dit is een éénsporige maar geen éénzijdige modelsituatie of metafoor als grondslag voor het verticale mathematiseren.
Een soortgelijke opzet, maar dan met betrekking tot het meten, treft men aan in:
K. Buys (red.): De Breukenbode - Een leergang voor de basisschool, S.L.O. (Enschede, 1995).
[6] Zie voor getaltheoretische puzzels en cijferraadsels bijvoorbeeld:
M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Buys, A. Treffers (red.): Jonge kinderen leren rekenen - Hele getallen bovenbouw basisschool, Wolters-Noordhoff (Groningen, 2001).

Over de auteur

A. Treffers (e-mailadres: a.treffers@fi.uu.nl) is oud-hoogleraar reken-wiskundedidactiek en thans nog parttime werkzaam aan het Freudenthal Instituut.

1 Met de hele klas Wie slaat harder?



Tariq slaat tot $\frac{4}{5}$.

Joost slaat tot $\frac{3}{4}$.

ONTWERPGERICHT ONDERWIJS AAN DE TUE

Nogal wat opleidingen van de Technische Universiteit Eindhoven verzorgen tegenwoordig een gedeelte van hun onderwijs in de vorm van Ontwerp Gericht Onderwijs, OGO. Drie opleidingen hebben op het moment veel OGO in hun programma, namelijk Werktuigbouwkunde (W), Biomedische Technologie (BMT) en Industrieel Ontwerpen. In dit stuk beperken we ons tot de bachelors van de eerste twee opleidingen.

[Frans Martens]

Geschiedenis

De faculteit Werktuigbouwkunde startte in het studiejaar 1994–1995 met een geheel nieuw curriculum. De faculteit introduceerde een voor Eindhoven nieuwe onderwijsvorm, het Probleem Gestuurd Onderwijs (PGO). Bij dit onderwijs wordt gedurende een aantal weken door een kleine groep studenten zelfstandig aan een probleem gewerkt. Deze onderwijsvorm werd van de Universiteit Maastricht overgenomen waarbij de problemen in Eindhoven meer diepgang kregen en omvangrijker werden.
Rond 1998 werd op de TUE het ontwerpen een van de speerpunten van de ingenieursopleidingen. Daarom werd er bij het PGO meer aandacht besteed aan het ontwerpen of het verbeteren van apparaten. Het PGO is men toen OGO gaan noemen. Voor het gemak vegen wij PGO en OGO op een hoop.

Rol van OGO

In de bachelors BMT en W besteden de studenten drievijfde deel van hun tijd aan 'klassieke' vakken. Zij volgen colleges en begeleide oefeningen en bestuderen de stof. Tweevijfde deel van de tijd besteden zij aan OGO door aan problemen te werken en trainingen te volgen die voor OGO noodzakelijk zijn.
De vakken behandelen theorieën en concepten uit de mechanica, materiaalkunde, stromingsleer, constructieleer, warmteleer, basischemie, biochemie en wiskunde. De vakken zijn zelfstandige eenheden, maar er is aandacht besteed aan de onderlinge samenhang. De omvang van de vakken is niet zo groot. Er zijn 36 vakken in het bachelorprogramma en 4 ervan zijn wiskundevakken. In veel van de andere vakken zitten stukken wiskunde.
Het OGO is gericht op het integreren van kennis opgedaan bij vakken, het modelleren van processen en het (her)ontwerpen van apparaten. In de eerste twee jaar leert men bij het OGO het samenwerken in een team en het presenteren van resultaten. Het OGO in die jaren is niet bedoeld om studenten nieuwe stukken theoretische kennis bij te brengen.
Veel studenten ervaren het OGO als de rode draad in de opleiding. Ondanks de nagestreefde samenhang zien zij de vakken als losse bouwstenen in hun opleiding. Omdat opgedane kennis van vakken bij OGO gebruikt kan worden, heeft OGO een stimulerend effect op het zich eigen maken van vakken.

Inhoud van het OGO

In het eerste jaar is het OGO als volgt georganiseerd. Ieder trimester worden de studenten in groepen van 8 ingedeeld waaraan een tutor is toegevoegd. De groep krijgt een aantal problemen, casussen genoemd, waaraan zij twee à vier weken aan moeten werken. Iedere casus moet een week later worden afgerond met een verslag of een presentatie. Het OGO is aan een strak tijdschema onderworpen.
De casussen zijn vrij bondig geformuleerd en bevatten zelden expliciete vragen en opdrachten. Een voorbeeld is de opdracht om een zo stevig mogelijke vakwerkconstructie te maken van een omschreven hoeveelheid materiaal. Een ander voorbeeld is de opdracht om de geleiding van prikkels bij een zenuwcel te beschrijven en te simuleren. Bij veel casussen moet wiskunde gebruikt worden, maar het is vaak een kwestie van opzoeken. Het blijkt dat studenten een in de literatuur gevonden wiskundig model met heel veel moeite in verband kunnen brengen met fysische verschijnselen. Voor het zelf bedenken van wiskundige modellen is hun wiskundige kennis te gering.

Vorm van het OGO

In het eerste jaar zijn er per week twee bijeenkomsten van twee uur waarin de groep de vorderingen bespreekt in aanwezigheid van de tutor. De tutor speelt dan nauwelijks een inhoudelijke rol en treedt vooral sturend op wat het groepsproces betreft. In hogere jaren worden de groepen kleiner, de casussen groter en de tutoren inhoudelijk steeds belangrijker. Hier beperken we ons tot het eerste jaar. Bij iedere bijeenkomst zijn er een gespreksleider, een notulist en een schrijver. Het is de bedoeling dat ieder groepslid in iedere rol minstens een keer aan de beurt komt. De gespreksleider stuurt de discussie, de notulist legt de discussie en de afspraken vast en de schrijver zet de belangrijke punten schematisch op het bord.
Op het eind van een bijeenkomst wordt de zelfstudie afgesproken. Het opzoeken van gegevens, het achterhalen van de betekenis van begrippen en het vinden van modellen lukken meestal wel. Aan het kritisch bestuderen van literatuur en het in eigen woorden formuleren van denkbeelden en ideeën komen studenten vaak niet toe. Studenten storten zich vaak op het doen van metingen en experimenten zonder zich goed te realiseren wat men aan het doen is. Het strakke tijdschema van het OGO is hier debet aan. Per slot van rekening moet er een verslag komen of een presentatie gehouden worden. Bij de laatste bijeenkomsten staat de afronding zó centraal, dat de inhoudelijke discussies en uiteindelijk ook de casus er onder lijden.

