

Noten bij het artikel:

Roel van Asselt (2026). Een historische blik op praktische wiskunde, deel 9. *Euclides*, 101(7).

- [1] Het begrip 'functie' zoals wij dat nu gebruiken bestond in de 17^e eeuw niet. Een functie was destijds nog geen *relatie-begrip*, maar men sprak over 'grootheden, afhankelijk van een variabele', of van 'een kromme beschreven door een vergelijking'. Leibniz gebruikte het woord functie voor een eigenschap of betekenis van een meetkundige figuur of van een kromme (zoals een buigpunt of kromtestraal). De ons bekende notatie van een functiewaarde $f(x)$ is van Euler (1748, in *Introductio in analysis infinitorum*). Ook de uitdrukking $\sin(x)$ en andere goniometrische functievoorschriften zijn van Euler. Het meer abstracte relatie-begrip van een functie f , is van Dirichlet (1837, in *Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen*). Wij zullen de uitdrukkingen: functie f (de relatie), de functiewaarde $f(x)$ en de functie vergelijking $y = f(x)$ door elkaar gebruiken, waar dat de duidelijkheid ten goede komt. Verderop in de tekst is sprake van een 'vormfunctie', met nadruk op de loop van de grafiek van een functie.
- [2] Een aantal reeksen van Gregory vinden we in *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura*, uit 1667.
- [3] Dat oneindige reeksen in die tijd doorgaans nog 'verdacht' waren had van doen met het gemis aan goede definities en convergentiecriteria (waar Archimedes ook al om verlegen zat) en met exclusieve religieuze bespiegelingen over oneindige hoeveelheden. Wat te denken van de redenering van de grote Euler over de oneindige reeks $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$ waarvan hij opmerkte dat deze zowel gelijk was aan $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1)$ als ook aan $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots$ dus zowel de waarde 1 als 0 kon weergeven. Hij hield het maar op de waarde $\frac{1}{2}$ Tot die tijd waren uitdrukkingen als sinus en arctangens de omschrijving van meetkundige figuren. Wat wij nu 'de sinus van een hoek' noemen, heette destijds nog steeds in de klassieke geometrische traditie: 'de sinus van een boog op een cirkel'.
- [4] De (zwak convergerende) reeksontwikkeling van $\arctan(x)$ is wat later herontdekt en gepopulariseerd door Leibniz. De reeks convergeert voor $-1 < x \leq 1$. Leibniz vond de reeks van $\arctan(x)$ door die van $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ term voor term te primitiveren. Merk op dat $1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1-r}$.
- Als we daarin voor t de expressie $-x^2$ substitueren dan verschijnt de reeksontwikkeling voor $\frac{1}{1+x^2}$
- [5] Taylor vond, met x in de buurt van a – onder strikte voorwaarden –, dat $f(x)$ kan worden ontwikkeld in
- $$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k, \text{ met } f^{(k)}(a) \text{ de } k\text{-de afgeleide van de functie in } x = a. \text{ Voor } x = 0 \text{ ontstaat dan de MacLaurinreeks.}$$
- Benaderingen van $f(x)$ kunnen berekend worden door te stoppen bij een k -waarde, als er voldoende nauwkeurigheid is bereikt. Voor de grootte van de rest van de reeks die we niet meer meetellen heeft Lagrange later formules opgesteld.
- Het moet gezegd worden dat binnen de vernieuwende wiskunde uit de 18^e eeuw nog veel werd gerekend met begrippen en methoden die nog onvoldoende waren gedefinieerd en bewezen; dat zou pas in de volgende eeuwen gebeuren. Doorgaans nam met het niet zo nauw met de exactheid van de berekeningen; het praktische resultaat en de verifieerbaarheid daarvan kreeg meer aandacht dan de formele bewijzen van de correctheid van de gebruikte stellingen. In de praktijk werd in constructieberekeningen veel gewerkt met vuistregels, gewoonten, tabellen en overdimensionering. Ambachtlieden en Ingenieurs hadden in de 18^e eeuw – in tegenstelling tot wetenschappers – nog weinig kennis van, en vertrouwen in de calculus.
- [6] Het idee dat natuurprocessen worden bepaald door het realiseren van minimale afstanden – zoals binnen de Griekse wetenschap tot aan de late middeleeuwen werd gedacht – werd in de 17^e eeuw door de wetenschappers losgelaten. Het werd vervangen door de overtuiging dat in dynamische processen een bepaalde minimale grootte 'sturing' geeft aan het proces. Mede door analyses

