

EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAAR

Nieuw Handboek didactiek van Paul Drijvers

Herinneringen aan Jan de Lange

Lesgeven aan leerlingen uit de hele wereld op Ithaka, internationale schakelklassen

Probleemgestuurde aanpak in de wiskundeles

Wiskunde in de begintijd van *Euclides*

NR. 7

JAARGANG 100 JUNI 2025



Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 100 NR 7



IN DIT NUMMER

BOEKBESPREKING
DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE
Gerrit Roorda

4

HERINNERINGEN AAN
JAN DE LANGE

Michiel Doorman, Kees Lagerwaard,
Claudi Alsina, Heleen Verhage
Martin Kindt,
Mogens Niss
Monica Wijers,
Dédé de Haan
David Webb

8



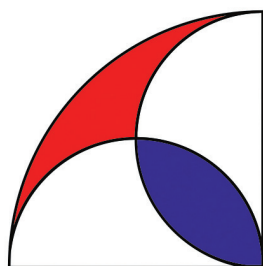
WAT HEB JE NOU AAN WISKUNDE?
Ferdinand Verhulst

16

PROBLEEMGESTUURDE
AANPAK
IN WISKUNDELESSEN

NVW PROJECT
Gerrit Roorda
Peter Kop
Els Franken
Tom Goris

20



WIS EN WAARACHTIG

23

MIJN WERK VOOR EUCLIDES
Bert Zwaneveld



24

100 JAAR AANSLUITING TUSSEN VOORBEREIDEND
EN VOORTGEZET ONDERWIJS
DEEL 1 HONDERD JAAR GELEDEN
Jenneke Krüger
Christiaan Boudri

28

WISKUNDE TEN TIJDE VAN DE EERSTE EDITIES VAN
EUCLIDES
Roel van Asselt

32

VAKOVERSTIJGEND WISKUNDEONDERWIJS
OP RSG BROKLEDE
Jeroen Maes

36

Afbeelding voorkant: Aan boord van de Eendracht,
zie www.eendracht.nl

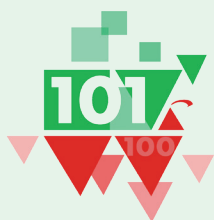
Foto: Tom Goris.

NIEUWE MOGELIJKHEDEN BIEDEN AAN
KINDEREN DIE HEEL WEINIG KANSEN HEBBEN
INTERVIEW MET AMAR DRIQUECH
Constantijn Tilanus

40

VERENIGINGSNIEUWS
JAARVERGADERING/STUDIEDAG
2025

42



OLYMPIADEPUZZEL
Esther Bod

43

UITWERKING PUZZELN MET HET GETAL 100
Lieke de Rooij

44

SERVICEPAGINA

46

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN



Kort vooraf

Deze *Euclides* staat voor een groot gedeelte in het teken van Jan de Lange. We hebben mensen benaderd met de vraag: wil je iets vertellen over je samen-

werking met Jan in projecten of ontwikkelingen die de *Euclides*-lezer tot op de dag van vandaag (her)kent? Dat zijn er nogal wat, getuige de bijdragen die dat opgeleverd heeft. En dan zijn de dingen die hij op het laatst deed, die veel meer gericht waren op leerlingen in het primair onderwijs nog niet eens aan bod gekomen. Tijdens het redigeren van al deze bijdragen realiseerde ik me pas goed hoeveel ik zelf aan Jans 'uitvindingen' meegedaan heb: 'zijn' wiskunde A in het mto geïntroduceerd met Henk van der Kooij en vele anderen in het TWIN-project, hoofdredacteur geweest van 'zijn' *Nieuwe Wiskrant*, al jaren lid van de programmaraad van 'zijn' NWD en al bijna net zo lang betrokken bij 'zijn' Olympiade. En zo zullen er ongetwijfeld nog veel meer docenten, opleiders en onderwijsontwikkelaars, kortom: jullie als *Euclides*-lezers, op de een of andere manier geïnspireerd zijn door Jan zelf of door zijn werk. Het einde van een tijdperk...

Het afscheid van Paul Drijvers als hoogleraar is meer een nieuw begin: zijn afscheidscadeau aan het veld is een gloednieuwe compleet gereviseerde versie van het twaalf jaar oude handboek wiskundendidactiek. *Didactiek van de wiskunde* gaat het heten en daar kunnen we weer jaren mee vooruit: als leraar in opleiding aan het begin van je carrière of als ervaren professional om je nog eens te laven aan de nieuwste inzichten. Het boek wordt maandag 23 juni tijdens het afscheidscollege van Paul, gepresenteerd, maar in deze *Euclides* tref je al een uitgebreide bespreking aan van Gerrit Roorda. (Dat afscheidscollege, maandag 23 juni 16:15 is 'live' te volgen op video.uu.nl) Namens de voltallige redactie alvast een mooie en welverdiende zomer toegewenst!

Tom Goris



Didactiek van de wiskunde



Titel: Didactiek van de wiskunde
Ondertitel: Handboek voor leraren in opleiding en in praktijk
Auteur: Paul Drijvers
Uitgever: Epsilon 2025
400 pagina's paperback
ISBN: 9789050412131

“Net als over wiskunde zelf is het boeiend om na te denken over obstakels die leerlingen kunnen ervaren bij het leren van wiskunde. Dat snappen en iets bedenken om dat te overkomen, is voor een docent misschien wel even bevredigend als het oplossen van het wiskundige probleem.”

Bovenstaand citaat is de op-een-na laatste zin van het nieuwe boek *Didactiek van de wiskunde, Handboek voor leraren in opleiding en in praktijk*, geschreven door Paul Drijvers. Deze zin raakt bij mij precies de snaar waarom ik mijn werk als lerarenopleider en vakdidacticus zo mooi vind. De ondertitel van het boek van Drijvers

maakt duidelijk dat het boek enerzijds gericht is op mijn studenten, *leraren in opleiding*, maar anderzijds op *leraren in de praktijk*. Ik schrijf deze boekbespreking met de blik van beide doelgroepen: is het interessant voor leraren in opleiding en voor leraren in de praktijk? Ik begin, net als Drijvers in elk hoofdstuk in zijn boek, met twee voorbeelden uit mijn eigen praktijk.

Voorbeeld 1: Bijles

Toen ik bijles gaf aan een jongen uit groep 7 viel me op dat hij met de hand (cijferend) kon rekenen, bijv. 29×73 , zie figuur 1, links. Toen ik hem vroeg zijn antwoord te controleren bleek dat hij niet wist hoeveel 10×73 was. Hij kon het alleen cijferend uitrekenen, zie figuur 1, rechts. Voor mij de uitdaging om te bedenken welke aanpak hem verder zou helpen. Bij dit onderwerp koos ik bijvoorbeeld voor betekenis verlenen via euro's (1 eurocent, 10 eurocent, 100 eurocent), betekenis verlenen aan vermenigvuldigen (tien groepjes van 73) en een rijtje oefeningen waarbij ik de opeenvolgende opdrachten steeds op één plek wijzigde (10×73 , 10×74 , 10×75 , 11×75 , 12×75).

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times 73 \\ \hline 657 \\ 1460 \\ \hline 2117 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 73 \\ \times 10 \\ \hline 00 \\ 730 \\ \hline 730 \end{array}$$

figuur 1

Voorbeeld 2 Logaritmes

Ik vraag derdejaars studenten (bachelor wiskunde/natuurkunde/econometrie) in een oriënterend didactiekcollege vaak hoeveel $\frac{\log 25}{\log 5}$ is. Het blijkt voor een deel van de studenten een lastige opdracht. Vaak hoor ik: 'hoe waren die rekenregels ook alweer?' Studenten komen op $\log 5$ of $\log 20$ of 5 of toch 2. Het blijkt dat het log-begrip voor een deel van onze 'top-bèta-studenten' lastig is en gebaseerd op 'welke regels moet je toepassen'. Als docent vraag je je af: Hoe kun je leerlingen/studenten helpen om met meer begrip naar zo'n opdracht te kijken?

Bovenstaande voorbeelden maken duidelijk wat wiskundendidactiek is. Drie vragen staan centraal:

- (1) Wat is de wiskunde? Bijvoorbeeld hoe zit het tientallig stelsel in elkaar, wat zijn logaritmes?
- (2) Wat zijn obstakels? Denk aan betekenisloos handelen, rekenregels zonder begrip. (3) Wat helpt om het te onderwijzen?

Deze driedeling is herkenbaar in het nieuwe handboek van Drijvers.

Een nieuw handboek

Het 'oude' handboek verscheen in 2012. Een stevig boek van 390 pagina's in elf hoofdstukken, geschreven door twaalf auteurs, onder redactie van dezelfde Paul Drijvers, samen met Anne van Streun en Bert Zwaneveld. Het unieke aan het 'oude' boek was de samenwerking tussen veel auteurs, allen werkend in het gebied van de vakdidactiek. Maar een nadeel van vele auteurs is dat consistentie van stijl en opzet onder druk staat. Het 'nieuwe' handboek is nog steeds een stevig boek geworden (de pdf heeft 398 pagina's), nu met zeventien hoofdstukken. Doordat Drijvers zelf alle teksten schreef is de stijl consistent. Door de iets kortere hoofdstukken vind ik het boek wat toegankelijker. Veel auteurs van het 2012-handboek zijn ingeschakeld en hebben de 'nieuwe versie' van het door hen geschreven hoofdstuk gelezen en van feedback voorzien. Dat vond ik een mooi gegeven, evenals dat veel onderzoek, dat in Nederland gedaan is op het gebied van wiskundendidactiek, een plek heeft gekregen in dit handboek.

Een vraag is of het oude handboek nu achterhaald is. Ik vind dat niet. Want hoewel er minder thema's in staan worden bepaalde onderwerpen in het oude handboek uitgebreider uitgewerkt. Met name de paragrafen over het ontwerpen van onderwijs zijn in het oude handboek uitgebreider, bijvoorbeeld over het ontwerpen van statistiek-onderwijs rond echte data over lichaamslengtes, waarin aan de hand van één context veel concrete suggesties worden gedaan. Het zou mooi zijn als de informatie uit het oude handboek beschikbaar blijft, eventueel via pdf's op de website van de uitgever. De combinatie van beide handboeken kan waardevol zijn als je bijvoorbeeld in het kader van een lesvoorbereiding of ontwerp-opdracht ideeën zoekt.

Opbouw van het boek

Het nieuwe handboek bestaat uit drie delen:

- (1) *Fundamenten van wiskundendidactiek*: In twee hoofdstukken bespreekt Drijvers vragen zoals: Wat is

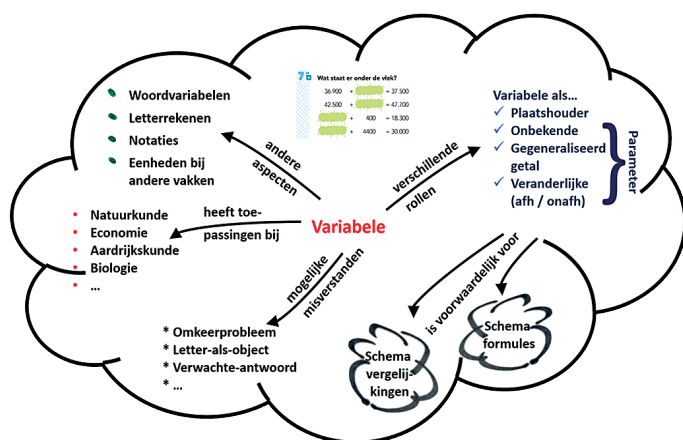
wiskunde en waarom geven we wiskundeonderwijs? In de lerarenopleiding leveren deze onderwerpen altijd stof voor enkele interessante colleges: ontdekken wat belangrijk is in wiskundeonderwijs en wat jouw visie daarop is, maar ook dat er verschillende visies bestaan op wiskundeonderwijs.^[2] Verder bespreekt Drijvers enkele theoretische invalshoeken van de wiskundendidactiek. Hij noemt daarbij naast theorieën die al langer bekend zijn (constructivisme, cognitieve schema's, proces-object dualiteit) ook theorieën die later zijn geformuleerd zoals 'commognitie' en belichaamde cognitie ('embodied cognition'). Maar, zes theorieën naast elkaar, is dat nu nodig? Hier kom ik later op terug.

- (2) *Thema's in de wiskundendidactiek*: In zes hoofdstukken bespreekt Drijvers allerlei overstijgende thema's rond wiskundeonderwijs. Sommige thema's waren ook aparte hoofdstukken in het oude handboek, zoals de rol van digitale middelen, toetsen, modelleren en wiskundige denkactiviteiten. Elk van deze hoofdstukken zijn stevig aangepast ten opzichte van het oude handboek. Zo gaat Drijvers in het hoofdstuk over toetsen ook in op internationale toetsen zoals TIMSS en PISA. Zijn korte duiding van deze toetsen is genuanceerd en overstijgt de ongenueanceerde krantenkoppen en artikelen, die meestal schrijven dat 'het zo slecht gaat met het Nederlandse (wiskunde) onderwijs'. Nuance is in het hele boek een kenmerk voor de schrijfstijl van Drijvers. Nieuwe hoofdstukken in het handboek zijn gericht op het thema 'basisvaardigheden', waar tegenwoordig veel over te doen is, en een ouder thema *realistisch wiskundeonderwijs*. Over dat laatste thema: Realistisch wiskundeonderwijs wordt vaak misverstaan, als (soms zeer onrealistische) 'contextsommen'. Het lijkt erop dat Drijvers het, als hoogleraar van het Freudenthal Instituut, belangrijk vindt om deze misverstanden in dit handboek recht te zetten met een apart hoofdstuk over dit thema.

- (3) *Domeinspecifieke didactieken*: in negen hoofdstukken over wiskundige onderwerpen, zoals variabelen, functies, afgeleiden, statistiek en analytische meetkunde. Drijvers begint altijd met twee voorbeelden van opdrachten, lesmateriaal of situaties die helpen om het wiskundige onderwerp te concretiseren. Dan volgt een bespreking van de wiskundige aspecten van het onderwerp, zoals wat het variabelebegrip inhoudt, zie figuur 2, wat verschillende benaderingen van het begrip afgeleide zijn, wat statistische geletterdheid is. Leerstof

>

over de domeinen wordt compact beschreven en verbonden met didactische theorieën die passen bij het onderwerp, zoals verschillende rollen van variabelen en parameters, proces-object denken bij afgeleiden, symbol sense bij formules. Vervolgens is er een paragraaf 'wat vinden leerlingen moeilijk', daarna aanwijzing voor het onderwijzen van dat onderwerp en mogelijke leerlijnen; afsluitend een aantal praktijktips en opdrachten. Centraal in het hoofdstuk staat een samenvattende visualisatie van het onderwerp, door Drijvers gepresenteerd als 'cognitief schema'. Figuur 2 toont zo'n schema voor het begrip variabelen. Ik zie dit als een handig schema waarin de theorie uit het hoofdstuk overzichtelijk wordt weergegeven, maar vraag me wel af of het woord 'cognitief schema' hiervoor passend is, dat is het schema dat een lerende opbouwt in zijn geheugen. Maar het overzicht is handig. Al met al leveren de domeinspecifieke hoofdstukken steeds veel informatie over de drie centrale vragen: wat is de wiskunde, wat vinden leerlingen moeilijk, hoe kun je het onderwijzen?



figuur 2 cognitief schema^[3]

Raakvlakken wiskunde en wiskundendidactiek

Het vakgebied wiskunde kenmerkt zich door het steeds verder abstraheren. Drijvers beschrijft abstraheren als *het isoleren van de wiskundige kern door die 'uit de context te trekken'* (p.129). Om een voorbeeld te geven: Het bijzondere van een begrip als afgeleide is, dat het geabstraheerd is uit de natuurkundige snelheidscontext, in wiskundige termen is geformuleerd, maar nu op allerlei vlakken toepassingen kent, bijvoorbeeld in de economie (bijv. marginale kosten), in de natuurkunde (bijvoorbeeld snelheid of radioactiviteit) of in de scheikunde (bijvoorbeeld reactiesnelheid).

Op dezelfde manier is er een ontwikkeling in de wiskundendidactiek. Alle studenten in de lerarenopleiding leren tegenwoordig een begrip als proces-objectdualiteit. Je kunt je afvragen waarom je zo'n moeilijk woord nodig hebt. En om eerlijk te zijn, ik heb jaren wiskunde gegeven zonder het begrip te kennen. Maar ik zie het nu zo: Als je begrijpt wat het is, is het een handig begrippenpaar. Het is van toepassing op veel begripsvorming in de wiskunde. Bijvoorbeeld waarom 8 (een object, twee bolletjes op elkaar), IIIIIIIII streepjes representeert (tel ze maar, proces); waarom $y = 3x + 6$ (object) representeert dat je een getal keer 3 doet en dan 6 erbij optelt om tot de uitkomst te komen (proces). Kortom, bij elk object is het onderliggende proces belangrijk. Inzicht in proces-objectdualiteit kun je als docent gebruiken om keuzes te maken in je uitleg en voorbeelden. Drijvers bespreekt veel van zulke theorieën. Daar komt wel een dilemma om de hoek kijken: theorie versus praktijk. Drijvers benoemt het dilemma van de theorie zelf ook in de epilooft waarbij zijn doel is *dat theorie voor ons werkt en niet andersom: theorie helpt ons om woorden te geven aan verschijnselen die we tegenkomen in het wiskundeonderwijs en om daarop te reageren* (p. 387). In mijn ogen is Drijvers erin geslaagd om door middel van voorbeelden en toelichting theorie toe te lichten, maar het zal een uitdaging blijven om dwarsverbanden tussen theorieën en terminologieën te doorgronden. Bij studenten in de lerarenopleiding merk ik dat bepaalde theorieën goed aanslaan en hen helpen bij het nadenken over hun wiskundeonderwijs. Bijvoorbeeld het idee van cognitief schema, wiskundige bekwaamheid, objectvorming en de relatie tussen conceptuele en procedurele kennis. Naar mijn mening zou het boek aan kracht kunnen winnen door keuzes te maken in de te bespreken theorieën, en minder volledig te willen zijn. Ik zal in elk geval bij het opleiden van leraren mijn eigen keuzes maken in theorieën en theoretische begrippen.

Helicopterview

De laatste jaren verschenen er boeken die onder een deel van de wiskundeleraren populair zijn, zoals het boek *Volgens Barton*^[4] en *Denkklassen creëren*^[1]. Zal dit nieuwe handboek net zo succesvol worden? Mijn beeld is dat het nieuwe handboek een totaal ander karakter heeft. De boeken van Liljedahl en Barton leveren veel ideeën hoe je direct in de klas aan het werk kunt gaan, en illustreren dat met wiskundige voorbeelden. Het nieuwe handboek redeneert vanuit een analyse van wiskunde en wiskundendidactiek. Het geeft een helicopterview over de stand van zaken in de vakdidactiek. De vertaling naar je klassenpraktijk wordt niet gegeven in kant-en-klare werkvormen. Drijvers geeft aanwijzingen voor het lesgeven

in korte praktijktips. De tips zijn een logisch gevolg van de informatie in het bijbehorende hoofdstuk, dus goed onderbouwd, maar hebben de vorm van brede adviezen, zie het kader.

Tip bij het hoofdstuk *Functies*:

Zorg voor een geïntegreerd functiebegrip, waarbij leerlingen weten dat de verschillende representaties en beelden allemaal manieren zijn om naar hetzelfde verschijnsel te kijken. Lineaire formules, lineaire grafieken, lineaire verbanden, dat zijn allemaal gezichten van dezelfde lineaire functie. (p. 274)

Tip bij het hoofdstuk *Probleem oplossen*:

Zoek een balans tussen procedurele routine-oefeningen en non-routineproblemen. Bij tijdgebrek kan de neiging zijn om te bezuinigen op de laatste categorie, maar dat kan leiden tot disbalans en tot star oplossingsgedrag. (p. 117).

Studenten lerarenopleiding

De voorbeelden maken duidelijk: Geen tips die je direct morgen in de klas kunt toepassen. Maar je moet er als docent over nadenken. Er moet nog werk verzet worden om hier onderwijs bij te ontwerpen.

Op dit punt past voor mij wel de conclusie dat ik het boek waardevol en interessant vind voor de lerarenopleiding. Voor studenten in mijn opleiding spelen in de eerste maanden vooral vragen rond klassenmanagement en algemeen didactische vragen. Maar al snel staan ze ook stil bij de vraag: hoe leg je wiskunde uit? Het nieuwe handboek van Drijvers helpt om baas boven het schoolboek te worden, zowel voor onderwerpen in de onderbouw (variabelen, vergelijkingen, statistiek) als de bovenbouw (paramaters, afgeleiden, analytische meetkunde). Dit maakt het boek geschikt voor zowel tweedegraads als eerstegraads opleidingen, waarbij een opleider de keuze kan maken voor welke theorieën, onderwerpen en voorbeelden hij de studenten laat lezen.

Ervaren docenten

Voor ervaren docenten lijkt me de waarde van het boek dat het kan helpen om inzichten te ontwikkelen in de wiskunde die je onderwijst, in het denken van leerlingen, in manieren van onderwijzen. Misschien zie je onderbouwing van aanpakken die je intuïtief al lang gebruikt, maar hopelijk ontstaan ook nieuwe (theoretische) perspectieven op patronen in het leren en onderwijzen van wiskunde. Het boek biedt kansen om samen met de sectie of in

professionele leergemeenschappen over onderwerpen te spreken, om samen onderwijs te ontwerpen en uit te voeren. Het zou mooi zijn als teams van docenten kunnen samenwerken rond dit handboek, met het oude handboek binnen handbereik.

Geen kant-en-klare oplossingen

Maar bij alles geldt dus: Het boek biedt geen kant-en-klare oplossingen. Bij het oude handboek was het plan op een website materialen te verzamelen. Voor het nieuwe handboek zou het mooi zijn: een website met enerzijds materialen die ideeën uit hoofdstukken concreet maken in lesmateriaal en werkvormen. Anderzijds kunnen voor andere onderwerpen uit de schoolwiskunde op dezelfde manier toelichtingen komen, zoals logica/logisch redeneren, ruimtemeetkunde, lineair programmeren, transformaties van grafieken, combinatoriek, ongelijkheden, etcetera. Ook voor deze onderwerpen kunnen materialen geschreven worden binnen de dieldeling: wat is de wiskunde, wat vinden leerlingen moeilijk, hoe kun je het onderwijzen? Wat mij betreft een centrale werkwijze in de lerarenopleiding.

De laatste regel van het boek is: *Straal dus als leraar uit dat je zowel de wiskunde als de didactiek ervan leuk en interessant vindt. Het zou mooi zijn als dit boek daaraan heeft kunnen bijdragen* (p. 390). Ik hoop dat het boek voor veel wiskundeleraren deze functie kan vervullen.

Noten

- [1] Liljedahl, P. (2024). *Denkklassen creëren - Building Thinking Classrooms. 14 strategieën om leerlingen maximaal aan het denken te zetten bij rekenen/wiskunde*. Bazalt Groep.
- [2] Ernest, P. (2003). Waarom geven we wiskunde? *Nieuwe Wiskrant* 23-2, 36-40.
- [3] Zie de *Euclides* website voor een grote afbeelding.
- [4] Barton, C. (2020). *Volgens Barton. Lesgeven in wiskunde aan de hand van wetenschap, experts, en 12 jaar aan mislukkingen*. Phronese.

Over de auteur

Gerrit Roorda is vakdidacticus wiskunde en lerarenopleider aan de Rijksuniversiteit Groningen en de Master Leraar Wiskunde, NHL Stenden Hogeschool.
E-mail: g.roorda@rug.nl

Herinneringen aan Jan de Lange

Op 13 maart 2025 overleed Jan de Lange. De redactie van *Euclides* vroeg een aantal mensen die hem van zeer nabij hebben meegemaakt om hun herinneringen aan Jan te delen. Als eerbetoon aan een van de meest invloedrijke wiskunde didactici van de afgelopen decennia.



