

# EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAAR

Taal, tabellen, woordformules en  
grafieken in vmbo-bb

'Gevoel krijgen voor kansen'

100 jaar wiskundeonderwijs aan meisjes

Hewet: de ontwikkeling van wiskunde A en B

NR. 6

JAARGANG 100 MEI 2025



Nederlandse Vereniging  
van Wiskundeleraren



# INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 100 NR 6



## IN DIT NUMMER

MIJN FATBIKE GAAT HARDER  
TAAL, TABELLEN, WOORDFORMULES EN  
GRAFIEKEN IN VMBO-BB  
Marleen Vos-Flobbe

4

HET VERSCHIL ZIEN...  
Gerard Koolstra

8

IN MEMORIAM JAN DE LANGE

11

'GEVOEL KRIJGEN VOOR  
KANSEN'  
INTERVIEW MET  
VALENTIJN DE MAREZ OYENS  
Liesbeth Coffeng

12



WITJE: AFSPREKEN

15

HALVE HOEK EN EEN LEERLING  
DIE VAN AANPAKKEN WIL WETEN  
Jacques Jansen

16

WIE B ZEI, MOEST OOK  
A ZEGGEN  
Martin Kindt

20



WELK WISKUNDEONDERWIJS AAN MEISJES?  
MEER DAN 100 JAAR EEN VRAAG  
Jenneke Krüger  
Werkgroep Vrouwen & Wiskunde

25

DRIE VRAGEN AAN ...  
Martinus van Hoorn

30



EEN PRAKTISCH-HISTORISCHE BLIK  
OP WISKUNDE  
DEEL 4 DUURZAME INNOVATIES  
Roel van Asselt

32

ROEST RUST (NIET)  
SQUIRCLE  
Ab van der Roest

37

WIS EN WAARACHTIG

38



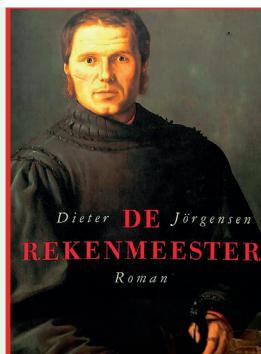
Afbeelding voorkant: Wenteltrap in Ulm

Foto: Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING  
VAN WISKUNDELERAREN

BOEKBESPREKING  
DE REKENMEESTER  
Simon van der Salm

40



RESULTAAT  
VAN DE LEDENENQUÊTE NVVW  
Tanja Groenendaal

44

SERVICEPAGINA

46

## Rectificatie

In het artikel De Heks van Agnesi van Paul van de Veen is een storende conversiefout opgetreden in de figuur. Daar staat voor de  $y$ -coördinaat van de baan:  $y_P(t) = 1 - \cos(t)$ , maar dat had moeten zijn:  $y_P(t) = 1 - \cos(2t)$ .

Excuses namens de beeldredacteur en dank aan alle attente lezers die ons (en Paul) daarop wezen.



### Kort vooraf

Soms kom je tijdens een stedentrip verrassend veel wiskunde tegen. In Ulm bijvoorbeeld, stad aan de Donau, bekend van de Münster met zijn 162,5 meter hoogste kerktoren ter wereld.

In de kerk kom je Pythagoras tegen, uit eikenhout gesneden als onderdeel van een koorbank uit 1470.

Als je in de stad bent, kan het je niet ontgaan dat het stadssymbool de huismus is en dat roept natuurlijk meteen de vraag op: waarom? Wel, dat heeft een enigszins schokkende wiskundige achtergrond. Ooit moet het bijzonder slecht gesteld zijn met de elementaire meetkundige vaardigheden van de Ulmers. Bij de bouw van de Münster had men problemen om lange houten balken door de smalle stadspoort te krijgen. Volgens de overlevering heeft een mus toen met een takje in zijn snavel laten zien dat het slimmer was om die balken in de lengte dan overdwars door die poort te laten gaan... Ulm heeft een aantal beroemde inwoners gehad. Zoals Albrecht Ludwig Berblinger, uitvinder van beroep. Op 31 mei 1811 wilde hij met zijn uitvinding, een soort hangglider, de Donau overvliegen, maar als je de replica van het toestel ziet dan trek je de natuurkundige vaardigheden van de maker ernstig in twijfel. En helaas, Berblingers vlucht was voornamelijk verticaal.

Op de plek van de sprong staat nu wel een toren die je op de voorkant van deze *Euclides* ziet.

Hij is 20 m hoog, staat  $10^\circ$  uit het lood en de treden hebben de vorm en kleur van die hangglider. De toren is zo geconstrueerd dat hij heen en weer gaat slingeren naarmate je hoger komt om het gevoel te simuleren dat Berblinger vooraf aan zijn vlucht ook moet hebben gehad. Dat is gelukt...

Was het dan zo armoedig gesteld met de wiskundige en natuurkundige vaardigheden van de Ulmers? Valt wel mee. Ulm kende natuurlijk een heel bijzondere pi-dag in 1879. Albert Einstein werd er toen geboren.

Tom Goris



# Mijn fatbike gaat harder

## Taal, tabellen, woordformules en grafieken in vmbo-bb

De bovenbouw van het vmbo krijgt te maken met nieuwe examenprogramma's voor wiskunde. Ook zijn er nieuwe kerndoelen voor de onderbouw. In dit artikel beschrijf ik een les voor vmbo-bb die is ontwikkeld met het oog op deze nieuwe examenprogramma's en kerndoelen. De les is ook hier<sup>[1]</sup> te vinden.

### Inleiding

Voor de onderbouw van de middelbare school zijn er nieuwe kerndoelen rekenen en wiskunde ontwikkeld. De nieuwe kerndoelen hebben op dit moment de status van definitieve conceptkerndoelen die nog wettelijk verankerd moeten worden. Kerndoelen gelden als de wettelijke opdracht voor scholen en bestaan voor rekenen/wiskunde uit aanbodsdoelen (wat doet de school?) en beheersingsdoelen (wat kan de leerling?). De kerndoelen bestaan uit een domein met wiskundige concepten, een domein met wiskundige denk-werkwijzen en een domein Wiskunde en de wereld. De wiskundige denk-werkwijzen zijn wiskundig probleemoplossen, wiskundig modelleren, aantonen, gebruiken en beschrijven van algoritmes, gebruiken van wiskundetaal en wiskundige representaties en gebruiken van wiskundige instrumenten.

### Nieuwe vmbo-programma's en het domein VVV

In het kader van mijn werk bij het Expertisepunt Rekenen-Wiskunde heb ik een les ontwikkeld die zich richt op het leggen van dwarsverbanden tussen woordformules, grafieken, tabellen en taal binnen het domein Verbanden, Verschijningsvormen en Vergelijkingen (VVV). De ontwikkelde les is geschreven voor een derde klas van de basisberoepsgerichte leerweg van het vmbo en is uitgeprobeerd in twee derde klassen van dit niveau. In dit artikel beschrijf ik de belangrijkste overwegingen en ervaringen. In de nieuwe examenprogramma's voor vmbo<sup>[2]</sup> zitten vijf vakinhoudelijke domeinen: Verhoudingen en procenten, Grootheden en eenheden, Kwantitatieve informatie en kansen, Verbanden, verschijningsvormen en vergelijkingen en Twee- en driedimensionale ruimte. De wiskundige denk-werkwijzen worden per domein in subdomeinen toegelicht. Binnen het domein VVV gaat dit bij de basisberoepsgerichte leerweg om de subdomeinen E1, E3, E4, E5 en E6, zie figuur 1.

#### Domein:

E Verbanden, verschijningsvormen en vergelijkingen

#### Subdomein:

E1 Wiskundig probleemoplossen met VVV (CE)

E2 Rekenwiskundige handelingen met VVV (CE)

E3 Representeren en vaktaal met VVV (CE)

E4 Abstraheren met VVV (CE)

E5 Wiskundig modelleren met VVV (CE)

E6 Wiskundig redeneren met VVV (SE)

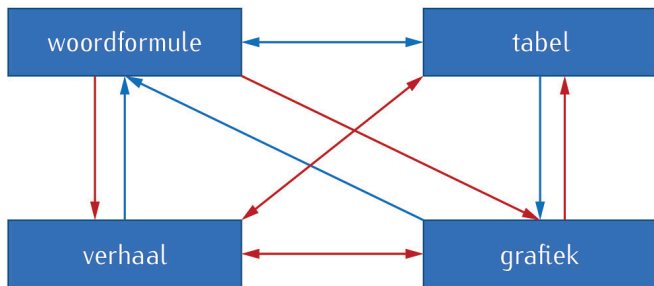
figuur 1

De kerndoelen en eindtermen geven samen een beeld van waar leerlingen straks aan moeten voldoen; ze moeten niet alleen bepaalde vaardigheden hebben, maar ook begrijpen wat ze doen, hier flexibel mee om kunnen gaan en woorden kunnen geven aan wat ze doen.

Binnen het huidige domein Verbanden leggen de drie papieren methodes voor vmbo-basisberoepsgericht (*Moderne Wiskunde*, *Getal & Ruimte* en *KERN*) in het eerste leerjaar verschillende accenten, zoals globale grafieken, begripsvorming rondom het concept *verband* of de combinatie van tabel, grafiek en woordformule. Vanaf leerjaar 2 focussen de methodes overwegend op een selectieve set vaardigheden die in het huidige examen regelmatig voorkomt. Dit zijn: het aflezen van een grafiek, het tekenen van een grafiek bij een ingevulde tabel, het invullen van een tabel bij een woordformule, het opstellen van een woordformule bij een verhaal en het opstellen van een woordformule bij een tabel en een grafiek. Het opstellen van een woordformule is binnen de basisberoepsgerichte leerweg beperkt tot lineaire verbanden.

Schematisch kan deze set vaardigheden worden weergegeven met de blauwe pijlen in figuur 2. Kijkend naar





figuur 2

alleen de blauwe pijlen ontbreken enkele vaardigheden. Dit zijn: het invullen van een tabel bij een getekende grafiek, het tekenen van een grafiek bij een woordformule, het (terug)vertalen van een woordformule naar een verhaal en het vertalen van een tabel naar een verhaal en omgekeerd. Deze vaardigheden zijn in het schema met rode pijlen aangegeven.

Het is de vraag of met de vaardigheden van de blauwe pijlen voldoende wordt voldaan aan de nieuwe eindtermen. Leren leerlingen om wiskunde te herkennen, te redeneren over wiskunde en dingen te vertalen naar wiskundetaal, dus leren zij om écht grip te krijgen op verbanden, of krijgen ze alleen een specifieke set vaardigheden mee die zij dan hopelijk op het juiste moment toepassen?

Volgens Swan <sup>[3]</sup> helpt het sorteren van meerdere representaties bij het stimuleren van conceptueel begrip, dat nodig is bij de genoemde wiskundige denk-werkwijzen. Hiervoor is in de Nederlandse context ook *Een leuke les* <sup>[4]</sup> ontwikkeld, waarin leerlingen 'kwartetten' met tabellen en grafieken en ook incomplete sets kaarten zelf aanvullen. Voor de basisberoepsgerichte leerweg

ben ik uitgegaan van een eenvoudige vorm van matching, namelijk één juiste optie kiezen, gevolgd door het zelf vertalen van de ene wiskundige representatie naar de andere.

