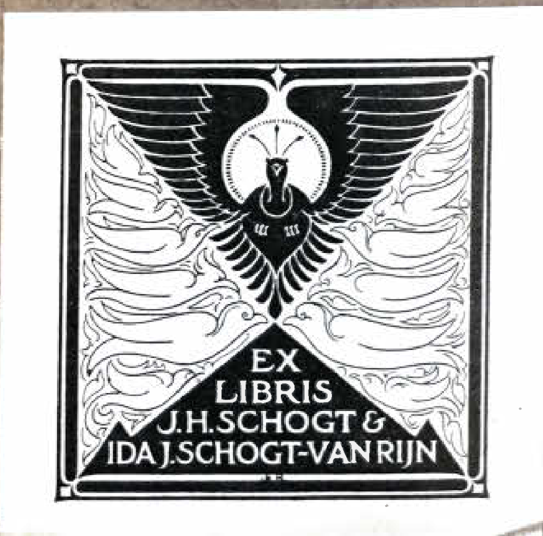
Waarschijnlijkheidsrekening


EX
LIBRIS
J.H.SCHOGT &
IDA J.SCHOGT-VAN RIJN

Waarschijnlijkheidsrekening.

§1. Inleiding. Wat verstaat men onder waarschijnlijkheidsrekening of kansrekening? Iemand, die het begrip niet precies kent en deterministisch is aangelegd, is allicht geneigd te zeggen, dat er geen kans bestaat. Zijn de oorzaken voor een gebeurtenis aanwezig, dan heeft deze plaats, zijn ze niet aanwezig, dan niet: er is dus geen kans. Nog sterker komt dit uit bij het begrip „waarschijnlijk". Wanneer men zegt: het is waarschijnlijk, dat de aangeklaagde de misdaad begaan heeft, bedoelt men niet, dat de zaak zelf onbepaald is, maar alleen onze kennis van de zaak. Zeggen we: het is waarschijnlijk, dat het over een uur zal regenen, dan ligt ook hier de onbepaaldheid niet in de zaak zelf, maar in onze kennis er van.

Waarschijnlijkheidsrekening is dus de eenige tak van wetenschap, die berust op ons niet weten.

Het begrip waarschijnlijk is natuurlijk niet scherp. Berekening is alleen mogelijk, wanneer we onze verwachting, de kans, die we aan iets toeschrijven, in getallenmaat kunnen uitdrukken en dan aan verschillende dingen een gelijke kans, uitgedrukt door eenzelfde getal, kunnen toekennen. Alleen bij gevallen van gelijke kans kunnen we aan de kans een kansrekening vastknoopen; dit aantal gevallen is nog vrij uitgebreid, o.a. vallen er alle hazardspelen onder.

(Een dergelijke beperking hebben we in de algebra: het algemeene geval van een vergelijking is feitelijk $a \gtrless b$, maar we beschouwen alleen het speciale geval van gelijkheid $a = b$).

§2. De begrippen kans en oorzaak. We zijn gewoon, de kans op een gebeurtenis aan te geven door een breuk, waarbij in den noemer het aantal gevallen van gelijke kans staat, in den teller het aantal gevallen, waardoor de gebeurtenis tot stand kan komen. Voorbeelden: 1/ bij het opgooien van een munt is er evenveel kans op kruis als op munt en we noemen de kans van ieder $1/2$. 2/. Bij het opgooien van een dobbelsteen is de kans, dat een bepaald zijvlak bovenkomt $1/6$. 3/ De kans om uit n kaarten, waarvan m ruiten, een ruitenkaart te trekken, is volgens de definitie $\frac{m}{n}$. 4/ Wanneer een gebeurtenis zeker plaats heeft, is de kans op die gebeurtenis 1: hebben we alleen n ruitenkaarten, dan is ook volgens de definitie de kans dat we een ruiten trekken $\frac{n}{n} = 1$. 5/ Omgekeerd, hebben we alleen schoppen en klaveren, dan is de kans om een ruiten te trekken 0 $(\frac{0}{n} = 0)$.

Uit onze definitie van kans volgt onmiddellijk, dat

de som van alle kansen $= 1$.