JANS CONTEXTRIJKE WISKUNDEONDERWIJS

Michiel Doorman

De bijdragen van Jan de Lange aan het wiskundeonderwijs zijn sterk verbonden met de rol van contexten in wiskundige problemen. Jan onderscheidde twee werkwijzen voor de ontwerper van het lesmateriaal: de context staat centraal of begripsontwikkeling staat centraal.



De context staat centraal

Eén van Jans grote passies was vliegen. Toen een docent, in mijn herinnering Nanda Querelle, hem vroeg om voor vmbo-leerlingen iets te ontwerpen over verhoudingen ontwierp hij een pakketje dat bedoeld was voor een paar lesweken. Dat werd het boekje *Vlieg er eens in*. Daarin komen allerlei onderwerpen aan de orde, allemaal in één context. Het boekje gaat over glijverhoudingen, vectoren en sinus en cosinus. Alle wiskunde wordt op een aanstekelijke manier gepresenteerd in de context van vliegtuigen en

vliegen. Jan gebruikte die ene vliegcontext om leerlingen kennis te laten maken met verschillende wiskundige begrippen en werkwijzen. De context daagt leerlingen uit te redeneren over het afleggen van afstanden bij het zweven vanaf een bepaalde hoogte. Door verschillende vluchten te vergelijken, wordt van de leerlingen verwacht dat ze nadenken over de glijverhouding, d.w.z. de verhouding tussen de afgelegde afstand en de starthoogte. Op deze manier is de glijverhouding betekenisvol voor leerlingen.

Begripsontwikkeling staat centraal

Het voorbeeld van de glijverhouding laat al zien wat de belangrijke rol is van contexten voor het ontwerpen van wiskundeonderwijs dat voor leerlingen betekenisvol is. Jans samenwerking met collega's aan het Freudenthal Instituut gaf aanleiding tot het onderzoeken en uitwerken van het ontwikkelen van wiskundige begrippen met behulp van contextrijke activiteiten. Dat was een complexe uitdaging, want als de context niet erg geschikt is voor begripsontwikkeling, dan rijdt je met de verkeerde trein op een verkeerd spoor. Daarom benadrukte Jan dat ontwerpers zich zowel moeten verdiepen in de echte wereld buiten de wiskunde, als de mogelijkheden van contexten moeten ervaren door die in echte klaslokalen uit te proberen. Jan was allergisch voor kunstmatig laboratoriumonderzoek. Een voorbeeld dat aan Jan kan worden toegeschreven is de context van exponentiële groei die leerlingen kan ondersteunen bij het leren redeneren met logaritmen. Voor velen inmiddels bekend uit wiskunde A, maar in het buitenland nog altijd innovatief. In deze context, de exponentiële groei van waterplanten, wordt op een bepaald moment de vraag gesteld hoeveel weken er nodig zijn om een oppervlakte te krijgen die tien keer zo groot is? Een zorgvuldige opbouw in het lesmateriaal kan leerlingen eerst laten ervaren dat dit onafhankelijk is van de beginsituatie en geschat kan worden op iets meer dan drie weken bij een wekelijkse verdubbeling. In de context van groei wordt een begrip niet

alleen onderzocht, maar ook min of meer geformaliseerd. Jan liet zien hoe zo'n concrete basis mogelijkheden biedt voor leerlingen om later de procedures en betekenis van de abstracte wiskunde zelf te reconstrueren. Het benutten van de echte wereld en het serieus nemen van wat leerlingen kunnen in situaties die voor hen betekenisvol zijn, leidde Jan naar een grote verscheidenheid aan originele en verrassende contexten. Een mooi voorbeeld hiervan is het volgende begrotingsprobleem dat zo'n dertig jaar geleden door Jan werd ontworpen en nu erg actueel is: In een bepaald land is het nationale defensiebudget € 30 miljoen voor 1980. Het totale budget voor dat jaar is € 500 miljoen. Het volgende jaar is het defensiebudget € 35 miljoen, terwijl het totale budget € 605 miljoen is. De inflatie tijdens de periode van de twee begrotingen was 10 %.

a. Je bent uitgenodigd om een lezing te geven voor een pacifistische vereniging. Je bent van plan uit te leggen dat ze zich niet druk hoeven te maken, omdat het defensiebudget in deze periode nauwelijks groeit. Leg uit hoe je dit zou kunnen doen.

b. Je bent uitgenodigd om een lezing te geven voor een militaire academie. Je bent van plan uit te leggen dat het defensiebudget in deze periode toeneemt en dat het ministerie het belang van het leger serieus neemt. Leg uit hoe je dit zou doen.

Een creatief ontwerper

In 2011 ontving Jan de ISDDE Prize for Excellence in Design for Education. Malcolm Swan schreef namens de jury: 'He has a flair for finding fresh, beautiful, original, contexts for students and shows humour in communicating them.' Zonder Jans bijdragen zouden veel ideeën in de Nederlandse didactische traditie minder goed zijn verwoord, minder goed geïllustreerd en minder invloedrijk geweest zijn in de wereld buiten de Nederlandse context. Zoals gezegd was Jan allergisch voor onderwijsonderzoek dat ver stond van de onderwijspraktijk. Tegen het eind van zijn academische carrière raakte hij soms gefrustreerd door de miskenning van het originele en creatieve werk van een innovatieve onderwijsontwerper.

Curriculumvernieuwingen verlopen niet meer via experimenten in de klas waarbij educatieve ontwerpers onderzoeken wat de mogelijkheden zijn van nieuwe onderwerpen, originele contexten en nieuwe benaderingen. Met Jan is langzamerhand een tijdperk verdwenen, een tijdperk waarin ontwerpen als creatieve kunst gewaardeerd werd.

GRONDLEGGER VAN WISKUNDE A

Kees Lagerwaard

Jan de Lange is vooral van grote betekenis geweest voor het Nederlandse wiskundeonderwijs omdat hij de grondlegger is geweest, uiteraard in samenwerking met anderen, van het vak wiskunde A. Maar er is veel meer. En voor mij persoonlijk is hij heel belangrijk geweest omdat we elkaar meer dan zestig jaar hebben gekend en onze wegen elkaar heel vaak hebben gekruist.

We hebben tegelijkertijd wiskunde gestudeerd in Leiden. Jan studeerde alleen wel een stukje sneller dan ik, maar daarnaast hebben we ook vele jaren samen hardgelopen en daarbij liep het tempo gelukkig nauwelijks uiteen. In de jaren '70 zijn we beiden enkele jaren docent wiskunde geweest op de Lorentz Scholengemeenschap (het latere Schoter) in Haarlem. Maar Jan had veel nieuwe ideeën over wiskundeonderwijs en kon die gaan vormgeven bij OW&OC, de voorloper van het Freudenthal Instituut. De inhoud van het nieuwe vak wiskunde A is in sterke mate bepaald door Jan. Vanzelfsprekend samen met collega's, van wie Martin Kindt zeker genoemd moet worden vanwege zijn substantiële bijdrage. Voor de experimenten met dit nieuwe vak werden leerstofpakketjes ontwikkeld waarbij het wiskundige concept werd geïntroduceerd vanuit een realistische context, een werkelijk bestaande en voorstelbare situatie dus. Dat zou motiverender zijn voor leerlingen en tegelijkertijd de mogelijkheid bieden om de uiterst belangrijk geachte probleemoplosvaardigheden aan te bieden. In Wiskunde A zouden niet de wiskundige technieken centraal staan, maar ingebed worden in het proces van een probleem verkennen, schematiseren, modelleren, mathematiseren, interpreteren van resultaten en terugvertalen. Zo ontstond in de jaren '80 van de vorige eeuw een nieuw programma wiskunde A voor vwo. Enkele jaren later volgde het programma voor havo.

Toetsing

Over de toetsing van dit vak had Jan ook een heldere opvatting. Idealiter zouden de leerlingen ook in toetsen en examens een of enkele realistische probleemsituaties voorgeschoteld krijgen, waarbij de simpele opdracht zou zijn: 'hier is het probleem, vind een oplossing'.

Je vindt dat ideaalbeeld van Jan het beste terug bij de Wiskunde Olympiade. Een team van leerlingen krijgt een probleem gepresenteerd en mag daar gezamenlijk mee aan de slag, niet gehinderd door zeer beperkte tijd. Jan was initiatiefnemer van de Olympiade. Het beoordelen van de prestaties van de teams is al lastig genoeg, maar

>



is beperkt tot het op volgorde leggen van de werkstukken en de bovenste is de beste en daarmee de winnaar. Voor toetsen en examens die beslissend zijn voor zakken of slagen, is deze methodiek minder geschikt. Leerlingen kun je

individueel moeilijk beoordelen op basis van een gezamenlijk product. En welk cijfer geef je en waar leg je de cesuur? Toen ik docent was op een van de scholen die met het experimentele wiskunde A gingen werken, heb ik uitgebreid met Jan over de inhoud van de toetsing gesproken en gezocht naar een manier waarop de leerlingen een eerlijke kans kregen te laten zien wat ze kunnen. Later als examenmaker bij het Cito kwam ik dat probleem opnieuw tegen. Ons idee van het eerlijk en betrouwbaar toetsen van wiskunde A in een centraal examen van drie uur botste nogal met het idealistische plaatje dat Jan had van het toetsen van 'zijn' wiskunde A.

PISA

In het PISA-project krijgen 15-jarigen in tientallen landen toetsen voorgelegd waarmee hun 'mathematical literacy' wordt gemeten. Bij de start van dit wereldwijde project werd Jan gevraagd om voorzitter te worden van de groep experts die hiervoor het raamwerk moesten ontwikkelen. Het ging ook hier nadrukkelijk om het aanpakken en oplossen van realistische problemen, waarbij slechts beperkt wiskundige technieken nodig waren. De benodigde wiskunde moest immers in alle deelnemende landen al eerder aan alle 15-jarigen zijn aangeboden. De resultaten van het PISA-onderzoek hebben in veel landen geleid tot aanpassingen in het wiskundecurriculum.

Vriend

Jan de Lange was een gedreven vernieuwer. En hij wist velen mee te krijgen. Zijn presentaties waren altijd boeiend, inhoudelijk sterk en ook nog humoristisch. Zijn energie leek onuitputtelijk. En kritisch bleef hij steeds. Wat hij heeft opgestart is nog steeds zichtbaar in het onderwijs, zowel in Nederland als internationaal. Ik bewaar veel goede herinneringen aan die dynamische Jan de Lange met wie ik heel vaak mocht samenwerken en die ik ook buiten het werk mijn vriend mocht noemen. Ik mis hem.

My stimulating memories of Jan de Lange

Claudi Alsina



For the world of mathematics education, at the international level, the death of Jan de Lange represents a great loss.

His extraordinary activity everywhere promoting a new way to learn mathematics, based on a realistic approach by means of modelling processes, was a key reference for an innovative way to teach mathematics. Let's remember: his interest on all levels of students, especially in secondary school but including, in recent years, the very young children; his leadership in the Freudenthal Institute where a group of researchers has been very active; his involvement in the PISA project and his presence in all kinds of international congresses, forums and institutions. All these extraordinary facts are remarkable and indicate how strong Jan's educational influence was. Very few people in math education have achieved the projection that Jan had. I was lucky to meet Jan in many places and during many years, becoming a friend of him. Thanks to the generosity and leadership of Sol Garfunkel a group named Istron group was formed and met every year in different places to discuss crucial issues in math education. In Sol's group were involved: Jan, Mogens Niss, David Moore, Werner Blum, Jean M. Kantor, Joe Malkevitch and me.

I met Jan also in his visits to Barcelona, in ICME's or in my visits to the math days in Utrecht where he was kind to invite me to participate. He had always innovative examples on how to relate mathematical modelling to reality, he developed a strong and rigorous research, contributed to renew many school curriculums in different countries and he had a great ability to give talks in front of very large audiences. I still remember his plenary talk in ICME 6 in Seville. His examples in the talks were always seductive and he always succeeded to communicate the key issues he wanted to transmit.

All of us know Jan's hobby of flying in his small plane on weekends or vacations after being flying all week around several continents. But now this hobby becomes an argument to say that Jan was always flying, in many cases, advanced to his own time. Now he is flying very high so when we look at the sky let's remember his legacy.

Persoonlijke herinneringen aan Jan de Lange

Heleen Verhage

Mijn eerste ontmoeting met Jan de Lange was in het vroege voorjaar van 1982. Als student deed ik de lerarenopleiding wiskunde aan de universiteit van Groningen. Mijn begeleider Sieb Kemme had bedacht dat een stage bij OW&OC in Utrecht misschien wel wat voor mij zou zijn. We gingen er samen met de trein op af en de uitkomst was dat ik mee mocht draaien in het Hewet-team, dat bestond uit Jan de Lange, Martin Kindt en Ellen Hanepen.

Matrices

Jan ontwierp voor Wiskunde A o.a. het lespakket Matrices, een nieuw onderwerp in het Wiskunde-A-programma. Als sluitstuk van dit pakket kwamen Lesliematrices voor populatiemodellen aan de orde. Ik mocht daar een computerprogramma bij maken, waarmee de opvolgende generaties van een populatie makkelijk doorgerekend konden worden. Dat programmeren ging in de toenter-tijd populaire computertaal Basic. Het was nogal een gedoe, want voor elk computermodel (Philips, Commodore, Osborne) moest het computerprogramma aangepast worden en op een aparte drager gezet (in het begin op een cassettebandje, later op een grote slappe floppydisk). Helaas liepen de lessen met de computers op de proefscholen regelmatig in de soep. Computergebruik in het onderwijs stond in die tijd nog volledig in de kinderschoenen. Gelukkig deed dit niets af aan het enthousiasme waarmee Matrices werd ontvangen in de klas, zowel door de leraren als door de leerlingen. Jan had met zijn creatieve invulling van het onderwerp een hele goede inschatting gemaakt van wat interessant en haalbaar was. Jammer dat het onderwerp weer is verdwenen uit het Wiskunde-A-curriculum.

Nieuwe Wiskrant

Mijn werkplek had ik bij Jan op de kamer. Van meet af aan mocht ik hem helpen bij het maken van de *Nieuwe Wiskrant*, de opvolger van de *Wiskrant* (op kranten-formaat) uit de IOWO-tijd. In 1981 was het IOWO, dat onder leiding stond van Hans Freudenthal, opgeheven. Maar het overgebleven groepje medewerkers, waaronder Jan de Lange, liet zich niet kisten en was uitermate strijdbaar. Zo kwam dankzij Jan razendsnel de *Nieuwe Wiskrant* van de grond. Het tijdschrift was in die beginperiode een belangrijke spreekbuis voor het Hewet-project. Het laatste nummer van de *Nieuwe Wiskrant* verscheen in juni 2013. In jaargang 1 nummer 4 (mei 1982) stond het artikel Kritisch kijken, waarin de ervaringen met het door Jan



ontworpen lespakket Grafische Verwerking werden beschreven. De onderwerpen uit dat lespakket en het bijbehorende proefwerk zijn nog altijd actueel: de Amerikaanse defensie-uitgaven en inflatiepercentages; bevolkingspiramides en vergrijzing; verkeersongevallen met dodelijke afloop (invloed van het alcoholwetje uit 1974); scheefheid van de inkomensverdeling gevisualiseerd in een Lorentz kromme. Gelukkig heeft dit onderwerp wel stand gehouden in het Wiskunde-A-curriculum.

Vrouwen en wiskunde

Op 21 maart 1987 werd het eerste lustrum gevierd van de werkgroep Vrouwen en Wiskunde, waar ik een actief lid van was. Bushokjes waren in die tijd opgesierd met grote posters van de *Kies Exact campagne*, die een paar jaar later werd opgevolgd door de succesvollere campagne *Een slimme meid is op haar toekomst voorbereid*. Op het feestelijke lustrumcongres waren (zoals te verwachten was) voornamelijk vrouwen aanwezig, maar Jan de Lange was er ook. Hij stond enigszins ambivalent tegenover het gedachtegoed en de activiteiten van onze werkgroep, maar was altijd bereid om op te draven en een praatje te houden wanneer hij ergens voor gevraagd werd.

Nationale Wiskunde Dagen

In 1994 ontsproot aan het brein van Jan het idee van de Nationale Wiskunde Dagen. Een van de eerste vergaderingen daarover herinner ik me nog goed. Met zijn visionaire blik hield Jan een pleidooi om dit evenement jaarlijks te gaan organiseren. Dat leek mij een totaal onhaalbaar plan, want hoe zou je nou toch elk jaar aan voldoende inhoudelijke invulling kunnen komen? Na een paar jaar zou je toch alle interessante thema's wel gehad hebben? Inmiddels heeft de tijd geleerd wie er gelijk had, want de NWD is elk jaar volgeboekt en de 31-ste NWD is alweer achter de rug. Helaas heeft Jan de afgelopen editie van dit door hem zo geliefde evenement niet meer kunnen meemaken. De NWD was echt zijn kindje en blijft hopelijk nog heel lang bestaan. Wat gebleven is bij iedereen die Jan de Lange gekend heeft, zijn de vele, al dan niet persoonlijke, herinneringen aan hem.

>

Avontuurlijk en inspirerend

Martin Kindt

Ik leerde Jan kennen in 1976 tijdens de ICMI (de Internationale conferentie voor wiskunde onderwijs) in Karlsruhe. Hij was pas aangenomen als medewerker van het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO) waarvan Hans Freudenthal de directeur was. Dat Jan bij zijn sollicitatiegesprek het antwoord schuldig bleef op de vraag welk boek hij op school gebruikte, gaf voor Freudenthal de doorslag: 'die man moeten wij hebben'. De ICMI 1976 in Karlsruhe was het 'diepe' waarin Jan belandde direct na zijn aanstelling en was aanleiding voor zijn eerste artikel in de *Wiskrant* met de prikkelende titel 'Zoe mutz of everyzing'. Dit was in – zeg maar – de prenatale periode van het innovatieve Hewet-project waarbij Jan en ik, als ontwerpers en voorlichters, intensief hebben samengewerkt.



Contexten

Over het gebruik van contexten in het wiskundeonderwijs schreef Jan in *Euclides* een mooi artikel met als titel 'Contextuele problemen' waarin hij de term 'smeuïge en heldere context' gebruikt: smeuïg om te motiveren, helder om niet te veel taalproblemen op te roepen. Zelf was Jan een meester in het bedenken van smeuïge verhaaltjes die dan uitmondten in heuse wiskunde. Niet zelden kwam in zo'n verhaaltje Heer Bommel op de proppen. Zo ook in misschien zijn mooiste en meest contextrijke ontwerp 'Exponenten en Logaritmen' waarin een gesprek tussen heer Bommel en Pee Pastinakel over de groei van planten ('ponenten') uitmondt in de betekenis van machten met rationale exponent. Later in die context verdwijnt de beperking 'rationaal': ${}^2\log 10$ is het tijdstip waarop er 10 m^2 planten zijn gevormd bij groeifactor 2. In dit verband wordt dan de hoofdeigenschap ${}^9\log a + {}^9\log b = {}^9\log ab$ ontwik-

keld en... leerlingen bleken daar in de lespraktijk vlotter mee om te gaan dan hun leraren die opgeleid waren met een formele aanpak. Verder muntte dit pakket uit door een grote variatie van fraai geïllustreerde voorbeelden uit de natuur, als de groei van zeesterren en logaritmische spiralen die voorkomen in allerlei schelpen. Eén schelp, met de populaire naam 'wenteltrap', werd later het logo van de NWD.

Hewet

In de periode 1980–1985 is de basis gelegd voor Jans verdere loopbaan. Voor het Hewet-project was al gauw ook interesse in het buitenland. In 1984 op de ICMI in Adelaide bleek Jan een perfecte promotor van de Hewet-filosofie. Ik herinner me nog goed dat na zijn werkgroep aldaar er een deelnemer was die na afloop alleen met luide stem zei: fun! Ook in andere landen, zowel binnen als buiten Europa, sloeg Hewet aan. Met warmte denk ik terug aan de vele reizen die ik met Jan heb gemaakt om de Hewet-filosofie uit te dragen. Ook dat was 'fun'. Na het Hewet-project werkte Jan aan zijn proefschrift, waarin naast een uitgebreide terugblik op en analyse van dit project een onderzoek werd beschreven naar een nieuwe vorm van toetsen, de 'twee-trapstoets'. Zijn promotie in Utrecht vond plaats in 1987 en twee jaar daarna werd hij benoemd tot hoog-leraar-directeur van de vakgroep OW&OC, later Freudenthal Instituut. Onder zijn leiding groeide de vakgroep gestaag, dankzij de nieuwe projecten zowel in binnen- als buitenland, die Jan wist binnen te halen. Ik noem hier slechts één van die projecten: de ontwikkeling van een wiskundemethode voor de middle school in de VS onder de naam – hoe kon het anders? – *Mathematics in Context* (MIC). Dit was in oorsprong een samenwerkingsproject met de universiteit van Wisconsin, later met die van Colorado in Boulder: Freudenthal Instituut US.

Meeslepend

Van de dichter Hendrik Marsman is de regel 'groots en meeslepend wil ik leven'. Of dit Jans motto was weet ik niet, maar het leek er wel op en hij was zeker heel ambitieus. Dat 'meeslepend' was absoluut op hem van toepassing. Want hoe vaak wist hij niet collega's en anderen mee te voeren in ideeën die aanvankelijk nogal wild leken, maar die later heel succesvol werden. Naast de eerder genoemde NWD en MIC noem ik hier nog de wiskunde Olympiade, waarin de ware filosofie van wiskunde A nog elk jaar doorklinkt, niet alleen in Nederland! De sporen die Jan de Lange achterliet in de wereld van het wiskundeonderwijs, zijn voorlopig nog lang niet uitgewist.

The relevance of mathematics education

Mogens Niss



Conferences

I have known Jan de Lange since 1978, when we both spoke at a conference in Norway. Since then, our paths became intertwined in several ways, both professionally and personally. One reason for this was our joint preoccupation with the issue of relevance of mathematics education to society as well as to

students. We both contributed to the series of International Conferences on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (the ICTMAs), of which we were the chief organisers of two consecutive conferences – in Roskilde, Denmark (1989), and in Noordwijkerhout, the Netherlands (1991). Needless to say, the Freudenthal Institute, of which Jan had become the director in 1989 (even though the institute only got its name in 1991), played an instrumental role in organising ICTMA in Noordwijkerhout. We also collaborated as consecutive editors-in-chief on the publication of the volumes resulting from these two conferences. As another offspring of the ICTMAs, we were both invited in 1990 to become members of a small international group of mathematics educators, the Istron Group, established by Sol Garfunkel, director of the Consortium for Mathematics and Its Applications (COMAP), USA. The purpose was to foster international cooperation to further the teaching and learning of applications and modelling in mathematics education. For various reasons Jan decided to leave the group in 2000.

Mathematical literacy

The longest and most intensive collaboration between Jan and myself began in 1998 and lasted for more than a decade. When the OECD established the so-called PISA studies – PISA: Programme for International Student Assessment – Jan was appointed chair of the Mathematics Expert Group responsible for designing the framework of the mathematics part of PISA as well as for composing the pool of mathematics test items on which the study was based. I, too, was appointed to serve as a member of the expert group (staying onboard till the completion of the 2012 cycle). Our first task was to determine the over-

arching focus of the mathematics study.

As is rather widely known, this focus was captured by the term mathematical literacy, emphasising that the point was to look into students' functional use of mathematics rather than to test their mastery of curriculum elements in the traditional sense. This focus was not equally well received in all PISA countries, but Jan was a steadfast defender of the approach taken by the experts in front of 'curriculum traditionalists' in quite a few countries. Eventually, though, in response to the pressure from certain large and influential countries, the OECD decided to change the course of PISA and gradually – after 2012 – make it more syllabus-oriented. One consequence of this development was that Jan left as the chair of the mathematics expert group after the completion of the 2009 cycle.

Non-formalist

After our involvement in PISA, Jan and I saw each other only sporadically, but when it happened always with great pleasure. The last time I saw Jan was at a conference in Warsaw, Poland in 2018.

