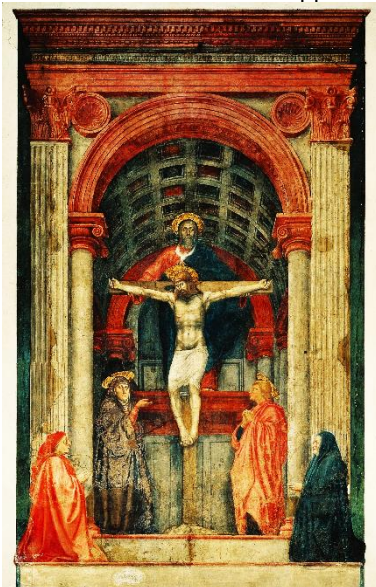


Noten bij het artikel:

Roel van Asselt (2025). Een historische blik op praktische wiskunde, deel 6. *Euclides*, 101(3).

- [1] De Latijnse teksten van Boëthius werden veelal in kloosters gekopieerd. De inhoud van delen van zijn werk waren de bouwstenen van het onderwijssysteem in die tijd, het zogenoemde quadrivium, met de vakken: rekenkunde, meetkunde, muziek en astronomie. (de 'bovenbouw' zogenoemd; de 'onderbouw', het trivium, ging over grammatica, logica en retorica).
- [2] Dante komt in zijn tocht door het hiernamaals uiteindelijk in de buurt van het paradijs, en kan zich nog steeds niet voorstellen hoe God er uit zal zien. Hij probeert iets te bedenken, maar hij komt er niet uit, net zoals – zo zegt hij – de wiskundige die probeert de cirkel te meten, d.w.z. een cirkel te tekenen met voorgeschreven oppervlakte: het ~~toen~~ **lang** bekende, niet oplosbare probleem van de kwadratuur van de cirkel. Al dat diepe denken van die 'mathemaat' vergelijkt hij met zijn pogingen een beeld van God te krijgen. Te lezen in de Divina Commedia, deel III *In Paradiso*, laatste canon.
- [3] Er zijn ook bronnen die melden dat Fibonacci, in zijn pensioentijd als imker deze groeischattingen ook gebruikte om zijn bijenvolkeren te kunnen monitoren en beheren. Hij woonde in de havenstad Béjaia, dat toen het centrum was van de productie en export van bijenwas.
PM: de naam Fibonacci komt van *filius Bonacci*; hij was de zoon van Bonacci, een zaakwaarnemer van de handelskolonie van Pisa in Algerije.
- [4] Voor meer informatie daarover zie ook de gastbijdrage 'Technische analyse toegelicht: Fibonacci', van K. de Bie, *De Tijd*, 2011. Voor een uitputtend overzicht van het gebruik van de Fibonacci-reeks in handel en de financiële rekenkunde zie ook de site <https://rankia.nl/fibonacci-reeks-geschiedenis-concept-en-formules/>
- [5] Niettemin is Fibonacci ook doende met de theorie van de rekenkunde. In 1225 komt zijn boek *Liber Quadratorum* uit met onder meer de van Diophantus overgenomen en uitgewerkte stelling dat het product van de som van twee kwadraten altijd te schrijven is als de som van twee kwadraten, immers: $(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ (de zogenoemde vierkant sommen). Verder werkte hij aan de eerder in deze serie genoemde Diophantische vergelijkingen en aan iteratieve methoden voor het oplossen van veeltermvergelijkingen. Deze getaltheoretische vondsten worden nog toegepast in de cryptologie en signaalverwerking.
- [6] De vergelijking was aangereikt door Frederik II – op dat moment koning van Sicilië – ter stimulering van de wetenschap en de rekenkunde en ter rekrutering van wetenschappelijk talent (ter meerdere glorie van zijn hof en leiderschap).
- [7] Aan het einde van de 10^e eeuw bestond in Parma al een vorm van hoger onderwijs waaraan graden van opleidingsniveaus werden toegekend. Niettemin wordt algemeen Bologna als eerste universiteit genoemd. Opmerkelijk dat de school in Bologna is opgericht door studenten, die hoogleraren inhuurden om lessen te geven.
- [8] Deze eerste (muur)schildering in lijnperspectief is te zien in de kerk Santa Maria Novella in Florence en is in 1524 geschilderd door Massaccio. Eerder waren de regels voor het lijnperspectief ontdekt en beschreven door de Italiaanse architect Filippo Brunelleschi.