Eigenlijk geheel een toepassing van de definitie, maar toch goed om als afzonderlijke regel vermeld te worden, is het groepeeren van kansen. Voorbeeld: 1/ Wat is de kans om een roode kaart te trekken uit n kaarten, waarvan m ruiten en l harten. Daar er $m+l$ roode kaarten zijn, is deze kans klaarblijkelijk $\frac{m+l}{n}$, wat ook aldus kan aangetoond worden: de kans om een ruiten

te trekken is $\frac{m}{n}$, om een harten te trekken $\frac{b}{n}$, dus de kans om een roode te trekken is $\frac{m}{n}+\frac{b}{n}=\frac{m+b}{n}$.
2. Een forens moet 250 dagen per jaar op zijn kantoor komen. Hij mist 10 maal den trein en is 14 dagen ziek geweest. De kans, dat hij er op een willekeurigen dag niet is, is dus $\frac{10+14}{250}$ $\left(\frac{10}{250}+\frac{14}{250}\right)$
In het algemeen: kan een gebeurtenis door eenige oorzaken tot stand komen, dan is de kans, dat zij tot stand komt gelijk aan de som van de kansen, waarmee ze door ieder van die oorzaken afzonderlijk zou tot stand komen. Het woord „oorzaak" heeft in de waarschijnlijkheidsrekening een algemeenere beteekenis dan in het dagelijksch leven. We kunnen natuurlijk in het 2e voorbeeld wel zeggen, dat de oorzaak van het niet aanwezig zijn is ziekte of te laat komen, maar in het eerste voorbeeld niet, dat de oorzaak van het trekken van een roode kaart is het trekken van een ruitenkaart. Het begrip oorzaak in den zin der waarschijnlijkheidsrekening is dus algemeener dan in dien van het spraakgebruik.

§ 3. Toepassingen. 1. Denk, dat er is een hardrijderij op schaatsen om het internationale kampioenschap, waaraan meedoen 2 Hollanders, 2 Friezen, 1 Groninger, verder buitenlanders, in het geheel 23 deelnemers. Wat is de kans, dat een Nederlander wint? Dit getal, dat eenigszins van iemands nationalen trots afhangt, is zeker niet $\frac{5}{23}$, daar we hier niet te doen hebben met 23 gevallen van gelijke kans. Men wedt na-

namelijk niet op den eersten den besten, maar op den besten rijder. En zelfs al wist men niets van de personen, dan zou men toch de ligging der landen in aanmerking moeten nemen: Finnen zijn over het geheel goede rijders; een Engelschman, die het geheele jaar in Davos getraind heeft, heeft meer kans dan een Hollander, die niet getraind heeft. Van de Nederlanders onderling zullen de Friezen van zichzelf de grootste kans toekennen. Het weergeven van de kans voor iederen rijder door een getal wordt dus een zeer ingewikkelde theorie, waarbij men ook met uitslagen van vroegere wedstrijden zal moeten rekening houden.

2. Wat is de kans om met 2 dobbelsteenen (waarmee we dus getallen 2—12 kunnen gooien) b.v. 7 te gooien? Er zijn 11 verschillende getallen mogelijk, maar toch is de kans $\neq \frac{1}{11}$, daar dit niet zijn gevallen van gelijke kans.

De kans op een bepaald getal is

$$\frac{\text{aantal oorzaken, waardoor dat getal ontstaat}}{\text{totaal aantal gevallen van gelijke kans}}$$

Met elk zijvlak van de eene dobbelsteen kunnen we elk zijvlak van de andere combineeren, er zijn dus 36 worpen mogelijk, die alle dezelfde kans hebben.

