

Dit gaat over productief oefenen in de wiskunde, ik wil graag meer opgaven maken die uitdagen tot productief oefenen ipv reproductief oefenen. Kan je mij lesactiviteiten/oefeningen geven die voldoen aan de voorwaarden zoals in het artikel beschreven? Graag voor het leerdoel gelijkvormigheid van driehoeken, dan gaat het zowel om het aantonen van gelijkvormigheid als het rekenen aan gelijkvormige driehoeken.

Hier komen **lesactiviteiten/oefeningen voor gelijkvormigheid van driehoeken** die aansluiten bij de ideeën van **productief oefenen** zoals beschreven in *Positive Algebra* van Kindt  positive_algebra_2004 — dus **geen rijtjes sommen**, maar **denk- en redeneeropdrachten**, met **structuurherkenning**, **generaliseren**, **eigen productie**, **variatie** en **tegenvoorbeelden zoeken**.

Ik geef activiteiten in vier categorieën:

1. **Patroon & structuur ontdekken**
2. **Bewijsideeën laten ontstaan**
3. **Rekenen aan gelijkvormigheid via productief oefenen**
4. **Eigen productie & misconcepties benutten**

1. **Patroon & structuur ontdekken (zoals de talpatronen in *Positive Algebra*)**

A. “Groeipatronen van driehoeken” (visueel & vergelijkend)

Geef leerlingen 6–8 figuren van driehoeken waarvan telkens één hoek gelijk is, maar de rest varieert. Bijvoorbeeld driehoeken die allemaal een hoek van 40° hebben, maar verschillende zijden.

Opdracht (productief):

- Orden de driehoeken in groepen waarvan je vermoedt dat ze **gelijkvormig** zijn.

- Licht elke keuze toe, *zonder* al te rekenen.
- Waarom zijn sommige driehoeken nooit gelijkvormig, ook al delen ze een hoek?
- Kun je zelf een paar driehoeken tekenen die *wel* en die *niet* gelijkvormig zijn onder deze regel?

Waarom productief?

→ leerlingen leren *criteria* onderzoeken, niet toepassen.

B. “Zoom-modellen” (continu variëren)

Teken op het bord een driehoek ABC. Vervolgens schuif je in realtime punt C over een straal vanuit A (modellen lijkt op ‘number strips’ variatie-ideeën op p. 9–10 van het artikel).

Opdracht:

- Wat verandert? Wat blijft gelijk?
- Wanneer worden twee opeenvolgende posities van C “zo goed als gelijkvormig”?
- Kun je regels formuleren?

Productief element:

→ variëren van één parameter, zoals de talpatronen in het artikel.

2. Bewijsideeën laten ontstaan (zoals bij de reeksen in *Positive Algebra*)

C. “Wat blijft gelijk?” (zoek invarianten)

Geef een set driehoeken opgebouwd uit dezelfde hoek maar met verschillende verhoudingen van de zijden.

Opdracht:

- Bereken voor alle driehoeken:
 - $\frac{AB}{AC}$
 - $\frac{AB}{BC}$
 - $\frac{AC}{BC}$
- Zoek patronen: wanneer zie je precies dezelfde verhoudingen terugkomen?
- Formuleer een *eigen* vermoeden/regel.
- Bewijs (of weerleg) het met een zelfgekozen voorbeeld.

Waarom productief?

→ zoals bij de getallenreeksen uit de bundel: patroon → vermoeden → verantwoording.

D. “Welke informatie is genoeg?” (minimale voorwaarden)

Geef leerlingen kaartjes met informatie, bv.:

- 1 hoek + 1 zijde
- 2 hoeken
- 3 zijden
- 1 zijde + 1 hoek + 1 verhouding
- 1 hoek + 1 verhouding

Opdracht:

- Welke setjes informatie zijn *genoeg* om te weten dat twee driehoeken gelijkvormig zijn?
- Zoek ook combinaties die **niet voldoende** zijn. (“Tegenvoorbeeld verplicht”)
- Ontwerp zelf een minimaleset-kaartje dat *wél* voldoende is.