It has been a privilege to have known and worked with Jan de Lange for four decades. This allowed me to come close to his way of thinking in mathematics education, which was, of course, markedly influenced by Hans Freudenthal and the IOWO (the predecessor of the Freudenthal Institute at the University of Utrecht). I think it is fair to say that Jan insisted on the significance of substantive, rather than formalistic mathematical thinking, problem solving and reasoning. He was convinced – undoubtedly stimulated by interaction with his own children Kasper and Karlijn – that students, based on their general life experiences, possess an almost innate capacity for undertaking such thinking and reasoning in creative ways. It might be to go too far to say that Jan was an outright anti-formalist with respect to mathematics, but he was certainly a non-formalist. Over the years he developed the view that school mathematics simply killed students' inclination and ability to creatively engage in mathematical activity.

Among Jan's many strengths was his impressive ability to devise realistic mathematics tasks that could – and in Jan's view: should – be dealt with without using advanced mathematical formalisms but only substantive mathematical thinking based on the fundamentals of the problem situation. As to the term 'realistic', Jan strongly adhered to the view developed by Freudenthal and colleagues that 'realistic' means experientially realistic to students.

We have lost a great and influential mathematics educator and a great friend.

>

Wiskunde A-lympiade

Monica Wijers en Dédé de Haan

Garderen, 14 maart 2025

De internationale finale van de wiskunde Olympiade is begonnen. Elf teams, afkomstig uit Duitsland, Denemarken, Japan, Kroatië en Nederland, werken in hun huisjes aan de opdracht. Deze is gebaseerd op het boek *De juiste maat* (1951), geschreven door statisticus J. Sittig en wiskundige Hans Freudenthal. De opdracht draait om het ontwerpen van een maatsysteem voor een Olympiade-overhemdblouse, gebaseerd op lichaamsmetingen die de teams zelf uitvoeren, zie een uitgebreid artikel daarover na de zomer in *Euclides* 101-1. Terwijl de teams druk bezig zijn, bereikt ons het verdrietige bericht dat Jan de Lange, bedenker van de wiskunde Olympiade, op 13 maart is overleden.

Vrijere toetsvorm

Jan de Lange was de bedenker van de wiskunde Olympiade, die voor het eerst in 1989-1990 werd gehouden als experiment, in het kader van het nieuwe vak wiskunde A. Dit vak was bedoeld voor leerlingen die wiskunde vooral als hulpmiddel gebruiken in vakgebieden buiten de bèta-wetenschappen. De centrale doelen van dit vak, zoals het toepassen van wiskunde, en wiskundig modelleren, bleken lastig te toetsen in een traditioneel examen. Jan bedacht daarom een vernieuwende, vrijere toetsvorm: de wiskunde Olympiade. Kenmerkend voor de opgaven is, dat er weinig voorkennis is vereist en de open probleemstellingen ruimte laten voor eigen ideeën en samenwerking. Een goed en helder uitgewerkt groepsproduct was essentieel – ook het schriftelijk verwoorden van een oplossing hoorde immers bij de ‘hogere’ wiskundevaardigheden die getoetst werden.

Hogere-orde-vaardigheden

De eerste opdracht draaide om een waarschuwingssysteem voor winkeldiefstal in een winkelcentrum: in een tijd zonder mobiel of internet een echte uitdaging. Veertien ‘experimenteerscholen’ die het nieuwe vak wiskunde A hadden geïmplementeerd, deden mee. De positieve ervaring leidde tot een jaarlijks evenement: in november werd op scholen een voorronde gehouden, waarna de beste teams werden uitgenodigd voor de finale in maart, in Garderen. Scholen gebruikten de Olympiade om de moeilijk toetsbare ‘hogere-orde’-doelen uit het examenprogramma te oefenen of te toetsen als onderdeel van het schoolexamen. In 1999 werd het curriculum aangepast: praktische



opdrachten werden verplicht, niet alleen bij wiskunde A, maar ook bij B. Dat leidde tot de introductie van de Wiskunde B-dag. Jan de Lange, inmiddels niet meer actief in de commissie, zag met tevredenheid hoe zijn idee was uitgegroeid tot een breed gedragen activiteit. Meer dan 100 scholen namen deel.

Wiskunde Dagen

De Olympiade vond ook internationaal weerklank. Denemarken sloot zich in 1995 aan, gevolgd door Duitsland, Japan, Iran en Kroatië. Hoewel deze landen wiskunde anders inrichten, zagen ze het belang in van creatief, probleemoplossend werken in teamverband. In 2012 startte een spin-off voor de onderbouw: de Onderbouw Wiskunde Dag, voor klas 3 havo/vwo, later ook geschikt gemaakt voor vmbo-gt. Het belang van de vaardigheden die de Olympiade vraagt is actueler dan ooit. De (concept)examenprogramma's van oktober 2024 bevestigen dit: probleemaanpakken, modelleren, redeneren en communiceren vormen de kern. Om deze reden gaan de activiteiten verder onder een nieuwe, eenduidige noemer: de Wiskunde Dagen. Onder deze vlag vallen de Wiskunde A-dag (met internationale finale), de B-dag en de Klas 3-dag. Leerlingen werken in teams van 3 of 4 een hele dag aan creatieve wiskundige problemen.

Terug naar de finale van 2024-2025

De schok van Jans overlijden was groot, ook al wisten velen dat hij ernstig ziek was. Voor de organisatie blijft hij een grote inspiratiebron. Zijn invloed leeft voort – niet alleen in het concept en de werkwijze van de Olympiade, maar soms ook in de inhoud van opdrachten. Zo is de voorronde-opdracht van 2024-2025, getiteld *Kappen met kerst*, geïnspireerd op een door Jan ontworpen opdracht over kerstbomen. De oorspronkelijke opdracht rond grafen en matrices bestond uit twee stappen: eerst een proefwerk met

open vragen, daarna feedback en vervolgens een uitgebreide open essay-opdracht. Deze nieuwe toetsvorm, de twee-trapstoets, nam Jan op in zijn proefschrift. Elk jaar, tijdens de finale in Garderen – waar het in 1989 begon – blijven we Jan gedenken. Zijn innovatieve geest, zijn overtuiging dat wiskunde een creatieve, sociale en betekenisvolle activiteit kan zijn, leeft voort in de Wiskunde Dagen.

An Inspirational Leader for Mathematics Education

David Webb

I am filled with deep gratitude for Jan de Lange's impact on me and on mathematics education in the United States and around the world. My first encounter with Jan was spring 1997, at the Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics – the largest conference and membership organization for mathematics teachers in the United States. Jan was a featured keynote speaker and was presenting in one of the large ballrooms at the main conference hotel.

Authentic problem solving

His session was a packed house – a standing room only crowd of several thousand. Even though this was 30 years ago, I can still see Jan on stage mesmerizing the enthusiastic crowd with examples of authentic problem solving and the use of mathematics in the world. His compelling argument regarding how the traditional, mostly procedural approach to school mathematics (that was familiar to nearly everyone in the crowd) was not adequately preparing students for the world. Most memorable was an audience participation activity. A set of three different colors of paper had been handed to each participant on their way into the ballroom. Three volunteers stood on chairs spaced throughout the ballroom. Each of them held up one of the colors. Jan asked the rest of us to look where we were standing in relation to each of the colors and to raise over our heads the paper that matched the color we were closest to. An overhead camera panned the ballroom, displaying on the screen a dynamic, human-modeled Voronoi diagram as some people switched colors back and forth while trying to decide which color was closest to them. Jan's interactive human Voronoi diagram demonstration was creative and thought provoking and inspired me to seek out engaging authentic problem scenarios ever since. Later, as doctoral

student and a former secondary math teacher, I would review the types of tasks Jan de Lange and colleagues were developing and was astounded at the richness of the problem contexts, the stunning use of visual representations, the careful connections between problem contexts, models and tools, and symbolic representations of mathematics. I was so compelled that I have incorporated much of their work into my own approach to professional development and teaching mathematics.

Creating mathematics

As director of the Freudenthal Institute, Jan de Lange maintained his passion for exploring and interacting in the design space. He designed lessons and assessments. He observed and worked with teachers at the classroom level and in teacher workshops. He did not lead from afar. He got in the mix and did the design work with us. He loved to create, sketch, and do mathematics.

In 2003, Jan de Lange worked with Tom Romberg to launch the Freudenthal Institute US (FiUS) at the University of Wisconsin. FiUS was an institute for promoting Realistic Mathematics Education principles in the US and abroad. When FiUS moved to the University of Colorado Boulder in 2006, I was honored to serve as the Executive Director and host biennial Realistic Mathematics Education conferences. These RME conferences brought together presenters and participants from around the world to demonstrate how Realistic Mathematics Education was being applied in curriculum, assessment, and professional development. Jan's passion for sharing the excitement of doing mathematics, driven by RME principles and authentic problem solving, was realized through his leadership at the Freudenthal Institute and supporting numerous endeavors such as FiUS. Jan de Lange left a lasting impact on mathematics education. His vision and leadership were transformative, changing how many around the world view the role of math education for future generations of teachers and students. He demonstrated that mathematics is exciting and invigorating. His infectious smile, laugh, energy and leadership will be missed, but his vision and legacy will live on.

Alle foto's voor dit In Memoriam zijn uitgezocht en ter beschikking gesteld door Elsa Pronk, Els Feijs, Kasper en Karlijn de Lange.

Wat heb je nou aan wiskunde?

Uit de lezersenquête bleek dat artikelen over toepassingen van de wiskunde zeer gewaardeerd worden. In dit artikel bespreekt Ferdinand Verhulst twee toepassingen, een in economische sferen en een uit de neurowetenschap

Inleiding

Zo'n vraag als in de titel is voor het vak scheikunde niet zo moeilijk te beantwoorden. Het is handig om te weten wat keukenzout is en dat door middel van ingewikkelde chemische verbindingen medicijnen kunnen worden gemaakt. Net zo iets geldt voor natuurkunde, elektriciteit wordt gebruikt voor verlichting en machines, met zwaarte-kracht hebben we altijd te maken, het aantal voorbeelden is groot.

Voor wiskunde ligt het anders. In *Euclides* 100-3 (2025) noemt Martin Kindt de stelling dat als in de 3-dimensionale ruimte een lijn loodrecht staat op twee snijdende lijnen van een vlak, deze lijn alle lijnen van dat vlak loodrecht snijdt of kruist. Wat heb je daar aan? Dat nut is moeilijker uit te leggen. Het is verbazend dat deze stelling niet voor zich spreekt, je kunt de stelling bewijzen. Het enige nut van de zuivere wiskunde dat vaak genoemd wordt is het gebruik van zeer grote priemgetallen ter beveiliging van bankoverschrijvingen. Belangrijker echter, wiskundig denken is slijpsteen voor de geest. Niet voor niets waren benoemingen van docenten in vroeger eeuwen vaak voor 'filosofie en wiskunde'. In plaats daarvan vallen we bij het aantonen van nut daarom vaak terug op voorbeelden uit de natuurkunde en de techniek. Als je bijvoorbeeld een speciale brug moet bouwen, denk aan een brug over een zeearm of brede rivier zoals de Waal of de Merwede, dan worden er bij het ontwerp moeilijke wiskundige berekeningen gemaakt. Of denk aan de telefoon die we dagelijks gebruiken; ook daar speelt wiskunde een essentiële rol. Het blijft toch lastig om het verband tussen die voorbeelden en wiskunde echt te verduidelijken.

Om het zicht op gebruik en ontwikkeling van de wiskunde te verruimen bespreken we twee vakgebieden, de economie en de neurowetenschap, in het bijzonder het

brein van de mens. Voor het geval dat een lezer zich verder in die onderwerpen wil verdiepen zijn op de site enige literatuurverwijzingen opgenomen.

Economie

Economen hebben niet zo'n goede naam. Een bekende omschrijving luidt: 'Een econoom is iemand die heel goed kan uitleggen waarom zijn voorspellingen van vorig jaar niet zijn uitgekomen'. Nu was dit misschien vijftig jaar geleden grotendeels waar, maar ondertussen heeft de economische wetenschap grote voortgang gemaakt. In die spottende omschrijving hebben we wel meteen een belangrijk punt: voorspellingen. Het gaat erom dat we de economische processen onder woorden (en formules) kunnen brengen, zodat we de gevolgen van de maatregelen en autonome processen zien aankomen. Laten we als voorbeeld eens nemen dat de regering het BTW-percentage verhoogt. Dat voelt iedereen elke dag meteen in zijn portemonnee, de prijzen gaan stijgen. Sommige groepen in de bevolking zullen om loonsverhoging vragen, uitkeringen moeten misschien verhoogd worden, er kunnen stakingen uitbreken, de zwarte markt bloeit op en er zijn nog veel meer mogelijke gevolgen. En dit is dan maar één maatregel die een groot geheel van gevolgen met zich meebrengt. De economische processen hangen allemaal samen en vormen op die manier een buitengewoon ingewikkeld dynamisch systeem. We noemen nog een voorbeeld. De regering besluit om de uitgaven voor onderwijs drastisch te beperken. Dat merk je niet meteen aan je uitgaven. Het onderwijs gaat gewoon door, er zijn allerlei financiële verplichtingen aangegaan die pas na lange tijd kunnen worden veranderd. Dit brengt een heel ander proces op gang. Je kunt verwachten dat een drastische bezuiniging op onderwijs ernstige gevolgen heeft voor de welvaart van een land, maar die

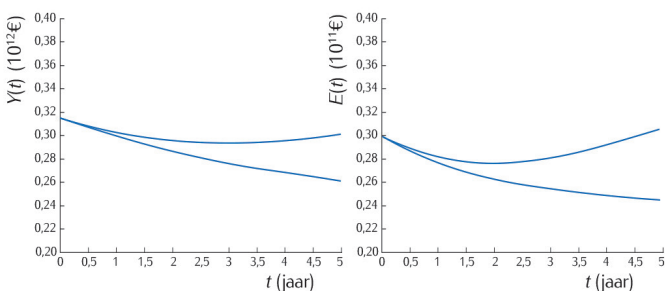
gevolgen meet je niet in dagen of maanden, maar in jaren. Bij het doen van economische voorspellingen is heel veel wiskunde nodig en dan ook nog allerlei soorten wiskunde. Laten we eens kijken naar de literatuurclassificatie van dit vakgebied. Die heet JEL Classification System. Deze classificatie geeft codes voor tientallen onderwerpen en tegelijk een mooi overzicht van het vakgebied. Daaronder vallen algemene zaken als economieboeken en artikelen, geschiedenis van het vak, wiskundige en andere kwantitatieve methoden, vervolgens detailgebieden als 'economie van het huishouden', 'macro-economie en openbare financiën', 'agriculturele financiën', 'de economie van arbeidsrelaties', de rol van de Centrale Bank en nog veel meer maatschappelijke deelaspecten die een rol spelen in de economie.

“Een vergroting van de consumptie ten koste van onderwijs pakt op den duur negatief uit.”

het nationaal inkomen $Y(t)$ en de bestedingen aan onderwijs en innovatie $E(t)$ afgebeeld in twee gevallen. De onderste krommen in beide figuren geven het tijdsverloop aan als 50 % van het nationaal inkomen aan consumptie wordt besteed, de bovenste krommen indien dit percentage 40 % is. Het is maar een illustratie, zo zijn $E(0)$ en $K(0)$ tamelijk groot gekozen, maar het is duidelijk dat een vergroting van de consumptie ten koste van onderwijs op den duur negatief uitpakt.

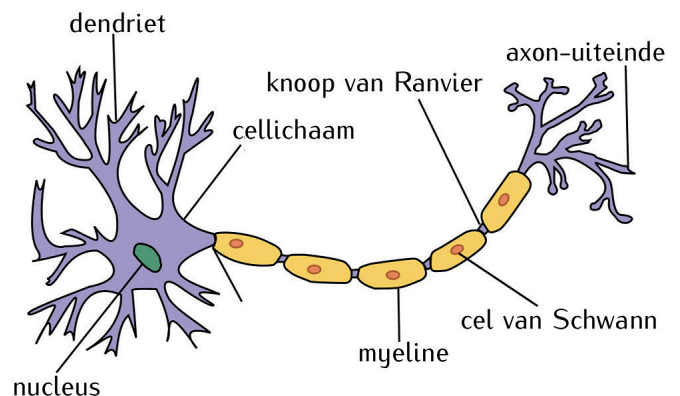
Het menselijk brein

Een tweede voorbeeld van een gebied waar wiskunde recentelijk een belangrijke rol is gaan spelen is de studie van menselijk bewustzijn en hersenprocessen. Bij menselijk functioneren, denken en gevoelens hebben, speelt het gehele menselijk lichaam een rol, maar we beperken ons nu tot de hersenen die hierbij een centrale rol spelen.



figuur 1 Links het verloop van het Nationaal Inkomen $Y(t)$ indien daarvan 50 % wordt besteed aan consumptie (onderste kromme) en indien daarvan 40 % wordt besteed aan consumptie (bovenste kromme). Rechts de corresponderende krommen voor de uitgaven aan onderwijs en innovatie.

Als voorbeeld bekijken we het bovengenoemde economische proces van bezuinigingen op onderwijs en innovatie. Een macro-economisch model dat bedoeld is om het deelproces van deze bezuinigingen in kaart te brengen bevat variabelen en parameters. Variabelen zijn kapitaal K , dat is het totaal van de middelen om te produceren in geldwaarde uitgedrukt, de totale consumptie C van de bevolking, de totale waarde E die onderwijs en innovatie vertegenwoordigen (gebouwen, apparatuur, salarissen enz); deze drie variabelen zijn allemaal functies van de tijd en brengen tezamen het nationaal inkomen $Y(t)$ van het land tot stand. Stel nu eens dat een regering de consumptie van de bevolking wil verhogen door de jaarlijkse investeringen in onderwijs en innovatie te verminderen. Hoe verandert dan het nationaal inkomen, groeit de economie of gaat deze achteruit? In figuur 1 zijn



figuur 2 Een hersencel (neuron)

Een belangrijke zenuwcel is het neuron, zie figuur 2. Deze bestaat uit drie delen, dendrieten, het cellichaam en het axon. Neuronen zijn geordend in bepaalde groepen met aparte functies. Informatie tussen de neuronen wordt overgedragen door elektrische signalen. Men schat dat er meer dan 100 miljard neuronen in de hersenen van een volwassen mens zijn; een chimpansee heeft er ruim 6 miljard, een worm ongeveer 300 (de Afrikaanse olifant

Kortingsactie

TI-84 Plus CE-T Python Edition

Koop de meest
gebruikte grafische
rekenmachine
met korting!



€10
korting*



Breng wiskunde tot leven *in de klas*

- » Kleurrijke grafieken
die inzicht geven
- » Toegestaan op examens
- » Met emulatorsoftware



education.ti.com/nl

* De (online) winkels die deze grafische rekenmachine verkopen zijn verantwoordelijk voor het uitvoeren van de kortingsactie en de voorwaarden. De korting bedraagt € 10, inclusief btw. De korting is geldig van 15 april tot en met 30 september 2025.

©2025 Texas Instruments

 **TEXAS INSTRUMENTS**

heeft overigens meer dan 250 miljard neuronen maar die zitten bijna allemaal op één plek, de kleine hersenen, zodat de coördinatie van verschillende groepen neuronen veel minder is dan bij de mens). Hoe dat geheel van neuronen leidt tot menselijk bewustzijn is een van de grootste, onopgeloste vragen van de wetenschap. Een neuron kan worden geactiveerd via een auditief, visueel, farmacologisch of intern lichamelijk signaal. De activatie gaat door een elektrisch signaal dat het vlies (membraan) bereikt van de neuron en dit veroorzaakt dan een zogenaamde 'actiepotentiaal', een piek die het verschil is tussen de gestimuleerde potentiaal op het membraan en de potentiaal in het cellichaam. Deze activatie noemt men 'het vuren van het neuron'. Deze potentiaalpiek plant zich voort naar de axon van het neuron en leidt tot elektrische activiteit in de axon die zich vertakt in uiteinden, de synapsen die de signalen weer doorgeven. Om dit te begrijpen komen scheikunde, natuurkunde en wiskunde samen.

Neurologisch onderzoek wijst erop dat we ervan moeten uitgaan dat neuronen samenwerken in groepen die taken uitvoeren als taalgebruik, zien, horen, lichamelijke en psychische gevoelens. Ook lijkt meer dan 90% van de hersenen zich bezig te houden met autonoom beheer van lichaamsprocessen zoals aansturing van organen en bloedsomloop. Die groepen van neuronen, ook ketens of netwerken genoemd, hebben op hun beurt belangrijke interacties. Je kunt iets zien en daarbij emoties ondergaan. Een doorbraak was de verklaring met behulp van elektro-fysiologische beschrijving met chemische aspecten. Het bekendste model is van A.L. Hodgkin en A.F. Huxley dat geformuleerd is in 1952. Zij stelden differentiaal-vergelijkingen op voor de signaalvoortplanting door een membraan waarbij verschillende chemische bestanddelen een rol spelen. In 1963 ontvingen zij voor deze bijdrage de Nobelprijs. De aanwezigheid van positief en negatief geladen ionen in en bij de celwand van het neuron maakt dat bijvoorbeeld een negatief geladen elektrische stroom bij aanwezigheid van positief geladen ionen een 'kanaal' vindt waar de stroom gemakkelijk in het neuron binnen kan dringen. Het Hodgkin-Huxley model beschrijft op een relatief simpele manier hoe de neuronale stromen leidend tot neuron-excitatie tot stand kunnen komen waarbij rekening wordt gehouden met de verschillende soorten ionen die in het celmembraan voor kunnen komen. Zie voor meer details en achtergrond de genoemde literatuur. Er is een aantal universiteiten in Nederland waar hersen-onderzoek, neuroscience, wordt beoefend, vaak in samenwerking met academische ziekenhuizen.

Wiskundeonderwijs en 'nut'

Tot en met de 19^e eeuw gingen de natuurwetenschappen en wiskunde grotendeels hand in hand. Iemand als Bernhard Riemann (1826 - 1866) schreef zowel diepzinnig over complexe functies als over de dynamica van vloeistoffen. Die samenhang en eenheid zijn we nu kwijt, ten nadele van de wiskunde en de wetenschap in het algemeen. Er zijn echter in Nederland ook goede en zelfs internationaal unieke zaken. De Zebrareeks van Epsilon Uitgaven maakt het mogelijk om verbanden tussen de wiskunde en andere gebieden in kort bestek op school te bestuderen. Dat is bijzonder. Daarnaast is er aandacht voor modelleren in het onderwijs. Dat is een ambitieuze onderneming in het onderwijs waar nog veel over te zeggen is, omdat het kennis veronderstelt van wiskunde, een gebied daarbuiten en beheersing van de taal. Gezien de gedwongen specialisatie in het vervolgonderwijs is modelleren in de wiskunde een belangrijke stap naar gebruik en communicatie van de wiskunde.



vakbladeuclides.nl/1007toepassingenwiskunde

Martin Kindt las de eerste versie van de tekst en maakte een aantal opmerkingen. Hil Meijer (Universiteit Twente) stuurde mij literatuur over het menselijk brein.

Over de auteur

Ferdinand Verhulst is emeritus hoogleraar dynamische systemen aan de UU en publiceert nog steeds. Hij studeerde wiskunde en natuurwetenschappen aan de UvA met afstudeeronderwerp computerprogrammering voor dubbelsterren. Hij was (mede-)auteur van ruim tien wetenschappelijke wiskundeboeken en richtte in 1985 uitgeverij Epsilon Uitgaven op waar ook de Zebrareeks werd ondergebracht.

Probleemgestuurde aanpak in wiskundelessen

NVvW-PROJECT

Veel wiskundeleraars voelen het aan: enerzijds is het noodzakelijk om leerlingen helder uit te leggen hoe procedures en stappenplannen werken. Anderzijds wil je graag dat leerlingen zelf nadenken over opdrachten en beslissen op welke manier ze de wiskunde problemen kunnen aanpakken. Voor procedures en stappenplannen bieden de schoolboeken goede ondersteuning, maar voor het probleemoplossen is dat vaak minder goed zichtbaar.