De kans om 2 (1-1) te gooien, is dus $\frac{1}{36}$.
" " " 3 $\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-2 \end{pmatrix}$ " " " " $\frac{2}{36}$.
" " " 4 $\begin{pmatrix} 1-3 \\ 2-2 \\ 3-1 \end{pmatrix}$ " " " " $\frac{3}{36}$.
" " " 5 $\begin{pmatrix} 1-4 \\ 2-3 \\ 3-2 \\ 4-1 \end{pmatrix}$ " " " " $\frac{4}{36}$.
" " " 6 $\begin{pmatrix} 1-5 & 4-2 \\ 2-4 & 5-1 \\ 3-3 & \end{pmatrix}$ " " " " $\frac{5}{36}$.
" " " 7 $\begin{pmatrix} 1-6 & 4-3 \\ 2-5 & 5-2 \\ 3-4 & 6-1 \end{pmatrix}$ " " " " $\frac{6}{36}$.
" " " 8 $\begin{pmatrix} 2-6 & 5-3 \\ 6-2 & 6-2 \\ 4-4 & \end{pmatrix}$ " " " " $\frac{5}{36}$

De kans om 9 $\begin{pmatrix} 3-6 \\ 4-5 \\ 5-4 \\ 6-3 \end{pmatrix}$ te gooien, is $\frac{4}{36}$.
" " " 10 $\begin{pmatrix} 4-6 \\ 5-5 \\ 6-4 \end{pmatrix}$ " " " $\frac{3}{36}$
" " " 11 $\begin{pmatrix} 5-6 \\ 6-5 \end{pmatrix}$ " " " $\frac{2}{36}$
" " " 12 $(6-6)$ " " " $\frac{1}{36}$.

3. Is het volgende een voordeelig aanbod? Met 3 dobbelsteenen wordt geworpen: onder de 9 of boven de 12 is winst, daartusschen verlies.

De kans om 9 te gooien is

126	216	315	414	513	612
135	225	324	423	522	621
144	234	333	432	531	
153	243	342	441		
162	252	351			
	261				

$$\frac{25}{6^3} = \frac{25}{216}.$$

De kans om 10 te gooien is:

136	226	316	415	514	613
145	235	325			
154	244	334			
163	253	343			
	262	352			
		361			
4	5	6	5	4	3

$$\frac{27}{6^3} = \frac{27}{216}.$$

De kans om 11 te gooien is (evenals die van 10) $\frac{27}{216}$.
" " " 12 " " " (" " " 9) $\frac{25}{216}$.
De kans om 9 – 12 te gooien is dus $\frac{25+27+27+25}{216} = \frac{104}{216}$.
De kans om onder de 9 of boven de 12 te gooien is

$$1 - \frac{104}{216} = \frac{112}{216}$$

wat ook direct na te gaan is. Het aanbod is dus voordeelig.

4. Wat is de kans om een staartnummer (hieronder te verstaan een getal met een 9) te trekken uit de getallen 1 – 100?

Een staartnummer kan door 2 oorzaken tot stand komen: 1e) doordat het cijfer der eenheden een 9 is (9 – 19 — 99). De kans, dat het staartnummer door deze oorzaak tot stand komt, is $\frac{10}{100}$. 2e) doordat het cijfer der tientallen een 9 is (90, 91 – 99). De kans dat het staartnummer door deze oorzaak tot stand komt, is $\frac{10}{100}$. De totale kans op een staartnummer $\neq \frac{10}{100} + \frac{10}{100}$; daar we 99 dubbel hebben geteld, is die kans

slechts $\frac{19}{100}$. We moeten onzen regel dus als volgt wijzigen:
Wanneer een gebeurtenis door verschillende elkander uitsluitende oorzaken tot stand kan komen, is de kans op die gebeurtenis gelijk aan de som der kansen.
In ons voorbeeld is de kans op een staatsnummer:
a) doordat het cijfer der eenheden 9 is, dat der tientallen niet $\frac{9}{100}$
b) " " " " tientallen 9 " , " " eenheden " $\frac{9}{100}$
c) " " " " eenheden 9 " " " tientallen ook $\frac{1}{100}$
wat tezamen juist $\frac{19}{100}$ geeft.