Waarom productief?

→ leerlingen moeten redeneren over voorwaarden, niet regels toepassen.

3. Rekenen aan gelijkvormigheid (zonder rijtjes opgaven)

E. “Prijs van een berekening” (geïnspireerd op Price of Algebra, p. 12–13)

Introduceer een prijssysteem zoals in *Positive Algebra*:

- $+$, $-$, $\times$, $/$ = 1 punt
- Breuken = 2 punten
- Wortels = 3 punten
- Gebruik van een verhouding = 1 punt
- Gebruik van een bekend gelijkvormigheids criterium = gratis

Opdracht:

- Bereken onbekende zijden van 3 gegeven gelijkvormige driehoeken.
- Maar... vind telkens de **goedkoopste** oplossing.
- Vergelijk je aanpak met je buur: wie heeft de “economisch optimale” oplossing?

Waarom productief?

→ stimuleert *strategisch denken in plaats van mechanisch rekenen*.

F. "Ontwerp het ontbrekende figuur"

Geef de verhouding tussen twee driehoeken en 2 gegeven zijden in driehoek 1.

Opdracht:

- Construeer zelf driehoek 2 die bij die gegevens hoort (op ruitjespapier of GeoGebra).
- Schrijf meerdere oplossingen op, die *allemaal* correct zijn.
- Zijn er situaties waar er maar één oplossing is? Wanneer wel / niet?

Waarom productief?

→ leerlingen ontdekken dat gelijkvormigheid soms een familie van oplossingen oplevert.

4. Eigen productie (past sterk bij Kindt's aanbeveling)

G. "Maak je eigen gelijkvormigheidsprobleem"

Leerlingen ontwerpen zelf een opgave met dit format:

1. Twee driehoeken (getekend of beschreven)
2. Een set gegeven informatie
3. Een vraag naar ontbrekende zijden of bewijs van gelijkvormigheid

Randvoorwaarden (productief):

- De opgave moet minstens **twee verschillende oplossingsstrategieën** toelaten.
- De maker moet een *antwoordblad* maken waar beide strategieën worden uitgewerkt.
- Een andere leerling moet kunnen bewijzen dat de opgave klopt.

Vergelijkbaar met de "own productions" uit het artikel (p. 11).

H. "Welke driehoek hoort hier niet?" (WTHN)

Je geeft 4 driehoeken.

Drie zijn gelijkvormig, één niet.

Maar – en hier komt de uitdaging – *elke driehoek moet met argumentatie "de vreemde" kunnen zijn*, afhankelijk van gekozen eigenschap.

Voorbeeld:

- Driehoeken met hoek 50° , maar één heeft andere verhoudingen.
- Of: driehoeken met dezelfde verhoudingen, maar één is gespiegeld of gedraaid.

Waarom productief?

→ leerlingen onderzoeken meerdere definities/concepten tegelijk.

5. Complete miniproject: “Het gelijkvormigheidslab”

Een 40–60 minuten activiteit waarin leerlingen:

1. Zelf drie verschillende criteria ontdekken

- Hoek–Hoek
- Zijden–Hoek–Zijden
- Zijden–Zijden–Zijden

2. Varianten onderzoeken

- Wat als je slechts één hoek weet en twee zijden?
- Wat als de verhoudingen “bijna” gelijk zijn?

3. Een generalisatie formuleren

- “Twee driehoeken zijn gelijkvormig precies als...”
- Formuleer het in: woorden / symbolen / figuren.

4. Bewijslijnen oefenen

Ze kiezen een eigen voorbeeld en leggen aan tafelgenoten uit waarom de gelijkvormigheid volgt.

Past bij Kindt’s nadruk op:

→ generaliseren, redeneren, eigen constructies, minimaliseren van algebraïsche techniek.

Wil je dat ik van deze activiteiten concrete werkbladen maak?

