



Cijfers verplaatsen

Opgave

Het getal 285714 heeft als bijzondere eigenschap dat het verplaatsen van het eerste (meeste linker) cijfer naar de laatste (meest rechter) positie een veelvoud van het getal geeft:

$$857142 = 3 \cdot 285714.$$

Hetzelfde geldt als we twee cijfers van voren naar achteren verplaatsen:

$$571428 = 2 \cdot 285714.$$

(a) Bepaal alle getallen van zes cijfers die overgaan in hun drievoud door (alleen) het eerste cijfer naar de laatste positie te verplaatsen.

(b) Bepaal alle getallen van zes cijfers die overgaan in een veelvoud van zichzelf door (alleen) het eerste cijfer naar de laatste positie te verplaatsen.

(c) Bepaal alle getallen van zes cijfers die overgaan in een veelvoud van zichzelf door de eerste twee cijfers naar de laatste twee posities te verplaatsen.

Getallen beginnen niet met een 0, dus voor een getal n van zes cijfers geldt $10^5 \leq n < 10^6$. Het getal n wordt als veelvoud van zichzelf beschouwd.

Uitwerking

(a) Laat n een getal van zes cijfers zijn dat overgaat in zijn drievoud door het eerste cijfer naar de laatste positie te verplaatsen. Dan kunnen we n schrijven als $n = 10^5 \cdot a + b$, waarbij a uit één cijfer (ongelijk aan 0) bestaat en b een getal van vijf cijfers is. Verplaatsen van het eerste cijfer naar de laatste positie geeft het getal $10b + a$. Er geldt dus dat $10b + a = 3n = 3 \cdot (10^5 \cdot a + b)$, ofwel $7b = (3 \cdot 10^5 - 1) \cdot a$ en dus $b = 42857 \cdot a$.

Omdat b precies vijf cijfers heeft, is $b < 10^5$. Hieruit volgt dat $a = 1$ of $a = 2$. Dit geeft respectievelijk $b = 42857$ en $b = 85714$. Naast het voorbeeld $n = 285714$ uit de opgave is er dus nog één andere oplossing: $n = 142857$.

(b) Net als in onderdeel (a) schrijven we $n = 10^5 \cdot a + b$, waarbij a uit één cijfer (ongelijk aan 0) bestaat en b een getal van vijf cijfers is, dus $10^4 \leq b \leq 10^5 - 1$. Verplaatsen van het eerste cijfer naar de laatste positie geeft een veelvoud van n als er een geheel getal m bestaat zodat

$$10b + a = m \cdot (10^5 \cdot a + b).$$

Merk op dat verplaatsen van het eerste cijfer geen invloed heeft op het aantal cijfers. Daarom heeft $10b + a$ ook precies zes cijfers. Hieruit volgt dat

$$10^5 \cdot m \cdot a \leq m \cdot (10^5 \cdot a + b) < 10^6$$

en dus $m \cdot a < 10$. Verder is $b = \frac{10^5 \cdot m - 1}{10 - m} \cdot a$.

We gaan nu alle mogelijkheden voor m af.

Voor $m = 1$ is $b = \frac{10^5 \cdot 1 - 1}{10 - 1} \cdot a = 11111a$ en dus $n = 11111a$. Het getal n bestaat dus uit zesmaal hetzelfde cijfer. Het is duidelijk dat ieder getal bestaande uit zes gelijke cijfers ook aan de voorwaarde voldoet.

Stel nu dat $m = 2$. Dan is $b = \frac{10^5 \cdot 2 - 1}{10 - 2} \cdot a = \frac{199999a}{8}$. Dit kan alleen geheel zijn als a een achttvoud is. Dat is echter niet mogelijk omdat $m \cdot a < 10$.

Het geval $m = 3$ hebben we behandeld in onderdeel (a).

Voor $m = 4$ is $b = \frac{10^5 \cdot 4 - 1}{10 - 4} \cdot a = \frac{133333a}{2}$. Verder moet $a < \frac{10}{m} = \frac{5}{2}$, dus $a = 1$ of $a = 2$. Alleen in het geval $a = 2$ is b geheel. Dan heeft b echter zes cijfers. Er zijn dus geen oplossingen voor $m = 4$.