5. Wat is de kans, dat we uit een verzameling scheurkalenderblaadjes trekken Maandag 1 Januari?
We hebben hier een z.g. samengestelde gebeurtenis. en hiervoor geldt de volgende regel: Wanneer het voor een gebeurtenis noodzakelijk is, dat 2 oorzaken samenwerken, dan is de kans op die gebeurtenis gelijk aan het product van de kansen der oorzaken. (Hiervan hebben we reeds gebruik gemaakt in voorbeeld 2, toen we de kans om met 2 dobbelsteenen 2 te gooien, noemden $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$).
Zoo ook hier: de kans om Maandag te trekken, is $\frac{1}{7}$. de kans om 1 Januari te trekken, is (schrikkeljaren buiten beschouwing latende) $\frac{1}{365}$. de kans om Maandag 1 Januari te trekken, is dus $\frac{1}{7 \cdot 365}$.

6. Zijn er evenveel harten-, ruiten-, klaveren- en schoppenkaarten, dan is de kans om een hartenkaart te trekken $\frac{n}{4n} = \frac{1}{4}$.

7. Onder 30 jongens in een klasse wordt 4 maal een vraagstuk verloot. Alle jongens loten steeds mee. Wat is de kans, dat een bepaalde jongen een beurt krijgt? Deze kans is niet $\frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30}$, want het krijgen van het eerste en van het tweede vraagstuk zijn geen ge~~beurtenissen~~, die elkaar

uitsluiten; een jongen kan n.l. ook 2, 3 of 4 beurten krijgen.

I We moeten dus opgaven maken, die elkaar uitsluiten.

1) De kans, dat de jongen het 1e vraagstuk krijgt, is $\frac{1}{30}$.

2) " " " " " " 2e " ", zonder het 1e gehad te hebben, is $\frac{29}{30} \times \frac{1}{30}$.

3) De kans, dat hij het 3e vraagstuk krijgt, zonder het 1e en 2e gehad te hebben, is $\left(\frac{29}{30}\right)^2 \cdot \frac{1}{30}$.

4) De kans, dat hij het 4e vraagstuk krijgt, zonder een van de andere 3 gehad te hebben, is $\left(\frac{29}{30}\right)^3 \cdot \frac{1}{30}$.

Zijn totale kans om een beurt te krijgen, is dus

$$\frac{1}{30} + \frac{29}{30} \cdot \frac{1}{30} + \left(\frac{29}{30}\right)^2 \cdot \frac{1}{30} + \left(\frac{29}{30}\right)^3 \cdot \frac{1}{30} \quad \text{---- (1)}$$

II Nog op een andere wijze zijn gevallen te maken, die elkaar uitsluiten.

1) De kans dat de jongen 1 vraagstuk krijgt is:

1e wel $\frac{1}{30}$	1e niet	— —	— —
2e niet $\frac{29}{30}$	2e wel	—	— —
3e " $\frac{29}{30}$	3e niet	3e wel	—
4e " $\frac{29}{30}$	4e niet	— —	4e wel
$\frac{1}{30}\left(\frac{29}{30}\right)^3$	$\frac{1}{30}\left(\frac{29}{30}\right)^3$		

Dus gelijk aan de kans, dat hij alleen het 1e vraagstuk krijgt, vermenigvuldigd met het aantal combinaties van 4 getallen 1 aan 1, dus $\frac{4}{30} \cdot \left(\frac{29}{30}\right)^3$.

2). De kans dat de jongen 2 vraagstukken krijgt, is de kans, dat hij het 1e en 2e krijgt, maal het aantal combinaties van 4 getallen 2 aan 2, dus $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}\left(\frac{1}{30}\right)^2\left(\frac{29}{30}\right)^2$

3) De kans, dat hij 3 vraagstukken krijgt, is $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{1}{30}\right)^3 \frac{29}{30}$.

4) " " " " 4 " " " $\left(\frac{1}{30}\right)^4$.