Ik kan per activiteit een uitgewerkt werkblad leveren (leerkrachtversie en leerlingversie), inclusief:

- voorbeeldfiguren
- hints
- differentiatie
- beoordelingscriteria
- materialenlijst (o.a. GeoGebra, ruitjespapier)

Laat me weten welk niveau (vmbo / havo / vwo) en welke tijd je hebt per les.



Bronnen



Ja, ik wil graag concrete werkbladen, bij voorkeur voor thema 1 (A), patronen en structuur, ik vind dit leuk om met mijn leerlingen om te doen.

Een tweede activiteit in diezelfde les die ik passend vind zijn (D) omdat het hier concreter wordt én richting stappenplan gaat. Zo wil ik de les graag afsluiten. Dus 2 werkbladen graag maken

Werkbladen Gelijkvormigheid

Kopiëren Bewerken Downloaden

Werkblad 1 – Patronen & Structuur: Gelijkvormigheid Ontdekken (Activiteit A)

Doel

Leerlingen ontdekken **patronen** en **structuur** in driehoeken door visueel te vergelijken en te redeneren zonder te rekenen.

Opdracht 1 – Orden de Driehoeken

Bekijk de set van 8 driehoeken die je docent uitdeelt of projecteert.

Opdracht:

1. Orden de driehoeken in **groepen** waarvan jij denkt dat ze *gelijkvormig* zijn.

2. Noteer per groep **waarom** je denkt dat deze driehoeken bij elkaar horen.

3. Gebruik hierbij nog **geen berekeningen**, alleen kijken en redeneren.

Vragen om je te helpen:

- Welke hoeken lijken hetzelfde?
 - Welke driehoeken zijn een vergrote of verkleinde versie van een andere?
 - Zijn er driehoeken die duidelijk **niet** in een groep passen? Waarom?
-

Opdracht 2 – Wat verandert? Wat blijft gelijk?

Je docent laat een driehoek zien waarvan één hoek vaststaat terwijl één hoekpunt wordt verschoven.

Opdracht:

1. Beschrijf wat er **verandert** wanneer het hoekpunt verschuift.
 2. Beschrijf wat er **hetzelfde blijft**.
 3. Kies twee posities van het bewegende punt en teken de bijbehorende driehoeken na.
 4. Zijn deze twee driehoeken volgens jou gelijkvormig? Leg uit.
-

Opdracht 3 – Teken zelf een voorbeeld

Teken **twee driehoeken** die volgens jou gelijkvormig zijn.

- Zorg dat je driehoeken niet identiek zijn (dus niet alleen gekopieerd, maar echt vergroot/verkleind).
- Schrijf eronder waarom ze gelijkvormig zijn.

Teken vervolgens **één driehoek die lijkt op de eerste, maar niet gelijkvormig is**.

- Wat is het verschil?
 - Welke eigenschap is nu **niet** behouden?
-

Reflectie

Beantwoord kort:

- Welke signalen helpen jou vooral om snel te herkennen of driehoeken gelijkvormig zijn?
 - Wat is één inzicht dat je vandaag hebt opgedaan?
-

Werkblad 2 – Minimale Informatie: Welke Gegevens Zijn Genoeg? (Activiteit D)

Doel

Leerlingen onderzoeken **welke informatie voldoende is** om gelijkvormigheid van driehoeken vast te stellen.

Opdracht 1 – Kaartjes sorteren

Je krijgt kaartjes met informatie over een driehoek, zoals:

- 2 hoeken
- 1 hoek + verhouding van de zijden
- 3 zijden
- 1 zijde + 1 hoek
- 1 hoek + 2 zijden (maar niet ingesloten)

Opdracht:

1. Sorteert de kaartjes in 3 categorieën:
 - **Altijd voldoende** om gelijkvormigheid vast te stellen
 - **Soms voldoende**

- **Nooit voldoende**

2. Licht per categorie toe waarom je die keuze hebt gemaakt.

Opdracht 2 – Tegenvoorbeelden zoeken

Kies één kaartje uit de categorie "*soms voldoende*".