Inleiding

Probleemoplossen, onderdeel van wiskundige denkactiviteiten, is een nadrukkelijk doel in wiskundecurricula voor het voortgezet onderwijs, voor zowel de onderbouw als bovenbouw. Zie de vernieuwde kerndoelen voor de onderbouw vo, in het bijzonder de wiskundige denk/werkwijzen (kerndoelen 9 t/m 13) en de wiskundige activiteiten bij de concept-eindexamenprogramma's wiskunde bovenbouw havo/vwo.

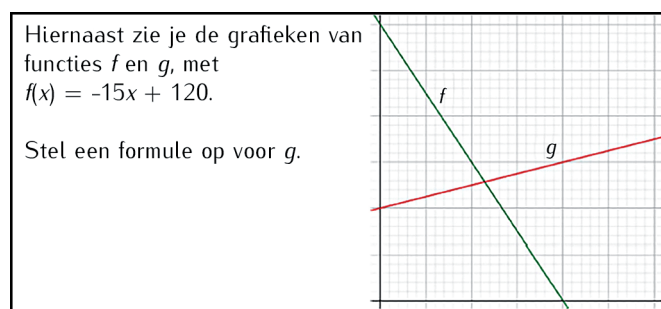
Het ontbreekt op dit moment in de bestaande lesmethoden aan voldoende goed materiaal om het probleemoplossen een meer prominente rol in het wiskundeonderwijs te geven. Er is een belangrijke rol voor de docent weggelegd om het leerproces van probleemoplossen te initiëren en te begeleiden. Om probleemoplossing succesvol te trainen is het nodig dat er continu aandacht is voor dit aspect van wiskunde leren. Dit betekent dat probleemoplossen niet enkel op het eind van het leerproces in een extra paragraaf met een toepassingsvraag terugkomt, maar ook bij het begin van het leerproces van nieuwe wiskundige concepten en procedures. Probleemoplossen wordt hiermee verweven in het onderwijs van alledag. Dergelijk onderwijs vraagt een bepaalde werkwijze van de docent die leerlingen uitdaagt en ondersteunt waar dat nodig is en confronteert met rijke wiskundige taken waarbij probleemoplossing vereist is. Leerlingen zullen eerst zelf aan die taken moeten werken, waarbij hulp op maat gegeven kan worden. Daarna volgt een klassikale bespreking waarbij aandacht is voor strategieën, integratie, verdieping en generalisatie. Dit noemen we *Probleemgestuurde aanpak in wiskundelessen*.

Om docenten te ondersteunen bij het ontwikkelen van goede lessen rondom een probleemgestuurde aanpak initieerde de NVvW een door OCW gesubsidieerd project van drie jaar, waarvan het afgelopen jaar het eerste

was. Uitgangspunt is om samen met docenten materialen te ontwikkelen die de mogelijkheid geven om met een probleemgestuurde aanpak in de wiskundeles aan de slag te gaan. De materialen moeten eenvoudig bruikbaar kunnen zijn voor 'gewone' wiskundelessen, maar ook voor lessen waarin bijvoorbeeld gebruik wordt gemaakt van de Building Thinking Classrooms (BTC) aanpak.

Achtergrond van probleemgestuurde aanpak

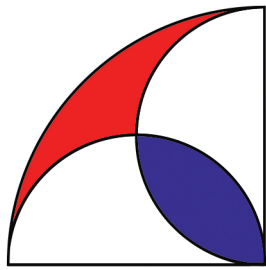
De gedachte achter probleemgestuurde lessen willen we graag toelichten aan de hand van het net verschenen boek *Didactiek van de wiskunde Handboek voor leraren in opleiding en praktijk*, geschreven door Paul Drijvers. Elders in deze *Euclides* vind je een recensie van dit boek. Hoofdstuk 5 van dit boek gaat over denkactiviteiten en probleemoplossen. Drijvers begint het hoofdstuk met twee voorbeelden, zie figuur 1 en 2.



figuur 1

De twee voorbeelden laten zien dat een opdracht die feitelijk niet veel voorkennis vereist (bij voorbeeld 1: de formule van een rechte lijn, bij voorbeeld 2: oppervlakte van een cirkel) toch uitdagend kan zijn. Als leerling heb je probleemoplossingsvaardigheden nodig om een oplossing te verzinnen. De voorbeelden laten zien 'dat

Bewijs dat de oppervlakte van het rode gebied gelijk is aan die van het blauwe.



figuur 2

WDA-opgaven niet altijd om uitgebreide voorkennis of wiskunde van hoog niveau vragen; wel doen ze een beroep op enige creativiteit en wendbaarheid in een nieuwe situatie'. Drijvers beschrijft twee belangrijke aspecten van probleemoplossen in de wiskundeles:

- (1) er zijn denkactiverende *opdrachten* nodig,
- (2) er zijn denkactiverende *docenten* nodig.

In het NVvW-project zetten we op beide aspecten in. Hieronder beschrijven we eerst de opzet van het project, en vervolgens de beide aspecten.

Het project

In het kader van het project, gesubsidieerd door Impuls Open Leermateriaal, is een groep van zestien wiskundeleraars geworven, verdeeld over verschillende schoolsoorten, leerjaren en lesmethoden. Er zijn vijf of zes bijeenkomsten per jaar in het midden van het land waar docenten gezamenlijk werken aan het ontwerpen van lesmateriaal. In teams van drie docenten wordt gewerkt aan de ontwikkeling van probleemgestuurde aanpak in wiskundelessen. De opdrachten worden zoveel mogelijk uitgetest in de klas en op basis van de ervaringen soms enigszins aangepast. In elke bijeenkomst staat een thema centraal en wordt er tijd besteed aan het ontwerpen van nieuwe opdrachten. Thema's kunnen zijn: hoe ontwerp je een centrale vraag, kwaliteitscriteria voor een centrale vraag, hoe begeleid je een klassengesprek. Het hele leertraject voor docenten staat onder leiding van vier lerarenopleiders, die ervaring hebben met probleemgestuurd onderwijs.

We hebben gekozen voor een vast format van het lesontwerp, met daarin het probleem (centrale vraag), de werkwijze (hoe gaan leerlingen hieraan werken en eventuele hints), verwachte oplossingen van leerlingen en aandachtspunten voor de klassikale bespreking. Na het geven van de les wordt dit aangevuld met de evaluatie, met o.a. oplossingen van leerlingen.

Aspect 1: opdrachten

In de eerste bijeenkomsten is er met de docenten besproken wat we als groep onder een wiskundig probleem verstaan en aan welke criteria onze centrale vragen zouden moeten voldoen, zie kader 1 voor het resultaat.

De opdracht zet aan tot wiskundig denken, het is een non-routineopgave

Wiskundig:

- past bij leerdoelen en in de leerlijn
- bevat de kern en de volle complexiteit
- focust op ontwikkeling van wiskundige concepten óf op probleemaanpak

Taak:

- is een betekenisvolle vraag voor leerlingen en heeft een beperkte introtekst
- heeft *low floor-high ceiling* en verschillende aanpakken zijn mogelijk
- is uitdagend en motiverend

kader 1 Kenmerken van een wiskundig probleem in het project

We hebben met elkaar strategieën besproken om bij hoofdstukken uit schoolboeken dergelijke centrale vragen te ontwerpen. Denk aan: het 'voorbeeld' in het boek overslaan, en direct een passende opdracht geven, zodat de leerling zelf moet nadenken over de aanpak. Of denk aan het schrappen van deelvragen. Ook is het mogelijk om een hoofdstuk te ontleden in 'hoofdgedachten' via een soort conceptmap. Dit kan helpen om de kernen van het hoofdstuk zichtbaar te maken. Bij die kernen kun je vervolgens de opdrachten ontwikkelen.

Uit het project een voorbeeld voor klas 1:

Het probleem

Het recept voor perfect paars water luidt: 'Meng 11 ml blauw water met 5 ml rood water.' Joost mengt 330 ml blauw water met 140 ml rood water. Diana mengt 290 ml blauw water met 120 ml rood water. Joost en Diana gooien hun mengsels bij elkaar. Hoeveel blauw en rood water moeten ze nog toevoegen voor precies één liter perfect paars water?

kader 2 Voorbeeldopgave klas 1

>

Aspect 2: denkactiverende docenten

De rol van een docent in een les die gericht is op probleemoplossingsvaardigheden is anders dan in een directe-instructieles. De docent is sterk gericht op aanpakken en minder op antwoorden. De docent laat leerlingen hun ideeën verwoorden met een focus op aanpakken die voor alle leerlingen zinvol kunnen zijn. De docent gebruikt vraag-antwoordtechnieken zoals doorvragen, aanvullen, verplaatsen in de ander (begrijp je wat de andere leerling bedoelt) en verdiepen (waarom is dit zo, hoe hangt het samen). Het stimuleren van een productieve houding (durf, doorzetten, zelfvertrouwen) is onderdeel van het proces. Daarnaast zal bij het aanleren van nieuwe wiskundige concepten en procedures via dergelijke probleemgestuurde lessen natuurlijk ook aandacht moeten zijn voor het vastleggen van deze nieuwe concepten en procedures en de integratie ervan bij het eerder geleerde.

In het project komen deze thema's aan bod aan de hand van activiteiten zoals: zelf ervaren hoe je een probleem oplost, zelf ervaren van een probleemgestuurde les, het bekijken en bespreken van een video van een docent die vraagtechnieken gebruikt om verschillende oplossingen te bespreken en het bespreken van theorie over klassengesprekken.

Het project, de uitdagingen van de praktijk

We beleven met elkaar mooie momenten en er worden goede stappen gemaakt om materialen te ontwikkelen. Maar er zijn ook stevige uitdagingen. Om met een grote uitdaging te beginnen, het samenkomen en ontwikkelen blijkt soms pittig naast een volle baan. Deelnemers waren zeer enthousiast na de opstartbijeenkomst, maar in de loop van het jaar nam de drukte van alledag een vlucht. Soms bleek het gewoonweg teveel en enkele deelnemers besloten te stoppen. De andere kant is dat deelnemers het mooi vinden om docenten van andere scholen te ontmoeten en zo ook praktijken uit te wisselen en schooloverstijgend samen te werken. De deelnemers waarderen de opzet van de avonden waarin er tijd is om ervaringen uit te wisselen, er altijd zinvolle informatie wordt gegeven en ze zelf een probleemgestuurde aanpak mogen ervaren. We eten altijd even met elkaar en er is ruimte om zelf aan het werk te gaan waarbij de begeleiders meedenken en feedback geven.

Er is inmiddels een aantal lessen ontwikkeld. Een mooi en belangrijk element is dat docenten deze lessen ook zelf uittesten en in de documenten weergeven hoe leerlingen op hun opdrachten reageren.

Een tweede uitdaging is hoe je probleemoplossen

integreert in een vol curriculum. Schoolboeken blijken zeer leidend en bepalend voor het schoolcurriculum. Maar hoe integreer je bij deze 'volle hoofdstukken' en 'volle planningen' ruimte voor probleemgestuurde lessen, en hoe integreer je de les precies in het curriculum. Zeker in de bovenbouw is dit een uitdagende vraag. De strategieën om centrale vragen te ontwikkelen geven houvast om deze uitdaging aan te gaan.

Hoe verder?

Probleemgestuurde lessen zijn nodig om leerlingen probleem aanpak aan te leren. Deze probleem aanpak is nodig omdat niet iedere probleemsituatie die leerlingen in hun schoolloopbaan en hun latere leven tegenkomen vooraf geoefend kan zijn. Leerlingen moeten leren hun kennis, vaardigheden en inzichten in nieuwe probleemsituaties te gebruiken. Dit betekent dat deze probleem aanpak continu aandacht verdient in de dagelijkse onderwijspraktijk. Probleemgestuurde lessen zoals hier beschreven, proberen dit vorm te geven en docenten en leerlingen daarbij te ondersteunen. De producten die ontwikkeld en uitgetest zijn zullen uiteindelijk gedeeld worden via de website van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en zo beschikbaar komen voor iedereen.

Oproep

We zijn op zoek naar nieuwe docenten die het aanleren van probleemoplossende vaardigheden belangrijk vinden en tijd kunnen vrijmaken om mee te doen.

Heb je belangstelling, stuur dan een mail naar Heleen van der Ree (h.vanderree@nvww.nl) om je aan te melden en meer informatie te ontvangen. Deelnemers aan dit project krijgen een vergoeding voor deelname en reiskosten worden vergoed.

Over de auteurs

Gerrit Roorda, Peter Kop, Els Franken en Tom Goris zijn lerarenopleiders bij respectievelijk RUG/NHL Stenden, Iclon Leiden, Windesheim Zwolle en Fontys Educatie Tilburg

Prijsuitreiking Wiskunde B-dag

Op vrijdag 21 maart vond de feestelijke prijsuitreiking van de Wiskunde B-dag plaats in het Academiegebouw in Utrecht. Voor dit jaar hadden de organisatoren een leuke opdracht bedacht over convexe veelhoeken! Winnaars werden Anne Braam, Josephine Damen, Mathias Freijse, en Yourán de Kort van het Stedelijk Gymnasium Nijmegen. Margot Rijnierse, voorzitter van de NVvW, reikte de prijzen uit. Als cadeau mochten de winnende leerlingen ook een boekje kiezen uit de Zebra-reeks.

Bron: <https://platformwiskunde.nl/>

Duitse winst in Alympiade

Op 14 en 15 maart vond de internationale finale van de Alympiade plaats in Garderen. In totaal gingen elf teams aan de slag met een opdracht die gebaseerd was op het boek *De juiste maat* van Hans Freudenthal. In dit boek uit 1951 wordt een onderzoek beschreven naar maatvoering van confectiekleding en dat onderzoek hebben de deelnemers tijdens de finale in feite herhaald. Op basis van metingen door de deelnemers zelf, zoals bijvoorbeeld lichaamslengte, rugbreedte en polsometrek, moest een bij de Alympiadefinalisten passend maatsysteem worden ontworpen. De afsluiting was praktisch: door elk team werd een (papieren) Alympiadeblouse gepresenteerd, op basis van hun eigen maatsysteem.

De uitslag:

1. KvG-Gymnasium Hilstrup, Duitsland
2. Gymnasium Steinheim, Duitsland
3. Saitama team 2, Japan
4. Birkerød Gymnasium, Denemarken
5. Campus Bornholm, Denemarken
6. XV. Gimnazija Zagreb, Kroatië
7. Maris College Den Haag, Nederland
8. RSG Wieringerlant Wieringerwerf, Nederland
8. Greijdanus Zwolle, Nederland
10. Saitama team 1, Japan
11. Rythoviuscollege Eersel, Nederland

Bron: *WiskundeE-brief*, 20 april 2025

Vier keer brons bij EGMO

Bij de European Girls' Mathematical Olympiad in Pristina (Kosovo) hebben alle leden van het Nederlandse team een bronzen medaille gewonnen. Zij zijn daarmee in veertien edities pas het tweede team ooit waarbij iedereen een medaille behaalde.



V.l.n.r. Wendy, Lisa,
Alina en Floortje

De individuele resultaten luiden als volgt:

Wendy Huang (16, 6 vwo, Eindhoven) – 18 punten;
Floortje Lusthof (18, 6 vwo, Den Haag) – 17 punten;
Lisa Meij (16, 5 vwo, Eindhoven) – 17 punten;
Alina Ju (16, 4 vwo, Oegstgeest) – 16 punten.

Het Nederlandse team had nog nauwelijks ervaring met internationale wedstrijden: alleen Wendy nam vorig jaar al deel aan de EGM. Voor Lisa was het zelfs haar eerste jaar in de nationale trainingsgroep: 'Ik kwam met de kleinst mogelijke marges door de tweede ronde en de EGMO-selectietoets. En dan een medaille, daar ben ik wel trots op.'

Bron: <https://platformwiskunde.nl/>

Twee keer goud bij Benelux Wiskunde Olympiade

Zesdeklasser Casper Heimel en vijfdeklasser Josiah 't Hart hebben de Benelux Wiskunde Olympiade in België gewonnen. Zij wonnen goud met een score van 21 van de 28 punten. De resultaten van de leden van het Nederlandse team zijn als volgt:

goud (21 punten) Casper Heimel
(6 vwo, Utrechts Stedelijk Gymnasium)
goud (21 punten) Josiah 't Hart
(5 vwo, Willem Lodewijk Gymnasium, Groningen)
zilver (14 punten) Lucas van de Sande
(6 vwo, Driestar College, Gouda)
brons (12 punten) Leonard Jonasse
(5 vwo, Utrechts Stedelijk Gymnasium)
brons (11 punten) Tobias Piet
(5 vwo, Cygnus Gymnasium, Amsterdam)
brons (10 punten) Yorick Nap (5 vwo, Thuisonderwijs, Vinkel)

De volgende leerlingen kregen een eervolle vermelding:

Roel Alkemade (Stedelijk Gymnasium Breda),
Boas Bakker (Willem Lodewijk Gymnasium, Groningen),
Colin Smeets (Stanislascollege Westplantsoen, Delft),
Dennis Zhang (Lorentz Casimir Lyceum, Eindhoven).

Bron: wiskundeolympiade.nl

Mijn werk voor *Euclides*

Ter gelegenheid van het honderdjarig bestaan van *Euclides* hebben we de voorgaande hoofdredacteurs benaderd om stil te staan bij hun hoofdredacteurschap en wat er speelde in het wiskundeonderwijs in die periode. Ze konden kiezen tussen een geheel eigen verhaal of een speciale versie van onze rubriek Vijf vragen aan. In deze *Euclides* de bijdrage van Bert Zwaneveld



Het begin

Om te beginnen iets over mijn werk voor *Euclides*. Ik begon in 1976, jaargang 52, nummer 3, als voorzitter van de redactie. Ik was de opvolger van Gerrit Krooshof. De voorzitter zat niet alleen de redactievergadering voor, zijn belangrijkste taak was als een soort hoofdredacteur te beslissen over het al dan niet opnemen van een bijdrage. Na ongeveer zeven jaar, in 1983, jaargang 58, nummer 5, vond ik het welletjes, trad af als hoofdredacteur en voorzitter – de term voorzitter verdween gedurende deze periode uit het colofon – en werd opgevolgd door Frans Dolmans. Bij de nieuwe jaargang in 1986 was Frans Dolmans al weer weg. Redacteur Fred Goffree nam het voorzitterschap energiek waar. Op een suggestie van Wolters-Noordhoff werden in 1987 de functies van voorzitter en hoofdredacteur formeel gesplitst en beide functies waren in het colofon vermeld. Ongeveer zeven jaar later kwam ik terug, nu alleen als voorzitter zoals ook in het colofon werd vermeld. Martinus van Hoorn was toen hoofdredacteur. Waarom kwam ik terug bij *Euclides*?

Overgangsperiode

Eind vorige eeuw vond Wolters-Noordhoff – tegenwoordig Noordhoff geheten – als eigenaar en uitgever

van *Euclides*, dat de Vereniging zelf eigenaar en uitgever moest worden. Het bestuur vroeg toen of ik als voorzitter van de redactie het overgangsproces wilde leiden en wel zodanig dat in de loop van de jaren negentig *Euclides* volledig van de Vereniging zou zijn. Bovendien wilde het bestuur dat *Euclides* meer het karakter van een magazine zou krijgen. Ik heb op dat verzoek ja gezegd en me volkomen op die overgang gericht, overigens samen met Martinus van Hoorn. De prijs die de Vereniging aan Wolters-Noordhoff moest betalen: één gulden en het recht dat Wolters-Noordhoff kreeg om op de achterflap van elk nummer een advertentie te plaatsen. In deze tweede periode zat ik dus wel de redactievergadering voor, maar bemoeide me niet, nu ja nauwelijks, met het redactionele beleid.

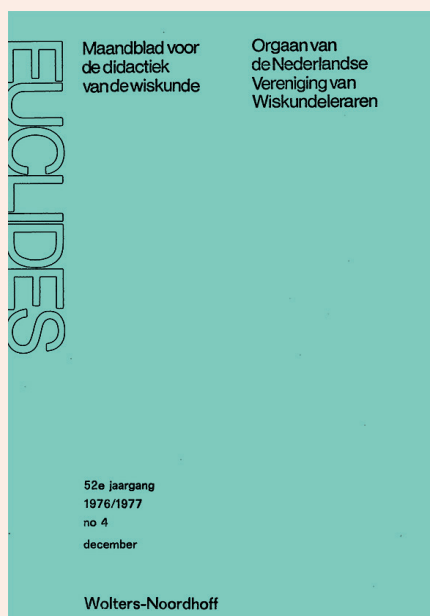
Waar ik me in deze tweede periode ook mee bezig hield was het tot stand komen van het redactiestatuut. De aanleiding daarvan was dat door een ‘verschil van mening’ tussen de hoogleraren Freudenthal en Bruins over een wiskunde-historisch onderwerp uit de oude Egyptische wiskunde *Euclides* bijna een jaar niet was verschenen. Dit was nog vóór mijn eerste periode gebeurd.

Het redactiestatuut was vooral bedoeld om de procedures vast te leggen bij een conflict tussen een auteur en de redactie of tussen twee auteurs. Een samenvatting van het redactiestatuut verscheen in jaargang 68.

In wat volgt beperk ik mij tot mijn eerste periode. Daartoe heb ik de nummers van *Euclides* van jaargang 52 tot en met jaargang 58 herlezen.

Eerste indruk

Het eerste dat mij bij het doorlezen/doorbladeren van die oude nummers van *Euclides* opviel, was dat alle communicatie vanuit het bestuur of de verdere wiskundegemeenschap via *Euclides* verliep. Het internet bestond



figuur 1 De voorkant van een nummer uit mijn eerste periode (1976–1983)

immers niet of nauwelijks. Dat betekende heel veel mededelingen, aankondigingen van bijeenkomsten, bijvoorbeeld de aankondiging van de jaarlijkse studiedag samen met de Vlaamse Vereniging Wiskundeleraars, boekbesprekingen, samenvattingen van interessante artikelen uit buitenlandse bladen, afgenomen examens in het voortgezet onderwijs inclusief antwoorden en een overzicht van de scores alsmede toelichtingen door mensen van het Cito, soms gingen zelfs wel twee nummers daarover, jaarredes van de voorzitter van de Vereniging, de Nederlandse en de Internationale Wiskundeolympiade met opgaven en antwoorden. Elk nummer bevatte de rubriek 'Recreatie' verzorgd door Piet Vredenduin. Die rubriek bestaat nog steeds, nu onder de naam 'Puzzel'. Een jaargang bestond toentertijd uit tien nummers. In figuur 1 een omslag van een nummer uit die periode. Het huidige *Euclides* telt per jaargang nog maar zeven nummers. Deze teruggang in omvang heeft zeker met de kosten te maken, maar ik vermoed ook omdat al die aankondigingen en vergelijkbare stukjes via internet verspreid worden.

Redactioneel beleid

Jaargang 54 opende met de volgende tekst waarin de redactie haar plannen voor die jaargang weergaf. Let ook op de gehanteerde spelling.

De redactie tracht voort te gaan op de ingeslagen weg, waarbij de artikelen met didactiek van de wiskunde en interessante wiskundige stukken elkaar afwisselen. Daarmee wil zij de gehele lezersgroep, wiskundele-

raren aan alle scholen van het voortgezet onderwijs, in de aandacht houden. Zij hoopt tevens dat er binnen deze groep collega's zullen zijn, die van hun didactische ervaringen neerslag willen doen of hun didactische overwegingen ter discussie willen stellen. De plannen voor deze jaargang hebben wat betreft de volgende punten reeds konkrete vorm aangenomen:

- er komt een speciaal examennummer*
- er komt een themanummer over rekenmachientjes (zie ook blz. 34).*

Verder is er een start gemaakt met het maken van een uitgebreide boekbespreking, op de manier zoals het afgelopen jaar Moderne Wiskunde voor het LBO besproken is. De neerslag hiervan is waarschijnlijk pas in de 55^{ste} jaargang te verwachten. Terugkijkend op het afgelopen jaar zijn er een paar opmerkingen te maken. De twee speciale nummers (het examennummer en de uitgebreide boekbespreking) waren experimenten. De redactie zou o.a. hierop graag commentaar van u willen ontvangen. Tenslotte vermelden we nog de goede samenwerking tussen de uitgever en de redactie.

Met vergelijkbare teksten openden de andere jaargangen. Ik vind nu wel de kwalificatie van een examennummer als een 'special' behoorlijk overdreven.