Zijn totale kans om een beurt te krijgen is dus:

$$4 \cdot \frac{1}{30}\left(\frac{29}{30}\right)^3 + 6 \cdot \left(\frac{1}{30}\right)^2\left(\frac{29}{30}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{30}\right)^3 \cdot \frac{29}{30} + \left(\frac{1}{30}\right)^4 \quad \text{---- (2)}$$

Deze uitkomst moet identiek gelijk zijn aan de vorige, wat gemakkelijk is aan te toonen.

$$\left.\begin{array}{l} (1) = \frac{1}{30} \, \frac{1-\left(\frac{29}{30}\right)^4}{1-\frac{29}{30}} = 1-\left(\frac{29}{30}\right)^4. \\ (2) = \left(\frac{29}{30}+\frac{1}{30}\right)^4 - \left(\frac{29}{30}\right)^4 = 1-\left(\frac{29}{30}\right)^4 \end{array}\right\} \text{dus } (1) \equiv (2).$$

[illegible].

2) Hoe groot is de kans, dat we 's nachts om 12 uur de volle maan zien? De maan wisselt in 28 dagen, dus de kans op volle maan is $\frac{1}{28}$. Stel de kans, dat het om 12 uur helder is $\frac{1}{2}$. Dan is de kans, dat we om 12 uur de volle maan zien dan en slechts dan $\frac{1}{2.28}$, wanneer er geen verband bestaat tusschen de phasen van de maan en de weersgesteldheid.

§5 <u>Toepassingen</u>. 1. Wat is de kans, dat we bij een goed geschud spel kaarten 3 azen achter elkaar vinden? Noem de azen 1 2 3 4. De kaarten kunnen liggen op 52! manieren. Wanneer 123 achter elkaar liggen, kunnen de overige nog op 49! manieren liggen. 123 kunnen nog in 3! volgorden liggen. De kans dat 123 achter elkaar op een bepaalde plaats liggen is dus $\frac{49!\,3!}{52!}$. 123 kunnen nog op 50 verschillende plaatsen liggen. Kans dat 123 achter elkaar liggen dus $\frac{49!\,3!}{52!}\,50$. De kans dat 3 van de 4 azen achter elkaar liggen is gelijk aan dit getal, vermenigvuldigd met het aantal combinaties van 4 grootheden 3 aan 3, dus

$$\frac{49!\,3!\,50}{52!} \cdot 4 = \frac{24}{52 \cdot 51}.$$

In dit getal is evenwel ook opgenomen het geval dat 4 azen achter elkaar liggen en wel dubbel geteld (op 2 manieren liggen er 3 achter elkaar); het moet er dus eenmaal afgetrokken. Denk 4 azen naast elkaar. De overige kaarten kunnen op 48! manieren liggen. De 4 azen geven 4! permutaties en kunnen op 49 verschillende plaatsen liggen. Er moet dus afgetrokken

$$\frac{48!\,4!}{52!}\,49 = \frac{24}{52 \cdot 51 \cdot 50}.$$

Derhalve is de kans, dat 3 azen achter elkander gevonden worden

$$\frac{24}{52.51} - \frac{24}{52.51.50} = \frac{49}{50}.\frac{24}{52.51}.$$

Het vraagstuk is ook zoo te behandelen, dat we nemen oorzaken, die elkaar uitsluiten. 3 azen kunnen op elkaar volgen door 2 oorzaken:

a) doordat er 3 en niet meer dan 3 achter elkaar liggen. Dit kan voorkomen aan beide kanten en tusschen niet-azen in.

$$\left.\begin{array}{lr} \text{Kans dat de } 1^e \text{ een aas is} & \frac{4}{52} \\ \text{" " " } 2^e \text{ ook " "} & \frac{3}{51} \\ \text{" " " } 3^e \text{ " " "} & \frac{2}{50} \\ \text{" " " } 4^e \text{ geen " "} & \frac{48}{49} \end{array}\right\} \text{kans} = \frac{4!\,48}{52.51.50.49}$$

Onjuist. Dit levert dus voor beide zijkanten $\frac{4!\,48.2}{52.51.50.49}$.

$$\left.\begin{array}{lr} \text{Kans dat de } 1^e \text{ geen aas is} & \frac{48}{52} \\ \text{" " " } 2^e \text{ een " "} & \frac{4}{51} \\ \text{" " " } 3^e \text{ ook " "} & \frac{3}{50} \\ \text{" " " } 4^e \text{ " " "} & \frac{2}{49} \\ \text{" " " } 5^e \text{ geen " "} & \frac{47}{48} \end{array}\right\} \text{kans} = \frac{4!\,48.47}{52.51.50.49.48}$$

De 3 azen kunnen op 48 verschillende plaatsen liggen, zoodat dit levert $\frac{4!\,48.47}{52.51.50.49}$.

