

## Een beschouwing van de opgave Stuiterbal uit het examen vwo wiskunde B door Gerard Koolstra

### Een stuiterend balletje

Een stuiterend balletje is een mooie context voor een wiskundeopgave en voor bètabreed onderzoek. Ruim 23 jaar geleden schreef Anne van Streun een artikel hierover waar de wisselwerking tussen modelvorming en experimenteel onderzoek centraal stond.<sup>[1]</sup> De opzet van dit artikel is bescheidener. Op basis van twee eenvoudige, in de natuurkunde gangbare modellen laat Gerard Koolstra zien hoe voor de hand liggende vragen kunnen worden beantwoord. Directe aanleiding is de stuiterbalopgave in het laatste vwo-examen wiskunde B (tijdvak 1).

Bij het beschrijven van het stuiterproces gaat het eigenlijk maar om twee zaken:

- 1) de val van het balletje vanaf een hoogte  $h_0$ ;
- 2) de stuit, waarbij een bepaald deel van de energie verloren gaat.

Als het balletje naar beneden valt, ondervindt dit een valversnelling  $g$ . Deze varieert op aarde wat, met name door de draaiing van de aarde. In onze streken is deze ongeveer  $9,81 \text{ m/s}^2$ . Zoals gebruikelijk houden we geen rekening met de luchtweerstand.

Tijdens de valt geldt:  $h(t) = h_0 - \frac{g}{2} \cdot t^2$ . De tijd die nodig is om de grond te bereiken kan bepaald worden door de vergelijking  $h_0 - \frac{g}{2} \cdot t^2 = 0$  op te lossen. Dit levert  $t = \pm \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$ .

De tijd die het balletje nodig heeft om na het loslaten de grond te bereiken noemen we  $t_0$ . Er geldt dus  $t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$ . Meer in het algemeen geldt dat de tijd die zit tussen het bereiken van het hoogste punt (hoogte  $h$ ) en de meest nabije stuit gelijk is aan  $\pm \sqrt{\frac{2h}{g}}$ . Het is in dit geval zinnig om ook de negatieve oplossing serieus te nemen. De opgaande beweging van het balletje is precies het spiegelbeeld van de neergaande in dit model. Dat heeft te maken met de aanname dat alleen bij de stuit sprake is van energieverlies. De tijd tussen twee stuiten kunnen we dus schrijven als  $T = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{h}$ . Gemakshalve duiden we de constante  $\sqrt{\frac{2}{g}}$  in het vervolg aan met de letter  $\phi$ . Dus  $T = 2\phi \cdot \sqrt{h}$ . We kunnen dus  $t_0$  ook schrijven als  $\phi \cdot \sqrt{h_0}$ .

Bij een valversnelling van  $9,81 \text{ m/s}^2$  geldt  $\phi \approx 0,4515$  en  $2\phi$  is dan gelijk aan ongeveer 0,903.

In de examenopgave werd hier de waarde 0,90 gebruikt, wat als – zoals in wiskunde gebruikelijk – je precies rekent overeenkomt met een onnaars hoge valversnelling van ongeveer  $9,88 \text{ m/s}^2$ .

Afhankelijk van het materiaal van de bal en de ondergrond springt de bal na een stuit meer of minder hoog op. Aannemende dat bij elke stuit hetzelfde percentage energie verloren gaat, neemt de hoogte die bereikt wordt na elke stuit af met datzelfde percentage. Op het hoogste punt bezit de bal immers alleen maar potentiële energie en die is recht evenredig met de hoogte.

Het deel van de energie dat behouden blijft bij de botsing is gelijk aan  $\epsilon^2$ , waarbij  $\epsilon$  de elasticiteit is.) Bij de examenopgave werd gewerkt met  $\epsilon = 0,8$ , dus  $\epsilon^2 = 0,64$ .

De maximale hoogte na de  $n$ -de stuit wordt dus gegeven door:  $h_n = h_0 \cdot \epsilon^{2n}$ .<sup>[2]</sup>

Gecombineerd met de formule voor  $T$  betekent dat voor de tijd die nodig is voor de  $n$ -de sprong (dus tussen stuit nummer  $n$  en nummer  $n+1$ ) geldt:  $T_n = 2\phi\sqrt{h_0 \cdot \epsilon^{2n}} = 2\phi\sqrt{h_0} \cdot \epsilon^n$ .