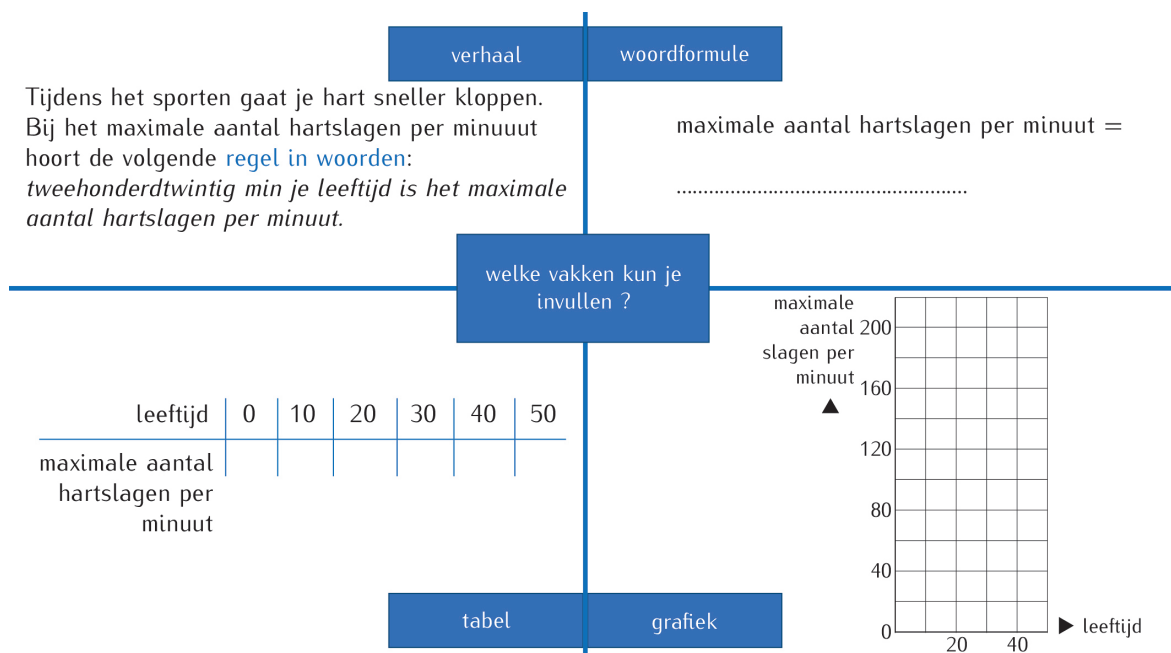
## Ontwikkelde les

De ontwikkelde les draait om de rode pijlen uit het schema van figuur 2. In de start van de les kiezen leerlingen een grafiek bij een verhaal, een grafiek bij een tabel en een woordformule bij een verhaal. Klassikaal wordt besproken waarom leerlingen een bepaalde keuze hebben gemaakt.

Daarna krijgen ze een viertal sheets, zie figuur 3, die zijn verdeeld in vier vakken: verhaal / woordformule / tabel / grafiek. Op elke sheet is één vak volledig ingevuld. Leerlingen worden uitgedaagd om zoveel mogelijk andere vakken (verder) in te vullen. Deze ingevulde sheets worden nabesproken, waarbij leerlingen worden gestimuleerd woorden te geven aan hun denkproces. Bij het slot van de les wordt leerlingen gevraagd in hoeverre zij de vertaalslag kunnen maken van grafiek naar verhaal, van grafiek naar tabel en van verhaal naar woordformule.

## In de praktijk

De gastlessen vinden plaats op twee scholen in de regio Utrecht. Ik vertel de leerlingen dat er nieuwe eindexamens komen voor vmbo-bb en dat er daarom nieuwe les-materialen worden gemaakt. Zij zijn uitgekozen om te testen of die materialen niet te moeilijk of te makkelijk zijn! Zij worden dus niet beoordeeld, maar zij beoordelen zelf de les. Ik toon een drietal opgaven waarbij leerlingen een grafiek of woordformule moeten kiezen.



figuur 3 <sup>[5]</sup>

Mijn verwachting is dat kiezen een opstapje is naar zelf formuleren. Wel wil ik leerlingen laten verwoorden waarom zij hun antwoord hebben gekozen. Leerlingen doen dit bijvoorbeeld als volgt:

'Je ziet dat de grafiek stijgt, dan gelijk blijft en daarna daalt, en dat is ook in het verhaal.'

'In de tabel wordt het steeds minder dus de grafiek moet ook omlaag gaan.'

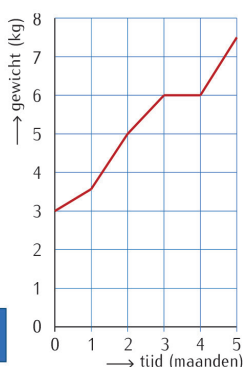
Ik laat de vier pagina's zien die de leerlingen verder gaan invullen. Ik licht toe wat hun opdracht is; zoveel mogelijk andere vakken invullen. Daarna gaan de leerlingen alleen, in een tweetal of in een drietal aan de slag. Hierna bespreken we de pagina's klassikaal.

De eerste pagina, figuur 3, vullen leerlingen vlot in. Om van deze tekst een woordformule te maken vinden ze vrijwel allemaal lastig, zie figuur 4. Dat verbaast mij, want de stap van *tweehonderdwtintig min je leeftijd* naar *220 - je leeftijd* lijkt mij erg klein. Een paar leerlingen berekenen hun eigen maximale hartslag. De tabel weten ze vanuit het verhaal gemakkelijk in te vullen en ook de grafiek geeft weinig problemen.

maximale aantal hartslagen per minuut =  
 $220 - (\text{je leeftijd})$

maximale aantal hartslagen per minuut =  
 $205$

figuur 4



grafiek

figuur 5 [6]

Bij de grafiek van de tweede pagina, figuur 5, lukt het de meeste leerlingen om de tabel in te vullen. Wel vullen sommige leerlingen onder de 0 een 0 in. 'Dat hoort toch zo?' Ze kunnen niet direct verwoorden waarom een gewicht van 0 kg niet logisch is, daar hebben ze hulp bij nodig. Bij het verzinnen van een verhaal bij een verband weten zij niet zo goed wat zij moeten doen. Ik help ze op weg. 'Wat zie je?' 'Nou gewoon hij wordt zwaarder. En soms even niet, bij 3.' '3 wat?' 'Oh ja, 3 maanden!' Eén leerling zegt 'hoe ouder, hoe hoger en di(k)ker'. Hij vertaalt wel de grafiek naar informatie, maar koppelt niet automatisch 'hoger' in de grafiek aan 'zwaarder', zie figuur 6. Bij het bespreken benadruk ik dat heel veel verhalen correct zijn. Dus 'iemand wordt zwaarder' is al een valide conclusie, en 'de baby wordt eerst zwaarder maar na 3 maanden even niet' ook, al is die laatste veel specifiek. Leerlingen geven aan: 'dan is het niet zo moeilijk'.

hoe ouder  
 hoe hoger  
 en dikker  
 Hoe ouder je wordt hoe zwaarder je wordt  
 kind dat groeit maar niet altijd

figuur 6

Op de derde pagina zetten leerlingen vuistregels om naar woordformules, tabellen en grafieken. Veel leerlingen komen een heel eind met tabellen en grafieken. De woordformules zijn lastig. Leerlingen vullen hier het laatste vakje van de tabel in, een paar leerlingen proberen iets met een begingetal op te stellen en een minderheid krijgt een kloppende woordformule op papier, zie figuur 7.

De fietssnelheid op een elektrische fiets is ongeveer  $25 \frac{\text{km}}{\text{uur}}$ .  
 50  
 fotobikes

afstand (km) =  $15 \times \text{tijd in uren}$

afstand (km) =  $25 \times \text{tijd in uren}$

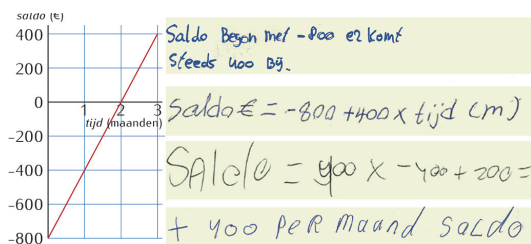
figuur 7



Een leerling corrigeert de vuistregel over elektrische fietsen; zijn fatbike kan wel 50 km/uur!

Op de vierde pagina staat een lineaire grafiek over een saldo, met een deel onder de horizontale as, zie figuur 8. De andere vakken zijn leeg. Dit is voor veel leerlingen te complex. In de eerste gastles blijkt in de nabespreking dat veel leerlingen het woord 'saldo' niet kennen. Met de hele klas komen ze verder, een negatief saldo betekent een schuld, en wanneer je werkt kun je zo'n schuld aflossen. Een negatief getal is volgens een aantal leerlingen een getal 'onder de min'.

In de tweede gastles bespreek ik van tevoren met de klas wat het woord saldo betekent. Ze kunnen daardoor wat meer uit de voeten met het opstellen van een verhaal. Ook het invullen van de tabel gaat bij deze groep gemakkelijker. In beide groepen komen enkele leerlingen tot een woordformule, maar zij behoren tot de minderheid. Eén leerling beschrijft bij de woordformule wat er gebeurt, dus vertelt in woorden hoe je kunt rekenen, zie figuur 8.



figuur 8 [7]

Na het bespreken van de vier pagina's vraag ik leerlingen in hoeverre zij kunnen switchen tussen de representaties verhaal, tabel, grafiek en woordformule. De meeste leerlingen kunnen goed uit de voeten met tabellen en grafieken, of het nu vanuit een grafiek, verhaal of woordformule is. Een woordformule opstellen vinden ze lastig. Een verhaal maken vinden ze lastig, al geven ze ook aan dat ze het wel zouden kunnen leren. 'Het is gewoon een beetje zeggen wat je ziet.'

## Conclusies

De woordformule lijkt iets ongrijpbaars voor de meeste leerlingen in deze twee klassen. Dat kan ook komen door het moment in het schooljaar; dit onderwerp komt later in klas 3 en in klas 4 nog veelvuldig aan bod. De leerlingen uit deze klassen zijn veelal niet in staat een woordformule op te stellen en weten niet zo goed hoe ze hiermee kunnen werken. Het begrip van wat een woordformule eigenlijk is, lijkt er nog niet te zijn, al hebben

enkele leerlingen wel de procedurele kennis om er een op te stellen. Grafieken en tabellen zijn veel bekender, al hebben ze hulp nodig bij het verwoorden wat ze zien (het nieuwe subdomein *redeneren*). Het viel mij mee hoe klein de aanwijzingen waren die leerlingen nodig hadden om hier verder mee te komen. Dit onderstreepte wat ze zelf al aangaven: het is wel te leren, maar voelt als iets heel nieuws.

In deze activiteit lag een sleutelrol in het verwoorden van wat leerlingen zagen. Dit leek te helpen bij het stimuleren van de wiskundige denk-werkwijzen zoals genoemd in de kerndoelen en examenprogramma's. Het hielp ze betekenis te halen uit een grafiek, was een brug tussen tekst en woordformule en hielp om te switchen tussen representaties. Wellicht is voor deze doelgroep de vraag 'Wat zie je nu eigenlijk? Vertel er eens over!' wel één van de meest helpende vragen richting de nieuwe kerndoelen en examenprogramma's.

## Noten

- [1] zie: [www.exprw.nl/lesmateriaal-verbanden/](http://www.exprw.nl/lesmateriaal-verbanden/)
- [2] zie: <https://www.examenblad.nl/2025/onderwerpen/conceptsyllabi>
- [3] Swan, M. (2008). A Designer Speaks. *Educational Designer*, 1(1) [https://www.educationaldesigner.org/ed/volume1/issue1/article3/pdf/ed\\_1\\_1\\_swan\\_08.pdf](https://www.educationaldesigner.org/ed/volume1/issue1/article3/pdf/ed_1_1_swan_08.pdf)
- [4] Doorman, M. (2011). Een leuke les: kwartetten met tabellen en grafieken. *Nieuwe Wiskrant*, 31(1), 25–28. [https://www.fi.uu.nl/wiskrant/artikelen/311/311september\\_doorman.pdf](https://www.fi.uu.nl/wiskrant/artikelen/311/311september_doorman.pdf)
- [5] Op de website is de figuur 3 en 5 op ware grootte te downloaden. Tekst uit *Moderne Wiskunde* 12<sup>e</sup> editie, 1KGT2, blz. 160
- [6] foto en grafiek uit *Getal & Ruimte* 13<sup>e</sup> editie, 1BK2, blz. 154
- [7] grafiek uit *KERN*, vmbo-basis, boek 4-A, blz. 96

## Over de auteur

Over de auteur: Marleen Vos-Flobbe is één dag in de week werkzaam bij het Expertisepunt Rekenen-Wiskunde en is auteur bij de wiskundemethode *Getal & Ruimte* voor vmbo-bb, vmbo-kb en vmbo-gt.  
E-mailadres: [m.vos-flobbe@uu.nl](mailto:m.vos-flobbe@uu.nl)

# Het verschil zien...

In het reken-wiskundeonderwijs worden leerlingen veelal aan de hand genomen als er hobbels moeten worden genomen. Daarbij spelen diverse contexten, beelden en soms ook spelletjes een rol. Wanneer je daar op een afstandje naar kijkt valt het adhoc-karakter op. Gerard Koolstra gaat aan de hand van de betekenis van  $a - b$  na of het ook anders kan.

