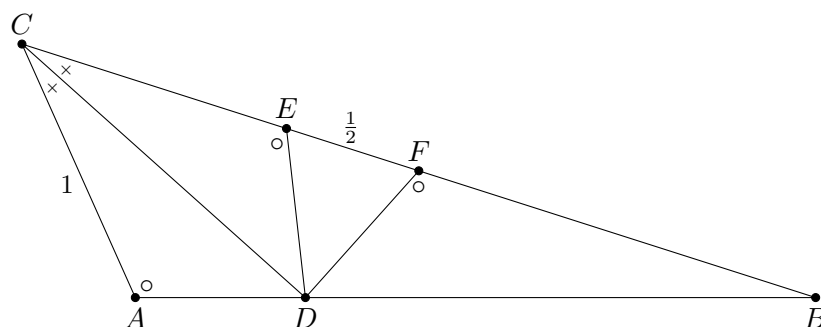


Driehoeken

Opgave

Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn met een stompe hoek bij A . De bissectrice van hoek C snijdt de overstaande zijde AB in het punt D . Laat E en F de schuine projecties van D op BC zijn onder diezelfde stompe hoek, en wel zo dat C, E, F en B in die volgorde op een lijn liggen; zie onderstaande figuur. Er geldt dus dat $\angle DEC = \angle DFB = \angle CAB$. Er is verder gegeven dat $|AC| = 1$, $|EF| = \frac{1}{2}$ en $|BD| = 3 \cdot |AD|$.

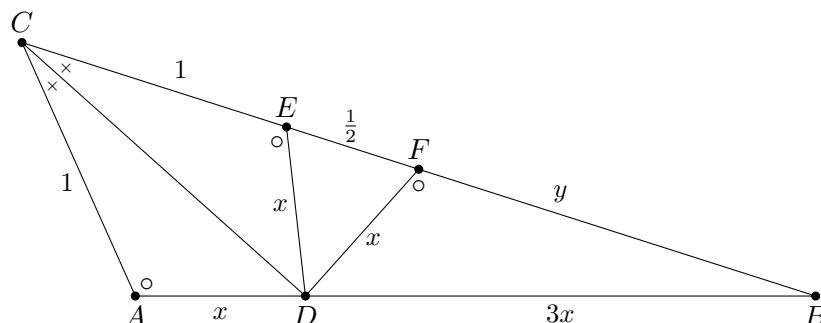
Bereken $|AB|$.



Uitwerking

Laat $x = |AD|$ en $y = |BF|$. Er is gegeven dat $|BD| = 3x$. Dit impliceert dat $|AB| = 4x$.

De driehoeken $\triangle ADC$ en $\triangle EDC$ zijn gelijkvormig omdat $\angle CAD = \angle CED$ en $\angle ACD = \angle ECD$. Omdat de driehoeken de zijde DC gemeenschappelijk hebben, zijn ze zelfs congruent (HHZ). Daarom is $|EC| = |AC| = 1$ en $|DE| = |DA| = x$. Omdat $\angle DEF = 180^\circ - \angle CAB = \angle DFE$, is driehoek $\triangle DEF$ gelijkbenig. Hieruit volgt dat $|DF| = x$. Verder is $|BC| = |BF| + |FE| + |EC| = y + \frac{3}{2}$.



De driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle FBD$ zijn gelijkvormig omdat $\angle BAC = \angle BFD$ en $\angle ABC = \angle FBD$. Hieruit volgt dat

$$\frac{|AB|}{|FB|} = \frac{|BC|}{|BD|} = \frac{|CA|}{|DF|} \quad \text{ofwel} \quad \frac{4x}{y} = \frac{y + \frac{3}{2}}{3x} = \frac{1}{x}.$$

Uit $\frac{y + \frac{3}{2}}{3x} = \frac{1}{x}$ volgt dat $y + \frac{3}{2} = 3$ en dus $y = \frac{3}{2}$. Nu volgt uit $\frac{4x}{y} = \frac{1}{x}$ dat $4x^2 = y = \frac{3}{2}$ en dus $x^2 = \frac{3}{8}$. We concluderen dat $x = \frac{1}{4}\sqrt{6}$ en dus $|AB| = 4x = \sqrt{6}$.

Inzenders met de juiste oplossing

Richard Both, Jan Bouw, Wilma van Donk, Gé Groenewegen, Job van de Groep, Mitchel van Heesch, Hans Huisman, Hans Linders, Gerhard Meinen, Johan Olthof, Jos Remijn, Matthijs Schukking, Eline Westerhout en Sjoerd Zondervan

Winnaar van de cadeaubon

Wilma van Donk