Beoordeling bij het OGO

Een casuscoördinator beoordeelt het verslag of de presentatie van de groep. Het cijfer wordt dan ook toegekend aan de groep.
Na afloop van ieder trimester krijgt een student een individueel cijfer voor het OGO. Dit is gebaseerd op twee deelcijfers. Het ene deelcijfer is een groepscijfer, namelijk het gemiddelde van de cijfers van de verslagen of de presentaties van zijn groep. Het andere deelcijfer is door de tutor toegekend en behelst een oordeel over het functioneren van de student binnen de groep. Beide deelcijfers moeten voldoende zijn.
Na jarenlang meedraaien bij het eerstejaars OGO vind ik het beoordelen nog steeds een moeilijk punt. 'Meeliftgedrag' haal je er niet zo maar uit. Bij het verslag van de zelfstudie is moeilijk te achterhalen of de resultaten geplagieerd zijn. De relevantie van de aangeleverde resultaten is soms ook moeilijk te achterhalen omdat je geen inhoudsdeskundige bent.

Het meedoen bij groepsbijeenkomsten zegt ook niet alles, omdat echt inhoudelijke discussies weinig plaats vinden. Kortom, aan de individuele beoordelingen kleven bezwaren.

Casus 'Een plus een is ongelijk twee'

Om een idee van OGO te geven bespreek ik hier in de grote lijnen de casus 'Een plus een is ongelijk twee'. Deze casus zit in het eerste jaar van de opleiding BMT (biomedische technologie) en komt uit de hoek van de farmacokinetiek.
De probleemomschrijving past op een halve pagina. Hij bevat een dialoog tussen twee personen, die zich afvragen of pijn bij een dubbele dosis van een pijnstiller ook een dubbele periode onderdrukt wordt. Tijdens de dialoog komt ook de vraag naar boven of een dubbele hoeveelheid alcohol tot een twee keer zo lange kater leidt. Naast de probleemomschrijving krijgen de studenten materiaal waaruit blijkt dat zij een experiment met paracetamol moeten doen.
De studenten hebben vrij snel door dat zij een wiskundig model moeten maken waarmee de concentratie van een stof in het lichaam beschreven wordt. Zijzelf zijn niet in staat om een praktisch wiskundig model te maken omdat zij niet tot de kern van de zaak kunnen doordringen en omdat hun wiskundige kennis te gering is. In de literatuur treffen zij eenvoudige wiskundige modellen met differentiaal-vergelijkingen aan. Zij vinden ook meteen de oplossingen van deze vergelijkingen. De groep denkt na deze vondsten het probleem gekraakt te hebben. Als tutor heb je meteen door dat zij geen verband leggen tussen de fysiologische verschijnselen en de vorm van de differentiaalvergelijkingen. Zij analyseren de modellen en de gevonden uitkomsten niet. Na een paar stevige ingrepen in het groepsproces beginnen zij de verschillende modellen inclusief de oplossingen met elkaar te vergelijken en te bekijken welke fysiologische verschijnselen in de modellen zijn meegenomen.
Het experiment bestaat uit het slikken van paracetamol. De studenten verzamelen speekselmonsters en bepalen daarin de concentratie van paracetamol. Zij moeten de meetresultaten beoordelen en conclusies trekken. Ook hier speelt wiskunde een rol, want zij moeten beslissen of de meetresultaten in overeenstemming zijn met de modellen. Deze casus heeft in ieder geval het effect dat studenten het nut van wiskunde bij BMT inzien.

Casus 'Een weegschaal in beweging'

Bij Werktuigbouwkunde heeft men besloten, in het studiejaar 2002-2003 in het eerste jaar enkele nieuwe casussen te introduceren waarin de wiskunde centraal staat. In het herfsttrimester ging een casus over het wegen met een weegschaal. De weegschaal moest wiskundig beschreven worden met een massa-veersysteem met demping. Aan de hand van de bijbehorende tweede orde differentiaalvergelijking werden allerlei vragen gesteld. Deze vragen kwamen in feite neer op het in verschillende situaties kiezen van de juiste waarden voor de dempingconstante en de veerconstante.
Het viel mij op dat studenten meer fouten maakten bij het vertalen van de werkelijkheid naar een wiskundig model dan bij het toepassen van wiskunde of het vertalen van het wiskundig model naar de werkelijkheid. Het leren van wiskunde in context is naar mijn idee een hopeloze maar modieuze zaak.
Bij deze casus zit ook iets uitzonderlijks. Het is de eerste keer bij Werktuigbouwkunde dat alle studenten individueel getoetst worden. Bij het tentamen van het wiskundevak in de herfst, Calculus, wordt een van de vraagstukken besteed aan deze casus. Als men goed heeft meegedaan met deze casus, dan krijgt het tentamencijfer een oppepper. Het tentamen is nog niet gehouden, dus er kan nog niets zinnigs over gezegd worden.
Er worden op het moment nog twee wiskundecasussen ontworpen. In het wintertrimester komt er een casus die met lineaire algebra en in het lentetrimester een casus die met statistiek samenhangt. De laatste casus heeft weer een ander uniek aspect. De studenten moeten nu wel nieuwe stof aanleren, namelijk enkele beginselen van de statistiek. Ik ben benieuwd.

het leren van wiskunde in context is een hopeloze maar modieuze zaak

Vakken, OGO en wiskunde

Bij de vakken worden op een vrij efficiënte manier allerlei kennis en vaardigheden overgebracht. Het afrekenen van vakken door middel van tentamens geeft geen waterdichte garantie dat de stof uit zo'n vak ook daadwerkelijk beheerst wordt. Sterker nog, men heeft vaak het idee dat studenten een vak niet voldoende beheersen om in andere situaties de geleerde kennis te kunnen toepassen. Dit geldt ook zeker voor wiskunde. Als één van de oorzaken wordt gezien dat de studenten te lang passief blijven bij zo'n vak en zich alleen vlak voor het tentamen bezig-houden met het vak. Tentamens zonder standaard-vragen zorgen voor een betere studiehouding. Bij deze tentamens is het niet genoeg om te kijken wat er afgelopen jaren is gevraagd en moet de stof echt beheerst worden. Helaas hebben deze tentamens ook een ander effect: de slagingspercentages liggen lager.