Opdracht:

- Teken twee driehoeken waarvoor dit kaartje **wel** genoeg informatie geeft om gelijkvormigheid vast te stellen.
- Teken twee driehoeken waarvoor dit kaartje **niet** genoeg is.

Schrijf steeds waarom.

Opdracht 3 – Ontwerp een eigen "minimale set"

Ontwerp zelf een kaartje dat volgens jou **net genoeg** informatie bevat om altijd te weten of twee driehoeken gelijkvormig zijn.

- Schrijf de informatie op het kaartje.
 - Leg uit waarom dit minimaal maar voldoende is.
 - Test je kaartje bij twee door jou bedachte driehoeken.
-

Reflectie

Beantwoord kort:

- Welke informatie vond je verrassend (on)voldoende?
 - Welke inzichten neem je mee naar volgende lessen over gelijkvormigheid?
-

De twee werkbladen zijn aangemaakt!

Als je wilt kan ik er nog een **docx**-, **pdf**- of **printklare versie** van maken, of illustraties/voorbeeldfiguren toevoegen.



ja, ik wil graag een printklare versie, want de werkbladen zijn nog niet concreet genoeg, de bijbehorende figuren van beide werkbladen ontbreken.

Hier is je **printklare PDF met beide werkbladen inclusief figuren**:

 [Download gelijkvormigheid_werkbladen.pdf](#)

Als je wilt kan ik:

- de lay-out verder verfinaaien (kaders, paginanummers, instructies duidelijker),
- meer of andere figuren toevoegen,
- de opdrachten uitbreiden,
- of een **docx-versie** maken.

Laat maar weten wat je wilt! </>



4 figuren voor opdracht 1? dat is echt totaal onvoldoende wanneer ik wil dat leerlingen actief gaan sorteren. je stelde zelf 6-8 figuren voor. Ik vind 12 beter, idem voor opdracht 2. Waarbij ik ook gegevens aan de zijden van driehoeken mis. Want voor de 2e opdracht zullen er ook gegevens moeten zijn toch? Lengtes van zijden?

Je hebt helemaal gelijk: met 4 figuren valt er weinig écht te sorteren, en zonder zijden kun je bij de tweede opdracht bijna niets met “soms voldoende” informatie.

Ik heb daarom een **nieuwe, uitgebreidere printklare versie** gemaakt:

 [Download gelijkvormigheid_werkbladen_nieuw.pdf](#)

Wat er nu in zit:

Werkblad 1 – Patronen & Structuur

- 12 driehoeken op één blad, in een 3×4 raster.
- Bedoeld voor **visueel sorteren in gelijkvormige groepen** (zonder al te rekenen).
- Bovenaan staat de opdracht in leerlingtaal: ordenen, groepen benoemen, redeneren.

Werkblad 2 – Minimale informatie

- Pagina met **volledige opdrachten**:
 - Kaartjes sorteren (altijd / soms / nooit voldoende).
 - Tegenvoorbeelden zoeken m.b.v. figuren.
 - Eigen “minimale set” ontwerpen.
- Los blad met **12 driehoeken mét zijde-lengtes** in een 3×4 raster.
 - Getallen op de zijden (bijvoorbeeld 3–4–5 en geschaalde varianten, plus niet-gelijkvormige driehoeken) zodat leerlingen echt kunnen redeneren over verhoudingen en tegenvoorbeelden.

Als je wilt, kan ik in een volgende versie nog:

- Hoeken (bijv. boogjes met graden) toevoegen bij sommige figuren.
- Een **docx-versie** maken zodat je zelf dingen kunt aanpassen.
- Of een **docentversie** met suggesties welke driehoeken in welke gelijkvormige groep zitten. </>



ik krijg: Sessie met Code-interpreter is verlopen hoe kan dat?