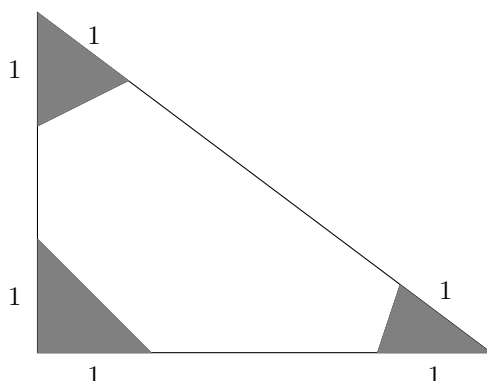


Driehoekjes afsnijden

Opgave

In deze opgave bekijken we rechthoekige driehoeken waarvan iedere zijde minimaal lengte 2 heeft. In iedere hoek snijden we een driehoekje met twee zijden van lengte 1 af, zoals in onderstaande figuur.



Bepaal de maximale som van de oppervlaktes van de drie afgesneden driehoekjes.

Uitwerking

Oplossing 1

Zij a de lengte van de horizontale rechthoekszijde van de driehoek, b de lengte van de verticale rechthoekszijde en c de lengte van de schuine zijde. Dan geldt $a^2 + b^2 = c^2$.

We berekenen eerst de oppervlakte van elk van de afgesneden driehoekjes. Het driehoekje linksonder heeft basis 1 en hoogte 1, dus de oppervlakte is $\frac{1}{2}$. Voor het driehoekje rechtsonder geldt dat het schuine lijnstukje van lengte 1 gelijk is aan $\frac{1}{c}$ van de totale schuine zijde. De hoogte van het driehoekje is daarom $\frac{1}{c}$ van de hoogte van de grote driehoek, oftewel $\frac{b}{c}$. Ook dit driehoekje heeft basis 1, dus de oppervlakte is $\frac{b}{2c}$. Op dezelfde manier heeft het driehoekje linksboven oppervlakte $\frac{a}{2c}$. De totale oppervlakte van de drie afgesneden driehoekjes is dus

$$\frac{1}{2} + \frac{b}{2c} + \frac{a}{2c} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right).$$

De som van de oppervlaktes is dus enkel afhankelijk van de verhoudingen tussen de rechthoekszijden en de schuine zijde, maar niet van de lengtes zelf (mits voldaan is aan de voorwaarde dat alle zijdes minimaal lengte 2 hebben). Anders gezegd: gelijkvormige driehoeken geven dezelfde som van de oppervlaktes.

Schrijf $u = \frac{a}{c}$ en $v = \frac{b}{c}$. Dan geldt dat $u^2 + v^2 = 1$ en is de som van de oppervlaktes gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot (1 + u + v)$. De oppervlakte is maximaal als $u + v$ maximaal is.

Er geldt dat $u + v$ maximaal is als (u, v) het raakpunt is van een raaklijn aan de eenheidscirkel met richtingscoëfficiënt -1 . De lijn $x + y = m$ snijdt de eenheidscirkel in de punten $(x, m - x)$ die voldoen aan de vergelijking $x^2 + (m - x)^2 = 1$. Dit is equivalent aan $2x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$. Het is een raaklijn indien de discriminant van deze vergelijking 0 is, dus $4m^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m^2 - 1) = 0$. Hieruit volgt dat $m^2 - 2 = 0$, dus het is een raaklijn als $m = \pm\sqrt{2}$.

Het gezochte maximum is dus $u + v = \sqrt{2}$ en dit treedt op in het punt $(u, v) = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$. De afgesneden driehoekjes hebben dan oppervlakte $\frac{1}{2} \cdot (1 + u + v) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Een andere manier om te bepalen wanneer $u + v$ maximaal is, is als volgt: er geldt dat $u = \sqrt{1 - v^2}$. De oppervlakte is dus maximaal als $f(x) := x + \sqrt{1 - x^2}$ de maximale waarde aanneemt in $x = u$. Omdat $f'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$ is

$$f'(u) = 0 \Leftrightarrow \frac{2u}{2\sqrt{1-u^2}} = 1 \Leftrightarrow u = \sqrt{1-u^2} \Leftrightarrow u^2 = 1-u^2 \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Oplossing 2

Laat α de hoek rechtsonder zijn en $\beta = 90^\circ - \alpha$ de hoek linksboven.

Het driehoekje linksonder heeft basis 1 en hoogte 1, dus de oppervlakte is $\frac{1}{2}$. In de driehoekjes rechtsonder en linksboven gebruiken we dat de oppervlakte gelijk is aan de helft van het product van twee zijden maal de sinus van de ingesloten hoek. Zo vinden we dat de oppervlaktes gelijk zijn aan respectievelijk $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin(\alpha)$ en $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin(\beta)$. De som van de oppervlaktes van de driehoekjes is dus $\frac{1}{2}(1 + \sin(\alpha) + \sin(\beta))$. Dit is maximaal als $\sin(\alpha) + \sin(\beta)$ maximaal is.

Omdat $\beta = 90^\circ - \alpha$ is $\sin(\beta) = \cos(\alpha)$. We moeten dus het maximum van $\sin(\alpha) + \cos(\alpha)$ bepalen. Het maximum kan op dezelfde manier bepaald worden als in Oplossing 1, waar het maximum van $u + v$ wordt bepaald onder de voorwaarde $u^2 + v^2 = 1$.

Het maximum kan ook bepaald worden door te gebruiken dat

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) + \cos(\alpha) &= \sin(\alpha) \cdot \frac{\cos(45^\circ)}{\cos(45^\circ)} + \cos(\alpha) \cdot \frac{\sin(45^\circ)}{\sin(45^\circ)} = \\ &= \sqrt{2} \cdot (\sin(\alpha) \cdot \cos(45^\circ) + \cos(\alpha) \cdot \sin(45^\circ)) = \sqrt{2} \cdot \sin(\alpha + 45^\circ). \end{aligned}$$

Dit is maximaal als $\alpha + 45^\circ = 90^\circ$ en dus $\alpha = \beta = 45^\circ$.

De maximale oppervlakte is dus $\frac{1+\sin(45^\circ)+\sin(45^\circ)}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Inzenders met de juiste oplossing

Gé Groenewegen, Kenneth Halman, Ton Hengeveld, André de Jonge, Hans Linders, Jos Re-mijn, Lieke de Rooij, Matthijs Schukking, Piet Smal, Martin Tijssens, Dick Tuninga, Patrick van der Wel en Sjoerd Zondervan

Winnaar van de cadeaubon

Ton Hengeveld