Daarom is het met de vakken een beetje schipperen. In tegenstelling tot wat je vaak hoort, kunnen studenten ook bij vakken zelfstandig werken. De begeleide studie is hierop ingericht. Sterker nog, zelfs het werken in groepen met zo weinig mogelijk begeleiding wordt gestimuleerd.
Het OGO is er op gericht studenten actief met een probleem bezig te laten zijn. Zij kunnen alles wat ze in huis hebben, uit de kast halen. Toch is de werkelijkheid minder fraai. Studenten dringen moeizaam door tot de essentie van een probleem. Uit een enorme berg informatie moeten zij een idee oppikken of het juiste model kiezen. Zonder sturing gaat dit zeer inefficiënt. Het gevolg is dat studenten vaak aan het handje genomen worden door specifieke informatie of opdrachten te geven. Hiermee wordt het idee van zelfstandig werken onderuit gehaald.
Zwakke studenten hebben bij het OGO de neiging om hiaten in hun kennis te versluieren en de neiging om inhoudelijke discussies uit de weg te gaan. Meestal blijven zij hangen in het uitvoeren van door anderen bedachte taken en houden ze de ontwikkelingen in de groep niet bij. Sterke studenten laten staaltjes van hun kunnen zien, passen opgedane kennis uit vakken toe en duiken allerlei kennis op tijdens hun zelfstudie. Voor deze studenten is OGO een vondst.

de wiskundige vaardigheden van de eerste-jaars zijn geringer

Wiskunde en OGO

Een vak als wiskunde is volgens mij volstrekt ongeschikt om via OGO bij te brengen. Bij wiskunde zijn algoritmen, concepten, structuur en abstractie belangrijk. Het kunnen toepassen van deze zaken leer je door veelvuldig te oefenen in allerlei op elkaar lijkende gevallen waarbij de moeilijkheidsgraad wordt opgevoerd. Wiskunde is alleen maar bij te brengen als er een duidelijke structuur in de stof en in de vraagstukken is aangebracht. Een goed geformuleerde OGO-opdracht bestaat uit een weinig gedetailleerde tekst die de groep zowel voldoende aanknopingspunten als ook de nodige vrijheid geeft om een oplossing te vinden. Bij OGO speelt het opzoeken een grote rol, want niets hoeft opnieuw gedaan te worden. Bij wiskunde moet je zelf series opgaven maken om een concept of idee te leren beheersen. Dat anderen deze opgaven al vele malen gemaakt hebben, doet niet ter zake.

Tweede fase, OGO en vakken

Dit is het eerste studiejaar dat bijna alle studenten profielstudenten zijn. Ik merk wat het OGO betreft geen verschil tussen de generaties studenten. Deze eerstejaarsstudenten hebben wel grote moeite om redelijk voor de wiskundevakken te scoren. Hun wiskundige vaardigheden zijn duidelijk geringer.

Over de auteur

Frans Martens (e-mailadres: f.j.l.martens@tue.nl) werkt sinds 1983 bij de faculteit Wiskunde en Informatica van de Technische Universiteit Eindhoven. Hij is sinds een aantal jaren coördinator serviceonderwijs wiskunde. Hij verzorgt enkele eerstejaarsvakken wiskunde voor BMT en W. Bij beide opleidingen is hij in het verleden tutor geweest. Dit studiejaar is hij casuscoördinator van de casus 'Een weegschaal in beweging'.

WISKUNDE IN CASEGEORIËNTEERD ONDERWIJS

[Douwe Jan Douwes]

Inleiding

Bij het Instituut Techniek van de Hogeschool Drenthe hanteren we sinds 1996 een didactische aanpak die we het 'casegeoriënteerde onderwijssysteem' noemen. Drie jaar geleden is door Euclides hierop ingegaan [1]. Destijds lag de nadruk vooral op de onderwijskundige aanpak. In dit artikel zal ik vooral de plaats van de wiskunde in het systeem belichten.
We verzorgen zes opleidingen: twee laboratorium-opleidingen, chemie en biologie en medisch laboratoriumonderzoek; twee informaticaopleidingen, technische informatica en mens & informatica (formeel tot 1 september 2003 nog samen één opleiding), werktuigbouwkunde en elektrotechniek (in afbouw, sinds 2001 worden geen studenten meer aangenomen). Behalve bij mens & informatica speelt wiskunde een belangrijke rol bij deze opleidingen.

Beschrijving onderwijssysteem

In het midden van de 90-er jaren constateerden we twee belangrijke problemen: de belangstelling voor technische opleidingen liep terug en het rendement van de opleidingen was, naar ons gevoel, niet zo goed als het zijn kon. In het kader van de projecten gericht op kwaliteit en studeerbaarheid hebben we toen een nieuwe aanpak ontwikkeld, waarmee we bovendien verwachtten de aantrekkelijkheid van de opleidingen te kunnen vergroten. Trefwoorden zijn 'taakgericht', 'projectmatig' en 'probleemgestuurd'.
De studenten werken vanaf de eerste week van de opleiding in teams van 6 tot 8 studenten aan cases waarbij een groot beroep gedaan wordt op de zelfstandigheid voor wat betreft planning en bestudering van de leerstof. Een case is een praktijk-situatie die voor de studenten herkenbaar en motiverend is, maar die ook relevant en hanteerbaar (naar omvang en niveau) moet zijn. De nadruk ligt op de integratie van vakgebieden. Er worden slechts zeer beperkt instructiecolleges gegeven. De case wordt afgesloten met een werkstuk: een product, een verslag en/of een mondelinge presentatie. In een aantal gevallen worden delen van een case, bijvoorbeeld een stuk wiskunde, met een toets afgesloten. Zowel het eindproduct als de losse studieactiviteiten zijn in het begin van de opleiding precies omschreven, maar later worden de beschrijvingen globaler.

Het wiskundeonderwijs

Het wiskundeonderwijs is mede als gevolg van het gewijzigde onderwijssysteem ingrijpend gewijzigd, zowel in omvang als in aanpak. Zo is het onderdeel numerieke methoden geheel vervallen. In de lineaire algebra en de analyse is flink gesneden. Wiskunde is sinds 1996 eerst en vooral een ondersteunend vak. Het gebruiken van computeralgebra is er, mede vanwege de kosten, niet van gekomen.
Als algemeen uitgangspunt geldt het uitgangspunt 'just-in-time learning'. Daar waar wiskunde nodig is voor andere vakgebieden wordt een stukje wiskunde aangeboden. Dat heeft ertoe geleid, dat vele cases een hoofdstuk wiskunde bevatten, dat niet erg omvangrijk is. Een paar voorbeelden: stukjes lineaire algebra bij cases waarin mechanica en robotarmen een rol spelen; complexe getallen in een case over wisselsignalen; Laplace-transformaties in een case over regelsystemen; Fourier-analyse in een case over signaalbewerking.
Een tweede uitgangspunt is het verzorgen van een