De kans, dat er 3 en niet meer dan 3 azen op elkaar volgen is dus

$$\frac{4!\,48.(2+47)}{52.51.50.49} = \frac{4!\,48}{52.51.50}$$

b) doordat er 4 azen achter elkander liggen. De kans hierop is

$$\frac{4}{52}.\frac{3}{51}.\frac{2}{50}\,\frac{1}{49}.49 = \frac{4!}{52.51.50}.$$

De totale kans, dat er 3 azen op elkander volgen, is $\frac{4!(48+1)}{52.51.50} = \frac{24}{52.51}\,\frac{49}{50}$, wat overeenkomt met de vorige uitkomst.

2. Wat is de kans, dat bij whist een der spelers één kleur in handen krijgt? Er zijn 4 spelers,

52 kaarten. De wijze van uitdeelen is onverschillig, daar alle kaarten a priori dezelfde kans hebben. (1e Oplossing) Denk dus b.v. dat de kaarten stuk voor stuk gegeven worden. De kans dat de 1e speler bij de 1e uitdeeling ruiten 2 krijgt is $\frac{1}{52}$. De kans, dat hij bij de 2e uitdeeling ruiten 3 krijgt, is (daar hij alleen zijn eigen kaart kent) $\frac{1}{51}$ enz. De kans dat hij achtereenvolgens alle ruiten krijgt is

$$\frac{1}{52}\,\frac{1}{51} \;—\;—\;— \;\frac{1}{40}.$$

Hij kan de ruiten in 13! volgorden krijgen; de kans dat hij alle ruiten krijgt is dus

$$\frac{13!}{52\cdot 51 \;—\;—\; 40}$$

De kans, dat een willekeurig speler een willekeurig spel krijgt is

$$\frac{13!}{52 \;—\;—\; 40}\,4\cdot 4 = 4\cdot 4\cdot\frac{13!\,39!}{52!}$$

(Gemakkelijker aldus: kans dat zijn 1e kaart een ruiten is $= \frac{13}{52}$, 2e ook $\frac{12}{51}$ enz. Kans op alle ruiten $\frac{13!}{52 \;—\;—\; 40}$, dit te vermenigvuldigen met 4×4.) Deze uitkomst is niet juist, daar we niet hadden kansen, die elkaar uitsloten.
De kans dat 2 spelers een volledig spel krijgen is n.l. 2 maal geteld, moet dus 1 maal afgetrokken. De kans dat 3 (en dus ook 4) spelers een volledig spel krijgen is 4 maal geteld, moet dus 3 maal afgetrokken.
De kans, dat de 1e speler een bepaald spel (b.v. ruiten) krijgt, is $\frac{13!\,39!}{52!}$.
De kans, dat de 2e speler dus alle harten krijgt, is $\frac{13}{39}\times\frac{12}{38} \;—\;—\; \frac{1}{27} = \frac{13!\,26!}{39!}$
De kans, dat de 1e speler alle ruiten, de 2e alle harten krijgt, is $\frac{13!\,39!}{52!}\cdot\frac{13!\,26!}{39!} = \frac{(13!)^2\,26!}{52!}$
Dit getal moet vermenigvuldigd met het aantal

12.

combinaties van 4 spelers 2 aan 2 = 6 en met het aantal ~~variaties~~ van 4 kleuren 2 aan 2 = 4.3 = 12, zoodat de kans, dat 2 spelers 2 spellen hebben is

$$\frac{(13!)^2\,26!}{52!}\,6.12.$$

Dit getal moet van het vorige afgetrokken. Maar hierin is ook opgenomen het geval, dat 4 spelers een compleet spel hebben en dit is 6 maal geteld als het geval, dat 2 een compleet spel hebben, moet dus hiervan 5 maal afgetrokken, dus bij het 1e getal 5 maal opgeteld. Het moest 3 maal afgetrokken (zie bl 11) en moet dus in het geheel 2 maal er bij opgeteld.