Het (Nederlandse) wiskundeonderwijs

Euclides was vanaf de oprichting een blad dat zich vooral richtte op de wiskundedocenten van wat toen gymnasium en hbs heette. Deze schoolsoorten hadden elk hun eigen vereniging die in 1939 gefuseerd zijn tot de huidige Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. *Euclides* werd vanaf de fusie overgedragen aan Wolters-Noordhoff. Overigens, *Euclides* was vanaf het begin het orgaan van beide verenigingen. Al onder mijn voorgangers was het streven om in elk nummer bijdragen op te nemen over een wiskundig onderwerp, een wiskunde-didactisch onderwerp dat het liefst (ook) relevant was voor het werk van de wiskundedocent in alle soorten van het volledige voortgezet onderwijs. Eén van de redenen van deze 'verschuiving' van gymnasium/hbs naar het hele voortgezet onderwijs was de reorganisatie van de inrichting het voortgezet onderwijs ten gevolge van de invoering in 1968 van de 'mammoetwet' – de veel gebruikte bijnaam van de wet op het voortgezet onderwijs.

Tegelijk met deze reorganisatie werd de inhoud van wiskunde voor het hele voortgezet onderwijs aangepast. Deze nieuwe wiskundeprogramma's waren in de tien jaar vóór 1968 voorbereid door de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde. In de wandelgangen werden de inhoud van die programma's ook wel 'moderne wiskunde' >

“Door een verschil van mening tussen de hoogleraren Freudenthal en Bruins over een onderwerp uit de oude Egyptische wiskunde was *Euclides* bijna een jaar niet verschenen.”

of ‘new math’ genoemd. Over die nieuwe programma’s zijn in ‘mijn’ periode heel veel bijdragen verschenen: achtergronden, didactiek, tips, reflecties naar aanleiding van opmerkelijke gebeurtenissen in de klas, maar soms ook zeer kritische geluiden. Omdat deze moderne wiskunde een wereldwijd verschijnsel was, werd ook vaak geschreven over hoe dat in andere landen ging, de uitgangspunten in die andere landen, de wijze waarop die uitgangspunten vorm kregen in de leerboeken. Vergelijkingen tussen Vlaanderen en Nederland kwamen vaak voor. Vredenduin heeft veel geschreven over de (wiskundige) achtergrond van onderdelen van de moderne wiskunde. Vaak besloot hij zo’n bijdrage met een didactisch georiënteerde alinea: ‘Maar zo moet u dit niet in de klas behandelen.’ En dan volgde hoe hij het zou doen.

Een bijzonder soort bijdragen waren de ‘Korrels’, korte, kritische stukjes, meestal naar aanleiding van iets uit een leerboek, een examenopgave, een reactie op een eerdere bijdrage.

In de loop van deze periode waren er met enige regelmaat bijdragen over de rekenmachine of de computer en wat het gebruik ervan voor het wiskundeonderwijs zou kunnen gaan betekenen.

Begin jaren tachtig kwamen de eerste bijdragen over een verandering van het toen vigerende programma voor vwo: hewet, dat is ‘Herverkaveling Wiskunde 1 en 2’.

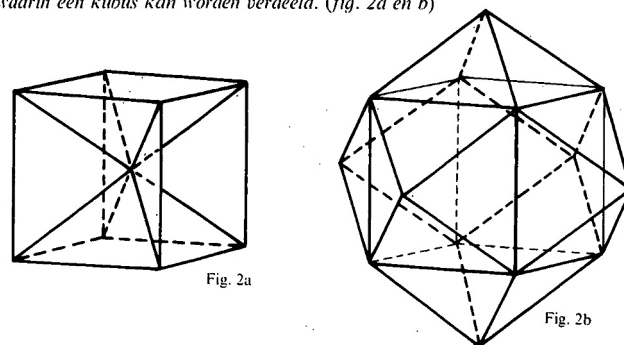
Auteurs

Op de website van *Euclides* vind je een overzicht van wie in mijn periode waarover schreef. De volgende twee bijdragen hebben de meeste indruk op mij gemaakt: die van ir. Y.C.G. Nottrot over het ruitentwaalfvlak en die van Jan Koen Annot en Evert-Jan Pol, net geslaagd voor hun eindexamen vwo, met een bijdrage over ‘Hoe kraak ik een databank?’ Beide bijdragen hebben voornamelijk een wiskundig karakter, maar waren zeker interessant voor wiskundedocenten. Deze twee bijzondere bijdragen zal ik hier tot besluit wat uitvoeriger beschrijven.

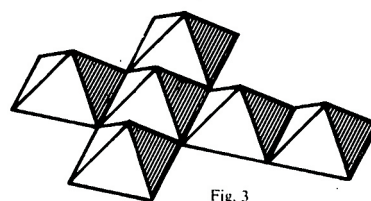
Het ruitentwaalfvlak, koningin der veelvlakken

De bijdrage ‘Het ruitentwaalfvlak, koningin der veelvlakken’, verscheen in twee opeenvolgende nummers. De auteur, Ir Y.C.G. Nottrot die al vaker in *Euclides* gepubliceerd had, beschrijft daarin hoe zo’n ruimtefiguur ‘gemaakt’ kan worden, bijvoorbeeld door een kubus in zes gelijke piramiden te verdelen en die ‘naar buiten geklapt’ tot dit ruitentwaalfvlak samen te stellen. Het ruitentwaalfvlak wordt zo begrensd door twaalf gelijke ruiten. Toch is het geen platonisch lichaam, want de hoekpunten ervan liggen niet op een bol. In figuur 2, ontleend aan Nottrots artikel, is dit ‘naar buiten klappen’ zichtbaar gemaakt. In het artikel worden ook andere manieren besproken om tot een ruitentwaalfvlak te komen. Verder worden er allerlei eigenschappen van genoemd en bewezen. Een mooi voorbeeld van die eigenschappen is dat de driedimensionale ruimte met ruitentwaalfvlakken volledig opgevuld kan worden, dus geen ruimte tussen de figuren openlaat.

2 Het r-12-vl ontstaat eveneens bij uitstulping van de zes gelijke piramiden, waarin een kubus kan worden verdeeld. (fig. 2a en b)



ad 2. Met een uitslag van de in zes piramiden gespleten kubus (fig. 3) vormt men bij omslaan naar boven de kubus, bij omslaan naar onder het r-12-vl.



figuur 2 Een mogelijke constructie van een ruitentwaalfvlak

Wiskundig is het een mooie bijdrage die redelijk goed te volgen is, maar die ook voor de klassenpraktijk van toen voor de leerlingen te moeilijk was of waarvoor in de klas onvoldoende tijd was. Toch heb ik gemeend deze bijdrage hier te noemen, en wel om het verhaal dat de redactie erbij plaatste. De bijdrage werd in eerste instantie geweigerd: te wiskundig en te lang. Op die weigering reageerde de auteur dat hij dit heel jammer vond, want hij dacht dat dit wel eens zijn zwanenzang zou kunnen zijn. Het werd in de voltallige redactievergadering besproken. De uitkomst daarvan was de bijdrage in tweeën te splitsen en in twee opeenvolgende nummers te publiceren. De redactionele toelichting besluit als volgt:

Niet daarom, maar om de inhoud van het artikel, dat door enkele redacteuren beschouwd werd als een voorbeeld van geïnspireerd wiskundig bezig zijn, werd besloten het artikel op te nemen. Het bericht van deze beslissing heeft de Heer Nottrot niet meer op tijd kunnen bereiken: begin oktober overleed hij op 82-jarige leeftijd. Het was dus inderdaad zijn zwanenzang.

Hoe kraak ik een databank?

Annot en Pol beschrijven in een uitvoerig artikel hun bijdragen aan de prijsvraag bij het 100-jarig bestaan van de Vrije Universiteit te Amsterdam. In de prijsvraag heeft de universiteit een databank met gegevens van 16000 personen, medewerkers en studenten. De volgende eigenschappen worden onderscheiden: student of personeelslid, mannelijk of vrouwelijk, alfa, bèta of gamma, voorzitter of secretaris, CvB, UR of OO, lidmaatschap van een politieke partij: CDA, PvdA, PSP, CPN, D66, SGP, GPV of PPR, gereformeerd, Ned. Hervormd of Rooms-Katholiek. Er zijn wat uitsluitingen, bijvoorbeeld dat een lid van het CvB geen voorzitter van de commissie OO (Onderwijs en Onderzoek) kan zijn.

Een voorbeeld van de data in de bank is: Jan N is student, mannelijk, alfa, UR, PSP, GPV, Gereformeerd. De enige soort vraag die aan de databank gesteld mag worden is *hoeveel* personen aan zekere criteria voldoen. Onder bepaalde restricties geeft de databank het antwoord. Een voorbeeld van zo'n restrictie is dat het aantal personen zo klein is dat hun privacy in het geding is. Er wordt daarom een ondergrens gesteld aan het aantal personen dat aan de vraag voldoet. In de prijsvraag wordt die ondergrens op 4000 gesteld en er zijn twee te beantwoorden vragen: (1) is de CvB-voorzitter lid van de PvdA en (2) hoeveel percent van de leden van de UR (universiteitsraad) zijn lid van de CPN?

Met heel bescheiden hulp van een docent, uittypen van de handgeschreven uitwerking, kwam de tekst van hun artikel

tot stand waarin ze mogelijke procedures beschreven om tot oplossingen te komen en of die inderdaad tot antwoorden op de vragen leiden. Zo blijkt onder andere dat bij een ondergrens van 8000 of minder het mogelijk is vast te stellen of de CvB-voorzitter lid van de PvdA is. Ook deze databank is dus heel moeilijk volmaakt te beveiligen.

De bijdrage van Annot en Pol was dan ook prijswinnend. Annot ging elektrotechniek in Delft studeren, Pol wiskunde met informatica in Utrecht.

Over de auteur

Bert Zwaneveld is emeritus hoogleraar van de Open Universiteit en was van 1976 tot 1983 hoofdredacteur van *Euclides*.

Tijdens het drukproces van deze *Euclides* bereikte ons het droevige bericht dat Bert Zwaneveld op 30 april jl overleden is. Zijn nabestaanden hebben toestemming gegeven om deze bijdrage postuum te publiceren. In *Euclides* 101-1 verschijnt een uitgebreid In Memoriam.

100 jaar aansluiting tussen voorbereidend en voortgezet technisch onderwijs

Deel 1 Honderd jaar geleden

In het kader van 100 jaar *Euclides* en 100 jaar NVvW duiken we in het verleden, op zoek naar gebeurtenissen en personen die nu nog relevant zijn, mede aan de hand van publicaties daarover in *Euclides*. In deze tweedelige serie duiken we in de geschiedenis van het technisch onderwijs.



'Vroeger was alles anders'

Vroeger was alles anders, maar was het wat betreft het technisch onderwijs ook beter? Rond 1925 gingen veel jongens naar een ambachtsschool, waar ze het begin van een vakopleiding kregen. Sommigen gingen door naar de Middelbare Technische School (mts) voor een middelbare vakopleiding. Als ze 'goed konden leren' en hun ouders voor een algemene opleiding wilden betalen, gingen ze naar de hbs. Die kon gezien worden als theoretische voorbereiding op een studie voor ingenieur aan de Technische Hogeschool (TH) in Delft.

Hoe was 100 jaar geleden wat betreft wiskunde de aansluiting van het voorbereidend onderwijs op het vervolgonderwijs (mts, TH)?

We bespreken in twee artikelen achtereenvolgens de situatie in 1925 en de huidige situatie. In deel 1 komen enkele aspecten van de aansluiting van hbs en TH op elkaar aan bod, evenals de situatie in het lager en middelbaar technisch onderwijs in de eerste decennia van de 20e eeuw. In deel 2 bekijken we de huidige aansluiting voor vwo met de technische universiteiten (de drie TU's, we laten Wageningen buiten beschouwing) en de aansluiting van havo en mbo met de technische hbo-opleidingen.

Van de hbs naar de Technische Hogeschool

Vanaf het begin, in 1863, was voorbereiding op hoger technisch onderwijs, de ingenieursopleidingen, een belangrijke doelstelling van de hbs. In dat kader was, in ieder geval volgens de wetgever, wiskunde vooral ondersteunend voor natuurkunde. Op de hbs besteedden docenten en leerlingen relatief veel tijd aan wiskunde en natuurkunde. De wiskundeprogramma's van de hbs en de Polytechnische School sloten rond 1870 prima op elkaar aan. Ingenieurs gaven wiskunde op de hbs en hoogleraren van de Polytechnische School waren soms leraar op een hbs geweest. Men kende elkaars systeem en werkwijze.^[1]

Langstudeerders

In 1905 kreeg de Polytechnische School promotierecht. Daardoor behoorde de school nu bij het hoger onderwijs (in plaats van middelbaar), op gelijke voet met de universiteiten. De naam werd Technische Hogeschool (TH), vanaf 1986 TU Delft. Op de TH bestond rond 1925 de propedeuse voornamelijk uit wiskundige vakken en natuurkunde, na de propedeuse was er keuze uit zes specialisaties. De officiële studieduur was vijf jaar, maar veel studenten deden langer tot veel langer over hun studie. In een toespraak op 8 januari 1923 besprak de rector-magnificus, prof. L.A. van Royen, de stand van zaken, urgente problemen, oorzaken en mogelijke oplossingen. Als belangrijke problemen noemde Van Royen het uitlopen van de studieduur, het gebrek aan algemene vorming ('beschaving') van studenten en het te grote aantal studenten, van 1100 in 1905 tot ca 2500 in 1920. Als oorzaken noemde Van Royen onder meer: te veel voor de ingenieursstudie ongeschikte studenten en te veel verdieping na de propedeuse, door de vakcollega's tijdens de specialisaties. Als oplossingen voor het te grote aantal studenten stelde hij voor: strengere selectie

op en na de hbs, eerdere en betere selectie op de TH en verhoging van het collegegeld. Om het uitlopen van de studieduur tegen te gaan, stelde hij invoering van een progressief oplopende eigen financiële bijdrage door studenten voor, een vorm van langstudeerboete. Van Royen benadrukte dat het vrij hoge percentage langstudeerders en afhakers op de TH niet aan het onderwijs in de propedeuse kon liggen, dat was uitstekend en moest vooral zo doorgaan.^[2] Daar was overigens op de TH niet iedereen het mee eens.

Oorzaken

Hoewel de eisen voor de propedeuse in 1924 verscherpt werden, leverde dat niet de gewenste resultaten op. De oorzaak werd dus gezocht bij de vooropleiding, voornamelijk de hbs. In 1940 gaf prof. H. Bremekamp een lezing tijdens een bijeenkomst van leraren wiskunde, gepubliceerd in *Euclides*.^[3] Daarin gaf hij ook een aantal voorbeelden van gebrek aan wiskundige basisvaardigheden bij eerstejaars studenten. De problemen werden volgens hoogleraren versterkt door de gebrekkige beheersing van de Nederlandse taal, zoals bleek tijdens de tentamens, die mondeling werden afgenomen. Overigens behoorden in die periode de eerstejaars studenten tot de beste leerlingen van de hbs, met gemiddeld een 7,5 tot 8 voor hun eindexamen wiskunde. Desondanks presteerden ze na een jaar dus slecht tijdens de propedeutische tentamens, vooral bij goniometrie en bij algebra. Bij algebra noemde Bremekamp onder meer als onvoldoende: werken met negatieve en gebroken exponenten, oplossen van stelsels niet-lineaire vergelijkingen en ontbinden in factoren.

In figuur 1 een opgave uit een eindexamen algebra van de hbs, eerste decennia van de 20^e eeuw, waarin een aantal van deze onderwerpen voorkomen. Er werd dus wel op geëxamineerd. Tijdens de discussie wezen de deelnemers op mogelijke andere oorzaken van de slechte prestaties bij de tentamens. Ze noemden onder meer het repetitorsysteem van de TH en het ook op de hbs opgemerkte transferprobleem: wat geleerd is bij het ene vak wordt niet herkend in een andere context. Maar zou het kunnen dat het wiskundeonderwijs van de hbs niet meer zo goed aansloot op het hoger technisch onderwijs als rond 1870? Was er veel veranderd? Net zoals het aantal studenten op de TH, was het aantal hbs-leerlingen behoorlijk gegroeid, van 7550 verdeeld over 48 scholen in 1905 tot 17660 verdeeld over 102 scholen in 1920. Het gemiddeld aantal leerlingen per school veranderde daardoor dus niet dramatisch, wel waren er meer leraren

4. Los x en y op uit de vergelijkingen:

$$\frac{a^{(x+y)^2}}{a^{12(2x+y)}} = a^{-11}$$

en

$$(x+y)^{\log \sqrt[4]{(x+y)}} = \sqrt[4]{10}$$

figuur 1 Opgave examen algebra hbs, eerste decennia 20^e eeuw

nodig. Er lijkt echter geen tekort aan wiskundeleraren te zijn geweest.

Het programma van de TH had zich verder ontwikkeld, maar de propedeuse bevatte in 1925–1926, net zoals in 1870, nog steeds beschrijvende meetkunde, analytische meetkunde, analyse en stekunde (algebra)^[4], zie figuur 2. De inhoud van die vakken was soms wel wat veranderd. Op de hbs was de inhoud van het examenprogramma rond 1925 niet zo heel verschillend van het programma in 1870. Rekenen/stekunde, trigonometrie, vlakke en ruimtemeetkunde en beschrijvende meetkunde waren onderdeel van het eindexamen.

De wijze van examineren was een klein beetje veranderd: tot 1920 werd het mondeling geëxamineerd door provinciale examencommissies, per provincie op één locatie. Voor de examenkandidaten dus onbekende examinatoren in een niet-vertrouwde omgeving. Vanaf 1920 was het mondeling een schoolexamen, dat op de eigen school werd afgenomen door de eigen leraren, met een vakexpert als gecommiteerde. Het lijkt niet waarschijnlijk dat deze verandering veel invloed zou hebben op de resultaten en de uitdrukkingsvaardigheid van studenten tijdens de mondelinge tentamens op de TH, een tot twee jaar later. Al tijdens de eerste decennia van de hbs uitten examinatoren en onderwijsinspecteurs zorgen over de slechte mondelinge uitdrukkingsvaardigheid van de leerlingen, dat was geen nieuw verschijnsel.

Vormende waarde

Wat betreft wiskunde op de hbs was de vormende waarde, het doen ontwikkelen van een specifieke manier van denken en redeneren, een steeds vaker genoemde doelstelling van wiskundeonderwijs. In 1926 culmineerde het belang dat gehecht werd aan die vormende waarde in de volgende uitspraak door de vernieuwingscommissie Beth-Dijksterhuis 'Hoofddoel van het wiskunde-onderwijs is het bijdragen tot geestelijke vorming en ontwikkeling;

>

Analyse en stekunde.		
JANSSEN VAN RAAY.	Determinanten. Beginselen der differentiaal- en integraal-rekening. B_1, T_1, M_1, IJ_1 .	3 u.
VAN OS. BREMEKAMP.	Determinanten. Complexe getallen. Hoogere machtsvergelijkingen. Differentieëren. Onbe- paald integreëren. Reeksen, maxima en mi- nima van functies van één veranderlijke, on- bepaalde vormen. C_1, E_1 W_1, S_1 .	3 u. 3 u.
VERSLUYS. VAN OS.	Onderzoek van vlakke krommen, omhullen- den. Bepaalde integralen. Oppervlakte van vlakke en gebogen figuren; booglengthen; in- houden. Bepaling van zwaartepunt, traagheids- momenten. Eerste kromming van ruimte- krommen. C_2, E_2 W_2, S_2 .	4 u. 4 u.
VERSLUYS. VAN VEEN.	Gewone differentiaalvergelijkingen. C_2, E_2 W_2, S_2 .	1 u. 1 u.
SCHOUTEN. BREMEKAMP.	Optelling en vermenigvuldiging van vectoren. Vectoren als functies van een skalar. C_1, E_1 W_1, S_1 .	1 u. n.K. 1 u. n.K.
SCHOUTEN.	Functies van een vector. E_2 .	1 u.
Analytische meetkunde.		
JANSSEN VAN RAAY.	Beknopte analytische meetkunde van het platte vlak. B_1, T_1, M_1, IJ_1 .	2 u.

figuur 2 TH programma 1925-1926

nevendoel het aanbrengen, van nuttige kennis.^[5]

Niet zo prettig voor de TH, die tenslotte ingenieurs wilde opleiden. Overigens veranderde het schriftelijk examen niet echt, dus die uitspraak had ook weer niet veel praktische gevolgen. Waarschijnlijk van meer invloed was vanaf 1917 de koppeling van het diploma hbs met het recht op toegang tot universitaire examens. In 1917 waren dat wiskunde en natuurwetenschappen, wat later gevolgd door meer studierichtingen. De TH was niet langer de belangrijkste vervolgopleiding voor de hbs.

We zien dat 100 jaar geleden de TH de problemen met langstudeerders en afhakers voor een deel weet aan manco's in de wiskundige kennis en basisvaardigheden van de eerstejaarsstudenten, de hbs-gediplomeerden. De wiskundeprogramma's en eindexamens waren niet zo veel veranderd, andere factoren, zoals het aantal leerlingen en studenten, opvattingen over de doelen van wiskundeonderwijs op de hbs, de vorm van de examens en de doorstroombmogelijkheden, veranderden wel. Op de TH was overigens ook meer aan de hand. Hoogleraren van enkele specialisaties klaagden in diezelfde periode dat er te veel puur theoretische wiskunde onderwezen werd in de propedeuse, ze wilden graag meer toepassingsgerichte wiskunde en minder wiskunde

vanwege de vormende waarde, zoals beschrijvende meetkunde wel gezien werd door hoogleraren wiskunde. Kortom, het wiskundeprogramma van de propedeuse zou zich meer moeten richten op wat de verschillende ingenieursopleidingen nodig hadden en minder op wiskunde om de wiskunde, of dat nu vanwege de vormende waarde was of om andere redenen.^[6] De vormende waarde van wiskunde werd door zowel de wiskundigen van de propedeuse op de TH als wiskundedocenten van de hbs als belangrijk gezien, maar wat daarmee nu precies bedoeld werd, is niet helemaal duidelijk en het streven naar de ontwikkeling daarvan had in ieder geval niet het gewenste resultaat. Het lijkt waarschijnlijk dat wiskundigen van de TH en van de hbs uit elkaar waren gegroeid, zoals ook in de beste relaties voorkomt.

De ambachtsschool en middelbaar technisch onderwijs

Er bestond rond 1925 nog een vorm van technisch onderwijs, het lager en middelbaar onderwijs. Daar was wiskunde 'gebruikswiskunde', van vormende waarde was geen sprake. Dit onderwijs begon in de 19^e eeuw met ambachtsscholen, die theoretische en praktische vorming boden, in tegenstelling tot leren op de werkplaats, 'bij een baas'. De eerste ambachtsscholen ontstonden op particulier initiatief, bekostigd door gemeenten en de privésector. Een voorbeeld is de 'Ambachtsschool van de Maatschappij van den werkenden stand', van 1861-1872 in Amsterdam, waar jongens een opleiding konden volgen tot smid, timmerman, schrijnwerker of beeldhouwer. Vanaf ca 1890 subsidieerde het Rijk ook Ambachtsscholen, maar liet de inhoud van het onderwijs over aan de initiatiefnemers. Jongens konden een opleiding volgen tot elektricien, bankwerker, huisschilder, meubelmaker, etc.