logische opbouw van de wiskundige theorie. We willen de wiskunde wel algemeen houden: niet wiskundige kennis en vaardigheden teveel aan één case koppelen. Dit uitgangspunt is niet altijd eenvoudig verenigbaar met het eerder genoemde just-in-time learning. Nogal eens moet er in een case meer wiskunde worden aangeboden dan er voor de case strikt genomen nodig is. Studenten hebben daar geen problemen mee, behalve een algemene en brede aversie tegen wiskunde. Het belang van wiskunde wordt namelijk algemeen erkend.
Niet iedere opleiding heeft automatisch een verzameling cases waarin op een logische manier de gehele wiskunde aan bod komt. Wiskunde is tenslotte

toch meer dan een verzameling van vaardigheden die voor andere vakken nodig zijn. In zo'n geval kan het zelfs gebeuren dat er een hoofdstuk wiskunde in een case bestudeerd moet worden zonder dat er in de case een noodzaak voor bestaat; alleen omdat de volgende case wat wiskundige voorkennis vraagt en daarmee verder gaat.
Tenslotte is er in het begin van het eerste jaar een losstaande module basiswiskunde, waarin voor havo N&T-leerlingen vooral herhaling zit, maar voor anderen meer dan nuttige oefening van basisvaardigheden. Voor mts-ers zonder doorstroomcertificaat bestaat er sinds dit cursusjaar een uitgebreide cursus basiswiskunde met dezelfde doelstellingen.
Met de hierboven geschetste mogelijkheden zijn we er redelijk in geslaagd om ook voor de wiskunde een nette opbouw van de theorie te realiseren zoals we die uit de diverse leerboeken gewend zijn. De volgorde is dan wel niet altijd die van het theorieboek, waardoor we af en toe ook eigen studiemateriaal moesten samenstellen.
Bovendien wordt naarmate de opleiding vordert steeds meer eigen initiatief van studenten verwacht. Zo worden ze bijvoorbeeld geacht bij de bestudering van Laplace-transformaties te ontdekken, dat daarbij ook partieel integreren en breuksplitsen bekend verondersteld worden. Die onderwerpen zijn daarvoor niet aan de orde gekomen.

Docentbegeleiding

Zoals bij alle andere vakgebieden is ook bij wiskunde het oude systeem met een vast aantal weken en een vast aantal colleges per week afgeschaft. Ervoor in de plaats is volledige zelfstudie gekomen, met de mogelijkheid (verplichting) voor groepen studenten om afspraken te maken wanneer ze extra uitleg nodig hebben.
Wiskunde, maar ook statistiek, is altijd een apart hoofdstuk, en de begeleidende vakdocent is altijd een wiskundedocent. Door in de studieactiviteiten voldoende beoordelingsmomenten in te bouwen is goed te voorzien in voldoende terugkoppeling. Bij deze beoordelingsmomenten komen niet alleen de gemaakte sommen aan de orde, maar ook de theorie.
Niet iedere docent is daarmee even gelukkig. Met name wanneer aan een aantal groepen binnen korte tijd dezelfde stukjes theorie alsnog op verzoek moeten worden uitgelegd bekruipt menigeen de gedachte dat daar iets aan tijd te winnen moet zijn. Daar staat echter tegenover, dat bij uitleg aan een kleine groep en op hun verzoek het rendement van die uitleg veel groter is.
Belangrijk is in de gehele begeleiding een vinger aan de pols te houden bij die groepen die wiskunde erg moeilijk vinden. Deze groepen zijn geneigd de wiskunde uit te stellen, totdat ze ook bij andere vakgebieden echt gaan vastlopen op hun hiaten in wiskundekennis. In het eerste jaar worden studenten intensief en in het tweede jaar iets minder intensief begeleid (en in de gaten gehouden) door tutoren. Tutoren zijn bij ons geen vakdocenten of 'senior consultants', maar specifiek voor procesbegeleiding aangetrokken medewerkers, die met name groepsprocessen goed in de gaten houden. De studenten krijgen iedere week een weektaak, met daarop onder andere precies beschreven wat voor wiskunde die week doorgewerkt en afgerond moet worden. Groepen moeten wekelijks aan elkaar en aan de jaarcoördinator rapporteren wat hun vorderingen zijn, ook in relatie tot de jaar-, maand- of weekplanningen.

Toetsing

Wiskunde is van oudsher een vak waarbij individueel en schriftelijk wordt getoetst, de laatste jaren voor wiskundige vaardigheden ook wel met gesloten vraagvormen. Met ons onderwijssysteem hebben we meteen een punt gezet achter alle vormen van compensatie: iedere toets moet nu met voldoende worden afgerond. En ook allerlei tussentijdse beoordelingen (voortgangscontroles) moeten voldoende

zijn. Groot voordeel van deze tussentijdse controles (bijvoorbeeld een setje opgaven dat ingeleverd moet worden, en nabesproken) is, dat ook het laatste en vaak moeilijkste deel van een vak nu goed moet worden bestudeerd.
Dat maakte de weg vrij voor allerlei toetsvormen. Daarbij stond steeds voorop, dat we met name de noodzakelijke wiskundige vaardigheden wilden toetsen. In het eerste jaar leidde dat tot een groot aantal kleine toetsen, waaraan pas mocht worden deelgenomen als de voorbereidende activiteiten met de vakdocent waren besproken (en met voldoende waren beoordeeld). Het idee was, dat de schriftelijke toetsen alleen nog tijdelijk ter controle bestonden.
Inmiddels zijn de meeste kleine toetsen weer vervangen door één grotere eindtoets, vooral omdat de toetsdruk en de administratie ervan als nadelen werden ervaren. Wat wel is gebleven is de insteek, dat het vooral om de noodzakelijke (wiskundige) vaardigheden gaat. Een aantal van die toetsen heeft, tot groot ongenoegen van studenten, juist omdat het alleen gaat om noodzakelijke vaardigheden, als grens tussen voldoende en onvoldoende 65%-70% van de maximale score (ook open vragen-toetsen).
Naast deze schriftelijke toetsen is er één onderwerp (Laplace-transformaties) dat op basis van (de voortgang van) het groepswerk wordt beoordeeld. En er zijn enkele onderwerpen in de laatste fase van de opleiding waarvoor een groepstoets plaatsvindt aan het eind van het hoofdstuk. Van potentiële nadelen van deze toetsvormen, zoals moeilijk objectiveerbaar en lastig wanneer studenten hun beoordeling willen aanvechten, hebben wij in ruim 6 jaar tijd niet echt last gehad.