Kans dat de 1e speler alle ruiten heeft $\frac{13!\,39!}{52!}$.

" " " 2e " " harten " $\frac{13!\,26!}{39!}$

" " " 3e " " klaveren " $\frac{13!\,13!}{26!}$

" " " 4e " " schoppen " $\frac{13!\,0!}{13!} = 1$.

Kans, dat de spelers de spellen in deze volgorde hebben, is $\frac{13!\,39!}{52!}\,\frac{13!\,26!}{39!}\,\frac{13!\,13!}{26!} = \frac{(13!)^4}{52!}$

Kans, dat de spelers complete spellen in een willekeurige volgorde hebben is

$$4.4!\,\frac{(13!)^4}{52!}.$$

De kans dat een ~~een niet meer dan een~~ willekeurige speler een willekeurige kleur volledig in handen krijgt, is dus:

$$4.4.\frac{13!\,39!}{52!} - 6.12.\frac{(13!)^2\,26!}{52!} + 2.4.4!\,\frac{(13!)^4}{52!}$$

2e Oplossing. Het aantal mogelijke spelverdeelingen is

$$\frac{52!}{(13!)^4\,4!}$$

Het aantal spelverdeelingen waarbij één hoopje van 13 alleen uit b.v. ruiten of een andere kleur bestaat, is

$$\frac{4.\,39!}{(13!)^3\,3!}$$

De kans, dat een willekeurig speler een volledig spel krijgt, is dus:

$$\frac{\frac{4 \times 39!}{(13!)^3\,3!}}{\frac{52!}{(13!)^4\,4!}} = \frac{4.4.\,13!\,39!}{52!} \quad (1)$$

Dit getal is weer te groot, want het kan voorkomen, dat 2 spellen compleet zijn en dit is 2× geteld. Het aantal spelcombinaties, waarbij dit voorkomt, is $\frac{6.26!}{(13!)^2\,2!}$ dus de kans erop:

$$\frac{\frac{6.26!}{(13!)^2\,2!}}{\frac{52!}{(13!)^4\,4!}} = \frac{72.(13!)^2\,26!}{52!} \quad (2)$$

Dit getal moet afgetrokken worden; maar dan wordt teveel afgetrokken, n.l. de kans, dat 3 (dus ook 4 spellen) compleet zijn. Dit is in (1) 4× besloten, in (2) 6×, dus 2× te veel afgetrokken, moet er dus weer 2× bijgeteld. Het aantal spelcombinaties, waarbij alle spellen compleet zijn is $\frac{4.13!}{13!}$

dus de kans er op: $$\frac{\frac{4.13!}{13!}}{\frac{52!}{(13!)^4\,4!}} = \frac{4.4!(13!)^4}{52!}$$

Tenslotte is dus de kans, dat een willekeurig speler een willekeurig spel heeft

$$\frac{4.4.\,13!\,39!}{52!} - \frac{6.12.(13!)^2\,26!}{52!} + 2.\frac{4.4!(13!)^4}{52!}$$

3e Oplossing. Denk, dat telkens 1 kaart gegeven wordt. Het aantal permutaties van de kaarten is 52!

$\left[^{bcd}_{|||}\right]_1 \left[^{bcd}_{|||}\right]_2 \left[^{a}_{|||}\right]_3 \left[^{a}_{|||}\right]_4$ — — — Als er 13 in een bepaalde volgorde voorkomen, kunnen de overige nog op 39! manieren gepermuteerd worden, de kans op een bepaalde volgorde is dus $\frac{39!}{52!}$. Maar nu kunnen die 13 kaarten (van 1 spel) nog op 13! manieren gepermuteerd, wat voor de kans op 13 bepaalde kaarten geeft $\frac{39!\,13!}{52!}$. Er zijn 4 kleuren, de kaarten van iedere kleur kunnen op 4 verschillende plaatsen (a, b, c, d) liggen, de