Divers aanbod

In 1919 introduceerde de wet op het Nijverheidsonderwijs lager en middelbaar beroepsonderwijs, de Ambachtsschool en de Middelbare Technische School (mts), met nog steeds grote vrijheid wat betreft de inrichting van het onderwijs. In 1920 waren er 69 Ambachtsscholen, met samen ongeveer 10310 leerlingen en 19 mts-sen met samen 3200 leerlingen. De afstemming van de Ambachtsschool met het bedrijfsleven was tamelijk slecht, tot na de Tweede Wereldoorlog. De aansluiting van de Ambachtsschool met de mts was eveneens matig. Als oplossing voor dat probleem kwam er hier en daar een tussenjaar. Dat tussenjaar ontwikkelde zich geleidelijk tot de Uitgebreide Technische School (uts).^[7] Rond 1925 was landelijk gezien het aanbod aan lager



figuur 3 De Practische Ambachtsschool Zwolle bestaat 80 jaar in 1962

en middelbaar technisch onderwijs dus heel divers, zowel wat betreft inhoud, als toelatingseisen, studieduur en inrichting van het onderwijs. Het was immers ontstaan uit en borduurde voort op lokale initiatieven en behoeften; landelijke sturing ontbrak bijna geheel.



figuur 4 Mozaïek in gebouw van Ambachtsschool Enschede, bouwjaar 1922

Clustering

Na de Tweede Wereldoorlog werden de namen Ambachtsschool, uts en mts gewijzigd in respectievelijk lts, mts en hts (Hogere Technische School), de diversiteit tussen de scholen van eenzelfde niveau bleef grotendeels bestaan. Met de ontwikkelingen in technologie breidde ook het aantal opleidingen zich gestaag uit. De vereiste vooropleiding voor de hts was mts, ulo-b of drie jaar hbs, vanaf de jaren '60 werd de eis een diploma hbs-b. Na de invoering van de Mammoetwet werd havo de formele vooropleidingseis voor de hts; studenten met een mts-diploma kregen een ten dele aangepast programma. Vanaf 1986 behoorden alle hbo-instellingen tot het hoger onderwijs, de voormalige hts werd hbo, sector Techniek. Begin jaren '80 vond er clustering plaats van de hbo-instellingen. Iets dergelijks gebeurde wat

later met de mbo-opleidingen, die ontstonden uit de middelbare technische scholen. Hebben de verschillen in ontstaansgeschiedenis van de technische universiteiten (in Delft, Eindhoven en Enschede) en de technische hbo-opleidingen consequenties voor de manier waarop er met aansluitingsproblemen van eerstejaars studenten wordt omgegaan? Dit is een onderwerp voor deel 2.

Noten

- [1] Krüger, J. (2014). *Actoren en actoren achter het wiskundecurriculum. Hfdst. IV.* <https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/301858>
- [2] Royen, L.A. van (1923). *Eenige beschouwingen over de toekomst van ons technisch hooger onderwijs.* <https://resolver.tudelft.nl/uuid:11f2b603-6208-4e5c-b424-e5645cbaea02>
- [3] Bremekamp, H. (1941). *Euclides* 17-4
- [4] NL-HaNA, TH Delft tot 1956, 3.12.08.01, inv.nr. 1110
- [5] *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor wiskunde*, 2 (4). Te vinden in het archief van *Euclides*.
- [6] Bijl, J. (1966). *Propaedeutisch wiskundeonderwijs en ingenieursopleiding.* <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid%3A223469bf-6050-48bc-b7ad-974330a0de09>
- [7] Boekholt, P.Th.F.M. & Booy, E.P. de (1987). *Geschiedenis van de school in Nederland.* https://www.dbnl.org/tekst/boek009gesc01_01/

Over de auteurs

Jenneke Krüger heeft gewerkt als docent natuurwetenschappen en wiskunde, in onder meer havo en vwo en als onderwijsontwikkelaar in diezelfde vakken. Ze houdt zich nu bezig met de geschiedenis van de verspreiding en het gebruik van wiskundige kennis en met interdisciplinair onderwijs.

E-mailadres: jenneke.kruger@gmail.com

Christiaan Boudri is werktuigbouwkundig ingenieur en eerstegraads wiskundedocent. Hij is werkzaam als docent werktuigbouwkunde aan de Academie Engineering & Automotive van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen. Hij is voorzitter van de NVvW-werkgroep mbo-hbo.

Email-adres: christiaan.boudri@han.nl.

Wiskunde ten tijde van de eerste edities van Euclides

In het kader van 100 jaar *Euclides* en 100 jaar NVvW duiken we in het verleden, op zoek naar gebeurtenissen en personen die nu nog relevant zijn, mede aan de hand van de publicaties daarover in *Euclides*. In dit artikel schetst Roel van Asselt 'de stand van de wiskunde' in de jaren dat *Euclides* het licht zag.



Euclides 1-1 (1924)

De allereerste editie van *Euclides* start met een bijdrage die een aanknopingspunt vormt voor dit artikel. Die editie begint met een heftige reactie van redactielid Jan Dijksterhuis op een brochure van Tatiana Ehrenfest-Afanassjeewa. Tatiana Ehrenfest is de vrouw van Paul Ehrenfest, beiden zijn zij briljant wiskundige en fysicus.



figuur 1 Tatiana en Paul Ehrenfest

Hun werkterrein is onder meer de kwantummechanica, de thermodynamica en de fasenleer. Tatiana is tevens actief op het gebied van de didactiek van de wiskunde. Jan Dijksterhuis is erudiet wiskundige en mede bekend vanwege zijn (latere) boek *De mechanisering van het wereldbeeld* (1950).



Figuur 2 Eduard J Dijksterhuis

De discussie gaat over de visie van Tatiana Ehrenfest waarin zij pleit voor een andere opzet van het meetkunde-onderwijs. Het gaat om de volgorde waarin leerlingen 1. ruimtelijk inzicht zouden moeten ontwikkelen, 2. zij daarbij een (meetkundige) intuïtie verwerven om de axiomatic en wiskundige stellingen te kunnen begrijpen en dan 3. hun logisch denkvermogen kunnen gaan ontwikkelen. Zij pleit ervoor om voorafgaand aan het onderwijs in de ruimte-metkunde een voortraject aan te bieden. Daarin kunnen de leerlingen eerst ruimtelijk inzicht ontwikkelen, waarmee een meetkundige intuïtie ontstaat die het logisch denken rond meetkundige vraagstukken stimuleert. Met die relatie tussen intuïtie en logisch denken is Dijksterhuis het eens; met het overige ziet hij erg veel didactische, pedagogische en praktische bezwaren: Dijksterhuis 'voelt zich menigmaal in zijn meest fundamentele mathematische overtuigingen aangetast'. Een nog zeer lezenswaardig artikel – van 26 pagina's – zeker voor onze wiskundendidactici. Opmerkelijk zijn de punten waar het in dat eerste artikel vooral over gaat: intuïtie, axiomatic en logica. Dat zijn in het begin van de vorige eeuw dé onderwerpen van diepgaande polemieken over de grondslagen van de wiskunde. Het artikel in *Euclides* lijkt wel een weerspiegeling in het wiskundeonderwijs van de stand van zaken in de wiskunde-revolutie uit die tijd. Over die revolutie gaat dit artikel.

De start van de twintigste eeuw

De negentiende eeuw heeft een hausse aan nieuwe wiskundeonderwerpen opgeleverd, zoals de functie- en tensoranalyse, differentiaalmeetkunde, nieuwe grond-

slagen van de rekenkunde, verzamelingenleer, groepentheorie, statistiek, omzetting van de formele logica naar de wiskunde et cetera. Het gevolg was wel een onoverzichtelijk aantal specialismen en versnippering in kennis en onderzoek in de wiskunde. Daarbij is er veel te doen over de inconsistentie van sommige nieuwe ideeën. Neem bijvoorbeeld de nieuwe opvattingen over rekenkunde rond de eeuwwisseling, gebaseerd op een strikt logisch fundament van verzamelingen en nieuwe uitgangspunten (axioma's). Omdat de zogenoemde naïeve verzamelingen-theorie niet consistent bleek – dat wil zeggen paradoxen, zie het kader, bevat – was het fundament onder die rekenmethode wankel.

Een van de paradoxen over verzamelingen ontstaat als we de verzameling A van alle verzamelingen V nemen die zich zelf niet als element bevatten.
Dus $A = \{V \mid V \notin V\}$. De beweringen $A \in A$ en $A \notin A$ leiden dan tot een tegenspraak, een paradox.

Hoe vreemd het ook mag klinken: deze licht chaotische toestand aan het begin van de twintigste eeuw heeft ook veel goeds voortgebracht. Het dwong wiskundigen zich te bezinnen op de grondslagen van de wiskunde, in het bijzonder die van de logica en de meetkunde, maar ook op begrippen als het concreet oneindige, het begrip tijd en ruimte en de relatie daarmee met wiskundige intuïtie.

Nieuw elan



figuur 3 David Hilbert

In 1900 wordt in Parijs een internationaal wiskundecongres gehouden. Op dat congres formuleert de Duitse wiskundige David Hilbert, destijds de meest invloedrijke wiskundige, 23 tot dan toe nog onopgeloste wiskunde-problemen. Hij beoogt daarmee de samenwerking en de samenhang in de versnip-

perde wiskundewereld te versterken. Op de site van de NVvW is de volledige lijst met een korte toelichting op de onderwerpen opgenomen. Van de 23 problemen zijn er nog drie niet opgelost.

Hilbert zelf is druk bezig om de wiskunde te formaliseren en te voorzien van een axiomatic die moet garanderen dat de wiskunde bewijsbaar consistent is en dus geen paradoxen bevat. Hij begint met de meetkunde en publiceert *Grundlagen der Geometrie* (1899):

het is het belangrijkste werk over axiomatische meetkunde sinds Euclides' *Elementen*. Het is evenwel vele malen abstracter dan de meetkunde van Euclides. Het idee dat het over punten, lijnen en vlakken gaat, verlies je snel uit het oog; de objecten in zijn meetkunde zijn producten van de axioma's. Een tweede belangrijke bijdrage aan de wiskunde van Hilbert (rond 1912) is zijn aanpak van integraalvergelijkingen binnen genormeerde, oneindig dimensionale vectorruimten, die in de kwantummechanica al snel toepasbaar blijken. De 'vectoren' in deze 'Hilbert ruimten' zijn reële of complexe functies.

Op een ander front, de logica, gebeurt iets vergelijkbaars om het zicht op grondslagen van de wiskunde aan te scherpen. Teneinde paradoxen in de verzamelingenleer te omzeilen, stellen Bertrand Russell en Alfred Whitehead een axiomatisch fundament op voor de verzamelingenleer, de getaltheorie en de rekenkunde: de *Principia Mathematica* (1913). Deze studie bouwt voort op de logica van Dedekind en de verzamelingenleer van Cantor; het verbindt de verzamelingenleer en getaltheorie met elkaar. Het cement tussen de stenen is een nieuwe formele, symbolische logica. De *Principia* is na de *Organon* van Aristoteles het belangwekkendste (denk) werk binnen de logica. De ideeën uit deze *Principia* zijn evenwel moeilijk toegankelijk, en slechts weinigen hebben het geheel doorgrond. Als voorbeeld in figuur 4 een pagina uit de *Principia* (pagina 361 !), waar de stelling wordt gegeven waarmee bewezen kan worden dat $1 + 1 = 2$.^[1]

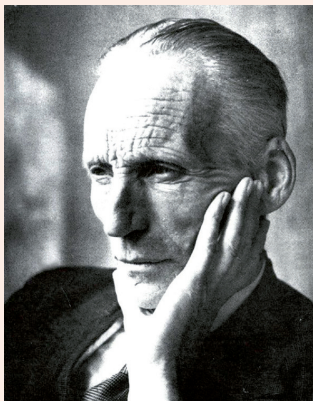
*54.43. $\vdash : \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$
Dem.
 $\vdash . *54.26 . \supset \vdash : \alpha = \iota'x . \beta = \iota'y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$
[*51.231] $\equiv . \iota'x \cap \iota'y = \Lambda .$
[*13.12] $\equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda$ (1)
 $\vdash . (1) . *11.11.35 . \supset$
 $\vdash : . (\exists x, y) . \alpha = \iota'x . \beta = \iota'y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda$ (2)
 $\vdash . (2) . *11.54 . *52.1 . \supset \vdash . \text{Prop}$
From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

figuur 4 pagina 361 uit *Principia Mathematica*

Nieuwe grondslagen

Het kan niet uitblijven: er komen wiskundigen die een poging wagen om de grondslagen van de gehele wiskunde te beschrijven, gericht op een consistent en volledig systeem. Dat probeert Jan Brouwer, een Nederlandse wiskundige, die in 1907 in Groningen promoveert op het proefschrift *Grondslagen der wiskunde*. Hij beschrijft een visie, die zich afzet tegen de eeuwenoude en actuele opvattingen over logica en bewijsvoering in de wiskunde. Zo zegt hij dat wiskunde niet gefundeerd mag zijn op

>



figuur 5 Luitzen E.J. Brouwer

abstracties en logische structuren, maar op constructieve en intuïtieve methoden. Een grondslag van zijn wiskunde is dat objecten en oneindige verzamelingen alleen mogen worden gebruikt als ze stap voor stap kunnen worden geconstrueerd. Ook meent hij dat uitspraken over oneindige verzamelingen niet altijd óf waar óf onwaar zijn: er zijn ook uitspraken over elementen en oneindige verzamelingen waar geen uitspraak over mogelijk is.^[2] Hij wijst de zogenoemde ‘wet van de uitgesloten derde’ dan ook af. Een gevolg is dat bewijzen uit het ongerijmde niet geldig zijn: alleen constructieve bewijzen zijn volgens Brouwer geldig. Neem als voorbeeld de stelling dat continue reële functies op een eindig en gesloten interval altijd op dat interval een maximum en een minimum waarde aannemen. Omdat die extreme waarden niet constructief kunnen worden berekend is deze stelling (van Weierstrass) volgens Brouwer niet geldig. Ruimte is voor hem geen gegeven dat we niet behoeven te beredeneren (zoals Kant beweert), maar is een constructie van de menselijke geest. Alleen de tijd is een a priori gegeven. Opmerkelijk dat Minkovski in 1908 ruimte en tijd al beschrijft als twee afhankelijke entiteiten; een relatie die zeven jaar later door Einstein in de algemene relativiteitstheorie wordt benoemd in één begrip: ruimte-tijd.^[3]

“De licht chaotische toestand aan het begin van de 20ste eeuw dwong wiskundigen zich te bezinnen op de grondslagen van de wiskunde.”

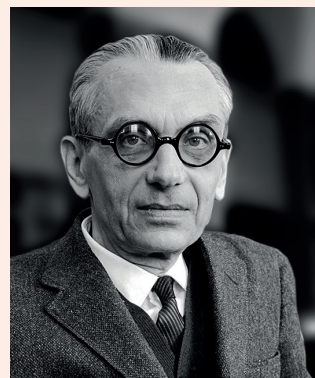
Driestromenland

Rond 1920 zijn er aldus drie ‘bloedgroepen’ in de wiskunde ontstaan: de *formalisten* (zoals onder meer Hilbert en Von Neumann), de *logistici* (Russell, Whitehead en Gödel) en de *intuitionisten* (Brouwer, Weyl en Wittgenstein).

De formalisten hechten zeer (en vrijwel uitsluitend) aan redeneringen en inhoudsontwikkeling binnen formele systemen van afspraken, axioma’s en een daaruit deductief op te bouwen stellingenrepertoire. De intuitionisten wijzen dat af omdat op deze wijze wiskundige stellingen ‘slaafs’

volgen uit de axioma’s waardoor de voorstelbaarheid en feeling met het onderwerp verloren kunnen gaan en niet meer aansluiten op onze intuïtie. De logistici zien de formele logica als enige basis van de wiskunde: Russell zegt zelf(s): ‘wiskunde is logica’. Ze hanteren wel ‘de wet van de uitgesloten derde’. Dit lijkt vanzelfsprekend, maar de intuitionisten zijn het daar juist mee oneens; er zijn immers beweringen waarover je geen uitspraak kunt doen, zie ook noot [2]. Einstein en Wittgenstein wezen het intuitionisme niet af. Dat doet Hilbert wel, en dat zorgt ervoor dat Brouwer in 1926 uit de redactie van het toonaangevend wiskundetijdschrift *Mathematische Annalen* wordt gezet. Gelet de discussie in *Euclides* 1-1(1924) zal Tatiana Ehrenfest sympathie hebben gehad voor een in haar ogen juiste afstemming van intuïtie, logica en formalisme; Jan Dijksterhuis zal zich zeker in het kamp van de formalisten thuis hebben gevoeld. Overigens klinkt ook binnen *Euclides* de discussie door over en binnen het hier genoemde driestromenland. Vanaf *Euclides* 10-3 (1933) wordt geschreven over de ‘methodenstrijd’ die in de wiskunde gaande is.

Wending in de zoektocht naar grondslagen



figuur 6 Kurt Gödel

Als Kurt Gödel in 1930 bewijst dat geen enkel robuust axiomatisch opgebouwd getalsysteem volledig en consistent is (d.w.z. dat er altijd onbewijsbare stellingen en paradoxen blijven bestaan) dan brengt dat de formalisten en de logistici in grote verlegenheid. Het intuitionisme daarentegen krijgt een nieuw elan. Vreemd genoeg is onvolledigheid in deze zin geen nieuw begrip. Een uitspraak van de Kretenzer Epidemus, 600 v.C. luidt: ‘Alle uitspraken van alle Kretenzers zijn altijd gelogen’. Ook die uitspraak is niet bewijsbaar.^[4] De vraag is of hiermee de wiskunde en alle andere wetenschappen hun bestaansrecht op basis van solide grondslagen verliezen. Daar ziet het niet naar uit. Het vraagt wel om voorzichtigheid in het formuleren van stellingen en afbakening van de domeinen waar de stellingen betrekking op hebben.

Toegepaste wiskunde

Een filosofie uit de Griekse oudheid stelt: ‘wiskunde is de taal van de kosmos’ en de uitspraak van Galilei: ‘de natuurkunde is geschreven in de taal van de wiskunde’,

worden rond 1920 sterk gevoeld. De kwantummechanica en de relativiteitstheorieën, maar ook andere fysische, economische en scheikundige terreinen uit die tijd, worden bijna uitsluitend beschreven en onderzocht in wiskundige termen. Sommigen wordt dat zelfs te veel. Paul Ehrenfest verzucht: 'Die afgrijselijke abstracties: die wiskundige plaag die alle krachten van de verbeelding uitwist'. Tal van factoren, waaronder deze ontwikkelingen binnen zijn vakgebieden maken het leven voor deze briljante natuurkundige ondraaglijk en uitzichtloos.

Van een aantal onderwerpen is aan het begin van de 20e eeuw wel de theoretische basis gelegd, maar bleek pas in de jaren '60 en later de toepassingsmogelijkheden, denk bijvoorbeeld aan de numerieke wiskunde, de chaostheorie en de fuzzy logica.^[5]

In het kort hierbij een keuze uit de toepasbaarheden van de wiskunde die rond de jaren '20 al wel actueel zijn.

Meetkundige topologie

In de jaren '20 komt de meetkundige topologie tot volle wasdom. In deze door L.E.J. Brouwer aangevoerde tak van de meetkunde gaat het om eigenschappen van ruimtelijke objecten die behouden blijven bij continue vervorming; de objecten dienen dan samenhangend te blijven en niet te worden verbroken. Limiet en continuïteit zijn leidend in dit vakgebied. Toepassingen vinden we in de materiaalkunde en in de meteorologie.

Tensorrekening

Het begrip tensor is in de 19e eeuw al bedacht (Lagrange, Cauchy en Riemann). Tensorverzamelingen zijn geordende verzamelingen met een structuur en (abstracte) elementen –de tensoren– met een vast aantal indices, genoteerd bijvoorbeeld als $(a_{i,j,k})$, waar het dan een derde-orde-tensor betreft.^[6] Een eeuw later ontwikkelt de Italiaan Gregorio Ricci een tensorrekening die in de jaren '20 een krachtig hulpmiddel binnen de algemene relativiteitstheorie van Albert Einstein wordt. Maar tevens binnen de kwantumveldentheorie, elektromagnetisme en kosmografie.

Discrete wiskunde

Het prille begin van wat wij nu discrete wiskunde noemen is een voortzetting van de getaltheorie en rekenkunde en een aanscherping van Cantors verzamelingenleer. Het ging onder meer om verdere axiomatisering met onder andere het 'axioma van keuze' (Zermelo-Fraenkel). Maar ook nieuwe onderwerpen dienen zich aan, zoals combinatoriek, grafentheorie, cryptologie en de eerste stellingen uit de speltheorie (door Von Neumann). Tegen 1930 wordt

het lineair programmeren toegepast (Simplex-methode). Het is een vinding van de Rus Kantarovitsj, die deze methode ontwikkelt om de economische vijf-jarenplannen in Rusland in de jaren '30 te analyseren en te plannen. Op de lijst van Hilbert uit 1900 stonden ook de laatste stelling van Fermat die daardoor weer veel aandacht krijgt. Ook het vermoeden van Goldberg komt weer in beeld. Dat vermoeden houdt in dat ieder even getal te schrijven is als de som van twee priemgetallen. Dit vermoeden is nog niet bevestigd of ontkracht.

Abstracte structuren en symmetrieën



Figuur 7 Emmy Noether

Abstracte begrippen en structuren, zoals groepen, ringen, lichamen, idealen, tensoren en vectorruimten vormen een fundament van veel natuurkundige toepassingen, met name in de klassieke mechanica, kwantummechanica en de relativiteitstheorie.

In alle bronnen wordt daarbij de naam van Emmy Noether genoemd, die een abstract-wiskundige basis legt voor de natuurwetenschappen in de dan komende eeuw. Haar stelling over onveranderlijke grootheden in symmetrische systemen is nog steeds een absolute topic in de fysica en astronomie. Het laat zien hoe wiskunde en de wetten van het universum met elkaar verbonden zijn. Zijn we weer terug bij de Griekse filosofen? In een necrologie na haar plotselinge dood in 1935 schrijft Albert Einstein: 'Fraulein Noether gold als een van de meest competente levende wiskundigen'.

Op de website vind je de noten, een literatuurlijst en de lijst van Hilbert.

 vakbladeuclides.nl/1007wiskunde100_notenliteratuur
vakbladeuclides.nl/1007wiskunde100_hilbert

Over de auteur

Roel van Asselt studeerde wiskunde aan de Universiteit Utrecht en was wiskundeleraar aan de hts in Hengelo. Hij was eindredacteur van een wiskundemethode voor het hoger onderwijs. Daarnaast was hij oprichter en directeur van het expertisecentrum LICA (Landelijk Informatie en expertiseCentrum Aansluiting hbo). Binnen Saxion Hogescholen werd hij lector Instroommanagement en Aansluiting mbo/vo-hbo. E-mailadres: r.v.asselt@ziggo.nl

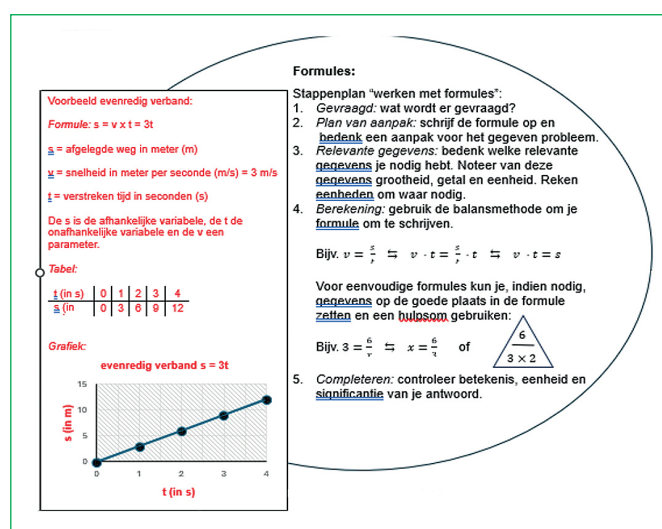
Vakoverstijgend wiskundeonderwijs op RSG Broklede

Jeroen Maes doet een postdoc vo-onderzoek naar vakoverstijgende basisvaardigheden wiskunde aan het Freudenthal Instituut onder begeleiding van Michiel Doorman. In dit artikel deelt hij de eerste resultaten.