vanuit de variatierekening bleek dat die sturing, naast krachten ook geleverd kom worden door minimale, maximale of stationaire grootheden als energie, oppervlakte, entropie (algemeen: actie). Stationariteit werd het trefwoord. Men zegt wel eens: zonder Leibniz was het idee van de minimalisering van grootheden die een beweging bepalen er nooit geweest, maar zonder Euler was het idee niet praktisch bruikbaar. Maupertuis publiceerde in 1744, voor zover bekend als eerste, het begrip 'minimale actie' als duiding van 'het economisch handelen van de natuur'. Maar dat was nog zonder tijdsafhankelijke krachten. Lagrange formuleerde de actie als met een tijdsafhankelijke functionaal, en richtte zich niet op een minimale actie S , maar op een stationaire actie met $\delta S = 0$. Zie ook noot 12 voor de betekenis van δS . Dat maakte het ook toepasbaar op de latere kwantum-, relativiteits-, en veldentheorie.

In de variatierekening zoek je steeds een functie/pad/toestand die een bepaalde functionaal of actie stationair maakt.

- [7] We laten de bepaling van de oplossing (via scheiding van variabele en ingenieuze goniometrische substituties) achterwege, het leidt naar de parametervoorstelling van een cycloïde. Het gaat immers in deze artikelen om de aard van de praktische toepassingen die mogelijk werden. Niettemin zien we hoeveel wiskundig handarbeid er nodig (en al bekend) was om de calculusberekeningen te kunnen uitvoeren.

- [8] Het is de lijn $y(x) = ax + b$, met $a = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$ en $b = y_0 - (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0) \cdot x_0$.

- [9] De veerenergie bij uitwijking y van de veer is af te leiden uit de wet van Hooke. Als een elastisch lichaam over een lengte s wordt verlengd is daar een met s evenredige kracht $k \cdot s$ voor nodig. De energie (arbeid) die nodig is om die kracht $k \cdot s$ over een afstand Δs te laten werken is $k s \cdot \Delta s$. Over een afstand van $s = 0$ tot $s = y$ wordt dat samen $\int_0^y k s ds = \frac{1}{2} k y^2$.

- [10] We beperken ons tot alleen de wiskundige aspecten van het model dat Newton gebruikte en de herformulering ervan die later binnen de variatierekening werd gebruikt. Newton gebruikte een vrij eenvoudig fysisch model voor de stroomweerstand: hij ging er onder meer vanuit dat de weerstand evenredig was met de impulsoverdracht aan het oppervlak. Verder nam hij de viscositeit in de stroom niet mee, kende zijn stroom geen werveling, waren de botsingen elastisch en had het lichaam een homogene massadichtheid.

Voor het lichaam nemen we het omwentelingsoppervlak rond de X -as van een functie met functiewaarden $y(x)$. Zie figuur 1, waarin een dwarsdoorsnede van het lichaam is getekend en het stroomveld \vec{v} ; α is de hoek waaronder de stroom het object treft. Neem l als lengte van het object langs de x -as. Voor de grootte van de weerstand gelden alleen de impuls-componenten van de stroomsnelheid \vec{v} loodrecht op het oppervlak, dus langs de normaal. Een oppervlak-elementje geven we aan met dO , waarvan de ingetekende doorsnede ds is. De grootte van de normaalcomponenten van \vec{v} en dO zijn respectievelijk $v \cdot \sin \alpha$ en $dO \cdot \sin \alpha$. Merk op dat in de getekende situatie van de doorsnede geldt dat $y' = \tan \alpha$.

De totale weerstand over het gehele omwentelingsoppervlak O is dan evenredig met $\int v \sin^2 \alpha dO$.

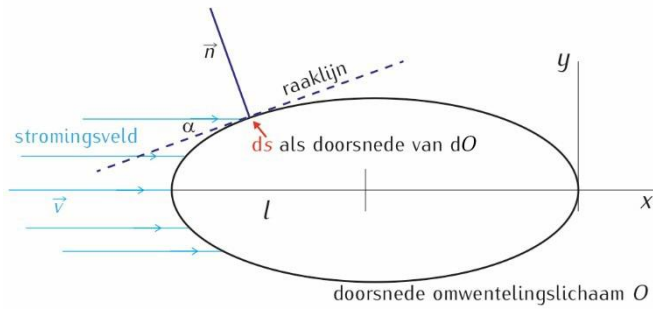
Hier ging Newton mee aan de slag in een slimme wiskundige analyse; een soort variatierekening *avant la lettre*. Wij nemen nu de afslag naar de formulering van de variatierekening van 50 jaar later. Voor dO nemen we $2\pi y \sqrt{1+y'^2} dx$; de totale impulsoverdracht is dan evenredig met: $2\pi v$