kans, dat een speler een compleet spel krijgt, is dus $\frac{4.4.39!\,13!}{52!}$ (1)
Hierin is weer dubbel geteld de kans, dat 2 spellen compleet zijn, moet dus 1 × afgetrokken.
Als 26 kaarten in bepaalde volgorde liggen, kunnen de overige nog op 26! manieren gepermuteerd zijn.
De 13 kaarten van ieder spel zijn nog te permuteeren, wat voor de kans geeft $\frac{26!\,(13!)^2}{52!}$
Dit getal moet vermenigvuldigd met het aantal combinaties van 4 getallen 2 aan 2 $= \frac{4.3}{1.2} = 6$ (vanwege de plaats) en met het aantal variaties van 4 getallen 2 aan 2 $= \frac{4.3}{1.2}.2! = 12$ (vanwege de kleur) zoodat af te trekken is:

$$\frac{6.12.26!\,(13!)^2}{52!} \quad (2)$$

In (1) is 4 × geteld de kans, dat 3 (of 4) spellen compleet zijn, in (2) $\frac{4.3}{1.2} = 6$ maal, deze kans is dus 2 × teveel afgetrokken en moet derhalve 2 × opgeteld.
Als 39 kaarten in bepaalde volgorde liggen, kunnen de overige nog op 13! manieren gepermuteerd.
De 13 van ieder spel kunnen ook op 13! manieren gepermuteerd, wat voor de kans geeft: $\frac{13!\,(13!)^3}{52!}$
Dit getal moet vermenigvuldigd met het aantal comb. van 4 getallen 3 aan 3 $= \frac{4.3.2}{1.2.3} = 4$ (vanwege de plaats) en met het aantal variaties van 4 getallen 3 aan 3 $= \frac{4.3.2}{1.2.3}.3! = 4.3!$ (vanwege de kleur), zoodat opgeteld moet:

$$2.\ \frac{4.4.3!\,13!\,(13!)^3}{52!}$$

(Hadden we geredeneerd met alle 52 kaarten in bepaalde volgorde, dus 4 spellen compleet, dan hadden we gevonden $2.\ \frac{4.4!\,(13!)^4}{52!}$ dus hetzelfde).
Ook nu wordt dus de uitkomst weer:

$$\frac{4.4.39!\,13!}{52!} - \frac{6.12.26!\,(13!)^2}{52!} + 2\,\frac{4.4!\,(13!)^4}{52!}$$

Opmerking Geven we niet telkens één kaart, maar b.v. 2, dan blijft het aantal plaatsen (a, b, c, d) waarop je kunnen liggen, hetzelfde, zoals gemakkelijk na te gaan is.

§6. Er is nog een regel te bespreken, wat we aan de hand van eenige voorbeelden zullen doen.

a) Er is een leger in den oorlog getrokken. Een aantal soldaten is door ziekte, een aantal aan verwondingen overleden. Gegeven is:

$\frac{1}{10}$ deel is ziek geworden; hiervan is $\frac{1}{20}$ overleden.
$\frac{1}{15}$ " " gewond ; " " $\frac{1}{3}$ " .

Wat is nu de kans, dat een willekeurig soldaat gestorven is?

De kans dat hij door ziekte gestorven is $= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{20}$
" " " " " wonden " " $= \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{3}$ } De kansen zijn uitsluitend gedacht.

De totale kans, dat hij gestorven is, is dus

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{3}.$$

We krijgen dus de kans op een bepaald gevolg door <u>de kans op de oorzaak te vermenigvuldigen met de kans, dat de oorzaak het gevolg meebrengt en te sommeeren</u>.

b) Denk 3 bussen met ballen

in de 1e bus	2e bus	3e bus
4 witte	7 gele	11 groene
5 zwarte	10 blauwe	4 oranje.

Wat is de kans, dat we een witte bal trekken?

De kans op de 1e bus is $\frac{1}{3}$
" " om uit de 1e bus een witte bal te trekken is $\frac{4}{9}$ } De kans om een witte bal te trekken is dus $\frac{1}{3} \times \frac{4}{9}$.

Denk nu in de

1e bus	2e bus	3e bus
4 witte	7 witte	11 witte
5 zwarte	10 zwarte	4 zwarte.