Resultaten

Dankzij het onderwijsconcept wordt er door studenten zichtbaar harder gewerkt dan vroeger. Vroeger was het de docent, die via de colleges het tempo vastlegde. Nu kunnen studenten zelf het tempo bepalen, zij het dat ze daarover wel verantwoording moeten afleggen. Het individuele studieprogramma doet zijn intrede.
Vroeger haakten veel studenten snel af, met name bij ‘moeilijke’ vakken als wiskunde. Een dikke onvoldoende voor analyse1? Dan beginnen we maar niet aan analyse2! Nu kan een aantal studenten met enige vertraging toch verder. Voor docenten werkt dat nog al eens verwarrend: je weet niet welke studenten waarmee bezig zijn.
Wat niet veranderd is, is de houding van studenten ten aanzien van de wiskunde. Voor velen blijft het een vervelend en moeilijk vak. Bovendien kom ik nog steeds 4^e jaars tegen die ik moet adviseren om het boek uit het eerste jaar nog eens te pakken.
Voor mij persoonlijk ligt het grootste winstpunt in het directe contact met de studenten, dankzij de besprekingen per groep en de mogelijkheid om maatwerk te leveren. Wat meer afspraken met de groep mts-ers, die bijna geen wiskunde op de mts hebben gehad; bijna geen afspraken met een groepje vwo-ers, dat alles geheel zelfstandig in korte tijd heeft

doorgenomen. Die goede studenten komen er altijd wel, maar juist de zwakkere studenten kun je nu extra aandacht geven.

Noot

[1] Euclides (75-5), februari 2000, p. 151 e.v.

Over de auteur

Sinds 1989 werkt Douwe Jan Douwes (e-mailadres: dj.douwes@hsdrenthe.nl) bij de Hogeschool Drenthe als docent wiskunde en informatica. Op dit moment beslaat dat ongeveer tweederde van zijn jaartaak. Sinds 2000 is hij daarnaast lid van het managementteam van het Instituut Techniek, specifiek belast met de leiding van de laboratoriumopleidingen en de taakverdeling binnen het Instituut.

Jaarrede uitgesproken door Marian Kollenveld op de Jaarvergadering van 16 november 2002

De liefde

Laten we het eens over de liefde hebben.
En dan bedoel ik niet de nieuwste bedrijfseconomische variant die uw 8-jarige dochter van een string wil voorzien, maar de liefde als inspirerende kracht, die mensen samenbrengt. Want, waarom bent u anders op uw vrije zaterdag naar hier gekomen, dan uit liefde voor uw vak, de wiskunde, of uw beroep als wiskundeleraar? Door die gedeelde liefde bestaat de vereniging en bloeit zij, is zij actief, en zijn er gelukkig nog steeds mensen te vinden die enthousiast hun schouders ergens onder willen zetten, zoals het organiseren van deze jaarvergadering/studiedag.

'Alles van waarde is weerloos', zoals u weet. Liefdeloos onderwijsbeleid, of een liefdeloze schoolleiding, kan het plezier in het werk danig vergallen. Velen hebben daar mee te maken, soms tot ziekmakens toe. Maar liefde maakt ook sterk en geeft kracht om door te gaan. Docenten verdragen veel, 20 jaar bezuinigen op onderwijs bijvoorbeeld, in combinatie met forse onderwijshervormingen, en taakverzwaring. Wij mopperen wel, maar staken niet, nou ja, hoogstens op woensdagmiddag of in elk geval na lestijd, maar we gaan meestal gewoon door en maken er het beste van, samen met de leerlingen.

Die leerlingen, soms lastig, soms hartverwarmend, pubers die geen weet hebben van onderwijspolitiek of andere cijfers dan hun rapportcijfers, die vormen de kern waar het in het onderwijs om draait. Die leerlingen hebben recht op onderwijs van goede kwaliteit in dit toch niet bepaald armlastige land.

Beloftes en aandacht

De beloftes van voor de verkiezingen – voor de vorige moet ik inmiddels zeggen - waarbij onderwijs in elk geval retorisch veel aandacht kreeg, zijn vooralsnog financieel minder solide gebleken. Met minder geld meer doen, die variant kenden we al.

Aandacht voor veiligheid is zeker nuttig, mensen opsluiten soms ook. Maar preventie is zoveel beter. Het is niet toevallig dat criminele, ontspoorde mensen vaak een gebrekkige schoolopleiding hebben. Investeren in het onderwijs is investeren in de toekomst. Een goede opleiding, op elk niveau, draagt bij aan het welbevinden van mensen en integratie in de samenleving. Beknibbelen op de uitgaven voor onderwijs is kortzichtig. Het is een groot schandaal dat aan de OESO-cijfers inmiddels min of meer schouderophalend wordt voorbijgegaan; cijfers waaruit voor de zoveelste keer op rij bleek dat in ons land de uitgaven voor het voortgezet onderwijs royaal onder het Europees gemiddelde liggen. Dat Nederland in vergelijkende onderzoeken desondanks goed presteert, kan alleen omdat wij ons kennelijk collectief een slag in de rondte werken.
Met liefde, jazeker, maar we hebben dan ook een leuk vak. Het is belangrijk om ons dat plezier niet te laten afnemen.

Thema

Vandaar ook het thema van de studiedag, *survivelen*, creatieve oplossingen bij weinig tijd, oftewel hoe voorkom ik het verschralen van mijn onderwijs, hoe houd ik het plezier in het vak en hoe kan ik leuke, interessante dingen blijven doen.
Die interessante dingen, die zijn belangrijk: voor onszelf en voor de uitstraling van ons vak.
Die uitstraling is momenteel niet volstrekt positief. Het is daarbij lastig en verwarrend dat in de discussies over wiskunde alles op één hoop wordt gegooid.
Er is - zoals u immers weet - een wereld van verschil tussen bijvoorbeeld wiskunde A1 op de havo en B12 op het vwo. Het eerste is inderdaad niet abstract, maar pretendeert dat ook niet, het tweede wel, en wil dat ook zijn. Voor velen buiten het onderwijs is er slechts één, vaak niet geëxpliciteerd beeld van wiskunde, waarschijnlijk gebaseerd op het eigen onderwijs, van soms ruim 20 jaar geleden.

Zorg

De meningen over en de appreciaties van het wiskundeonderwijs lopen sterk uiteen. Daarbij zijn de meningen van degenen buiten het onderwijs het meest uitgesproken en het meest negatief.
Dat is deels een gevolg van voornoemde spraakverwarring en het niet goed volgen van de ontwikkelingen, maar daarmee wil ik het niet afdoen, daar komen we niet verder mee. Het komt ook voort uit een gevoel van zorg dat het niet goed gaat met het wiskundeonderwijs in Nederland.