$$\int \sin^2 \alpha \cdot y \sqrt{1+y'^2} dx. \text{ Omdat } y' = \tan \alpha \text{ en omdat } \sin^2 \alpha \text{ gelijk is aan } \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{(\tan \alpha)^2}{1+(\tan \alpha)^2} = \frac{y'^2}{1+y'^2}$$

is de impulsoverdracht evenredig met $2\pi v \int \frac{y'^2}{1+y'^2} \cdot y \sqrt{1+y'^2} dx$ of wel evenredig met $\int_0^l \frac{y y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} dx$.

Passen we hierop de vergelijking van Euler-Lagrange toe met $L = \frac{y y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}$, dan zal blijken dat $y y'$ constant zal zijn. Hieruit kan afgeleid worden dat $y = C\sqrt{x}$ een oplossing is en dat dus de vorm

van het conische lichaam waarin de weerstand minimaal is een parabolische vorm heeft. Gelet de vereenvoudigingen in het model klopt de uitkomst onder zeer beperkte voorwaarden.



figuur 1 Berekeningsmodel voor de bepaling van stroomweerstand aan een de voorkant van omwentelingsoppervlak O.



Gottfried Leibniz
1646 – 1716 –



Johann Bernoulli
1667 – 1748



Pierre de Maupertuis
1689 – 1759



Leonard Euler
1707 – 1783



Louis Lagrange
1736 – 1813

Belangrijke grondleggers en ontwikkelaars van de variatierekening en mathematische fysica

[11a] De vergelijking Lagrange–Euler, afgeleid in actuele notaties.

Een beetje voorkennis:

1. De Maclaurin reeks voor een functie f staat toe dat we noteren: $f(h) = f(0) + h \cdot f'(0) + O(h^2)$, met $O(h^2)$ een restterm die snel (kwadratisch) zal afnemen naar mate h kleiner wordt. [1]

2. De kettingregel: de afgeleide $\frac{dF}{dx}$ van een functie F van twee variabelen ($F(u(x), v(x))$) is:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{dv}{dx} \quad [2]$$

In deze toelichting is de onafhankelijke procesvariabele t , bijvoorbeeld de tijd (maar het kan ook x zijn als het om een plaats afhankelijk actie gaat). Voor de afleiding van de formule van Euler–Lagrange maakt dat niet uit.

In de variatierekening gaan we steeds na voor welke $y = y(t)$ de actie $S = \int_{t_0}^{t_1} L(t, y, y') dt$

stationair is, dat wil zeggen: *kleine* veranderingen in de $y(t)$ -expressie geven geen verandering in S -waarden [$\Delta S = 0$].

In veel gevallen is S dan minimaal.

We gaan in de expressie L de $y(t)$ -functie uniform wijzigen (variëren) voor alle $t_0 < t < t_1$ door aan $y(t)$ een willekeurige functie $w(t)$ toe te voegen, met een voorfactor h . $y(t)$ wordt dus vervangen door $y(t) + h \cdot w(t)$ en (dus) $y'(t)$ door $y'(t) + h \cdot w'(t)$ [de factor h hangt niet van t af]. Om de gedachten te bepalen: $w(t)$ verandert de richting waarin $y(t)$ varieert, en h is de infinitesimale (stap)grootte van de verandering.

De Lagrangiaan $L(t, y, y')$ verandert dus in $L(t, y + hw, y' + hw')$. Ook de waarde van S varieert daardoor, wat ook de bedoeling is.

De analogie met functies f van één variabele x is dat veranderingen van functiewaarden vaak worden aangegeven met $f(x + h)$. Voor een functionaal, afhankelijk van functies zoals hier $y(t)$ en $y'(t)$, beschrijven we de verandering in de onafhankelijke variabele als $y(t) + h \cdot w(t)$.

We eisen nog wel dat $w(t_0) = w(t_1) = 0$ en dat w differentieerbaar is; dat zal verderop uiterst handig blijken, en het beperkt de willekeur in de keuze voor w in deze context niet.

S is nu wel een functie van h geworden: $S = S(h)$. We kunnen nu noteren $\Delta S = S(h) - S(0)$ en dat in termen van de MacLaurenreeks schrijven als $\Delta S = h \cdot \frac{dS}{dh}(0) + O(h^2)$ [1].