## Inleiding

Rekenen/wiskunde kent zo zijn struikelblokken. In *Euclides* 99-7 (juni 2024) was er aandacht voor aftrekken met negatieve getallen.<sup>[1]</sup> Ook hiervoor geldt dat diverse benaderingen gebruikt worden om leerlingen als het ware over deze hobbels heen te helpen, en dat bij discussie over wat de merites zijn van de diverse benaderingen een richtingensrijd soms niet ver weg is. Veel oplossingen zijn ad hoc, en op zijn best 'leuk gevonden'. Een aspect dat naar mijn mening te weinig aandacht krijgt, is dat een belangrijke oorzaak van de problemen is: een te beperkt beeld bij de leerlingen over de betekenis van de betreffende bewerkingen. In dit geval gaat het over 'iets min iets anders', oftewel  $a - b$ .

## Verskil

De bewerking die met een (lang) minteken wordt gesymboliseerd wordt vaak aftrekken, of eraf halen genoemd. De uitdrukking  $62 - 7$  wordt soms ook wel uitgesproken als '62 eraf 7', maar wezenlijker is dat dit doorgaans opgevat moet worden als een opdracht waarbij er 7 van het getal 62 afgehaald moet worden. Dat gebeurt vaak in stapjes: bijvoorbeeld  $62 - 7 = 62 - 2 - 5 = 60 - 5 = 55$ . De auteurs van het genoemde *Euclides*-artikel noemen aftrekken (en optellen) uitdrukkelijk ook een proces, dat op wat gespannen voet lijkt te staan met de objecten: de getallen waarmee gewerkt wordt. Bij het kaartenspel Plusminus dat in het genoemde *Euclides*-artikel wordt besproken/aanbevolen worden getallen ook letterlijk weggehaald van een stapeltje. Bij een opgave als  $1234 - 1199$  is het wat minder handig om te denken aan het weghalen van 1199 eenheden van een stapel van 1234. Sommigen nemen dit voor lief, en zweren bij eenzelfde aanpak voor opgaven met dezelfde structuur. Dat betekent vaak onder elkaar zetten, en veel

lenen. Anderen kiezen ervoor om er eentje meer af te halen en dan later te corrigeren:

$$1234 - 1199 = 1234 - 1200 + 1 = 34 + 1 = 35.$$

Wanneer de uitdrukking  $1234 - 1199$  echter vertaald wordt in de vraag 'Hoeveel is 1234 meer dan 1199?' is het antwoord snel gevonden. Een berekening zou kunnen zijn  $1234 - 1199 = 34 + 1 = 35$ .

Deze berekening lijkt oppervlakkig gezien op de vorige, maar de gedachtegang is anders.

## Zelfstandig object

Het woord *verschil*<sup>[2]</sup> past bij de interpretatie waarvoor ik aandacht vraag. Hierbij wordt  $a - b$  niet zozeer als opdracht gezien om iets te doen, maar meer als een zelfstandig object, dat aangeeft hoeveel  $a$  meer is dan  $b$ . Deze zienswijze geeft ook veel mogelijkheden om een uitdrukking stapsgewijs te vereenvoudigen, waarbij de ultieme vereenvoudiging natuurlijk een getal is, het antwoord.

$$\text{Een voorbeeld ter illustratie: } 2024 - 1948 =$$

$$2026 - 1950 = 2076 - 2000 = 76$$

Leerlingen worden in de onderbouw vertrouwd gemaakt met het principe dat een vergelijking geldig blijft wanneer aan beide kanten hetzelfde wordt toegevoegd, of afgehaald - het bekende weegschaalmodel. Het zou mooi zijn als ze ook vertrouwd raken - of nog beter: al zijn<sup>[3]</sup> - met het principe dat het verschil tussen twee getallen gelijk blijft als aan beide kanten (van het minteken) hetzelfde getal wordt opgeteld (of afgetrokken). Hier kunnen contexten, zoals hoogte en temperatuur een rol spelen, maar ook een getallenlijn kan verhelderend werken.



## Toepassing

Wat betekent dit nu voor sommetjes als

$14 - -4$  en  $-14 - -4$ ? Als je bijvoorbeeld (eventueel binnen een context als temperaturen of hoogtes) vraagt hoeveel 14 meer is dan  $-4$ , is de vertaling van  $14 - -4$  in  $14 + 4$  heel natuurlijk. Ook zonder deze contexten is dit op een (eventueel verticale) getallenlijn heel goed duidelijk te maken.

In het tweede geval ligt dat iets lastiger omdat  $-14$  duidelijk *minder* is dan  $-4$ .

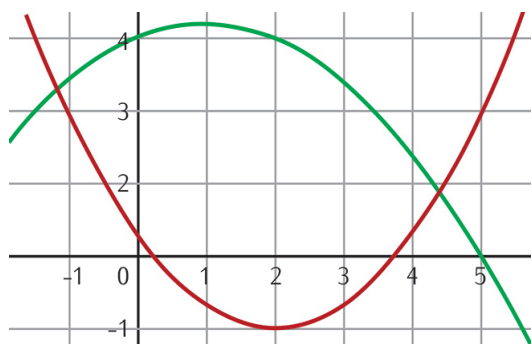
Wel is duidelijk dat het absolute verschil 10 is:  $-14$  is 10 minder dan  $-4$ . De stap naar  $-10$  als antwoord is dan niet zo groot. Een iets andere aanpak is om beide getallen, aftrektal en aftrekker, met hetzelfde getal te verhogen, bijv. met 4 ( $14$  kan ook goed).

Dus iets als  $-14 - -4 = -10 - 0 = -10$  of  $-14 - -4 = 0 - 10 = -10$ .

## Variabelen

Ook bij het rekenen met variabelen heeft het vaak zin om een minteken niet meteen als opdrachtteken te zien. Een bekend struikelblok in de onderbouw is het vereenvoudigen van een expressie als  $2x - (7 - x)$ .

Wanneer je dit ziet als het verschil van  $2x$  t.o.v.  $7 - x$  is het een logische stap om aan beide kanten (van het minteken)  $x$  op te tellen. Daarmee wordt de expressie  $3x - (7)$ , en zijn de haakjes niet zozeer weggewerkt, maar overbodig geworden.



figuur 1

Bij functies is het werken met *verschilfuncties* heel gebruikelijk. Denk aan de winstfunctie, als verschil van opbrengst en kosten, de verticale afstand tussen twee grafieken, of het integreren van het gebied dat begrensd wordt door twee grafieken, zie figuur 1. Bij het berekenen van de hellingen van rechte lijnen spelen de verschillen  $\Delta x$  en  $\Delta y$  een belangrijke rol.

**“In een meetkundige omgeving zijn verschillen vaak eenvoudiger te bepalen dan optellingen.”**

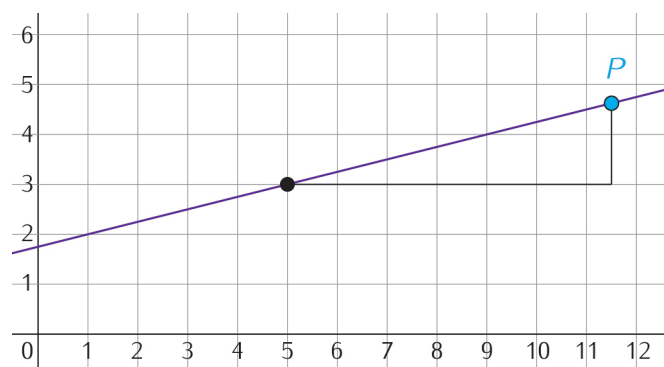
## Grafisch

Bij twee gegeven grafieken is vaak de grafiek van de verschilfunctie makkelijker (globaal) te bepalen dan de somfunctie. Bij het werken met functievoorschriften is dit eerder andersom. Dit geldt algemener: bij het rekenen lijken opgaven van het type  $a - b$  vaak net wat lastiger dan die van het type  $a + b$ , maar in een meer meetkundige omgeving zijn verschillen juist vaak eenvoudiger te bepalen dan sommen (optellingen). Op de getallenlijn in figuur 2 is bijvoorbeeld  $12 - 9$  meteen te zien, en is bij  $12 + 9$  een verschuiving nodig. Ook al staat  $-3$  niet op deze getallenlijn, het is meteen duidelijk dat het verschil van 7 en  $-3$  (dus  $7 - -3$ ) groter is dan het verschil tussen 7 en 3.



figuur 2

Versillen zijn in een assenstelsel vaak direct zichtbaar. Daar zou veel meer gebruik van gemaakt kunnen worden bij het opstellen van formules. Van de lijn in figuur 3 is bekend dat deze door het punt  $(5, 3)$  gaat, en de helling (richtingscoëfficiënt) gelijk is aan  $\frac{1}{4}$ , dat wil zeggen dat het verticale verschil tussen twee punten op de lijn altijd een kwart is van het horizontale verschil. Punt  $P$  is een willekeurig punt  $(x, y)$  op deze lijn.

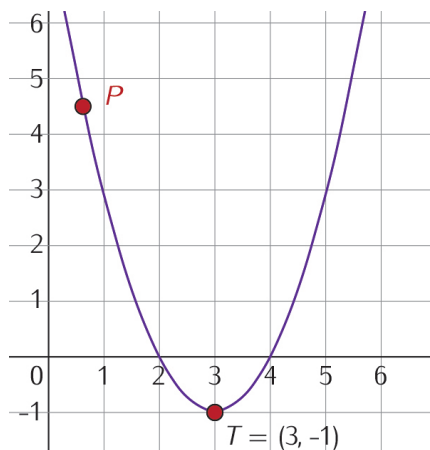


figuur 3

De verticale afstand tot  $(5, 3)$  is  $y - 3$ , en de horizontale  $x - 5$ . Dit zou voldoende moeten zijn om een vergelijking als  $y - 3 = \frac{1}{4}(x - 5)$  op te schrijven.

In deze context gaat het niet om absolute verschillen, maar om toenames – die ook negatief kunnen zijn.

Bij grafieken met een verticale symmetrieas kan ook prima met het *absolute* verschil, dus de afstand, gewerkt worden. Ik heb de indruk dat het werken met absolute waarden tegenwoordig behoorlijk is verschoven naar hogere leerjaren, en vaak helemaal niet aan de orde komt. In tekeningen is juist de horizontale of verticale afstand een begrip dat nauwelijks toelichting nodig heeft. Het koppelen van de afstand (op een getallenlijn) tussen de getallen  $a$  en  $b$  en de notatie  $|a - b|$  lijkt me een nuttige investering. Mogelijk moet er dan ook even aandacht besteed worden aan het feit dat  $|a - b|^2 = (a - b)^2 = (b - a)^2$ . Het opstellen van een vergelijking van een parabool met als top  $(3, -1)$ , zie figuur 4, zou dan meteen kunnen leiden tot de vorm  $y = A(x - 3)^2 - 1$  of desgewenst:  $y + 1 = A(x - 3)^2$ .



figuur 4

## Slot

Bovenstaande is opgehangen aan het interpreteren van uitdrukking van de vorm  $a - b$ . Wellicht ten overvloede: de interpretatie van ‘eraf halen’ is zeker waardevol, maar is op den duur wat te beperkt, en mogelijk remmend voor de verdere ontwikkeling van leerlingen. Ik pleit ervoor om zo snel mogelijk de leerlingen een ruimere blik te gunnen. Zo snel mogelijk is mijns inziens in het basisonderwijs, maar zolang dit onvoldoende gebeurt, zou het in ieder geval in de onderbouw van het voortgezet onderwijs moeten

gebeuren. Overigens geldt iets dergelijks voor de andere bewerkingen, en met name voor het delen. Het delen met onder andere breuken zou, volgens mij, heel wat minder problemen opleveren wanneer leerlingen een goede, brede interpretatie hebben van wat delen is, wat de betekenis is van  $a : b$ . Maar daarover wellicht een andere keer meer.