Het bestuur deelt die zorg. Het wiskundeonderwijs staat onder druk. De studenten blijven weg, in het hbo en mbo dreigt wiskunde als apart vak te verdwijnen, in het voortgezet onderwijs zitten de exacte vakken in de knel, ondanks de aanwezigheid van wiskunde in alle profielen, en nieuwe, goede, en met name goed opgeleide docenten zijn schaars, en worden schaarser.

Verenigingsnieuws

Die ontwikkelingen zijn niet uniek voor Nederland; je ziet iets dergelijks ook in andere landen. Dat betekent enerzijds dat het niet alleen ónze schuld is, de oorzaken liggen dieper, en anderzijds dat het niet in ons vermogen ligt om het tij volstrekt te keren.

Maar dat betekent niet dat we het moede hoofd dus maar in de schoot moeten leggen. Voor ons blijft de opdracht om naar beste vermogen de jonge mensen die aan onze zorg zijn toevertrouwd te enthousiasmeren voor het vak. De stofwolken van de vernieuwingen zijn een beetje aan het optrekken en wij zien dan ook drie noodzakelijke lijnen ter verbetering.

Ten aller-allereerste

Daartoe moeten we wel in de gelegenheid worden gesteld. U weet dat het bestuur al jaren bezig is om in de Tweede fase voldoende contacttijd voor wiskunde te bedingen. Her en der heeft deze actie succes, maar nog niet zo algemeen als nodig is.

Afgelopen zomer, net na de examens, heeft het bestuur via een kleine bliksemenquête geprobeerd inzicht te krijgen in een mogelijke relatie tussen toegekende contacttijd en examenresultaat. Natuurlijk is die relatie niet eenduidig, er zijn nog veel andere variabelen in het spel, zoals groepsgrootte, schoolorganisatie, kwaliteit en motivatie van leerlingen en docenten. En natuurlijk ook weer dat verschil tussen wiskunde A en wiskunde B.
De eerste enquêteresultaten laten dat ook wel zien, maar je ziet ook dat het onder een bepaalde grens wel heel moeilijk wordt om een goed resultaat te behalen. De opgegeven contacttijd voor vwo-B12 bijvoorbeeld loopt over 3 jaar uiteen van 9 tot 15 uur en de samenhang met het examenresultaat is hier het sterkst. Met 9 uur een goede score halen is niet goed mogelijk, dat lijkt op een *mission impossible*, met 15 uur lukt het aanmerkelijk beter. De hoeveelheid toegekende contacttijd is een keuze van de school zelf, niet van de overheid. Directies kunnen zich daar niet achter verschuilen: de keus is aan hen om de verantwoordelijkheid te nemen voldoende tijd uit te trekken voor kwalitatief goed wiskundeonderwijs.

Voor een wat zekerder resultaat, waarmee we ook in de discussie om de contacttijd verder kunnen, want getallen en grafieken hebben een grote overtuigingskracht, zouden we graag de gegevens van nog veel meer scholen hebben. Vandaar ons verzoek aan u om uw gegevens mee te delen. We hebben daarvoor een enquête op de website geplaatst.

Twee

Ten tweede is het van belang om de communicatie met het vervolgonderwijs te verbeteren. Dat voorkomt teleurstelling en afbranden van leerlingen, omdat het vervolgonderwijs onvoldoende kennis heeft van de nieuwe programma's, waardoor alsnog leerlingen verloren gaan voor de exacte vakken.

Op centraal niveau is dat overleg rond de nieuwe programma's weliswaar geweest, maar in de praktijk wreekt zich het gebrek aan structuur en samenhang binnen het hoger onderwijs. De instellingen zijn in hoge mate autonoom, en dus moet in feite iedere docent in het vervolgonderwijs van de nieuwe programma's persoonlijk op de hoogte worden gebracht.
Onze werkgroep hbo zoekt naar oplossingen hiervoor, in samenspraak met de werkgroep havo/vwo.

Ten derde

Enthousiasme voor exacte vakken ontstaat vaak in de eerste jaren van het voortgezet onderwijs. Vandaar dat het bestuur plannen ontwikkelt om te komen tot een bèta-vwo, of technisch havo/lyceum zo u wilt. Indertijd is het ons niet gelukt om voor wiskunde een basisvorming op twee niveaus te bewerkstelligen, maar in de praktijk is men inmiddels op veel scholen van de heterogene brugklas via de dakpanklassen weer naar homogenere klassen teruggekeerd.
Het is te verwachten dat de regelgeving rond de basisvorming wordt versoepeld. Daardoor wordt het nu wel mogelijk de onderbouw op niveau in te kleuren. De kern van het plan is dat vanaf de onderbouw bij de exacte vakken gewerkt wordt aan een onderzoekende houding door intrigerende, prikkelende en enthousiasmerende zaken aan de orde te stellen. Dat kan over de hele breedte van vmbo tot en met vwo. Dat is goed voor de beeldvorming van de exacte vakken. De aansluiting op de technische profielen/sectoren in de bovenbouw wordt hierdoor verbeterd. Dat betekent in onze visie zeker geen terugkeer naar het maken van rijtjes steeds moeilijker sommen. De boodschap moet niet zijn: wiskunde is moeilijk, maar wiskunde is interessant. Voorbeelden van wat er bij wiskunde mogelijk is, zijn onder andere te vinden in het Wis-Kids-project, dat mede door de vereniging wordt ondersteund.

En verder...

Vmbo

In 2003 zullen de eerste examens worden afgenomen binnen de systematiek van de leerwegen in het vmbo. We kijken met zorg naar de basisberoepsgerichte leerweg: zullen de vroegere A-leerlingen dit aankunnen? Het bestuur is van mening dat er voor de toekomst aandacht moet zijn voor een gedifferentieerde invulling van het examen binnen de basisberoepsgerichte leerweg. Binnen dit gebied zijn teveel leerlingen die het niet of nauwelijks aankunnen. Bij een algehele aanpassing in de richting van deze leerlingen zullen wellicht de betere leerlingen, die er ook zijn, zich tekort gedaan voelen. Het bestuur is van mening dat voor de zwakste leerlingen gezocht moet worden naar een eigen traject inclusief examinering. Vanuit de beroepsgerichte vakken zou naar voren moeten komen welke accenten gelegd moeten worden in het wiskundeonderwijs al naar gelang de keuze van de leerling voor een vervolgopleiding.

Hbo

De werkgroep hbo moest voor de tweede keer een teleurstelling incasseren doordat een project om de wiskunde te integreren in de toegepaste vakken in het hbo werd afgewezen. De werkgroep werkt nu zoals eerder gezegd aan de aansluiting met het voortgezet onderwijs en zal daarnaast in Euclides artikelen publiceren over het gebruik van computeralgebra en de gevolgen door de didactiek, een onderwerp dat ook voor havo en vwo in de nabije toekomst van belang kan zijn.