Inleiding en onderzoeksvraag

Er valt in het onderwijs nog veel winst te boeken op het gebied van basisvaardigheden. De onderwijsraad laat weten dat de beheersing van taal en rekenen reden tot zorg geeft. Zowel het internationale onderzoek PISA als de peilingsonderzoeken van de inspectie laten zien dat de beoogde streefniveaus niet behaald worden.^[1] Eén van de manieren om basisvaardigheden te ontwikkelen en te onderhouden is door afstemming met andere vakken. Zo voorkom je dat het geïsoleerde trucjes worden, en kun je een betekenisvolle basis waarborgen. Docenten van andere vakken hebben vaak niet goed zicht op de manier waarop deze vaardigheden bij wiskunde aandacht krijgen. Daarnaast sluiten de onderwijscurricula niet op alle punten even goed op elkaar aan en heeft ieder vak zijn eigen tradities ontwikkeld, doordat er te weinig overleg plaatsvindt tussen de secties onderling. Al enige tijd wordt er nagedacht over vakoverstijgende aanpakken.^{[2], [3], [4], [5]} De NVvW steunt bijvoorbeeld initiatieven voor vakoverstijgend rekenen met conferenties waar wiskundeleraars met docenten van andere vakken aan een gemeenschappelijke aanpak werken.^[6] Geïnspireerd door deze werkwijzen, met posters voor in de klas en kaarten voor leerlingen, zijn we op RSG Broklede aan de slag gegaan met een vakoverstijgende aanpak. Hiertoe is een vakoverstijgende interventie ontwikkeld voor het verbeteren van vaardigheden omtrent rekenen en grafieken die meetgegevens weergeven (datagrafieken) bij de bètavakken en economie op RSG Broklede en naburige scholen.

Als doelgroep voor deze interventie is besloten jaarlaag havo 4 te nemen, omdat hier veel leerlingen met verschillende achtergronden (vmbo, havo, vwo) samenkomen. De verschillen in de beheersing van vakoverstijgende basisvaardigheden zijn hierdoor groot. De onderzoeksvraag



figuur 1 Detail van de poster over formules. Een vergroting van deze figuur staat op de site

is: *Wat is het effect van de vakoverstijgende aanpak in jaarlaag havo 4 op RSG Broklede op vaardigheden van leerlingen en betrokkenheid van de andere secties?*

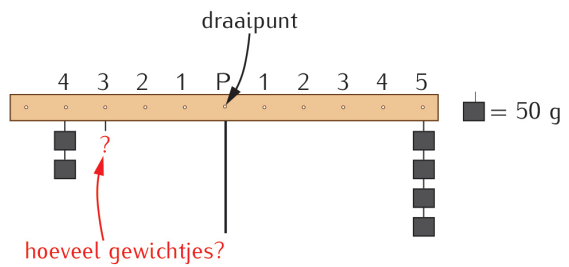
Methode

Binnen de jaarlaag havo 4 is uiteraard gekozen voor de leerlingen die ofwel wiskunde A en economie volgen, ofwel wiskunde B en de andere bètavakken volgen. Daarnaast is ervoor gekozen binnen deze doelgroep de interpretaties van de meetresultaten op een aantal focusleerlingen te baseren: drie leerlingen met wiskunde A en de overige bètavakken (leerlingen A, B en C) en drie leerlingen met wiskunde B en de overige bètavakken (leerlingen D, E en F). Leerlingen A en D zijn op basis van CITO-score, huidige eindcijfers, inschattingen van hun vakdocenten en/of achtergrond als rekenzwak beoordeeld, leerlingen C en F als rekensterk en leerlingen B en E zitten daar tussenin. Rekenproblemen kun je opdelen in de categorieën 'meten

en getallen', 'verhoudingen en procenten', 'formules', 'samengestelde/complexere opgaven' en 'tabellen en grafieken'. Samengestelde/complexere opgaven zijn opgaven waarin de overige categorieën gecombineerd worden en die meestal gepaard gaan met lange teksten. De categorie tabellen en grafieken zal in dit onderzoek niet worden meegenomen. In havo 4 zijn voor de betrokken vakken rekenlessen ontworpen en gegeven. Voor en na deze rekenlessen zijn bij de focusleerlingen interviews afgenomen. Na de rekenlessen en interviews is een reken-toets op 3F niveau afgenomen om vorderingen te meten. De resultaten van werkbladen en interviews zijn geanalyseerd door codering aan de hand van bovengenoemde categorieën. Verder is in schooljaar 2023 – 2024 op RSG Brokdele een werkgroep 'vakoverstijgend wiskundeonderwijs' opgericht die tot doel heeft het vakoverstijgend wiskundeonderwijs vorm te geven en te implementeren. In deze werkgroep nemen de onderzoeker (docent wiskunde, natuurkunde en NLT), een collega scheikunde en een collega wiskunde deel. Daarnaast is schoolbreed een aantal workshops gegeven die verspreiding van het vakoverstijgend wiskundeonderwijs tot doel hebben. De bijeenkomsten en workshops van de werkgroep hebben geleid tot een gezamenlijk rekenbeleid. Daarnaast zijn er rekenposters en rekenkaarten ontwikkeld waarop vakoverstijgende rekenaanpakken staan beschreven. Het ontwikkelproces van deze rekenkaarten en rekenposters wordt meegenomen in de beantwoording van de onderzoeksvraag. Aan het einde van de periode december 2023 t/m juli 2024 zijn met docenten van alle betrokken vaksecties interviews afgenomen. Ook de resultaten van de leerlinginterviews worden meegenomen. Hieronder een korte beschrijving van de interventie en de meetinstrumenten.

1 Rekenlessen

Bij scheikunde, natuurkunde, biologie en wiskunde B zijn rekenlessen gegeven waarbij in een parallel proces posters en rekenkaarten werden ontwikkeld. Bij wiskunde B heeft een dergelijke les niet plaats kunnen vinden. Tijdens de rekenlessen zijn voor ieder betrokken vak onderwerpen behandeld en verwerkt in werkbladen, waarin voor het vak relevante formules stap voor stap vanuit begrip worden geïntroduceerd. De lessen starten meestal met een experiment en worden idealiter afgesloten met een uitdagende eindopgave, waarin zonder aangereikte tussenstappen wordt gevraagd een soortgelijk probleem als op het werkblad op te lossen. In figuur 2 zie je een voorbeeldsituatie van het werkblad natuurkunde. In figuur 3 een voorbeeld van een eindopgave bij scheikunde.



figuur 2 Voorbeeldsituatie uit rekenles bij natuurkunde. Opdracht: geef aan wat op de plaats van het ? moet komen. Licht je antwoord toe.

Eindopgave

Een bepaald merk schoonmaakazijn bevat 75 gram azijnzuur, CH_3COOH , in 650ml. Hoe groot is de molariteit van het azijnzuur in deze schoonmaakazijn?

Bereken daartoe eerst, zoals op het werkblad, het aantal mol azijnzuur. Daarna kun je dit gebruiken om de molariteit van de oplossing uit te rekenen. Maak bij je berekeningen gebruik van soortgelijke verhoudingstabellen als op het werkblad.



figuur 3 Voorbeeld van een eindopgave bij scheikunde

2 Leerlinginterviews

Voor en na de rekenlessen zijn interviews afgenomen. Sleutelvraag vooraf was 'Welke soort rekenopgaven vinden jullie het moeilijkst?', om ervaren rekenproblemen te signaleren. De overige vragen hadden betrekking op het nut dat zij van tevoren zagen van een vakoverstijgende aanpak. Sleutelvraag achteraf was 'Vonden jullie deze rekenlessen bij scheikunde, natuurkunde, biologie en wiskunde leerzaam? Welke overeenkomsten zag je in deze lessen? En welke verschillen?' De overige vragen hadden betrekking op het nut van een gemeenschappelijke aanpak en de verwerking hiervan in de vormen van posters en kaarten.

3 Docentinterviews

Vragen hebben betrekking op het ervaren nut van de verschillende werkvormen (workshops, lessen, werkgroep bijeenkomsten), de kwaliteit van de communicatie en de verbetering in samenwerking tussen de betrokken vaksecties.

4 Rekentoets niveau 3F

De eindtoets is samengesteld uit opgaven uit officiële rekentoetsen op 3F niveau van het Cito. Alle eerdergenoemde categorieën basisvaardigheden, behalve formules, worden getoetst.

>

	Meten en getallen	Verhoudingen en procenten	Formules	Samengestelde/ complexe opgaven	Totaal aantal rekenproblemen
A	0	1	1	0	2
B	0	1	1	0	2
C	0	2	4	0	6
D	0	2	4	0	6
E	1	5	4	1	11
F	0	5	2	0	7
totaal	1	16	16	1	34

tabel 1

Resultaten

De bevindingen gerelateerd aan de verschillende categorieën worden hieronder per meetinstrument beschreven.

1 Rekenlessen

In tabel 1 zie je een overzicht van het aantal geconstateerde rekenproblemen bij alle betrokken vakken, uitgesplitst naar focusleerling en categorie. Bij wiskunde B waren enkel focusleerlingen E en F betrokken. Leerling D was afwezig bij de scheikunde rekenles. Leerlingen A en B waren afwezig bij de natuurkunde rekenles. Samengestelde/complexe opgaven worden in mindere mate getoetst, maar met name in eindopgaven.

2 Leerlinginterviews

Leerlingen deden de volgende uitspraken in het interview vooraf aan de rekenlessen.

- A: ...,lange teksten vind ik moeilijk en onduidelijk in de vraagstelling (*samengestelde opgaven*). De werkbladen begreep ik niet helemaal. Tabellen invullen lukte wel (*verhoudingen en procenten*), maar die formules toelichten niet. (*formules*)
- B: Ik heb dyslexie, dus taal vind ik lastig (*samengestelde opgaven*) Ook een goede formule kiezen is lastig en soms draai ik teller en noemer om (*formules*). De werkbladen gingen ook goed, vond alleen sommige woorden moeilijk, ook vanwege mijn taalstoornis (*samengestelde opgaven*).
- C: Dichtheid vind ik lastig. Het is ook weer lang geleden dat ik met percentages/verhoudingen heb gerekend (*verhoudingen en procenten*).
- D: Rendement bij natuurkunde is lastig (*verhoudingen en procenten*).
- E: Combineren van formules is lastig (*formules*). Zeker ook met teksten erbij (*samengestelde opgaven*).
- F: Lange verhalen vind ik lastig (*samengestelde opgaven*). Die (opgaven) met de tabellen begreep ik beter (*verhoudingen en procenten*), maar de tekst plus uitleg bij formulevragen was niet duidelijk. (*formules*)

Een uitspraak die leerling B, met rekenniveau tussen zwak en sterk in, deed tijdens het interview achteraf als reactie op de vraag 'Hoe vinden jullie op dit moment het rekenen bij de verschillende vakken gaan?' is: 'Ik merk echt dat mijn rekenen vooruit is gegaan. Het rekenen met populatiegrootte begrijp ik nu. Voorheen begreep ik de opdracht vaak niet, maar door het stappenplan bij natuurkunde weet ik nu hoe ik van A naar B moet.'

3 Rekentoets niveau 3F

In tabel 2 zie je een overzicht van het aantal geconstateerde rekenproblemen, uitgesplitst naar focusleerling en categorie (behalve de niet getoetste categorie formules) en de behaalde punten en eindcijfers voor de toets van de focusleerlingen.

4 Docentinterviews

Een uitspraak die een wiskundedocent en rekencoördinator van RSG Brokdele deed over de vraag hoe de communicatie in dit project is verlopen: 'Ik vond de communicatie prima. Door mijn rol in de school als rekencoördinator werd ik vaak snel betrokken bij deze

	MG	VP	SC	totaal aantal rekenproblemen	totaal aantal behaalde punten	eindcijfer
A	2	3	3	8	25	7,6
B	2	2	1	5	29	8,7
C	2	0	2	4	25	7,6
D	1	2	2	5	22	6,8
E	1	2	2	5	28,5	8,5
F	2	2	2	6	29,5	8,8
totaal	10	11	12	33		

tabel 2

communicatie. In verspreiding binnen de school/bewust-zijn creëren zijn veel stappen te zetten. Je moet dit actief houden (...). De vakoverstijgende communicatie is wel waardevol.' Een uitspraak die een scheikundedocent deed tijdens het interview over de kwaliteit en het nut van de workshops' is: 'In de bijeenkomsten zijn we met de vaardigheden bezig, maar ik ervaar nog geen lopende draad door het jaar heen. Output inbrengen in sectieoverleggen lijkt me goed. Intersectieoverleggen werkten in het verleden niet goed. Over de kwaliteit zei deze docent: 'Op de eindtoets zag ik een aantal leerlingen met de tabel bezig. De lessen moeten nog wel een vervolg krijgen (bijv. korte nabespreking).'

Conclusies

Kijkend naar tabellen 1, 2 en de uitspraken in de leerling-interviews valt op dat er geen relatie is te ontdekken tussen het type en het aantal geconstateerde rekenproblemen in de verschillende categorieën en het vooraf bepaalde rekenniveau van de focusleerlingen. Kijkend naar tabel 1 valt bijvoorbeeld op dat bij focusleerling E de meeste rekenproblemen worden geconstateerd, ook per categorie, terwijl focusleerling D als rekenzwakker is beoordeeld. Uit de leerlinguitspraken valt ook op te maken dat de ervaren rekenproblemen waar de focusleerlingen tegenaan lopen erg vergelijkbaar zijn, ongeacht het verschil in vooraf geconstateerd rekenniveau. Ook is hier geen wezenlijk verschil te zien tussen de focusleerlingen met wiskunde A en die met wiskunde B. Wel valt uit tabel 2 op dat de als rekensterk beoordeelde focusleerlingen grosso modo hogere eindcijfers halen dan de minder rekensterk beoordeelde focusleerlingen. Bij nadere bestudering van de eindtoetsen blijkt dit verschil met name veroorzaakt te worden door het aantal correct beantwoorde inzichtvragen. Uit tabellen 1, 2 en de leerlinguitspraken valt geen duidelijke ontwikkeling af te lezen in rekenproblematiek voor, tijdens en na de interventie van de rekenlessen. We concluderen dat de vakoverstijgende wiskundige vaardigheden niet waarneembaar verbeterd zijn in de periode december 2023 t/m juli 2024 en dat problemen met de vakoverstijgende vaardigheden door alle havo-4-leerlingen worden ervaren, ongeacht hun wiskundecijfers en rekenniveau. Dat een leerling aangafaat te hebben bij het stappenplan van natuurkunde, kan een indicatie zijn dat het rekenbeleid en de rekenposters positief hebben uitgekapt. Er is echter geen indicatie dat deze ervaren vooruitgang ook het gevolg is van de rekenlessen zelf. Een docent merkte op dat het vakoverstijgend wiskundeonderwijs in de beschreven vorm de vakoverstijgende communicatie ten goede is gekomen. Een docent

zag leerlingen bezig met verhoudingstabellen; dit kan een indicatie zijn dat het gebruik van de verhoudingstabel het rekenonderwijs heeft verbeterd.

Tijdens de interviews benadrukten twee docenten het belang van communicatie binnen de sectie en tussen de secties. Alleen rekenlessen als interventie blijken niet voldoende te zijn om het rekenonderwijs en de daarmee beoogde ontwikkeling van vakoverstijgende basisvaardigheden wiskunde te verbeteren. Wel lijkt het gebruik van de verhoudingstabel al te zijn geland bij een gedeelte van de havo-4-leerlingen en hun docenten voor het leren en toepassen van rekenen met verhoudingen en procenten.

Vervolg

Om de vakoverstijgende rekenvaardigheden structureel te verbeteren, kunnen de volgende vervolgstappen worden gezet:

- De ervaringen met de rekenlessen bespreken in het sectieoverleg.
- De frequentie van onderlinge lesbezoeken verhogen, zodat er meer afstemming is in didactiek.
- Een blijvende plaats geven van didactische experimenten en groepswork. Focusleerlingen gaven aan dat ze dit erg waardevol vonden. De didactiek van denkklassen ^[7] en modeldidactiek ^[8] sluiten hier goed op aan.
- In structureel overleg met collega's en leerlingen het rekenbeleid vormgeven en bijstellen, zodat het rekenbeleid verankerd raakt in de hele school.

De eerste resultaten tonen aan dat de gebruikte vakoverstijgende aanpak potentie heeft en dat er winst te behalen valt door met collega's van andere vakken wiskundige vaardigheden aan te pakken. Over het vervolg van dit proces op RSG Broklede kom ik terug in een volgend artikel.

Voor de noten en de vergroting van figuur 1 zie de site.



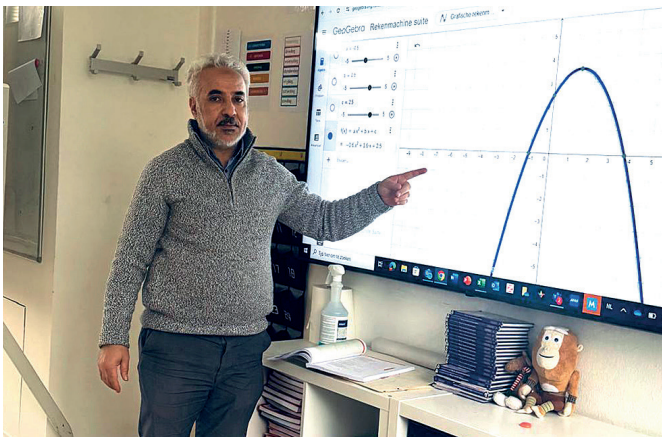
vakbladeeuclides.nl/1007vakoverstijgend_rekenen_noten
vakbladeeuclides.nl/1007vakoverstijgend_rekenen_figuur_1

Over de auteur

Jeroen Maes is docent wiskunde, natuurkunde en NLT op RSG Broklede te Breukelen. Hij heeft vanuit zijn wetenschappelijke achtergrond in de zuivere wiskunde en theoretische natuurkunde de overstap gemaakt naar het onderwijs en onderwijskundig onderzoek.
E-mailadres: j.maes@broklede.nl

Nieuwe mogelijkheden bieden aan kinderen die heel weinig kansen hebben

Op Ithaka-Internationale Schakelklassen in Utrecht geeft Amar (spreek uit: Oomar) al sinds 1999 wiskunde- en rekenles aan kinderen uit de hele wereld. Constantijn Tilanus sprak met deze vriendelijk glimlachende éminence grise over zijn ervaringen.



Amar Driouech

Kun je vertellen hoe je naar Nederland bent gekomen?

Als kind hoorde ik al verhalen over Nederland, in het Noord-Marokkaanse bergdorp waar ik opgroeide. Een oom van vaderskant woonde er al lang. Toen ik wis- en natuurkunde ging studeren in Marokko herinnerde ik me die verhalen over Nederland. Ik wist daardoor dat er goede universiteiten waren, en stuurde hem een brief (want je had toen natuurlijk nog geen email) om te vragen wat de mogelijkheden waren. Ik heb vervolgens de lerarenopleiding wiskunde aan de HvA in Amsterdam in twee jaar afgerond, en ben in Nederland gebleven.

Wat was je reden om voor het onderwijs te kiezen, en speciaal Ithaka?

(Hij lacht) Nou, eigenlijk was mijn droom om aan de TU Delft elektrotechniek te gaan studeren na mijn hbo. Op grond van de wis- en natuurkunde die ik in Marokko al had gedaan, was ik ook al aangenomen. Helaas bleek het met een jong gezin financieel niet haalbaar. Een neef van mij vroeg of het onderwijs niet iets voor mij zou zijn? Dat

ben ik toen gaan proberen, al was mijn Nederlands nog niet zo goed in het begin. Ik had eerst wat invalbaantjes hier en daar, en toen er toevallig een vacature op Ithaka kwam heb ik daar gesolliciteerd – de rest is geschiedenis.

Het klinkt alsof toeval en familie wel een grote rol gespeeld hebben?

(Lacht weer) Jazeker, zo zou je het wel kunnen stellen!

Hoe is het toen verdergegaan?

Eigenlijk ben ik pas daarna verliefd geworden op het vak van leraar: je wordt er niet rijk van, maar je krijgt rijkdom door de ervaringen met de kinderen.

Heeft jouw ervaring als migrant in Nederland een rol gespeeld?

Ja, goede opmerking – gevoelsmatig wéét ik gewoon meteen wat kinderen nodig hebben, op onderwijs- én op sociaal gebied, en daardoor krijg ik snel een band met ze. Dat vind ik heel waardevol. Ik heb geleerd dat netwerken de sleutel is om te overleven in een nieuw land – je moet de samenleving ingaan, contacten leggen, mensen opzoeken die je de taal kunnen leren. Ik heb dat zelf achteraf te weinig gedaan, omdat ik veilig in mijn kleine Marokkaanse gemeenschap bleef hangen. Maar nu kan ik die ervaring wel meegeven aan mijn leerlingen, die daardoor betere kansen krijgen. Ik zeg altijd tegen ze: ga op pad!

Vinden ze dat niet heel eng?

Jawel, maar dan zeg ik 'zet die eerste stap' – het is voor de ander óók spannend. Als jij het durft, kun je – hoe zeg je dat? – het ijs in gedachten breken. Maar je moet er wel op af stappen.

Wat heeft jou daarbij het meeste geholpen?

Ik heb heel veel steun gehad van mijn collega's bij de banen die ik heb gehad. Zeker op Ithaka voelde het als een grote verrijking dat de hele wereld naar je toekomt. Je biedt de leerlingen wat aan, en krijgt er véél voor terug. Ik heb ook veel moeten leren: tien jaar geleden zijn we bijvoorbeeld begonnen met huisbezoeken. Ik vond dat zó vreemd, dat je jezelf uitnodigt bij mensen die je niet kent! Maar het heeft me veel inzicht gegeven in waarom leerlingen doen zoals ze doen.

(nadenkend) Er was een hele stille jongen uit Leersum in mijn klas. Ik had geen last van hem, maar hij zei nooit iets, was superpassief, hield zich niet aan afspraken over huiswerk enzovoort. Toen ik bij hem thuis kwam, zag ik dat hij woonde in een kamertje van 2x3 m² met zijn vader en moeder. Toen ik hem vroeg waar zijn bed was, wees hij naar een lege plek op de grond. Omkleden deed hij in het trappenhuis, douchen ergens in een ander gebouw. Toen realiseerde ik me pas: deze jongen heeft allerlei basisbehoeften niet – hoe durf ik als docent dan zoveel van hem te eisen?

Wat hebben de leerlingen je nog meer geleerd?

Vooral in individuele gesprekken, maar ook in klassengesprekken, komen soms hele mooie (en droevige) dingen naar voren. Als je laat zien dat je werkelijk betrokken bent bij je leerlingen, je echt interesseert voor hun leven, kun je ze veel beter begeleiden op hun weg naar een volwassen bestaan in dit nieuwe land. Hun achtergrond is zo belangrijk! Zo was er acht jaar geleden een jongen uit Syrië, ook zo een die nergens interesse in leek te hebben, dacht ik. Altijd helemaal stil. Toevallig zat ik een keer in de trein na school tegenover hem, en we raakten in gesprek. Hij zei: 'In mijn land is het oorlog, en ik heb met eigen ogen gezien dat een soldaat van niks een advocaat, iemand die heel veel kennis heeft, heeft vernederd. Want die soldaat had macht, al wist hij niks. Waarom zou ik dan op school gaan leren?' Door dit gesprek begreep ik dat de stilte van die leerling eigenlijk een schreeuw om hulp was....

Hoe pak jij dat aan met klassengesprekken?

Tja, daar heb ik helaas geen recept voor – maar het helpt al als je in het begin heel algemeen vraagt: jongens hoe gaat het? Hoe was jullie nacht of weekend of vakantie? Gewoon open vragen stellen, en laten blijken dat je hun antwoorden ook serieus neemt. Zo win je hun vertrouwen, en komen ze langzamerhand aan leren toe – want daarvoor zijn ze natuurlijk op Ithaka.

Wat ben je in al die jaren dat je hier nu lesgeeft anders gaan doen? Waarin ben je zelf gegroeid?

Ik ben zelf natuurlijk veranderd... (denkt na). De kern is vooral dat ik me ervan bewust ben dat ik verantwoordelijkheid draag voor het welzijn van de leerlingen, dat ze gelukkig zijn. Voor deze doelgroep is warmte (die ze zo missen) het aller- allerbelangrijkste. Dat betekent dat je niet alleen vanuit je professionaliteit, maar ook vanuit je menszijn handelt. Dat ben ik steeds meer gaan doen – en het contact wordt daardoor vanzelf beter.