## Noten

- [1] Durenkamp, P. & Stienstra, S. (2024). Min en min is plus! *Euclides*, 99(7), 4-7. Ik heb trouwens veel moeite met de titel. Min zes en min acht (ik doel op  $-6 + -8$ ) is toch echt samen *min* veertien!
- [2] Probleem is wel dat niet altijd duidelijk is of bij ‘het verschil van  $a$  en  $b$ ’ gedacht wordt aan  $a - b$ ,  $b - a$ , of aan  $|a - b|$ . Daarom zou, als  $a - b$  bedoeld wordt, wellicht de uitdrukking het verschil van  $a$  t.o.v.  $b$  geschikter zijn. Een andere optie is misschien het woord ‘toename’ te gebruiken.
- [3] In Vlaanderen wordt hier in het primair onderwijs al aandacht aan besteed. Daar wordt gewerkt de *aftrekkinghalter* (en ook de *delingshalter*) Zie o.a. [https://thomasmore.be/sites/default/files/education\\_import/images/Wiskunde\\_hoofdrekenen.pdf](https://thomasmore.be/sites/default/files/education_import/images/Wiskunde_hoofdrekenen.pdf)

## Over de auteur

Gerard Koolstra houdt zich na een dienstverband van veertig jaar als docent, bezig met allerlei zaken binnen en rond het wiskundeonderwijs, onder meer als redacteur van de WiskundE-brief. E-mailadres: [gerardk@xs4all.nl](mailto:gerardk@xs4all.nl)

# In memoriam Jan de Lange



Jan de Lange

Op 13 maart jl. is Jan de Lange overleden. Jan is geboren in 1943 in Leiden, studeerde daar wiskunde (1972) en promoveerde in wiskundendidactiek aan de Universiteit Utrecht (1987). Na enkele jaren wiskundeonderwijs te hebben gegeven op middelbare scholen, werd hij in 1976 door Hans Freudenthal en Martin Kindt aangenomen bij IOWO (gestart in 1971), dat in 1981 verder ging als OW&OC, een klein instituut dat deel uitmaakte van de Faculteit Wiskunde van de Universiteit Utrecht. Later werd hij aangesteld als coördinator en in 1989 werd hij hoogleeraar/directeur van het instituut, dat in 1991 werd omgedoopt tot Freudenthal Instituut (FI).

Jans visie op reken-wiskundeonderwijs was baanbrekend en heeft grote invloed gehad, zowel in Nederland als wereldwijd. In Nederland heeft hij een vooraanstaande rol gespeeld bij de invoering van het vak wiskunde A voor vwo en havo in de *hewet* en *hawex* projecten. Tijdens zijn jaren als docent in de bovenbouw van havo/vwo was het hem opgevallen dat zijn leerlingen pas écht geïnteresseerd raakten als er toepassingen van de te leren wiskunde aan bod kwamen. Zijn passie, vliegen, werd zijn grootste inspiratiebron voor die toepassingen, wat terug te zien is in de experimentele wiskunde-A-modules uit, met name, het *hewet*-project. Zie het artikel van Martin Kindt 'Wie B zei, moest ook A zeggen', in deze *Euclides*. De oorspronkelijke uitgangspunten van wiskunde A zijn niet te toetsen in een individuele schriftelijke toets. Daarom ontwierp Jan grote voorbeeldopdrachten waar leerlingen in een groepje een dag mee bezig konden zijn. Dit was de aanleiding voor de unieke en nog steeds bestaande wiskunde A-lympiade (en in navolging daarvan de wiskunde B-dag en de Onderbouw Wiskunde Dag). In *Euclides* kom je bewerkingen van die

opdrachten tegen in de WiTjes. Om docenten te laten zien dat er overal toepassingen van de wiskunde te ontdekken zijn, leek het Jan een aardig idee om daar een soort conferentie voor te organiseren: professionals die wiskunde op wat voor een manier dan ook gebruiken vertellen hun verhaal. Dit idee kennen we natuurlijk als de Nationale Wiskunde Dagen en heeft onlangs zijn 31<sup>e</sup> editie beleefd. Internationaal was Jan onder andere bekend als project-leider van *Mathematics in Context*, de ontwikkeling van een contextrijk wiskunde curriculum voor 10-14 jarigen in de Verenigde Staten, en als voorzitter van de Mathematics Expert Group voor PISA (Programme for International Student Assessment): het is het grootste internationale vergelijkende onderzoek naar de prestaties van leerlingen in onderwijsstelsels in de wereld en geeft inzicht in de prestaties van 15-jarige leerlingen in 81 landen (OECD-lidstaten en geassocieerde landen) op het gebied van lezen, wiskunde en science. De driejaarlijkse resultaten zijn regelmatig in *Euclides* van een analyse voorzien. Aan het einde van zijn wiskundig-didactische carrière richtte Jan zijn aandacht op het ontwikkelen van talenten bij jonge kinderen. In 2005 richtte hij Talentenkracht (Curious Minds) op, een onderzoekprogramma van zeven universiteiten naar de talenten van kinderen (3-14 jaar) op het gebied van wetenschap en techniek.



We herinneren Jan als een zeer inventieve ontwikkelaar en onderzoeker en als een bevlogen docent met een groot hart voor wiskunde, maar bovenal voor leerlingen. En er is niemand die dat zo goed onder woorden kan brengen als Jan zelf: kijk en vooral luister maar eens naar het interview dat Paul Drijvers met hem had, alweer tien jaar geleden <sup>[1]</sup>.

<sup>[1]</sup>zie [youtube.com/watch?v=qi4tl6X73xQ](https://www.youtube.com/watch?v=qi4tl6X73xQ)



# 'Gevoel krijgen voor kansen'

## Interview met Valentijn de Marez Oyens

Tijdens het project Kansspelmarkt op de Werkplaats Kindergemeenschap (Bilthoven) maken leerlingen van de tweede klas zelf een kansspel en brengen dat in de praktijk. Klopt de verwachte winst met wat ze daadwerkelijk verdienen met het spel? We spraken met wiskundedocent Valentijn de Marez Oyens over dit leuke en leerzame project.

### Kansspelmarkt

Al twaalf jaar is Valentijn betrokken bij de kansspelmarkt die in vijf tweede klassen havo, vwo en gymnasium wordt gehouden. In een periode van vier weken bedenken en maken leerlingen in groepjes van vier een kansspel. Tijdens de afsluitende kansspelmarkt worden de spellen gespeeld. Elke leerling krijgt een aantal muntjes en speelt daarmee een aantal spellen. De scores worden per spel bijgehouden om later te analyseren.

#### *Wat was de reden om met dit project te beginnen?*

'In de derde klas komt kansrekening uitgebreid aan bod en moeten leerlingen regels gaan toepassen. In de tweede klas wilden we leerlingen op een speelse manier laten kennismaken met kansrekening, zodat ze een gevoel zouden krijgen voor kansen. We wilden niet focussen op detailniveau van de regels. Het grappige is dat ze vaak met spelideeën komen, die het wel nodig maken om diep in de regels te duiken. Ze zijn dan veel gemotiveerder om zich door de theorie te worstelen. En natuurlijk helpen we ze daarbij.'

#### *Het project loopt al meer dan twaalf jaar. Wat is er in de loop der tijd aan veranderd?*

'In het begin lieten we ons wel eens meeslepen door ons enthousiasme. We kochten bijvoorbeeld materialen waar de leerlingen fraaie spellen mee konden maken. Leerlingen konden in de lokalen van de creatieve vakken aan de slag, maar daar moest dan wel een wiskundedocent bij aanwezig zijn. Dat leidde tot gedoe, want de leerlingen maakten soms gebruik van materialen die niet gebruikt mochten worden. En het kostte veel tijd voor de wiskundedocenten. We laten de leerlingen daarom nu zelf materialen meenemen en ze maken de spellen in een normaal lokaal.

Verder hebben we geleerd om de leerlingen wat in te perken. Ze komen vaak met ingewikkelde spelideeën. Wij weten dat het lastig is om daar de kansen van te berekenen. Ik heb wel eens een boomdiagram op een dubbelzijdig A2-formaat gehad en dan klopte het nog niet. Dat was niet handig. We zeggen nu dat het spel minimaal twee verschillende kansen moet bevatten, maar dat het niet te complex moet worden. Door die twee kansen moeten ze gaan nadenken hoe ze die kansen combineren. De kansberekening wordt dan iets uitdagender dan  $1/6$  voor een dobbelsteen of  $1/4$  voor een harten kaart.'



figuur 1 Land van Winst. Een variatie op rad van fortuin

#### *Hoe is de opbouw van het project?*

De eerste week geven we een introductie op kansen en vertellen we hoe het project in elkaar zit. Leerlingen maken opgaven uit het boek. In die eerste week bedenken de groepjes een spelidee en leggen dat aan de docent voor. In de tweede week maken ze het spel definitief. De kansspelmarkt is in de derde week en in de vierde week maken ze een werkstuk over het project. Op onze school hebben we de structuur dat we per week

één instructiemoment hebben van 40 minuten en de rest van de tijd werken de leerlingen in hun werkgroepjes aan de weektaken. In klas 2 is de lestijd voor wiskunde 160 minuten. In dit project benut ik in de weken 3 en 4 de instructietijd niet. In week 2 zou ik daar ook van af kunnen zien, maar ik benut dat moment om een beetje de diepte in te gaan door het driedeurenprobleem te bespreken. Het gesprek over de vraag welke strategie het beste zou werken is altijd weer inspirerend. In de week van de kansspelmarkt bundelen we de afzonderlijke lessen, zodat we er een middag voor uit kunnen trekken. De andere vakken maken dan gebruik van de normale lessen wiskunde. Dat is wel een gepuzzel met vijf klassen, maar het lukt altijd.

### ***Wat vinden leerlingen van het project?***

'Het feit dat ze iets creatiefs kunnen doen met een spel, vinden ze heel leuk. Het maken van een boomdiagram en het berekenen van de verwachtingswaarde vinden ze ingewikkeld en minder leuk. In grote lijnen zijn ze positief over het hele project.'

### ***Wat leren ze van het project?***

'Ze krijgen meer gevoel voor hoe kansen werken. In klas 3 herkennen sommige leerlingen dat ze bepaalde principes al hebben gezien in het project. Ik heb het idee dat ze meer leren doordat ze soms echt hebben moeten worstelen om de verwachte winst te berekenen.'



figuur 2 Spel waarbij de pion een afbeelding van Valentijn was



figuur 3 Levende fruitautomaat

### ***Wat is het leukste spel dat jou is bijgebleven?***

(Denkt even na). 'Ieder jaar zijn er spellen die me verrassen. Een spel waarbij de pion een afbeelding van mij was, vond ik erg origineel. Het doel was om mij zo snel mogelijk door de school te laten lopen. Onderweg moest je opgaven maken en voorkomen dat je een test moest maken of na moest blijven. Ook herinner ik mij een levende fruitautomaat, waarbij drie leerlingen heen en weer zwaaiden met fruit en stopten als je op de knop drukte. Het combineren van twee verschillende kansen leidt vaak wel tot een origineel spel.'

