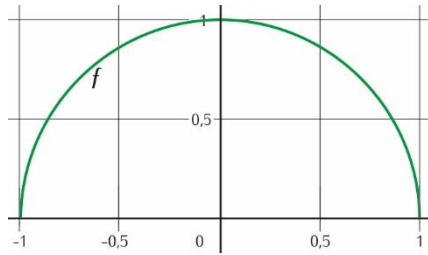


Bijlage bij het artikel 'Raaklijnen aan functies en parameterkrommen, vervolg' (Euclides 101-5).

Hans Huisman

Hieronder volgt een bespreking van de andere voorbeelden uit het artikel (*Euclides* 101-2) van Jan Otto Kranenborg.

IV



figuur 1

Bij de functie $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, zie figuur 1, is:

$$\overrightarrow{P}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}. \text{ Dit geeft:}$$

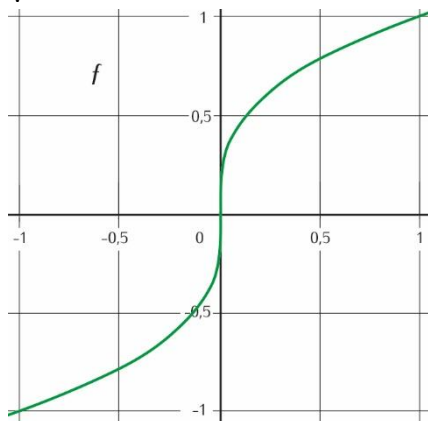
$$\overrightarrow{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix} = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dus $\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \\ -1 \end{pmatrix}$ is eveneens een richtingsvector van de raaklijn in het bijbehorende punt.

$\overrightarrow{r}(1) = \overrightarrow{r}(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ dus de raaklijnen in de punten $(1, 0)$ en $(-1, 0)$ zijn verticaal.

Een slimmere vectorvoorstelling is natuurlijk $\overrightarrow{P}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, met $0 \leq t \leq \pi$.

V



figuur 2

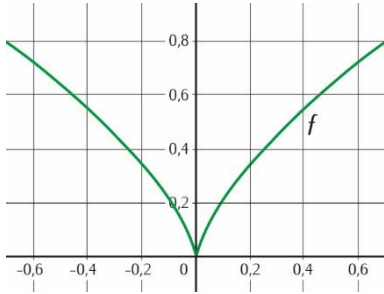
Bij de functie $f(x) = \sqrt[3]{x}$, zie figuur 2, is:

$\overrightarrow{P}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t \end{pmatrix}$. Dit geeft:

$$\overrightarrow{v}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \overrightarrow{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dus de raaklijn in het punt $(0, 0)$ is verticaal.

VI



figuur 3

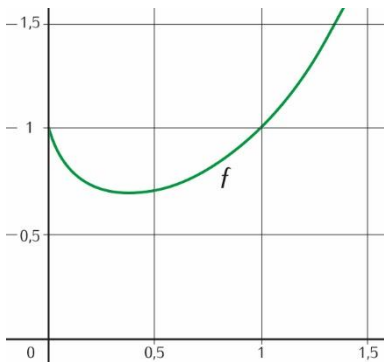
Bij de functie $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, zie figuur 3, is:

$\overrightarrow{P}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$. Dit geeft:

$\overrightarrow{v}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 3t \\ 2 \end{pmatrix}$, dus $\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 2 \end{pmatrix}$ is eveneens een richtingsvector van de raaklijn in het bijbehorende punt.

$\overrightarrow{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, dus de raaklijn in het punt $(0, 0)$ is verticaal.

VII



figuur 4

Bij de functie $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x=0 \\ x^x & \text{als } x>0 \end{cases}$, zie figuur 4, is:

$\overrightarrow{P}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{P}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^t \end{pmatrix}$ als $t > 0$. Dit geeft:

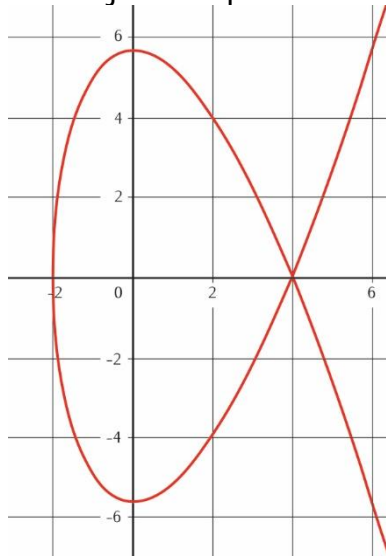
$$\overrightarrow{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ (\ln(t)+1) \cdot t^t \end{pmatrix} = (\ln(t)+1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \ln(t)+1 \end{pmatrix} \text{ mits } t \neq \frac{1}{e}.$$

Dus $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\ln(t)+1} \\ t^t \end{pmatrix}$ is eveneens een richtingsvector van de raaklijn in het bijbehorende punt.

Als t nadert tot 0, gaat het bovenste kental naar 0 (van de negatieve kant) en het onderste kental naar oneindig. De virtuele raaklijn in het punt $(0, 1)$ is verticaal.

$\vec{r}(\frac{1}{e}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dus de raaklijn in het punt behorend bij $t = \frac{1}{e}$ is horizontaal.

De vier genoemde parameterkrommen



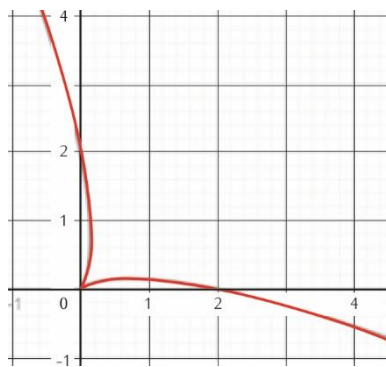
figuur 5

$K_1: \vec{P}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2 \\ t^3 - 6t \end{pmatrix}$ met $-10 \leq t \leq 10$, zie figuur 5. Dit geeft $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 6 \end{pmatrix}$.

$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$: in het bijbehorende punt $(-2, 0)$ is een verticale raaklijn.

$\vec{v}(\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}(-\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$:

in de bijbehorende punten $(0, -4\sqrt{2})$ en $(0, 4\sqrt{2})$ zijn er horizontale raaklijnen.



figuur 6

$K_2: \vec{P}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + t^3 \\ t^2 - t^3 \end{pmatrix}$ met $-10 \leq t \leq 10$, zie figuur 6. Dit geeft

$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2t + 3t^2 \\ 2t - 3t^2 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 + 3t \\ 2 - 3t \end{pmatrix}$,

dus $\overrightarrow{r(t)} = \begin{pmatrix} 2+3t \\ 2-3t \end{pmatrix}$ is eveneens een richtingsvector van de raaklijn in het bijbehorende punt.

$\overrightarrow{r(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, dus in het punt $(0, 0)$ is er een raaklijn $y = x$.

$\overrightarrow{r(\frac{2}{3})} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, dus de raaklijn in het punt $(\frac{20}{27}, \frac{4}{27})$ is horizontaal.

$\overrightarrow{r(-\frac{2}{3})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, dus de raaklijn in het punt $(\frac{4}{27}, \frac{20}{27})$ is verticaal.