Welke uitdagingen zie je voor Ithaka-ISK in de toekomst?

(Licht weer) Niet alleen voor Ithaka, maar voor het hele onderwijs: het tempo van de buitenwereld is zo veranderd! Je moet concurreren met social media, ict enzovoort. Het onderwijs kan die snelheid niet bijbenen, dus je moet op een slimme manier die concurrentie uitschakelen. Daarnaast zie ik ook een toenemende discrepantie tussen vraag en aanbod: waar vragen de maatschappij en de economie om? En leveren wij dat als onderwijs wel? Ik denk dat het heel goed zou zijn als we meer projecten met het bedrijfsleven zouden doen – al is het zeker zo dat voor onze doelgroep het taalniveau een beslissende factor is, waar we veel aandacht aan blijven besteden.. We hadden hier bijvoorbeeld een paar Chinese kinderen, die waren echt supergoed in wiskunde, maar ze konden geen Nederlands leren in slechts twee jaar, waardoor ze toch strandden in het vervolgonderwijs. Wrang hè?

Wat zou je nog willen meegeven aan je collega's in het land?

Alle collega's van het team ISK wil ik waarderen voor het werk dat ze doen: nieuwe mogelijkheden bieden aan kinderen die heel weinig kansen hebben, zodat ze later kunnen zeggen: 'Ik heb mijn plek gevonden in dit land.' Dat is toch het mooiste dat je kunt doen?

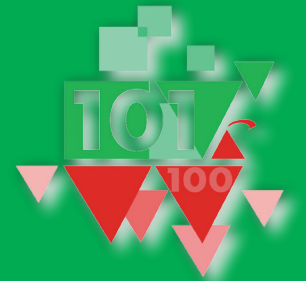
Over de interviewer en de geïnterviewde

Amar Driouech is docent wiskunde op Ithaka-ISK.

Constantijn Tilanus is eerstegraads docent wiskunde en NLT. Sinds kort is hij verbonden aan Ithaka-ISK in Utrecht. Hij is redacteur van *Euclides* en bestuurslid van de NvVvW. Daarnaast is hij actief als systemisch organisatieadviseur en leiderschapstrainer. E-mailadres: c.tilanus@nvww.nl

Verenigingsnieuws

Jaarvergadering/studiedag 2025



Eerste uitnodiging

Dit is de eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 1 november 2025.

Aanvang: 10.00 uur.

Sluiting: 16.15 uur met aansluitend een borrel tot 18.00 uur.

Plaats: Gilde Vakcollege Techniek in Gorinchem.

Thema van de studiedag: 101

Verenigingsjaar 101 van de NVvW, opgericht op 15 december 1925, staat voor de deur.

Zaterdag 1 november 2025 wordt de afsluiting van een jubileumjaar, dat we samen met jullie hebben gevierd. Tevens wordt het de aftrap naar de volgende 100 jaar, want we zullen tijdens deze studiedag vooruitkijken. 101 markeert niet alleen de afsluiting van het 100^{ste} verenigingsjaar van de NVvW, maar roept ook het binaire stelsel in gedachten. Tijdens deze studiedag verkennen we wiskunde in een digitale wereld. Een boeiende afsluiter van ons feestjaar, boordevol inspiratie voor de toekomst! Het zou leuk zijn als je een werkgroep wilt verzorgen waar heden of toekomst van het wiskundeonderwijs een rol in spelen. Dat kan op diverse manieren:

- 101 – is dat een binair getal of denken we tientallig?
- goochelen met getallen
- computationeel denken bij wiskunde
- quantumcomputing, wat is dat?
- digitale geletterdheid van nu en de toekomst
- datascience
- generatieve AI, zoals ChatGPT in de klas
- geschiedenis van talstelsels

We nodigen wiskundedocenten en andere betrokkenen bij ons wiskundeonderwijs uit om kennis en ervaringen te delen. We hopen dat we elkaar deze studiedag in het 101^{ste} verenigingsjaar weer kunnen ontmoeten en inspireren!

Heb je ideeën voor een workshop? Dan horen we die graag. Mail naar studiedag@nvww.nl

Sevinç Göksen, Filip Moons en Sharon Calor

(Concept) Agenda jaarvergadering

10.00–11.00 uur – Jaarvergadering

- 1 Opening door de voorzitter, Margot Rijnierse
- 2 Jaarrede van de voorzitter
- 3 Notulen van de jaarvergadering van 2 november 2024
- 4 Jaarverslagen 2024/2025.
 - 4.1 Jaarverslag van de NVvW
 - 4.2 Jaarverslag van *Euclides*
- 5 Financiën
 - 5.1 Jaarrekening en balans 2024/2025
 - 5.2 Verslag kascommissie
 - 5.3 Decharge van het bestuur
 - 5.4 Begroting en vaststelling contributie
 - 5.5 Benoeming nieuwe kascommissie
- 6 Bestuursverkiezing
- 7 Rondvraag
- 8 Sluiting van de jaarvergadering.

“We verkennen wiskunde in een digitale wereld.”

Programma studiedag

In het volgende nummer van *Euclides* en via de nieuwsbrief krijg je nadere informatie over wat je kunt verwachten op 1 november 2025. Voor meer praktische informatie over de organisatie kun je je wenden tot Heleen van der Ree (hoofdbureau@nvww.nl).

Dus reserveer in je agenda: NVvW-dag op zaterdag 1 november 2025.

Cijfers verplaatsen

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor leerlingen van havo en vwo. Alle leerlingen van klas 1 t/m 5 met belangstelling voor wiskunde kunnen meedoen aan de eerste ronde. Deze wordt altijd in januari gehouden op alle deelnemende scholen. De speelse maar uitdagende opgaven testen je creativiteit en wiskundig inzicht. Meer informatie is te vinden op www.wiskundeolympiade.nl.



Het getal 285714 heeft als bijzondere eigenschap dat het verplaatsen van het eerste (meeste linker) cijfer naar de laatste (meest rechter) positie een veelvoud van het getal geeft:

$$8571423 = 3 \cdot 285714.$$

Hetzelfde geldt als we twee cijfers van voren naar achteren verplaatsen:

$$571428 = 2 \cdot 285714.$$

- Bepaal alle getallen van zes cijfers die overgaan in hun drievoud door (alleen) het eerste cijfer naar de laatste positie te verplaatsen.
- Bepaal alle getallen van zes cijfers die overgaan in een veelvoud van zichzelf door (alleen) het eerste cijfer naar de laatste positie te verplaatsen.
- Bepaal alle getallen van zes cijfers die overgaan in een veelvoud van zichzelf door de eerste twee cijfers naar de laatste twee posities te verplaatsen.

Getallen beginnen niet met een 0, dus voor een getal n van zes cijfers geldt $10^5 \leq n < 10^6$.

Het getal n wordt als veelvoud van zichzelf beschouwd.

Inzenden oplossingen

Stuur je oplossing uiterlijk 17 juli naar euclides@wiskundeolympiade.nl. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een cadeaubon van € 20,-.

Terugblik puzzel nr. 5

De opgave van vorige keer ging over een driehoek met daarbij de vraag om de lengte van een zijde te berekenen. Door de inzenders zijn veel verschillende manieren gebruikt om dit antwoord te vinden. Met een paar meetkundige stellingen (bijvoorbeeld de bissectricestelling) kon er snel van de gegeven feiten naar het antwoord geredeneerd worden, maar ook zonder deze stellingen te kennen kon de lengte bepaald worden door gelijkvormigheid te gebruiken. Een kort of een lang bewijs, linksom of rechtsom, de meeste inzenders hebben het juiste antwoord gevonden: de zijde heeft lengte $\sqrt{6}$. Met dank aan oud-olympiadedeelnemers Aimée Jacobs en Kati Overbeeke voor het nakijken van de inzendingen.

De juiste oplossing (inclusief toelichting) is te vinden op de website, samen met de namen van de 14 inzenders die deze oplossing gevonden hadden. De cadeaubon van deze editie gaat naar Wilma van Donk.



vakbladeuclides.nl/1007olympiadepuzzel



NAZOMERCURSUS 2025

Het thema van de cursus is: reële toepassingen van complexe getallen. Complexe getallen zijn uitgevonden om het leven van wiskundigen gemakkelijker te maken. In de nazomercursus van 2025 zullen onderzoekers je op een toegankelijke wijze meenemen in reële toepassingen van de complexe getallen, die op school vaak zo mysterieus blijven.

Datum en plaats

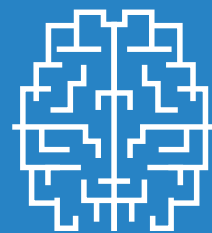
Vrijdag 19 en zaterdag 20 september in Antwerpen (Universiteit Antwerpen)

Vrijdag 26 en zaterdag 27 september in Amsterdam (CWI).

Meer informatie en opgave

www.platformwiskunde.nl/nazomercursus/

Uitwerking Puzzelen met het getal 100



Lieke de Rooij

Puzzelen met het getal 100 stond in *Euclides* 100-4. Hier volgt de uitwerking met een appendix op de site.

We bekijken alle permutaties van de getallen 1 tot en met n (n geheel en positief).

En noemen die: $A = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. En we hebben een blauwe rij $B = b_1, b_2, b_3, \dots, b_n = n, n-1, n-2, n-3, \dots, 1$ die we nooit permuteren.

Vervolgens berekenen we $a_i b_i$ voor $i=1$ tot en met n en tellen die op.

Het resultaat noem ik p . Dus: $p = \sum_{i=1}^n a_i b_i$

Als we A en B zien als vectoren in een n -dimensionale ruimte, dan is p het inproduct $A \cdot B$.

De kleinst mogelijk p noem ik K_n en de grootste G_n .

Voorbeeld met alle permutaties van A voor $n=3$:

$1, 2, 3$ geeft $p = 1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1 = 10$
met $p - K_3 = 0$.

$1, 3, 2$ geeft $p = 1 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times 1 = 11$
met $p - K_3 = 1$

$2, 1, 3$ geeft $p = 2 \times 3 + 1 \times 2 + 3 \times 1 = 11$
met $p - K_3 = 1$

$2, 3, 1$ geeft $p = 2 \times 3 + 3 \times 2 + 1 \times 1 = 13$
met $p - K_3 = 3$

$3, 1, 2$ geeft $p = 3 \times 3 + 1 \times 2 + 2 \times 1 = 13$
met $p - K_3 = 3$

$3, 2, 1$ geeft $p = 3 \times 3 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 14$
met $p - K_3 = 4$

We zien dus dat $K_3=10$ en $G_3=14$. Het 'somproduct' $p=12$ ontbreekt. En $p=11$ en $p=13$ komen elk twee keer voor. Bovendien is duidelijk dat K_3 wordt verkregen met $A = 1, 2, 3$ en G_3 met $A = 3, 2, 1$.

Stelling I: Er geldt voor elke n dat K_n ontstaat als A en B elkaars spiegelbeeld zijn.

En G_n ontstaat als $A = B$. Dit is o.a. te bewijzen met volledige inductie. [Zie bewijs IA en 1B in de appendix.](#)

Stelling II: Als we uit een oplopend rijtje A twee getallen i en $i+v$ verwisselen geldt: $p = K_n + v^2$. Zie voorbeeld voor $n=3$ met permutatie $A = 3, 2, 1$, (1 en 3 zijn verwisseld) met $v=2$: $p = 10 + 2^2$. Algemeen bewijs: [Zie bewijs II in de appendix](#)

Opgave 1: Bepaal de kleinste n waarbij het getal 100 voorkomt, dus $p = 100$.

We zoeken daartoe de kleinste n waarbij $K_n \leq 100 \leq G_n$. Oplossing is $n=7$.

$n=6$ geeft $K_6 = 1 \times 6 + 2 \times 5 + 3 \times 4 + 4 \times 3 + 5 \times 2 + 6 \times 1 = 56$ en

$G_6 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91$.

$n=7$ geeft $K_7 = 84$ en $G_7 = 140$ en $n=8$ geeft $K_8 > 100$. Het kan dus alleen lukken met $n=7$.

Nu nog een permutatie van A zoeken die $p=100$ oplevert.

Omdat $K_7 = 84$ moet daar nog $16 = 4^2$ bij en dat kan door twee getallen in A om te wisselen die $v=4$ uit elkaar liggen, dus bijvoorbeeld 1 en 5, of 2 en 6 of 3 en 7. Dus kies bijvoorbeeld $A = 5, 2, 3, 4, 1, 5, 7$. Maar het kan ook met $G_7 = 140$ en $40 = 2^2 + 6^2$. Verwissel dus 1 en 7 ($v=6$) uit A als $A = B$ en bijvoorbeeld 2 en 4 ($v=2$): $7, 4, 3, 2, 5, 6, 1$ geeft $p = G^7 - (2^2 + 6^2) = 100$.

En er blijken zelfs (met hulp van programmeren) 129 mogelijke permutaties te zijn om 100 te krijgen, maar bovenstaande zijn de makkelijkste om direct te vinden.

Opgave 2: Voor $n=100$, wat is het kleinste en wat is het grootste getal dat je kunt krijgen?

Dus bepaal K_{100} en G_{100} . Je kunt het natuurlijk uitrekenen met $K_{100} = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 99 + \dots + 100 \cdot 1$ en $G_{100} = \text{som kwadraten van 1 tot en met 100}$. Maar een formule is wel handiger.

Er geldt: Som kwadraten $= K_n = n(n+1)(n+2) / 6$. En $G_n = n(n+1)(2n+1) / 6$. [Zie bewijs III in de appendix.](#) Daar maken we gebruik van het verschil $K_{n+1} - K_n$.

Voor $n=100$ levert dit respectievelijk $K_n = 100 \times 101 \times 102 / 6 = 171700$ en $G_n = 100 \times 101 \times 201 / 6 = 338350$.

Opgave 3: Voor welke n is het mogelijk om een getal p te vinden dat precies 100 keer voorkomt?

Een mogelijkheid is om te kijken naar het getal $K_n + 1$, dat krijg je alleen door één keer twee op elkaar volgende getallen in de permutatie $A = 1, 2, 3, \dots, n$ te verwisselen: ($v=1$). Dat kan op $n-1$ manieren. Dus het lukt met $n=101$.

En dat getal is $K_{101} + 1 = 101 \times 102 \times 103 / 6 + 1 = 176852$ of $G_{101} - 1 = 101 \times 102 \times 203 / 6 - 1 = 348550$.

Symposium geschiedenis van de statistiek

De werkgroep Geschiedenis organiseert op zaterdag 27 september in Utrecht symposium nr. XXXI over geschiedenis van de statistiek in de 19^e en 20^e eeuw, met als titel *Ta-daaa, Data!*



Sprekers zijn Emma Mojet (Universiteit Utrecht) over de ontwikkeling van de statistiek als vakgebied in relatie tot andere vakgebieden, waarbij Adolphe Quetelet (1796-1874) een interessante rol speelde, en Marieke Gelderblom (Universiteit Utrecht) over de opkomst van de grafische methode in de statistiek in de tweede helft van de negentiende eeuw. Elske de Waal (Universiteit Utrecht) vertelt over haar onderzoek naar het IOWO-project *Kijk op Kans* uit de jaren zeventig van de vorige eeuw. We zijn ook bijzonder trots dat we een spreker van de University of Greenwich bereid hebben gevonden om te komen spreken. Noel-Ann Bradshaw zal een Engelstalige lezing geven over Florence Nightingale (1820-1910), hoe ze gegevens gebruikte, beheerde en uitlegde om levens te redden.

Meer informatie: <https://www.nvww.nl/werkgroepen/werkgroep-geschiedenis/ta-daaa-data>

De vraag is of er geen andere mogelijkheden zijn om honderd dezelfde getallen te krijgen. Mijn conclusie is dat $n = 101$ de enige oplossing is. Om dit aan te tonen kun je berekenen wat de frequenties zijn van $K_n + d$ voor kleine waarden van d voor verschillende waarden van n . En met hulp van programmeren bepalen voor welke n de frequenties van de andere waarden van d altijd groter zijn dan 100. Zie bewijs IV in de appendix.

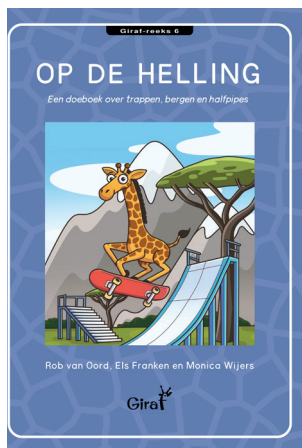
De appendix met de bewijzen is te vinden op:

 vakbladeuclides.nl/1007puzzel100

NIEUW

www.epsilon-uitgaven.nl

Giraf 6



Op de helling
Rob van Oord, Els Franken
en Monica Wijers



Zebra 75



Forensische Statistiek
Martine Jansen

 Epsilon Uitgaven

Giraf-reeks: € 10,00 per deel
Zebra-reeks: € 13,50 per deel
12% korting bij 5 delen of meer

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Hugo Duivesteijn, voorzitter
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck
Constantijn Tilanus

Inzenden bijdragen

Tom Goris,
Molenbochtplein 38, 5014 EJ Tilburg
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailing-services.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvww.nl

Voorzitter

Margot Rijnierse
E-mail: m.rijnierse@nvvw.nl

Secretaris

Els Franken
E-mail: e.franken@nvvw.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06 21 50 96 79 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW – Juridisch Centrum
E-mail: nvww@juridischcentrum.com
Vermeld bij je contact je lidnummer en telefoonnummer.

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt met ingang van 1 augustus 2023

- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 72,50
- leden, maar dan zonder Euclides: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 75,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen Euclides niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 90,00
Instituten en scholen: € 160,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal,
Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2025

UTRECHT

Ma
21/07
Vr
25/07

Summerschool Utrecht

Thema: Ai en wiskunde: innovatie in de klas
Organisatie: Hogeschool Utrecht

AMSTERDAM ANTWERPEN

Vr
19/09
Za
20/09

Nazomercursus 2025

Thema: Reële toepassingen van complexe getallen
Organisatie: Platform Wiskunde Nederland en
Platform Wiskunde Vlaanderen

EINDHOVEN

Vr
12/09

Finale wiskundeolympiade

Organisatie: Werkgroep Geschiedenis NVvW

UTRECHT

Za
27/09

Ta-daaa, Data!

Symposium over statistiek in de 19^e en 20^e eeuw
Organisatie: Werkgroep Geschiedenis NVvW

Za
01/11

NVvW jaarvergadering en studiedag

Vr
07/11

Prijsuitreiking wiskundeolympiade

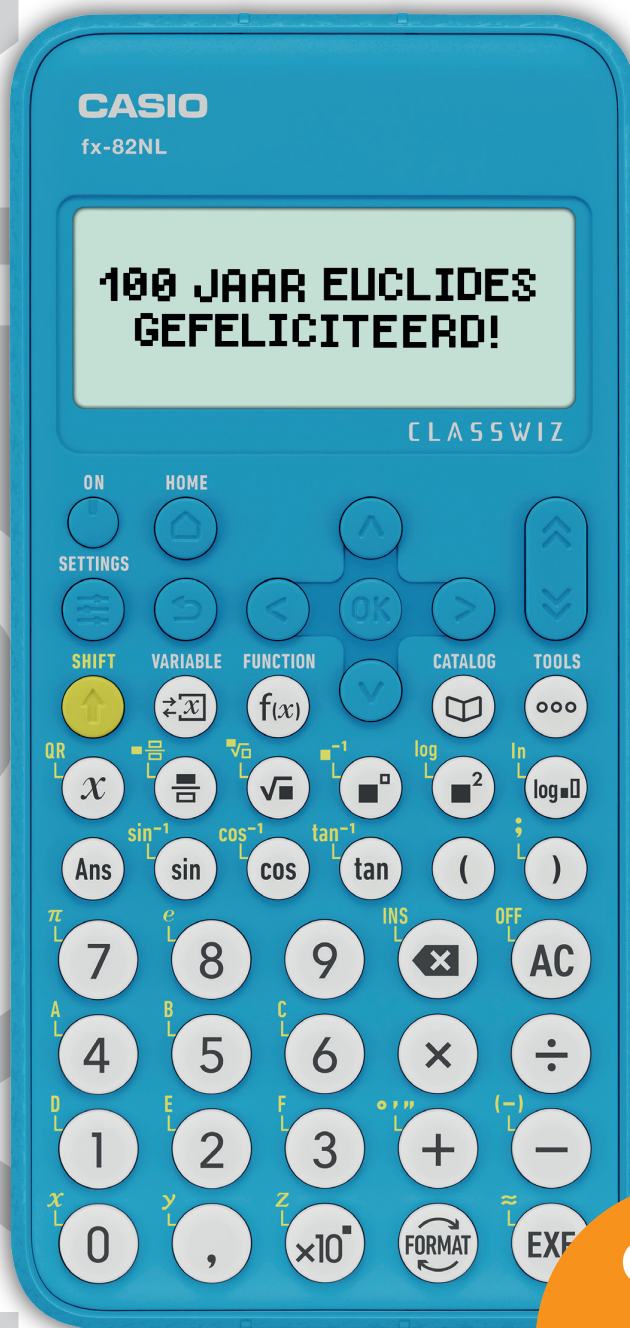
Organisatie: wiskundeolympiade

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook vakbladeuclides.nl

JAARGANG 101

Nr.	Verwachte verschijningsdatum	deadline
1	10 september 2025	10 juni 2025
2	22 oktober 2025	18 augustus 2025
3	10 december 2025	6 oktober 2025
4	28 januari 2026	10 november 2025
5	11 maart 2026	29 december 2025
6	29 april 2026	23 februari 2026
7	17 juni 2026	20 april 2026

CASIO



Opvolger van:
fx-82MS
fx-82EX

**Voor Nederlands
curriculum gemaakt**

Met deze advertentie vertellen we je **onze** **kijk** op de **kerndoelen** en hoe we jou als **docent** daarbij gaan **helpen**.

Natúúrlijk kerndoelenedities

bij Getal & Ruimte en Moderne Wiskunde

Evolutie, geen revolutie

Met de huidige 13e editie ben je als docent wiskunde al grotendeels 'kerndoelproof'.

De nieuwe kerndoelen zetten het vak wiskunde niet op z'n kop: het is een evolutie, geen revolutie. Toch verdienen leermiddelen het om vanuit de nieuwe wettelijke kaders ontwikkeld te worden. Alleen zo krijg je kwalitatief hoogwaardig lesmateriaal dat de verschuivende accenten in het vak goed tot hun recht laat komen.

Belangrijkste veranderingen in de nieuwe kerndoelen

- De nieuwe kerndoelen leggen meer nadruk op de samenhang tussen wiskundige concepten en wiskundige denk-werkwijzen.
- Ook worden contexten uit de werkelijkheid sterker benadrukt, zodat leerlingen beter leren hoe wiskunde en de wereld zich tot elkaar verhouden.
- Daarnaast is er meer aandacht voor rekenvaardigheid, statistisch redeneren en het kritisch beoordelen van data.

De achterliggende gedachte is dat leerlingen een toekomstbestendige mix van wiskundige kennis en vaardigheden opdoen. Zo kunnen ze wendbaar en kritisch meedoen in een snel veranderende samenleving.

Klaar voor het nieuwe schooljaar!

Daarom zorgen wij ervoor dat je vanaf schooljaar 2026/2027 kunt werken met een wiskundemethode die helemaal is geschreven vanuit de nieuwe kerndoelen. We hebben regelmatig contact met het SLO, zodat onze methodes Getal & Ruimte en Moderne Wiskunde naadloos aansluiten op de laatste voorschriften. Niet achteraf nieuwe doelen aan bestaand lesmateriaal koppelen. Wel gemak én zekerheid voor jou als wiskundedocent.

Tot die tijd kun je prima verder met de 13e editie. En stap je straks - met LIFO of met hardcover boeken - moeiteloos over naar de kerndoeleneditie.

Aernout Pilot
Uitgever Getal & Ruimte

Erik Jan de Vries
Uitgever Moderne Wiskunde