**“De kansspelmarkt geeft leerlingen een gevoel voor kansen en laat zien dat wiskunde leuk is.”**

### ***Hoe zwaar telt het cijfer t.o.v. methodetoetsen?***

'Een toets telt drie keer, een praktische opdracht twee keer en een S.O. één keer. In een schooljaar hebben we twee keer een opdracht. Naast de Kansspelmarkt is dat een opdracht voor statistiek, waarbij leerlingen een vragenlijst moeten opstellen, afnemen en verwerken. Er zijn vijf à zes toetsen en twee à drie SO's.

### ***Welke tips heb je voor collega's die dit project ook willen gaan doen?***

(Glimlacht). 'Het is meer werk dan je denkt. Alleen al het maken van de zakjes met munten. We hebben minimaal 42 groepjes, dus je moet circa 50 zakjes vullen met

>



# Kortingsactie

## TI-84 Plus CE-T Python Edition

Koop de meest  
gebruikte grafische  
rekenmachine  
met korting!



**€10**  
korting\*



## Breng wiskunde tot leven *in de klas*

- » Kleurrijke grafieken die inzicht geven
- » Toegestaan op examens
- » Met emulatorsoftware

[education.ti.com/nl](https://education.ti.com/nl)

\* De (online) winkels die deze grafische rekenmachine verkopen zijn verantwoordelijk voor het uitvoeren van de kortingsactie en de voorwaarden. De korting bedraagt € 10, inclusief btw. De korting is geldig van 15 april tot en met 30 september 2025.

©2025 Texas Instruments

 **TEXAS INSTRUMENTS**



verschillende kleuren munten. Na afloop de munten verzamelen en tellen. Er verdwijnen er altijd wel wat. Verder is het nakijken veel werk, omdat elk werkstuk uniek is. Maar: het is zeker al het werk waard! Een andere tip is om leerlingen het spel niet te ingewikkeld te laten maken.

Heb je ook zin om een kansspelmarkt te houden? Download dan de opdracht van de Werkplaats Kindergemeenschap, compleet met formulieren en rubrics. Als je de opdracht hebt gedaan in je eigen klas, vinden we het leuk om te horen wat je ervaringen zijn.

 [vakbladeuclides.nl/1006kansspelmarkt](http://vakbladeuclides.nl/1006kansspelmarkt)

## Over de interviewer en geïnterviewde

Valentijn de Marez Oyens is docent wiskunde op de Werkplaats.

E-mailadres: [v.demarezoyens@wpkeesboeke.nl](mailto:v.demarezoyens@wpkeesboeke.nl)

Liesbeth Coffeng is docent wiskunde op het mbo (Noorderpoort) en hbo (Hanze Hogeschool) en eindredacteur van *Euclides*.

E-mailadres: [l.coffeng@nvvw.nl](mailto:l.coffeng@nvvw.nl)

# WiTje: Afspreken

Wiskunde in  
teams



WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Olympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundetag (Wiskunde in Teams).



figuur 1 Spoorkaart van Nederland

Tom woont in Middelburg, Monica in Heerenveen en Kim in Maastricht. Ze hebben alle drie geen auto en reizen altijd met het openbaar vervoer. Ze willen met z'n drieën ergens afspreken om te lunchen. Kijkend naar de kaart lijkt het dan logisch om in Utrecht af te spreken. Maar als je naar de treinreistijden kijkt (zie reisplanner op

[www.ns.nl](http://www.ns.nl)) geven die geen evenwichtige verdeling van de reistijd. Ga dit na!

- 1 Bepaal voor Tom, Monica en Kim een betere plek dan Utrecht om af te spreken. Beschrijf duidelijk hoe je dit hebt aangepakt.
- 2 Misschien komt Johan ook. Leg uit dat het voor de keuze van de beste plek in dat geval nogal verschil maakt of Johan uit Schagen of uit Arnhem komt.
- 3 Tom, Monica en Kim zouden ook bij één van de drie thuis kunnen afspreken. Bepaal bij wie ze het beste kunnen samenkomen. Geef aan welke criteria je hebt meegenomen in je afweging.

Dit WiTje is gebaseerd op de Wiskunde Olympiade voorronde opdracht van 2019.

Zie: [https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28973/documents/Voorronde\\_Olympiade\\_2019-2020.pdf](https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28973/documents/Voorronde_Olympiade_2019-2020.pdf)

# Halve hoek en een leerling die van aanpakken wil weten

Een bijlesleerling en een examenopgave om te oefenen inspireerden Jacques Jansen zélf om een opgave te generaliseren. Het levert naast fraaie illustraties, die tal van vragen oproepen, ook mooie wiskunde op.

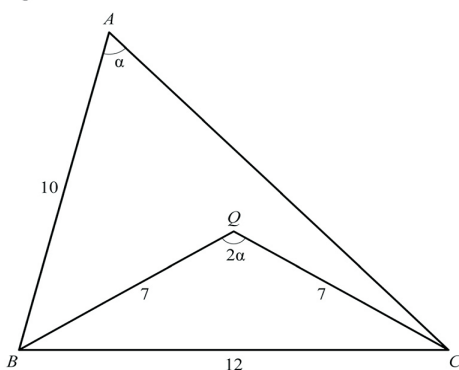
## Inleiding

Ik bereid leerling Sabine voor op het havo wiskunde-B-examen. Onderstaande opgave, zie figuur 1, vond ze lastig. Ze ging vrij snel aan de slag met de cosinusregel. Herken je iets aan de driehoek van opgave 10 uit het havo wiskunde B-examen van het eerste tijdvak uit 2023? We komen erop terug.

### Halve hoek

Gegeven zijn de driehoeken  $ABC$  en  $BCQ$  met  $AB=10$ ,  $BC=12$ ,  $BQ=CQ=7$  en  $\angle BAC = \alpha$ . Bovendien is gegeven  $\angle BQC = 2\alpha$ . Zie de figuur.

#### figuur



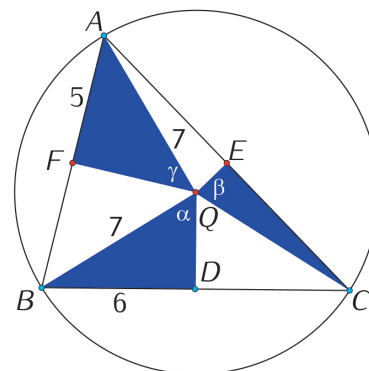
6p 10 Bereken  $AC$ . Geef je eindantwoord in twee decimalen.

figuur 1

Het correctievoorschrift geeft wel vijf verschillende strategieën. Heb je de opgave nog niet gemaakt dan is het zinvol om eerst deze opgave op te lossen. Omtrekshoek en middelpuntshoek vind je niet in het havo-programma terug. In het examennummer 99-1, was het voor de lezer toch leuk geweest om te zien hoe het oplossen van opgave 'halve hoek' nog anders kan.

## Omtreks- en middelpuntshoek

We kunnen in figuur 1 een omtrekshoek  $\angle BAC$  en een middelpuntshoek  $\angle BQC$  ontwaren. Er is sprake van een omgeschreven cirkel met punt  $Q$  als middelpunt en met straal 7. Vanuit punt  $Q$ , zie figuur 2, zijn er hoogtelijnen neergelaten op de zijden van  $\triangle ABC$ . De voetpunten zijn de punten  $D$ ,  $E$  en  $F$ . Laten we de hoeken bij de hoekpunten  $B$  en  $C$  aangeven respectievelijk met  $\beta$  en  $\gamma$ . We hebben dan nog twee middelpuntshoeken van  $2\beta$  en  $2\gamma$  en wel de hoeken  $\angle AQC$  en  $\angle BQA$ .



figuur 2

We kijken naar de drie blauwe rechthoekige driehoeken met middelpunt  $Q$ , als gemeenschappelijk hoekpunt. Zie  $\triangle QEC$ :  $\sin(\beta) = \frac{EQ}{QC} = \frac{6}{7}$ . Dus gevraagde  $AC$  heeft lengte  $14 \cdot \sin(\beta)$ . Het gaat dus om het berekenen van  $\beta$  als je aan de lengte van  $AC$  wilt komen. Kijk naar de twee andere blauwe driehoeken:  $\sin(\alpha) = \frac{6}{7}$  geeft  $\alpha \approx 59,00^\circ$ ,  $\sin(\gamma) = \frac{5}{7}$  geeft  $\gamma \approx 45,58^\circ$ .  $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma \approx 180^\circ - 59,00^\circ - 45,58^\circ \approx 75,42^\circ$ .  $AC = 14 \cdot \sin(75,42^\circ) \approx 13,55$ . De cosinusregel was dus niet nodig mits je op de hoogte was van het bestaan van omtreks- en middelpuntshoeken.

## Vwo-leerlingen

Voor vwo-leerlingen, zij kennen wel de begrippen omtreks- en middelpuntshoek, kun je een exacte waarde van zijde AC vragen.

We merken weer op dat  $AC = 14 \cdot \sin(\beta)$ . Met de

regel  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  volgt uit  $\sin(\alpha) = \frac{6}{7}$  dat

$\cos(\alpha) = \frac{1}{7}\sqrt{13}$ . Analoog volgt uit  $\sin(\gamma) = \frac{5}{7}$  dat

$\cos(\gamma) = \frac{1}{7}\sqrt{24}$ .

We passen, om  $\sin(\beta)$  uit te rekenen, de sinusregel 'voor het verschil van twee hoeken' toe:

$$\sin(p - q) = \sin(p) \cdot \cos(q) - \cos(p) \cdot \sin(q).$$

$$\sin(\beta) = \sin((180^\circ - \alpha) - \gamma) =$$

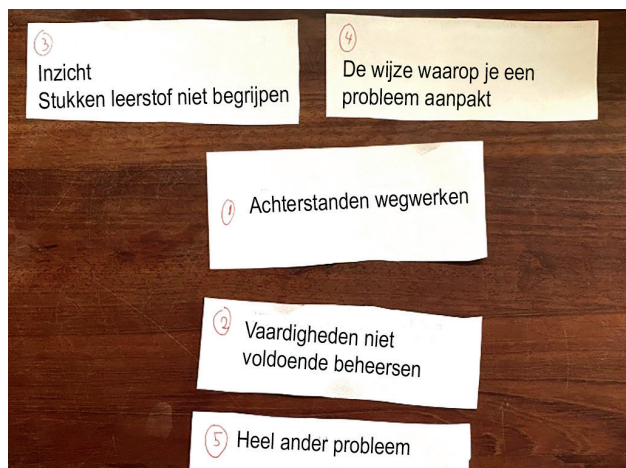
$$\sin(180^\circ - \alpha) \cdot \cos(\gamma) - \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \sin(\gamma) =$$

$$\sin(\alpha) \cdot \cos(\gamma) - - \cos(\alpha) \cdot \sin(\gamma) =$$

$$\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{7}\sqrt{24} + \frac{1}{7}\sqrt{13} \cdot \frac{5}{7}.$$

$$AC = 14 \cdot \sin(\beta) = \frac{12}{7}\sqrt{24} + \frac{10}{7}\sqrt{13}.$$

Als je dit afrondt op twee decimalen, krijg je 13,55.



figuur 3

## Sabine

'Hoe moet ik een probleem aanpakken?', vroeg Sabine mij bij de eerste kennismaking.

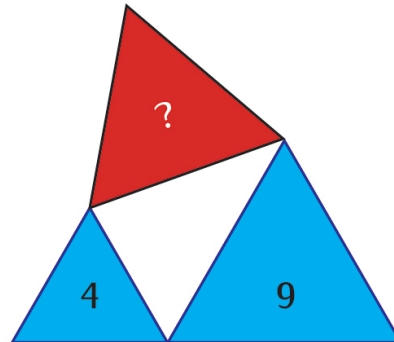
Later gaf ik haar vijf briefjes die ze in volgorde moest leggen van belangrijk naar minder belangrijk. Sabine legde ze neer van boven naar beneden, zie figuur 3.

Van goniometrie begreep ze niet veel. Maar nog belang-

rijker. 'Hoe pak ik een probleem aan?', vroeg Sabine.