De factor $\frac{dS}{dh}(0)$ wordt in de variatierekening 'de eerste orde gevoeligheid van S' genoemd.

Het is belangrijk dat we bij de bepaling van $\frac{dS}{dh}(0)$ eerst $\frac{dS}{dh}$ bepalen en daarna $h = 0$ invullen; voor wiskundigen is dat vanzelfsprekend, maar kan toch tot misverstanden leiden als je er niet op bedacht bent.

Als $\frac{dS}{dh}(0) = 0$ dan zal ΔS in de Maclaurin benadering overeenkomen met alleen $O(h^2)$ (zie [1]) en zal ΔS met kleiner wordende h snel naar 0 naderen, hetgeen de actie stationair maakt. Maar voor welke $y(t)$ is $\frac{dS}{dh}(0) = 0$?

We moeten eerst $\frac{dS}{dh}$ berekenen, daarna $h = 0$ stellen en nagaan voor welke y geldt dat $\frac{dS}{dh}(0) = 0$.

$\frac{dS}{dh} = \frac{d}{dh} \int_{t_0}^{t_1} L(t, y, y') dt$. We schuiven $\frac{d}{dh}$ achter het integraalteken en gaan eerst op zoek naar

$\frac{dL}{dh}$: met de kettingregel wordt dat $\frac{dL}{dh} = \frac{\partial L}{\partial y} \frac{dy}{dh} + \frac{\partial L}{\partial y'} \frac{dy'}{dh} = \frac{\partial L}{\partial y} w + \frac{\partial L}{\partial y'} w'$.

[immers, $\frac{d}{dh}(y + h \cdot w) = w$ en $\frac{d}{dh}(y + h \cdot w') = w'$]. We gaan nu $h = 0$ invullen, die h zit alleen

nog in L ! Als we in L nu $h = 0$ invullen ontstaat L weer. $\frac{dS}{dh} = 0$ is nu gelijk aan:

$\int_{t_0}^{t_1} (\frac{\partial L}{\partial y} w + \frac{\partial L}{\partial y'} w') dt = 0$, met de oorspronkelijke L . *Partiële integraties* van de term $\frac{\partial L}{\partial y'} w'$ levert de vergelijking:

$[\frac{\partial L}{\partial y'} w]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} (\frac{\partial L}{\partial y} w - \frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial y'} w)) dt = 0$. Omdat $w(t_1) = w(t_0) = 0$ houden we van $\frac{dS}{dh}(0) = 0$ alleen

de vergelijking $\int_{t_0}^{t_1} (\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial y'})) w dt = 0$ over. Deze is gelijk aan 0 voor alle w -functies, als

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial y'}) = 0. \quad (1)$$

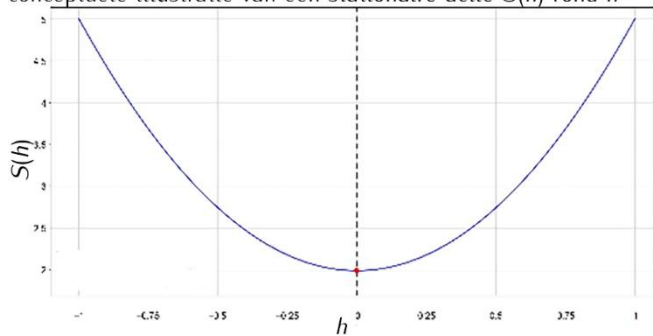
Oplossen van deze vergelijking levert de $y(t)$ die de actie stabiliseert/minimaliseert. In het geval dat L niet expliciet van t afhangt kan vergelijking (1) worden vereenvoudigd tot $L - y' \cdot \frac{\partial L}{\partial y'} =$

C (onstant) (2); de zogenoemde vergelijking van Beltrami, gepubliceerd in 1868. Hiermee werd het rekenwerk om de kromme

$y = y(t)$ te bepalen aanzienlijk vereenvoudigd.

In figuur 2 is een visualisering geschetst van het stabiliseren van S met variatie in y en het zichtbaar maken van $\Delta S = 0$ bij $h = 0$.

conceptuele illustratie van een stationaire actie $S(h)$ rond $h = 0$



figuur 2 Visualisering van het stabiliseren van een actie $S(h)$ rond $h = 0$, voor een oplossing y van de Euler-Lagrange vergelijking.