Stel tenslotte dat $m \geq 5$. Omdat $m \cdot a < 10$, is $a = 1$, zodat $b = \frac{m \cdot 10^5 - 1}{10 - m}$. Omdat $m \geq 5$ is $m \cdot 10^5 - 1 \geq 5 \cdot 10^5 - 1$ en $10 - m \leq 5$, dus

$$b \geq \frac{5 \cdot 10^5 - 1}{5} > 10^5 - 1.$$

Dit is in tegenspraak met $b \leq 10^5 - 1$.

We concluderen dat er 11 oplossingen zijn: 142857, 285714 en de negen getallen waarvan alle cijfers gelijk zijn.

(c) De uitwerking gaat analoog aan onderdeel (b). Ditmaal schrijven we $n = 10^4 \cdot a + b$, waarbij a een getal van twee cijfers is en b een getal van vier cijfers, dus $10 \leq a \leq 99$ en $1000 \leq b \leq 9999$. Nu zijn we op zoek naar a , b en m zodat

$$100b + a = m \cdot (10^4 \cdot a + b).$$

Omdat verplaatsen van de cijfers geen invloed heeft op het aantal cijfers, moet nu gelden dat $m \cdot a < 100$. Verder is $b = \frac{10^4 \cdot m - 1}{100 - m} \cdot a$.

We gaan wederom alle mogelijkheden voor m af. Omdat $a \geq 10$ en $m \cdot a < 100$ is $m \leq 9$.

Voor $m = 1$ is $b = \frac{10^4 \cdot 1 - 1}{100 - 1} \cdot a = 101a$ en dus $n = 10101a$. Als we a schrijven als $\overline{a_1 a_2}$, waarbij a_1 en a_2 de cijfers van a zijn, dan is $n = \overline{a_1 a_2 a_1 a_2 a_1 a_2}$. Voor iedere keuze van a_1 en a_2 is dit een getal van zes cijfers dat in zichzelf overgaat door de eerste twee cijfers naar het einde te verplaatsen. Elk van de 90 mogelijkheden voor a met $10 \leq a \leq 99$ geeft dus een oplossing.

Stel nu dat $m = 2$. Dan is $b = \frac{10^4 \cdot 2 - 1}{100 - 2} \cdot a = \frac{2857a}{14}$. Dit kan alleen geheel zijn als a een veelvoud van 14 is. Omdat $m \cdot a < 100$, geeft dit als mogelijkheden $a = 14$, $a = 28$ en $a = 42$. We vinden de oplossingen $n = 142857$, $n = 285714$ en $n = 428571$. Het is eenvoudig na te gaan dat deze inderdaad aan de voorwaarde voldoen.

Voor $m = 3$ is $b = \frac{10^4 \cdot 3 - 1}{100 - 3} \cdot a = \frac{29999a}{97}$. Dit is alleen geheel als a een veelvoud van 97 is, wat niet mogelijk is als $m \cdot a < 100$.

Op dezelfde manier moet a een veelvoud van respectievelijk 32, 95, 94, 31 en 92 zijn voor $m = 4, 5, 6, 7$ en 8. Dit geeft een tegenspraak met $m \cdot a < 100$.

Stel ten slotte dat $m = 9$. Dan is $b = \frac{10^4 \cdot 9 - 1}{100 - 9} \cdot a = 989a$. Daarnaast moet $9 \cdot a < 100$ en $a \geq 10$, dus $a = 10$ of $a = 11$. Voor $a = 10$ vinden we de oplossing $n = 109890$. Voor $a = 11$ is $b = 10879$, wat echter vijf cijfers heeft en dus niet tot een oplossing leidt.

We concluderen dat er 94 oplossingen zijn: 142857, 285714, 428571, 109890 en de 90 getallen van de vorm $\overline{a_1 a_2 a_1 a_2 a_1 a_2}$ met $1 \leq a_1 \leq 9$ en $0 \leq a_2 \leq 9$.

Inzenders met de juiste oplossing

Gé Groenewegen, Lieke de Rooij, Matthijs Schukking en Piet Smal

Winnaar van de cadeaubon

Piet Smal