Ik had wel iets voor haar, een opgave geplukt van internet. Het ging over drie gelijkzijdige driehoeken. Twee blauwe en een rode. 'Je hoeft niets uit te rekenen maar ik wil wel een plan van aanpak', vroeg ik haar. Zie figuur 4.

Sabine kwam al snel met de cosinusregel. 'Het moet dus kunnen', zegt ze. Toch liep ze bij de brainstorm vast.



figuur 4

Ze wist niet hoe je een lengte van een zijde van een gelijkzijdige driehoek moet uitrekenen waarvan de oppervlakte gegeven is. Je moet natuurlijk op het idee komen om een hoogtelijn te trekken. Met de stelling van Pythagoras vind je dat de oppervlakte gelijk is aan  $\frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot z^2$  waarbij  $z$  een zijdelengte is. Een mooie eigenschap van een gelijkzijdige driehoek is dat de oppervlakte recht evenredig is met het kwadraat van de lengte van een zijde. Dat geldt overigens voor alle regelmatige veelhoeken. Bij een vierkant is de evenredigheidsconstante 1 maar bij een regelmatige vijfhoek ziet het er wat minder leuk uit. Kijk even hoe dat gaat met een regelmatige  $n$ -hoek.

Haar aanpak kwam op het volgende neer:

De lengtes van twee zijden van de witte driehoek zijn te berekenen en de ingeklemde hoek is zestig graden. Dit vraagt om het toepassen van de cosinusregel. 'Maar zijn die lengtes wel nodig?', kun je je afvragen. De mooie oppervlakte-eigenschap van een gelijkzijdige driehoek heb je nu wel nodig. We voeren wat letters in voor de lengtes van de zijden. Zie tabel 1.

| driehoek    | blauw klein | blauw groot |
|-------------|-------------|-------------|
| zijde       | $a$         | $b$         |
| oppervlakte | 4           | 9           |

tabel 1



Cosinusregel toegepast in de witte driehoek geeft:  
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(60^\circ)$  en  $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ .

Deel alle termen door  $b^2$ :  $\frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} + 1 - \frac{a}{b}$  (1)

(Je kunt natuurlijk ook delen door  $a^2$ ). Merk op dat de oppervlaktes van de drie gelijkzijdige driehoeken zich verhouden als de kwadraten van hun zijden. De oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek is een constante vermenigvuldigd met het kwadraat van de lengte van een zijde. Vergelijking (1) kunnen we vervangen door  $\frac{c^2}{b^2} = \frac{4}{9} + 1 - \frac{a}{b}$ . Verder invullen geeft

$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{13}{9} - \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{13}{9} - \frac{2}{3} = \frac{7}{9}.$$

$$\frac{\text{opp(rood)}}{\text{opp(blauw groot)}} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{7}{9}.$$

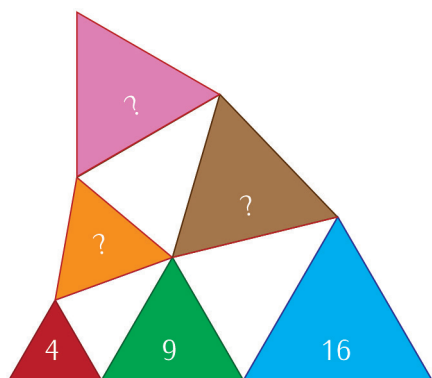
Gegeven is  $\text{opp(blauw groot)} = 9$ .

Dus  $\text{opp(rood)} = 7$ .

Vanaf nu, zie (1), spreek ik van de *bijgestelde cosinusregel*.

## Nog meer gelijkzijdige driehoeken

Een aardig vervolg op het internetprobleem zie je in figuur 5. Let ook op de onderste rij met drie kwadraten. Je voelt wel aan, er moet ergens een patroon zijn. Is er een algoritme? Dat zoeken we uit.



figuur 5

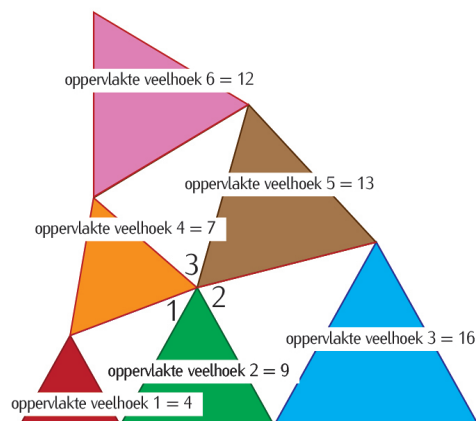
Het geheim zit in vergelijking (1). Oppervlakte 'oranje' is 7, dat hebben we al gezien. We gebruiken nu kleuren om oppervlakten aan te duiden.

We gaan aan de slag met groen en blauw om bruin te

vinden:  $\frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} + 1 - \frac{a}{b}$ .

$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{9}{16} + 1 - \frac{3}{4} = \frac{13}{16}.$$

We nemen wel  $a < b$ .  $\text{Opp(blauw)} = 16$  dus  $\text{opp(bruin)} = 13$ . Het is aardig om het bouwspel in figuur 5 in GeoGebra zelf te construeren. Met de oppervlaktebutton krijg je voor de roze driehoek een oppervlakte van 12, zie figuur 6. Bij het gemeenschappelijk hoekpunt van drie gelijkzijdige driehoeken zetten we bij de drie witte hoeken de nummers 1, 2 en 3. Samen zijn die drie hoeken  $180^\circ$  graden maar hoek 3 is geen zestig graden!



figuur 6

Je kunt snel nagaan dat  $\cos(\angle 1) = \frac{2}{\sqrt{7}}$  met de

bijgestelde cosinusregel en  $\sin(\angle 1) = \sqrt{\frac{3}{7}}$

en verder dat  $\cos(\angle 2) = \frac{1}{\sqrt{13}}$  en  $\sin(\angle 1) = \sqrt{\frac{12}{13}}$ .

Dan passen we een gonio-verschilformule toe. Het gaat om de regel:

$$\cos(p - q) = \cos(p) \cdot \cos(q) + \sin(p) \cdot \sin(q).$$

$$\cos(\angle 3) = \cos((180^\circ - \angle 1) - \angle 2) = -\cos(\angle 1) \cdot \cos(\angle 2) + \sin(\angle 1) \cdot \sin(\angle 2).$$

Na invullen geeft dat  $\frac{4}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{13}}$ .

Met het terugkerend algoritme vind je dan:

$$\frac{\text{opp(rose)}}{13} = \frac{7}{13} + 1 - 2 \sqrt{\frac{7}{13}} \cdot \left( \sqrt{\frac{4}{7 \cdot 13}} \right) =$$

$$\frac{20}{13} - \frac{8}{13} = \frac{12}{13}$$

Dus de oppervlakte van de roze driehoek is exact 12. Deze berekening heb ik uiteraard niet met Sabine uitgevoerd.

## Nog veel meer gelijkzijdige driehoeken

Zie figuur 7, we breiden het bouwsel van figuur 5 verder uit. Wel met andere kleuren.



figuur 7

Kijk naar de rode gelijkzijdige driehoeken op een horizontale lijn. Voor de oppervlakten kiezen we de kwadraten vanaf 1. We maken een nieuwe rij blauwe gelijkzijdige driehoeken. De bases van deze driehoeken zijn niet meer een deel van eenzelfde rechte lijn. Elke blauwe driehoek heeft twee rode pijlers. Er geldt nu dat:

$$\frac{\text{opp}(\text{blauw})}{\text{opp}(\text{rodepijler rechts})} = \frac{\text{opp}(\text{rodepijler links})}{\text{opp}(\text{rodepijler rechts})} + 1 - \sqrt{\frac{\text{opp}(\text{rodepijler links})}{\text{opp}(\text{rodepijler rechts})}}$$

We gaan over tot rijen en termen, zie tabel 2.

|       | $b_0$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ | $b_6$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | 1     | 3     | 7     | 13    | 21    | 31    | 43    |
| 0     | 1     | 4     | 9     | 16    | 25    | 36    | 49    |
| $r_0$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_4$ | $r_5$ | $r_6$ | $r_7$ |

tabel 2

Het algoritme in rijtermen:

$$\frac{b_n}{r_{n+1}} = \frac{r_n}{r_{n+1}} + 1 - \sqrt{\frac{r_n}{r_{n+1}}}$$

Bij de blauwe rij zien we dat het verschil van de verschillen constant is en wel 2. Dat er sprake is van een kwadratisch verband, zal je niet verbazen.

We vullen in:

$$\frac{b_n}{r_{n+1}} = \frac{r_n}{r_{n+1}} + 1 - \sqrt{\frac{r_n}{r_{n+1}}}$$

en dat geeft

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{(n+1)^2} &= \frac{n^2}{(n+1)^2} + 1 - \frac{n}{n+1} = \\ \frac{n^2 + (n+1)^2 - n(n+1)}{(n+1)^2} &= \frac{n^2 + n + 1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

Dus  $b_n = n^2 + n + 1$ .

## Tot slot

Een uitdaging voor de lezer is, om meer vragen te verzinnen bij de stapeling in figuur 7. Laat het ons horen. Hoe het verder is gegaan met examenkandidaat Sabine? Ze meldde mij met trots dat ze in mei 2024 meteen geslaagd was met een gemiddelde van 6,4 voor wiskunde.

## Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde. Hij is sinds 2014 met pensioen.  
E-mailadres: [jacques.jansen@wx.nl](mailto:jacques.jansen@wx.nl)

# Wie B zei, moest ook A zeggen

Van de vele curriculumvernieuwingen wiskunde die er in de afgelopen 100 jaar hebben plaatsgevonden, heeft het innovatieproject 'Hewet', misschien wel de meeste (leer)stof doen opwaaien ...



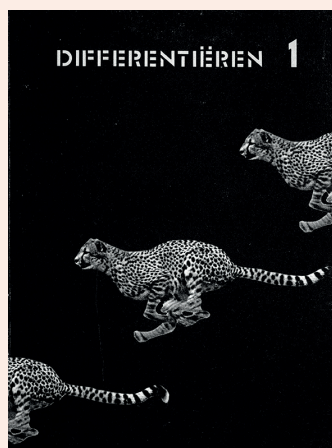
1980

Met Jan de Lange, Frederik van der Blij en Joop van Dormolen sta ik in Rotterdam voor een groep van ruim honderd wiskundeleraren om de Hewet te verkondigen. Het is nog een rustige tijd: geen 'aaifoons', geen 'socials'. En korte lontjes, ... wat bedoel je?

Toch wordt er op een zeker moment door een paar leraren hard geroepen; 'maar dáár heb ik geen wiskunde voor gestudeerd'.

We beheersen ons met enige moeite en Joop van Dormolen wijst onder meer op de mogelijkheid (morele plicht?) van nascholing. Na afloop komt er een aantal leraren langs om ons moed in spreken: ga vooral zo door, wij zien het wél zitten.

Ook in andere plaatsen die we aandeden op onze tournee, klonk soms harde kritiek en grondige twijfel ten aanzien van de wiskunde-A-nieuwlichterij. In Zwolle zit, als wij de zaal binnenkomen, een leraar te zwaaien met een door het IOWO<sup>[1]</sup> in 1979 ontwikkeld en uitgegeven pakketje *Differentiëren, een manier om veranderingen bij te houden*. Voor iedereen hoorbaar klonk het: *de eerste 45 bladzijden kun je overslaan!*



figuur 1 *Differentiëren, een manier om veranderingen bij te houden.*<sup>[2]</sup>

Voor die leraar was differentiëren kennelijk vooral een algebräische truc want op bladzij 46 werd de regel  $x^2$  gedifferentieerd geeft  $2x$  behandeld. Aan de uitvoerige en contextrijke aanloop (groeiprocessen, snelheidsgrafieken, meten van hellingen, vrije val, ...) hechtte hij blijkbaar geen waarde.