Veel leuke dingen voor de mensen

Ondanks, of misschien wel dankzij de geschetste malaise, is er op dit moment een verheugende veelheid aan activiteiten die wordt ondernomen om het wiskunde onderwijs voor leraar en leerling interessant te maken. Het is teveel om op te noemen, daarom een kleine greep: Kangoeroe, Olympiade, A-lympiade, Wiskunde B-dag, Vierkant, Pythagoras, diverse websites voor praktische opdrachten, WisKids, WisWeb, WisFaq, veel studiedagen en cursussen. Het bestuur juicht deze ontwikkeling toe en uiteraard is de vereniging bij veel van deze activiteiten op enigerlei wijze betrokken.

Zebra en ...

Maar ons eigen Zebra-nieuws wil ik u niet onthouden: er zijn weer jonkies! En er is ook weer een nieuw opgavenbundeltje, vwo-B deze keer.

Voor tweedehands Zebra's en ander spul kunt u als vanouds terecht bij het WereldwiskundeFonds. De vorig jaar geïntroduceerde boekenveiling via internet is een groot succes, met de opbrengst daarvan zijn wiskundeboeken aangeschaft voor een lerarenopleiding op de Filippijnen. Andere nieuwe projecten zijn in Zambia, Afghanistan en Kenia. In de aula draait een PowerPoint presentatie met een overzicht van de projecten door de jaren heen. De leden van de werkgroep zijn ook aanwezig, maar hun boeken niet.

Onze winkel

En verder zoals gebruikelijk het NVvW-winkeltje met allerlei posters en hebbedingetjes op wiskundegebied. Dit jaar voor het eerst zonder de vertrouwde verschijning van Sjoerd Schaafsma. Sjoerd is verhuisd naar Australië. We zijn daarom dringend op zoek naar iemand met dezelfde soort prettige afwijking als Sjoerd om de verantwoordelijkheid voor aan- en verkoop over te nemen. Mocht u daarvoor voelen, spreekt u dan een van onze bestuursleden aan.

Daarnaast participeert het bestuur in menig bestuurlijk overleg over de positie van de exacte vakken en hoe die te verbeteren. En natuurlijk houden we u zo goed mogelijk op de hoogte van alle ontwikkelingen via ons prachtblad Euclides en onze fraaie en uiterst informatieve website. De informatie op de website is weliswaar nuttig voor iedereen, maar de leden zorgen er door hun contributie voor dat hij in de lucht is. We willen de website daarom voor een deel slechts toegankelijk maken voor leden.

De leden, de *raison d'être* van de vereniging - immers zonder leden geen vereniging - hoe staat het daar mee? De ledenwerfactie van een jaar geleden heeft een paar honderd nieuwe leden opgeleverd, een mooi resultaat. En leden zijn over het algemeen trouw, de reden van opzegging is in de meeste gevallen pensioen of overlijden, of men heeft een baan gevonden buiten het onderwijs. Aan die laatste twee redenen kunnen we weinig doen, aan de eerste een beetje, we houden graag de ouderen als lid in ere. Het bestuur heeft daarom besloten om gepensioneerden financieel tegemoet te komen door ook voor hen het studententarief open te stellen; 65-plussers betalen dan, als zij dat willen, evenveel als studenten; dat leek ons mooi symmetrisch.
Maar de vereniging ontkomt niet aan de algehele vergrijzing van het lerarenbestand. Dat aantal nieuwe leden werd royaal overtroffen door het natuurlijk verloop. Om te voorkomen dat we over enige jaren de contributie fors moeten verhogen of het licht uitdoen, is het dus van groot belang dat we voortdurend proberen de jongere generatie – voor zover aanwezig - bij de vereniging te betrekken. Het bestuur heeft daartoe een commissie in het leven geroepen die een en ander wat professioneel gaat aanpakken; dus ik hoop dat u dat goed zult merken. Maar de beste ambassadeur bent uzelf natuurlijk, als ieder lid een nieuw lid aanbrengt, kan de contributie misschien wel omlaag!

Tot slot

Ik hoop u duidelijk gemaakt te hebben dat er veel te doen is voor een vereniging als de onze. Een bestuur kan zoiets nooit alleen. Wij zijn daarom trots en dankbaar voor de bereidheid van zoveel leden om zich belangeloos voor de vereniging in te zetten. Dat toont een betrokkenheid die hartverwarmend is. We hebben elkaar nodig, samen staan we sterker. We willen alle vrijwilligers graag hartelijk danken voor hun inzet en u vragen dit te onderstrepen met een applaus.

[Frits Göbel]

Puzzel 4 - Kwadraten

Deze keer bekijken we twee merkwaardigheden van kwadraten.

Het is de lezer misschien al eens opgevallen dat de kwadraten van 13, 14 en 31 alledrie dezelfde 'cijferinhoud' hebben; dat wil zeggen : met dezelfde cijfers worden geschreven, in dit geval met de cijfers 1, 6 en 9. Wat betreft 13 en 31 is dit niet zo bijzonder, immers als a en b cijfers zijn in het 10-tallig stelsel, dan worden de kwadraten van $10a + b$ en $10b + a$ beide geschreven met de cijfers a^2, $2ab$ en b^2, mits a en b voldoende klein zijn. Maar voor 13 en 14 ligt het iets anders. Bovendien zijn dit opvolgende getallen. Zo komen we tot de volgende opgaven.

Opgave 1
Welke getallenparen (-tripels, ...) hebben een kwadraat van 4 cijfers met dezelfde cijferinhoud?
Als de vraag voor 3 cijfers was gesteld, zou het antwoord bij voorkeur in de volgende vorm gegeven moeten worden: (12, 21), (13, 14, 31), (16, 25).

Opgave 2
Hoe zit het met de 'zeldzaamheid' van k-de machten met gelijke cijferinhoud in het g-tallig stelsel als het aantal cijfers toeneemt?

Opgave 3
Bepaal alle getallen n waarvoor de kwadraten van n en $n + 1$ dezelfde cijferinhoud hebben en uit 5 of 6 cijfers bestaan, in het 10-tallig stelsel.