- [9] Opmerkelijk dat zo'n vergelijking als hierboven in die tijd nog steeds retorisch werd omschreven, en dan ook nog afhankelijk van de scribent. De genoemde vergelijking in onze terminologie: $x^3 + px = q$ werd aan het einde van de 16^e eeuw genoteerd als: *A cubus + P plano in A aequatus Q solido*. Men gaat er van uit dat Del Ferro de oplossing op meetkundige wijze heeft gevonden.
- [10] Negatieve getallen werden wel omschreven en soms genoteerd als m5 voor -5 (m voor meno). Cardano noemde het fictieve getallen, omdat ze geen betekenis hadden in termen van hoeveelheden. Het getal 0 werd in vergelijkingen nog niet gebruikt; in de praktijk waren de vergelijkingen ook echte vergelijkingen (balansen) tussen hoeveelheden of tussen grootheden. De wortels uit negatieve getallen werden vreemdsoortige, denkbeeldige ('imaginaire') verschijnselen genoemd. De Italiaan Rafael Bombelli (1526-1572) heeft als eerste structuur en betekenis gegeven aan complexe getallen. Leibniz noemde het twee eeuwen later nog 'amoëbe achtige' verschijnselen. Ook Euler is met complexe getallen aan de slag gegaan. Pas in de 19^e eeuw worden complexe getallen van hun geheimzinnigheid ontdaan.
- [11] Zwaardere voorwerpen vallen sneller dan lichtere voorwerpen. Of de klassieke leer waarin de kosmos zou zijn opgebouwd uit de vier elementen steen, water, vuur en lucht. Vuur is echter geen element, maar een fysisch verschijnsel van beweging, warmte en licht (Emilie de Châtelet, begin 18^e eeuw).
- [12] Zelfs een pionier als Kepler kon aanvankelijk maar moeilijk loskomen van de Griekse 'harmonie der sferen' en de door hen bedachte proportionaliteiten die de beweging van de hemellichamen bepaalden. Nog tal van filosofen waren niet overtuigd van de waarde van de waarnemingen en de beschrijvingen ervan in wiskundige taal. Een filosoof uit Keplers tijd bekritiseerde hem aldus: "... het aan de vulgaire wiskunde is om zich bezig te houden met kwantitatieve schimmen; doch de alchemisten en hermetische filosofen begrijpen de waarlijke kern van de natuurlijke lichamen" (zoals te lezen in *De muziek der sferen*, van Jamie James (1993), hoofdstuk 8: *Kepler in navolging van Pythagoras*). Met Kepler is het overigens wel goed gekomen. Op basis van zeer nauwkeurige waarnemingen van collega Tycho Brahe stelde hij vast dat de planeetbanen om de zon niet cirkelvormig waren maar elliptisch, met de zon in een van de twee brandpunten. Ook formuleerde hij de drie wetten, die wij nu de wetten van Kepler noemen.
- [13] Periodes van grote roem en voorspoed werden afgewisseld met tijden van bittere armoede, afgunst, vernedering en gevangenschap. Een man met een groot creatief en wispelturig brein. Zelf noemt hij zich: 'een koud hart met een heet hoofd'. Hij relativeerde zijn beroemd- en beruchtheid met de verzuchting: 'in het algemeen is de roem van een mens een erbarmelijke zaak'. Een aanrader is zijn autobiografie, vertaald en toegelicht door Jan Lamein, zie ook de literatuurlijst.
- [14] Over die kans benadering: zie het artikel *De Regel van Cardano*, een bewerkte versie van een hoofdstuk uit het boek van Steven Tijms *Toeval is altijd logisch*, zie ook de literatuurlijst of: <https://www.vvsor.nl/wp-content/uploads/2018/11/STAtOR-2020-1-20-25-Steven-Tijms.pdf>
- [15] We namen aan dat de limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ bestaat; mag dat wel? Anders staat het bewijs op losse schroeven. Het antwoord is 'ja' want de rij $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ is een monotoon stijgende, begrensde rij, (de termen zijn alle kleiner dan 2); stijgende naar boven-begrensde rijen convergeren (Cauchy).
- [16] Begin bijvoorbeeld met $x=1$ en $x=2$: voor $x=1$ is $x^3 + 2x^2 + 10x$ kleiner dan 20, voor $x=2$ groter dan 20. Neem vervolgens de waarde $x=1,5$ en stel vast dat $x^3 + 2x^2 + 10x$ groter is dan 20. Ga verder met $x=1$ en $x=1,5$ en kies x nu halverwege 1 en 1,5. Et cetera. Wellicht zit er een programmeer vraagstukje in.

Bronnen en aanbevolen literatuur

- Bergamini, D. (1969). *Wiskunde*, Perscombinatie N.V. – Amsterdam.
- Bie, K. de (2011). *Technische analyse toegelicht: Fibonacci*, De Tijd.
- Bogaart, D. van den & Daems, J. (2016 t/m 2019). Wortels van de Wiskunde, artikelenserie, *Euclides* 92/93/94.
- Bunt, L. (1963). *Van Ahmes tot Euclides*. Noordhoff.
- Eves, H. (1964). *An introduction to the history of mathematics*. Holt, Rinehart and Winston.
- Van Hoorn, M. (2009). *Drie klassieke problemen*. Seniorenacademie Groningen en Drenthe.
- Kostas, K. (2018). *The inventions of the ancient Greeks*, Kostas museum Athene.

Lamein, J. (2000). *Mijn Leven, Girolamo Gardano*, Atheneum-Polak & Van Gennepe.
Netz, R & William, N. (2007). *De Archimedes Codex*. Atheneum-Polak & Van Gennepe.
Olsen, L.M., (1975), *Women in Mathematics*, MIT Press
Reimer, D. (2014). *Count Like an Egyptian*. Princeton University Press.
Stichting Math4all, Website-artikelen van de stichting Math4all.
Struik, D. (1980 heruitgave). *Geschiedenis van de Wiskunde*. SUA.
Tijms, S. (2018). *Toeval is altijd logisch*. VU University Press.
Waerden, B. van der (1950). *Ontwakende Wetenschap. Egyptische, Babylonische en Griekse wiskunde*. Noordhoff.

DVD:

Amenábar, A. (2009), *Agora* (over leven en werken van Hypatia van Alexandrië)
Du Sautoy, M. (2008). *The Story of Maths*, BBC