Dat grondige nascholing hard nodig zou zijn, werd allengs duidelijker en gelukkig kon het ministerie worden overtuigd van de noodzaak ervan. Van die latere nascholing (Zestien bijeenkomsten van drie uur in één jaar!) herinner ik me een voorval op zo'n cursus die ik samen met een collega gaf in Utrecht. Bij het voorstellingsrondje was er een eerlijke leraar: *ik moet hier naar toe van mijn rector, maar ik zie er niks in*. Na acht sessies sprak hij me aan: *'ik ben helemaal om'*. Wiskunde A, even wennen...

## Wat voorafging

Met de Mammoetwet In 1968 kwamen de 'kruisjeslijsten' voor toelating tot het hoger onderwijs. Vóór 1968 kende men in de bovenbouw van het toenmalige vmo<sup>[3]</sup> vier



keuzepakketten: hbs A en B, en gymnasium  $\alpha$  en  $\beta$ , die toegang tot het hoger onderwijs gaven. Na 1968 werd het aantal examenvakken voor vwo bijna gehalveerd en was er opeens van alles mogelijk op het gebied van vakkenkeuze. Het gevolg was dat er lijsten verschenen waarop de voor de verschillende studierichtingen vereiste vakken waren aangekruist. En nu bleek dat vakken als 'geschiedenis' en 'sociale wetenschappen', die bepaald geen exact imago hebben, om wiskunde I in het vakkenpakket vroegen. Wiskunde I bestond uit twee componenten: *analyse* en *statistiek & kansrekening*.

Dat die tweede component goed van pas zou komen bij bijna elke studierichting, akkoord, maar hoezo differentiëren, integreren en differentiaalvergelijkingen als je geschiedenis studeert? Daar kwam nog bij dat het domein 'analyse' in het vwo-programma een stuk uitgebreider was dan voorheen bij gymnasium  $\beta$  of hbs B. Kommer en kwel dus voor een forse groep vwo-leerlingen en bij de eerste examens wiskunde I regende het onvoldoendes. Op O&W luidde de alarmbel en de gedachten gingen al snel uit naar een nieuw eindexamenvak dat adequaat zou moeten zijn voor de groep leerlingen met een  $\alpha$ - of  $\gamma$ -profiel. Naast wiskunde I bestond er ook een vak wiskunde II, bedoeld voor leerlingen die mikten op een exacte studie en dat door de drie Technische Universiteiten op hun verlanglijstje was aangekruist. Van het bestaansrecht daarvan was iedereen wel overtuigd, maar ten aanzien van de inhoud verschilden de meningen. Met name door TU-docenten werd na de eerste 'mammoet-examens' een ernstig tekort aan ruimtelijk inzicht bij de studenten geconstateerd en was er een zekere heimwee naar de stereometrie van voorheen.

## Drie is te veel

Wat het ministerie pertinent niet wilde was een wiskunde III. Dat was al eerder gebleken (in 1967) na het indienen van een rapport van de CMLW<sup>[4]</sup> m.b.t. de invulling van de curricula voor de nieuwe wiskunde. Deze zogenoemde discussienota voorzag de problemen die zouden kunnen ontstaan voor  $\alpha$ - of  $\gamma$ -gerichte leerlingen. En er werd ook een voorstel voor een mogelijke invulling van een derde programma in de discussie betrokken. Ik volg hier de letterlijke tekst uit dat rapport:

*De Commissie is van oordeel dat het zowel om onderwijskundige redenen, en hierbij wordt gedacht aan homogeniteit van de leerlingen met betrekking tot aanleg en interesse, als om redenen betreffende de keuze van geschikte leerstof, gewenst is de mogelijkheid te scheppen voor die leerlingen van het atheneum A voor wie het*

*wiskundeonderwijs afloopt (en die dus niet wiskunde I als keuzevak nemen) een apart programma aan te bieden. Dit programma moet aangepast zijn aan de capaciteiten van de leerlingen, moet voor hen vanuit maatschappelijk oogpunt noodzakelijke leerstof bevatten en bovendien een afgerond geheel vormen.*

Maar drie bovenbouwwakken wiskunde, dat ging toch te ver, en dat vond men tien jaar later nog zo op het ministerie.

## Uit het Hewet-rapport

De oplossing werd gezocht in wat een 'herverkaveling' werd genoemd en de voorgestelde innovatieoperatie kreeg daarom de naam 'Herverkaveling Wiskunde Eén en Twee', kortweg *Hewet*.

Er werd een werkgroep van advies benoemd, waarin vertegenwoordigers van de onderwijsinspectie, de NVvW en het hoger onderwijs zitting hadden. Ter ondersteuning waren drie medewerkers van het IOWO<sup>[5]</sup> uitgenodigd die deskundig werden geacht op het gebied van leerplanontwikkeling. Het werk van deze 'Hewet-commissie' werd afgerond met het 'Hewet-rapport' dat na raadpleging van zowel het vwo-onderwijsveld als de vervolgopleidingen in 1980 werd uitgebracht. Naast een beschrijving van een vijfjarig (!) innovatietraject kon men in dit rapport een aanduiding vinden van de inhoud van het nieuwe vak wiskunde A en van de ruimtemeetskunde die in wiskunde B, naast de analyse van wiskunde I, zou worden opgenomen als vervanging van de kansrekening en statistiek. Over de *geest* van wiskunde A kon men er deze 'veelbelovende' volzinnen aantreffen:

*Dit betekent dat de leerlingen in hun onderwijs de waarde van een wiskundig getinte presentatie moeten leren beoordelen. Daarvoor zullen ze vertrouwd moeten raken met gangbaar wiskundig taalgebruik, met formuleringen in formuletaal en met uiteenlopende vormen van grafische representatie. Verder moeten ze leren werken met wiskundige modellen en de relevantie van die modellen kunnen beoordelen.*

De vier voorgestelde (en later gerealiseerde) domeinen van wiskunde A waren:

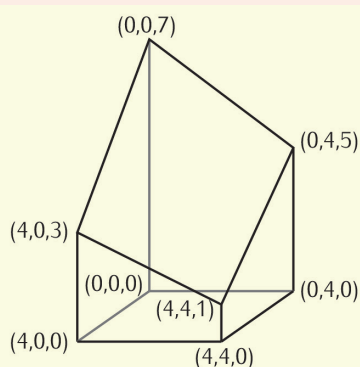
- 1 eenvoudige en toegepaste analyse
- 2 matrixrekening met toepassingen
- 3 kansrekening en statistiek
- 4 automatische gegevensverwerking

>

De toelichtingen bij deze leerstofgebieden waren summier. Bij het geplande vijfjarige invoeringsproject zou wel blijken welke onderdelen geschikt cq wenselijk zouden zijn. En de ontwerpers van de experimentele teksten zouden een behoorlijke mate van vrijheid krijgen om 'vakken te vullen'.

Ten aanzien van wiskunde B behelsde het rapport een uitgebreide toelichting van de beoogde ruimtemeetkunde die je als een soort fusie van de stereometrie (van voor 1968) met de in wiskunde II ingeburgerde vectormeetkunde zou kunnen zien.

De betreffende paragraaf hierover in het Hewet-rapport bevatte een aantal concrete voorbeelden, waarvan ik er hier eentje laat zien in figuur 2.



Gegeven een bouwwerk dat de vorm heeft van een afgeknot prisma en dat rust op het  $XOY$ -vlak. Van de top  $(0,0,7)$  van het bouwwerk laat men een knikker naar beneden rollen. Waar verlaat de knikker het dak?

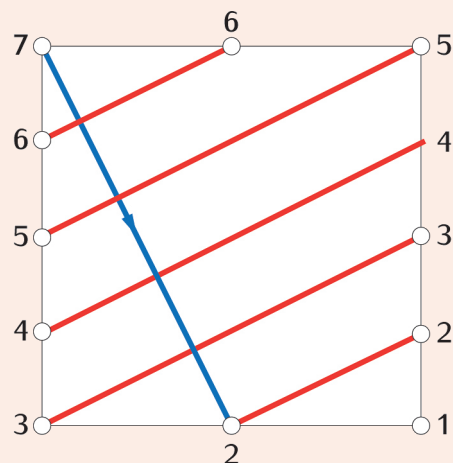
figuur 2

Het commentaar bij dit voorbeeld luidde:

*Het is zaak de loodlijn te vinden die uit  $(0, 0, 7)$  op de snijlijn van het dakvlak met het grondvlak getrokken wordt.*

*Via de bekende berekeningen met normaalvector e.d. kan men de richting van de knikker uitrekenen, maar het idee dat men zo moet handelen, krijgt men niet zonder tekening. Overigens kan men ook een oplossing van dit probleem krijgen, die wel zo aardig is, door in het grondvlak hoogtelijnen van het dak te tekenen. Zoals men uit de hoogtelijnen op een landkaart de loop van een riviertje kan afleiden, zo kan men hier de (projectie van) de baan van de knikker vinden.*

Bij de hier gesuggereerde tweede oplossing past dan dit plaatje, zie figuur 3.



figuur 3

Ik merk op dat het werken met 'hoogtekaartjes' ook bij wiskunde A een tijdlang een mooie rol zou spelen. Denk maar aan lineair programmeren, wat, zoals in de lespraktijk bleek, een vorm van modelleren was die leerlingen zelfstandig en met begrip konden uitvoeren.

## Drietrapsraket

Het ontwikkeltraject van wiskunde A (en B) vond plaats in drie fasen.

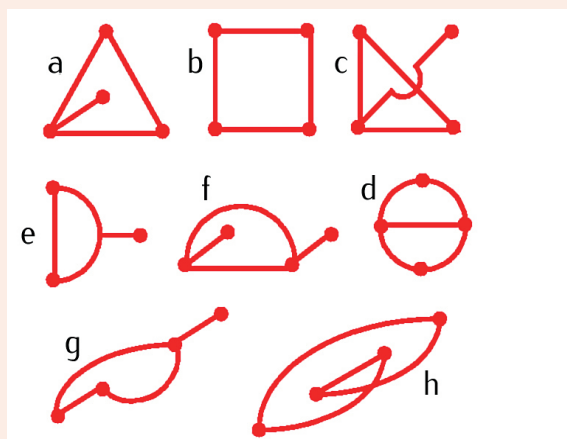
- 1 *Leerstofexperiment op twee scholen en oriëntatie op toekomstige nascholing.*
- 2 *Uitbreiding naar twaalf scholen, eerste nascholing op beperkte schaal.*
- 3 *Uitbreiding naar 51 scholen, landelijke nascholing.*

In de fasen (1) en (2) werd er uitsluitend gewerkt met de experimentele teksten, ontworpen door het Hewet-team.<sup>[6]</sup> In fase (3) was er één school waar andere teksten werden gebruikt. Na de landelijke invoering zou de commerciële boekenmarkt weer zijn oude rol gaan opeisen.

De ervaringen op de twee pioniersscholen (het Lorentz Lyceum, thans Het Schoter, te Haarlem en het Liemers College te Zevenaar) waren positief en de contouren van het nieuwe curriculum werden duidelijk zichtbaar. Vooral de domeinen 'Grafen en Matrices' (G&M) en 'Lineair Programmeren' (LP) bleken prima te voldoen.

Figuur 4 is ontleend aan het Hewet-pakketje *Matrices*. De vraag luidde: welke van de grafen zijn equivalent met de graaf a?