In de vakliteratuur wordt de factor $\frac{dS}{dh}(0)$ ook wel δS genoemd; het is *niet* de differentie van S , maar zoals gezegd wordt het 'de eerste orde gevoeligheid van S genoemd (de lineaire verandering van S in $h = 0$). Dat is historisch zo gegroeid: het δ -teken als symbool voor afgeleide was er eerder dan het symbool voor de differentie.

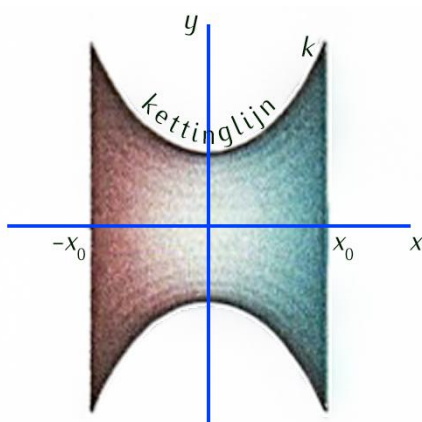
[11b] Oplossing van de Euler-Lagrange vergelijking uit het voorbeeld van het omwentelingslichaam het de kleinste oppervlakte.

We gaan dus uit van $2\pi y\sqrt{1+y'^2} - 2\pi y' \cdot y \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C$. Onder één noemer gebracht en

gekwadrateerd volgt dat $\frac{y^2}{1+y'^2} = \frac{C^2}{4\pi^2}$. $\frac{C^2}{4\pi^2}$ noemen we even k^2 . Na omwerking ontstaat dan de differentiaalvergelijking

$$\frac{kdy}{\sqrt{y^2 - k^2}} = dx, \text{ met als (standaard) oplossing}$$

$$k \cdot \arccos\left(\frac{y}{k}\right) = x, \text{ ofwel } y(x) = k \cdot \cosh\left(\frac{x}{k}\right) = k \cdot \left(\frac{e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}}{2}\right).$$



figuur 3 doorsnede van de catenoïde als omwentelingslichaam van de kettinglijn

Bronnen en aanbevolen literatuur

Bergamini, D. (1969). *Wiskunde*, Perscombinatie N.V. – Amsterdam.

- de Bie, K. (2011). *Technische analyse toegelicht: Fibonacci*, De Tijd.
- Bogaart, D. van den & Daems, J. (2016 t/m 2019). Wortels van de Wiskunde, artikelenserie, *Euclides* 92/93/94.
- Brochure (1979). *Een Quaestie van Tijd*, Museum Boerhaave, Leiden en een aantal vouwbladen uitgegeven door Museum Boerhaave, rond de herdenking van het 350e geboortejaar van Christiaan Huygens.
- Boudri, J.C. (1994). *Het mechanische van de mechanica*. Eburon.
- Bunt, L. (1963). *Van Ahmes tot Euclides*. Noordhoff.
- Dijksterhuis, F.J. (2011). *Hudde, de wiskunde en de stad*, KNAW.
- Eves, H. (1964). *An introduction to the history of mathematics*. Holt, Rinehart and Winston.
- Van Hoorn, M. (2009). *Drie klassieke problemen*, Seniorenacademie Groningen en Drenthe.
- Kostanas, K. (2018). *The inventions of the ancient Greeks*, Kostanas museum Athene.
- Lamein, J. (2000). *Mijn Leven, Girolamo Gardano*, Atheneum-Polak & Van Gennep.
- Maanen, J.A. (red) (2016). *Een complexe grootheid*, Epsilon Uitgaven.
- Netz, R & William, N. (2007). *De Archimedes Codex*. Atheneum-Polak & Van Gennep.
- Olsen, L.M., (1975), *Women in Mathematics*, Mit Press
- Reimer, D. (2014). *Count Like an Egyptian*. Princeton University Press.
- Stichting Math4all*, Website-artikelen van de stichting Math4all.
- Struik, D. (1980 heruitgave). *Geschiedenis van de Wiskunde*. SUA.
- Tijms, S. (2018). *Toeval is altijd logisch*, VU University Press.
- Waerden, B. van der (1950). *Ontwakende Wetenschap. Egyptische, Babylonische en Griekse wiskunde*. Noordhoff.
- Zuidervaart, H. & de Jong, T. (2011). *Philosophus et Mathematicus Incomparabilis: Johannes Hudde (1628–1704)*, Studium.

DVD:

- Amenábar, A. (2009), *Agora* (over leven en werken van Hypatia van Alexandrië)
- Du Sautoy, M. (2008). *The Story of Maths*, BBC