Een heel andere bijzonderheid vernam ik van de Oostenrijkse wiskundige Dr. Helmut Postl. Hij schreef: '*7744 is een kwadraat (88^2) dat wordt geschreven met "tweelingcijfers", in dit geval 77 en 44. (Toevallig heeft de wortel, 88, ook die eigenschap.) Naast de triviale uitbreiding waarbij je er nullen achter zet, ken ik maar één ander voorbeeld van zo'n kwadraat. Ik vond het met de hand, en met de computer ging ik na dat er geen ander niet-triviaal kwadraat is onder 335000000^2. Ik vermoed dat er helemaal geen andere oplossingen zijn.*'
Dit lijkt een redelijk vermoeden. Aangezien ik niet al te veel opgaven wil stellen die computergebruikers een groot voordeel bieden, krijgt u een andere opgave, waarbij we op een ander talstelsel overgaan. Het grappige is dat verschillende talstelsels zich bij dit probleem heel verschillend gedragen. De volgende opgave is hiervan een voorbeeld.

Opgave 4
Bepaal een oneindige rij van getallen n, niet deelbaar door 7, waarvoor n^2 uit tweelingen bestaat in het 7-tallig stelsel. (Voor alle duidelijkheid: n zelf hoeft dus niet uit tweelingen te bestaan.)

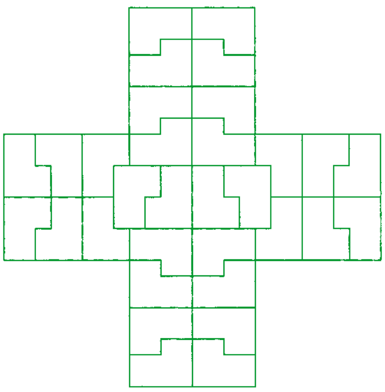
Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen voor goede oplossingen. De deadline is deze keer 20 februari 2003. Veel succes.

Oplossing van 'Twee verdeelpuzzels'

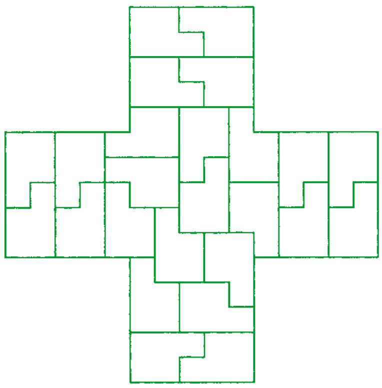
In de figuren 1 en 2 ziet u oplossingen van de twee opgaven. Verschillende inzenders gaven aan dat ze de opgaven niet al te moeilijk vonden. Voor degenen die er niet uitkwamen volgt hieronder een kleine analyse.

Ervaring leert dat verdelingen in polyomino's eenvoudiger te vinden zijn dan verdelingen in andere figuren. Voor opgave 1 verdelen we het Griekse kruis daarom eerst in $5k^2$ vierkante cellen, waarbij we k zó kiezen dat het aantal cellen deelbaar is door 32. De kleinste waarde van k die hieraan voldoet is 8. We hebben dan 320 cellen, dus we zoeken een verdeling in 10-omino's. Het is snel te zien dat de rechthoek van 2 bij 5 niet tot een oplossing leidt. Wat betreft eenvoud komt vervolgens in aanmerking: een rechthoek waaruit een rechthoekige hoek is verwijderd, anders gezegd: een polyomino in de vorm van een (niet-convexe) zeshoek. Hiervan zijn er 11, waarvan de een er wat bruikbaarder uitziet dan de ander. Na enig proberen vinden we dan de gegeven oplossing.

FIGUUR 1



FIGUUR 2



Bij opgave 2 is de vorm van de 'tegel' voorgeschreven, waardoor een oplossing redelijk snel kan worden gevonden. In mijn oplossing, die hier is afgebeeld, heb ik zo veel mogelijk rechthoeken van 2 bij 5 opgenomen. De puzzel is afkomstig van de Duitse wiskundige Dr. Torsten Sillke.

Er kwamen 7 correcte oplossingen van de twee opgaven binnen. T. Afman gaf als bonus de oplossing van de figuur die ik noemde als een voorbeeld waarvan je niet zou denken dat hij in twee gelijke stukken kan worden verdeeld.

De stand op de ladder is nu als volgt: aan kop gaan L. de Rooij, P. Stuut en H. Verdonk met 40 punten; T. Afman, L. van den Brom, D. Buijs, S. van Dijk en H. Linders hebben 20 punten.

Servicepagina

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofd-redacteur. Hieronder treft u de verschijnings-data aan van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld.
Doorgeven kan ook via e-mail:
redactie-euclides@nvvw.nl

nr	verschijnt	deadline
5	27 februari 2003	14 januari 2003
6	17 april 2003	4 maart 2003
7	26 mei 2003	1 april 2003
8	26 juni 2003	13 mei 2003

vr. 31 januari en za. 1 februari
Nationale Wiskunde Dagen, Noordwijkerhout
Organisatie Freudenthal Instituut

dinsdag 4 februari (eerste dag)
Studium generale: Geschiedenis van de wiskunde
Universiteit Utrecht

woensdag 5 februari
Nationale Leermiddelen Dagen Wiskunde
Organisatie LOTS Consultancy

vrijdag 14 februari (eerste dag)
Nijmeegs Colloquium Didactiek van Wiskunde
Organisatie ILS/KUN, Nijmegen
Zie ook p.121 in Euclides 78-3

vrijdag 14 februari
Studiedag Applets in de wiskundeles, Utrecht
Organisatie APS

do. 20 maart en vr. 21 maart
Nationale Rekendagen, Noordwijkerhout
Organisatie Freudenthal Instituut

vrijdag 21 maart
Kangoeroe-wedstrijd
Organisatie KUN, Nijmegen
Zie ook p.97 in Euclides 78-3

woensdag 2 april
Studiedag aansluiting reken- en wiskunde-onderwijs
Organisatie APS

donderdag 24 april
3e Conferentie ICT in de wiskundeles
Organisatie APS
Zie ook p.041 in Euclides 78-1

do. 1 mei en vr. 2 mei
Nederlands Mathematisch Congres 2003
Organisatie KUN, Nijmegen
Zie ook p.161 in dit nummer

zaterdag 17 mei
Symposium IX, Utrecht
Organisatie HKRWO
Zie ook p.161 in dit nummer

Voor internet-adressen zie de Agenda op de website van de NVvW:
www.nvvw.nl/Agenda2.html

Publicaties van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* *Zebra-boekjes*

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW
(http://www.nvvw.nl/lustrumboek2.html).

Iot-integratie MIXED MEDIA METHODE

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen

Telefoon (050) 522 63 11
Fax (050) 522 62 55
E-mail: netwerk@wolters.nl
www.netwerk.wolters.nl

Netwerk =

een glasheldere formule

NIEUW!

Kennismaken met de 3e editie?

Neem dan contact op met onze voorlichter Sandra Kooijstra en reserveer alvast beoordelingsexemplaren.

Wolters Noordhoff