De hoogte tijdens elke sprong (als functie van de tijd) is uiteraard een kwadratische functie.

Als we voor  $t = 0$  het moment nemen waarop het hoogste punt wordt bereikt, is een functievoorschrift voor de  $n$ -de sprong eenvoudig te maken:  $h(t) = h_0 \cdot \epsilon^{2n} - \frac{g}{2} t^2$ .

Wanneer we de tijd laten starten op het moment dat de bal wordt losgelaten, wordt het hoogste punt van de  $n$ -de sprong bereikt voor  $t = \frac{1}{2}T_0 + T_1 + \dots + T_{n-1} + \frac{1}{2}T_n$  ( $n > 2$ ). Bij het laatste examen vwo wiskunde B ging het om de derde sprong. Dat vraagt nog niet al te veel rekenwerk. Voor grotere waarden is het prettig om dit sneller te kunnen uittrekken. Formules voor de som van een meetkundige rij (wel onderdeel van wiskunde A, niet van wiskunde B) kunnen hierbij behulpzaam zijn:  $\frac{1}{2}T_0 + T_1 + \dots + T_{n-1} + \frac{1}{2}T_n$  kan ook geschreven worden als

$$\frac{1}{2}(T_0 + T_1) + \frac{1}{2}(T_1 + T_2) + \dots + \frac{1}{2}(T_{n-1} + \frac{1}{2}T_n), \text{ dus als de som van de gemiddelden } G_k \text{ voor } k = 0 \text{ t/m } n-1 \text{ met}$$

$$G_k = \frac{1}{2}(T_k + T_{k+1}).$$

In combinatie met de formules hierboven is  $G_k$  te schrijven als  $\phi\sqrt{h_0} \cdot (\epsilon^k + \epsilon^{k+1}) = \phi\sqrt{h_0} \cdot (1 + \epsilon)\epsilon^k$ . We noteren:  $\rho = \phi\sqrt{h_0} \cdot (1 + \epsilon)$ . Dan is  $G_k = \rho\epsilon^k$ .

Het gaat om een meetkundige rij met als som (als  $k$  loopt van 0 naar  $n-1$ )  $\rho \cdot \frac{1 + \epsilon^n}{1 - \epsilon}$ .

Gebruikmakend van de definitie van  $\rho$  zien we dat de tijd die tussen het loslaten van de bal en het moment van het hoogste punt van de  $n$ -de sprong berekend kan worden met  $\phi\sqrt{h_0} \cdot \frac{(1 + \epsilon)}{(1 - \epsilon)}(1 - \epsilon^n)$ .

We kunnen dit ook schrijven als  $t_0 \cdot \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}(1 - \epsilon^n)$ . Voor de tijd die verloopt tot het hoogtepunt van de derde sprong geldt  $t_3 = 4,392 \cdot t_0$ . Bij  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  komt dat overeen met ongeveer 1,983 s. (In het beoordelingsmodel stond

1,9764s). De limiet hiervan voor  $n \rightarrow \infty$  is gelijk aan  $t_0 \cdot \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}$ . De factor  $\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}$  is voor  $\epsilon = 0,8$  gelijk aan 9,0. Als de bal 1 seconde na loslaten de grond bereikt ligt deze na 9 seconden echt stil. Losgelaten van 1 meter hoogte bereikt deze al na (ongeveer) 0,45 s de grond, en ligt na ruim 4 s helemaal stil.

Interessant, ook voor leerlingen, is dat de hoogte van de bal op het hoogste punt van de sprong, wel een exponentiële functie is van het sprongnummer, maar beslist niet van de tijd.

### Over de auteur

Gerard Koolstra *houdt zich na een dienstverband van veertig jaar als docent, bezig met allerlei zaken binnen en rond het wiskundeonderwijs, onder meer als redacteur van de WiskundeE-brief.*

### Noten

[1] Zie *Euclides* 78(4), 128.

[2] De elasticiteit wordt doorgaans gedefinieerd als het quotiënt van de snelheden voor en na de stuit. Om dat de (kinetische) energie evenredig is met het kwadraat van de snelheid geldt hier de factor  $\epsilon^2$