

Appendix bij Uitwerking Puzzelen met het getal 100

Bewijzen

Deze bewijzen werden overigens niet gevraagd in de puzzel.

Bewijs IA: Kleinste $p=K_n$ als A en B elkaars spiegelbeeld zijn:

Stelling: Met $B=n, n-1, \dots, 1$ van groot naar klein krijg je de kleinste $p=K_n$ als A van klein naar groot, dus $A=1, 2, 3, \dots, n$.

Bewijs: Dit kan met volledige inductie: we zagen in het voorbeeld al dat $n=3$ voldoet.

Stel de stelling geldt voor n : Met B van groot naar klein staat A dan van klein naar groot. Voeg nu $k=n+1$ toe in rij B , dus $k, n, n-1, \dots, 1$. Nu moeten we k ook toevoegen aan rij A , waarin 1 t/m n van klein naar groot, anders kunnen we p vergroten. Dan kan k alleen aan het eind staan, anders is er een sub-rij van lengte n die niet van klein naar groot staat.

Gevolg de stelling geldt ook voor $k=n+1$.

Bewijs 1B: Grootste $p=G_n$ als $A=B$, dus de som van de kwadraten van 1 t/m n .

Dit kan natuurlijk analoog aan het vorige, maar ik geef hier een bewijs met gebruik van kennis over vectoren: De formule voor het inwendige product van twee vectoren is het product van de lengtes $\times$ de cosinus van de hoek. En dat is maximaal als de hoek 0 is. ($\cos 0=1$).

In ons geval zijn die lengtes voor elke permutatie gelijk: $\sqrt{(1^2+2^2+\dots+n^2)}$. En met $A=B$ is de hoek 0 , dus het inproduct van $A \cdot B$ is maximaal als $A=B$. Dus $G_n = A \cdot B = 1^2+2^2+\dots+n^2$.

q.e.d.

Bewijs stelling II:

Als we in een oplopend rijtje A twee getallen i en $i+v$ verwisselen geldt $p=K_n+v^2$.

De bijdrage aan p van i en $i+v$ is aanvankelijk $i(n+1-i) + (i+v)(n+1-i-v) =$

$2i(n+1) - 2i^2 - 2iv + v(n+1) - v^2$. En na verwisselen: $(i+v)(n+1-i) + i((n+1-i-v)) =$

$2i(n+1) - 2i^2 - 2iv + v(n+1)$. Dus $p=K_n+v^2$. q.e.d.

Bewijs stelling III: Formule voor $G_n = n(n+1)(2n+1)/6 =$ som kwadraten.

Vermoeden is dat $G(n)$ een derdegraadsfunctie is, immers de toename als we n één groter maken is $(n+1)^2$, een kwadratische functie.

Dus $G_{n+1} - G_n = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Daarmee kan je G_n recursief berekenen.

Nu een directe formule:

Stel: $G_n = an^3 + bn^2 + cn + d$. Omdat $G_0 = 0$ geldt $d = 0$. Dus $G_n = an^3 + bn^2 + cn$.

En $G_{n+1} = a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) = (an^3 + 3an^2 + 3an + a) + (bn^2 + 2bn + b) + (cn + c)$.

Het verschil $G_{n+1} - G_n = 3an^2 + (3a+2b)n + a+b+c$. En dat moet gelijk zijn aan $n^2 + 2n + 1$.

Dus $3a=1$, $3a+2b=2$ en $a+b+c=1$. Gevolg: $a=1/3$, $b=1/6$ en $c=1/6$, dus $G_n =$ de som van de kwadraten van 1 tot en met n . Formule: $G_n = (2n^3 + 3n^2 + n)/6 = n(n+1)(2n+1)/6$.

Bewijs formule voor $K_n = n(n+1)(n+2)/6$.

Stel weer $K_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ en $K_{n+1} = a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) + d$. Ook $K_0 = 0$, dus $d = 0$.

En verschil is ook hier: $K_{n+1} - K_n = 3an^2 + (3a+2b)n + a+b+c$.

We weten al dat $K_n = 1 \cdot n + 2(n-1) + 3(n-2) + \dots + n \cdot 1$ en dus

$K_{n+1} = 1(n+1) + 2n + 3(n-1) + \dots + n \cdot 2 + (n+1) \cdot 1$. We berekenen het verschil:

$$K_{n+1} = 1(n+1) + 2n + 3(n-1) + \dots + n \cdot 2 + (n+1) \cdot 1$$

$$K_n = 1 \cdot n + 2(n-1) + 3(n-2) + \dots + n \cdot 1$$

$$K_{n+1} - K_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Dan moet gelden: $\frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2) = \frac{1}{2}n^2 + 1\frac{1}{2}n + 1 = 3an^2 + (3a+2b)n + a+b+c$.

Dan $3a = \frac{1}{2}$ of $a = \frac{1}{6}$, $3a+2b = \frac{1}{2} + 2b = 1\frac{1}{2}$, dus $b = \frac{1}{2}$. En $a+b+c=1$ geeft $c = \frac{1}{3}$.

Invullen geeft $K_n = \frac{1}{6}(n^3 + 3n^2 + 2n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Bewijs stelling IV:

Alleen voor $n=101$ is er een getal p , (of $p-K_n$ of G_n-p) met frequentie $=100$.

Hiertoe berekenen we het verschil $d=p-K_n$ en de frequenties van d voor verschillende waarden van n . Merk op dat de frequenties als functie van d een palindroom zijn.

Een voorbeeld van zo'n frequentie lijst voor $n=4$ voor $d=0$ t/m 10: 1,3,1,4,2,2,2,4,1,3,1. Dus een vrij grillig verloop. Voor grotere n worden die frequenties natuurlijk wel groter.

Met hulp van programmeren zien we dat met $n=10$ een lijst waar uitgezonderd de eerste en de laatste vier (dus voor $d=K_n+4$ t/m G_n-4) alle frequenties van d groter zijn dan 100:

1,9,28,51,107,...>100.....,107,51,28,9,1. Voor grotere n worden ze alleen maar groter.

We hoeven dus alleen nog $d=2$ en $d=3$ te onderzoeken voor $n>10$.

$d=2$: De enig manier om $d=2$ te krijgen is door twee paar burens te verwisselen. We hebben dan twee paartjes en $n-4$ niet verplaatste getallen waarvan we alle mogelijke volgordes moeten bepalen. Totaal dus $2 \cdot (n-4) = n-2$ tekens. Die paartjes kunnen we dan op $(n-2)$ boven $2 = (n-2)(n-3)/2! = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ plaatsen zetten. Maar daar komt nooit 100 uit: $n=16$ geeft $f=14 \cdot 13/2=91$ en $n=17$ geeft $f=15 \cdot 14/2=105$.

$d=3$: Analoog: 3 paartjes en $n-6$ niet verplaatst, dus $n-3$ tekens. Kies de plaatsen van de paartjes uit $n-3$ plaatsen: Dat kan op $(n-3)$ boven $3 = (n-3)(n-4)(n-5)/3! = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6}$ manieren. Maar we kunnen ook $d=3$ krijgen uit drie naast elkaar gelegen getallen. We zagen al dat daarvoor twee permutaties zijn die $d=3$ opleveren. Zie $A=2,3,1$ en $A=3,1,2$ in het voorbeeld voor $n=3$. En er zijn $n-2$ verschillende drietallen. Dus dat levert een $2(n-2)$ manieren op. Meer manieren om $d=3$ te krijgen zijn er niet.

Totaal dus $f = \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6} + 2(n-2)$. En dat wordt ook nooit 100:

$n=11$ geeft $f=8 \cdot 7 \cdot 6/6 + 2 \cdot 9 = 56 + 18 = 74$, $n=12$ geeft $f=9 \cdot 8 \cdot 7/6 + 2 \cdot 10 = 84 + 20 = 104$.

q.e.d.