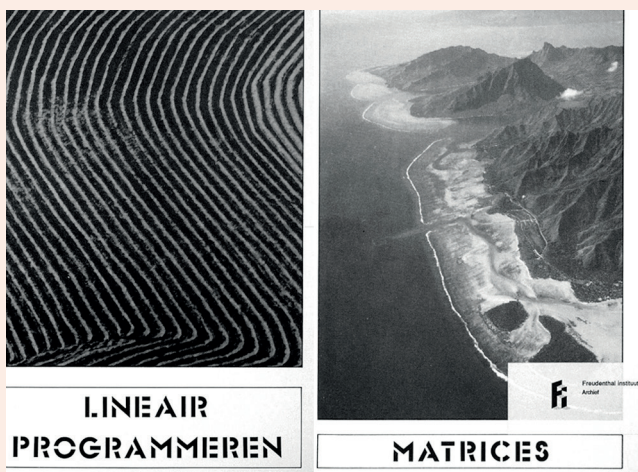
Een vervolgvraag in de les was: stel nu bij elk van de grafen een verbindingsmatrix op. Het klapstuk van G&M in het oorspronkelijke Hewet-boek was de 'Jacht op de klampmuts' waarbij een zogeheten Leslie-matrix een rol



figuur 4

speelde bij de populatievoorspelling van een robbensoort en waarbij gebruik werd gemaakt van echte gegevens uit een recent wetenschappelijk onderzoek, en – het is ruim veertig jaar geleden! – waarbij in de lespraktijk ook de computer werd gebruikt.

Bij 'LP' werd aanvankelijk nog gemikt op hogere dimensies ('simplexmethode') maar ten slotte werd dit beperkt tot twee- en driedimensionale modellen, waarbij met name transportproblemen een mooie rol speelden.<sup>[7]</sup>



figuur 5 Alle historische Hewet-pakketjes zijn te downloaden<sup>[8]</sup>

Naast het experiment met wiskunde A in het eerste Hewet-jaar op de pioniersscholen in Haarlem en Zevenaar werd op scholen in Wageningen en Rotterdam in 1981/82 geëxperimenteerd met een proeve van ruimtemeetkunde als vervanging van de vectormeetkunde van wiskunde II. Als derde activiteit in die eerste fase werd in het voorjaar '82 contact gelegd met een te vormen kadergroep: didactici van vijf universiteiten<sup>[9]</sup>, om plannen te maken voor de toekomstige landelijke nascholing.

## Proefexamens

In het cursusjaar 1982/83 vond het eerste proefexamen plaats op de twee scholen. In *Euclides* 1983/84 nr. 3 zijn de opgaven te vinden van dit eerste Nederlandse contextgeoriënteerde wiskunde-examen. Het examen werd besproken door Pieter de Roest, die zijn stukje begint met de opmerking 'Eindelijk iets concreets van de Hewet'. De informatie naar het veld over het project vond destijds voornamelijk plaats in het tijdschrift de *Nieuwe Wiskrant*<sup>[10]</sup> en niet of nauwelijks in *Euclides*. Dat Pieter vooralsnog weinig ophad met wiskunde A blijkt uit zijn slotcommentaar waarin hij refereert aan het gezegde 'schoenmaker blijf bij je leest', ofwel 'waag je als wiskunde-leraar liever niet aan toegepaste wiskunde'. Er was nog een lange weg te gaan voor Hewet ...

## Nascholing

De nascholing was een belangrijke component van Hewet. In 1982/83 werd een eerste proefcursus gegeven. Deelnemers waren de leraren van de beoogde tien volgscholen en wiskundendidactici uit Eindhoven, Groningen, Amsterdam en Delft. Aan het eind van die cursus namen leerlingen van de beide pioniersscholen plaats in een forum onder leiding van de betrokken leraren (Cees Lagerwaard en Wim Kremers) om vragen te beantwoorden van de leraren van de volgscholen.

**“Bij wiskunde A moet je over elke vraag goed nadenken!”**

Het experimentele eindexamen was inmiddels achter de rug. Het niveau van de forumleerlingen was gespreid, geen acht bollebozen! Maar een betere reclame voor wiskunde A had het Hewet-team zich niet kunnen wensen! Eén van de leerlingen reageerde op de vraag 'Wat vind je anders aan wiskunde A in vergelijking met de wiskunde die je tot nu toe hebt gehad?' als volgt.

*Ik kwam van de havo en daar had je allemaal van die rijtjes sommen, van a tot en met h, dan keek ik of ik 'de laatste, kon maken en als dat zo was, dan hoefde ik de andere zeven dus niet meer te doen. Maar bij wiskunde A kan dat niet, dan moet je over elke vraag goed nadenken!*

Hier was duidelijk sprake van een verwarring van inhoud en didactiek, maar het klonk de ontwerpers als muziek in de oren ...

>

De gehele sessie werd op video opgenomen om later bij sommige andere nascholingsbijeenkomsten te kunnen worden vertoond. In 1983/84 waren er al negen nascholingsgoepen, in Delft, Eindhoven, Haarlem, Heerenveen, Utrecht en Zwolle, waaraan voornamelijk werd deelgenomen door leraren van de 39 derdefasescholen. Later in dat schooljaar waren er ook nog cursussen in Amsterdam en Enschede. Het streven van het Hewet-team om iedere cursus te laten geven door een vakdidacticus en een leraar (beloond met taakuren) uit een van de twaalf voorloopscholen mislukte om rechtspositionele redenen (er konden geen taakuren worden toegekend voor werk *buiten* de school).

Een door de deelnemers zeer gewaardeerde activiteit, was het uitwisselen van proefwerken hetgeen mede leidde tot de uitgave van vijf bundels *Hewet & Toets* met artikelen, proefwerken, schoolonderzoeken en examens voor wiskunde A en B. In elk van de schooljaren 1984/85 en 1985/86 werden er liefst 32 nascholingscursussen gegeven, gespreid over het land.

## De idealen van wiskunde A

In 1987 schreef Jan van de Craats in *NRC Handelsblad*: *Misschien is de nadruk op het gezonde verstand en het ontwikkelen van een kritische houding wel het meest essentiële facet van wiskunde A. Geen catechismus leren, maar nadenken.* Tja ...

Wiskunde A heeft de 'tand des tijds' tot nu min of meer doorstaan, maar van de idealen van toen is weinig meer over. Zo is het domein Matrixrekening met toepassingen een veel te vroege dood gestorven. Dat gebeurde rondom de invoering van de 'nieuwe tweede fase' in 1998.

In het eindverslag van het Hewet-project (1987) viel te lezen:

*De onderwerpen matrixrekening en lineair programmeren passen heel mooi in de filosofie van wat wiskunde A zou moeten zijn. Omdat de wiskundige structuur van deze onderwerpen betrekkelijk overzichtelijk is, kan alle aandacht worden gevestigd op het modelleren en mathematiseren. Een pluspunt is ook dat deze onderwerpen toepasbaar zijn in zeer gevarieerde situaties.*

Mooie voorbeelden van toegepaste matrixrekening zijn te vinden in het proefschrift van Jan de Lange.<sup>[11]</sup> Veel van de idealen van wiskunde A zijn later gerealiseerd in de wiskunde Olympiade die gebleken is ook een mooi Nederlands exportproduct te zijn.

## Noten

- [1] Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs, (1971–1980). Na de opheffing in 1980 werd een deel van het werk voortgezet in de vakgroep OW&OC (Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijs Computercentrum) van de UU, later omgedoopt tot Freudenthal Instituut.
- [2] Hier te downloaden: <https://objects.library.uu.nl/reader/index.php?obj=1874-10260&lan=en>
- [3] Voortgezet Hoger en Middelbaar Onderwijs
- [4] Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde
- [5] Jan de Lange Jzn, Guus Vonk en Martin Kindt.
- [6] Zie [4], maar aangevuld met Heleen Verhage.
- [7] Zie Lineair Programmeren, in het bijzonder transportproblemen, CWI Vacantiecursus 1986
- [8] Alle oorspronkelijke Hewet-pakketten zijn hier te downloaden: <https://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/subsets/hewet/>
- [9] Didactiekdocenten van de universiteiten te Groningen, Utrecht, Leiden, Delft en Eindhoven.
- [10] De *Nieuwe Wiskrant*, tijdschrift van OW&OC, later het FI, dat bestond van 1981 tot 2013. Zie: [https://www.fi.uu.nl/wiskrant/bij\\_de\\_nummers/welkom\\_nummers.html](https://www.fi.uu.nl/wiskrant/bij_de_nummers/welkom_nummers.html)
- [11] J. de Lange Jzn, Mathematics, *Insight and Meaning*, Vakgroep OW&OC, UU 1987. Zie: [https://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/1987\\_lange\\_dissertation.pdf](https://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/1987_lange_dissertation.pdf)

## Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: [M.Kindt@uu.nl](mailto:M.Kindt@uu.nl)



# Welk wiskundeonderwijs aan meisjes?

## Meer dan 100 jaar een vraag

In het kader van 100 jaar *Euclides* en 100 jaar NVvW duiken we in het verleden, op zoek naar gebeurtenissen en personen die nu nog relevant zijn, mede aan de hand van de publicaties daarover in *Euclides*. Wiskundeonderwijs aan meisjes was lang een onderwerp van veel discussie, evenals de vraag wat voor middelbaar onderwijs nu eigenlijk geschikt was voor meisjes.



### Deventer als voorbeeld

Ik heb de minderwaardigheid der meisjes op het gebied der wiskunde-studie niet kunnen constateren; wat een groot deel harer wel erg in den weg staat, is een gemis aan zelfvertrouwen.

figuur 1 Uit H.J.E. Beth 'Het Bijvoegsel bij het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde' 1924

Toen hij dit schreef was H.J.E. Beth zowel directeur van de Rijks hbs in Deventer als wiskundedocent. Hij kon dus met enige kennis van zaken spreken, want op de hbs in Deventer waren sinds 1916 meisjes toelaatbaar tot de eerste klas.

De gang van zaken in Deventer illustreert zo'n beetje de situatie rond wiskunde voor meisjes in het middelbaar (of voortgezet) onderwijs eind 19e, begin 20e eeuw.

De meisjes-hbs in Deventer was op verzoek van gegoede burgers opgericht in 1872, acht jaar na de start van de gemeentelijke hbs, waar geen meisjes werden toegelaten. 'Hbs' voor meisjes was een wat misleidende naam, het leerplan verschilde nogal van dat van de 'echte'

hbs. In volgorde van belangrijkheid waren de vakken: moderne talen en literatuur, geschiedenis, aardrijkskunde, boekhouden, staathuishoudkunde, biologie en gezondheid, kunstgeschiedenis, tekenen, gymnastiek, scheikunde, natuurkunde en wiskunde. Wiskunde stond op de laatste plaats. De school was aanvankelijk driejarig, later vierjarig en er waren geen centrale examens.

Er was al voor 1916 geprobeerd om de gemeentelijke hbs ook voor meisjes toegankelijk te maken, immers vanaf 1906 waren meisjes toelaatbaar tot alle Rijks hbs-en en gymnasia. De toenmalige directeur, dr. J.J. Leroy, wilde meisjes pas vanaf het derde leerjaar toelaten, hij had uit goede bron vernomen dat meisjes slechter waren in wiskunde. Als ze vanaf het eerste leerjaar in de klas zaten zouden ze de lessen waarschijnlijk afremmen. De meisjes die naar de jongens-hbs wilden konden op de meisjes-hbs extra lessen wiskunde volgen. Nadat Leroy in 1915 met pensioen ging, werden meisjes vanaf het eerste leerjaar toegelaten. Tegelijkertijd bleef de meisjesschool bestaan, vanaf 1928 als vijfjarige mms (middelbare meisjesschool), tot de opheffing van alle mms-en en hbs-en in 1968. Voor de leerlingen van de mms was een diepgaand wiskunde-programma niet nodig of zelfs schadelijk, was een tamelijk veel voorkomende gedachte.

Wiskundeonderwijs aan meisjes was al heel lang een onderwerp van veel discussie, evenals de vraag wat voor middelbaar onderwijs nu eigenlijk geschikt was voor meisjes. Daaruit volgden vragen zoals: Konden meisjes niet beter les krijgen van vrouwen? Welke vrouwen konden dan wiskunde geven? Wat moe(s)ten vrouwen eigenlijk met wiskunde?

### Wiskundeonderwijs aan meisjes?

Vanaf ongeveer het midden van de 19<sup>e</sup> eeuw was er publiek debat over middelbaar onderwijs voor meisjes

>

en in het verlengde daarvan ook over twee hoofdvragen: Is wiskundeonderwijs wenselijk voor meisjes? Hebben meisjes de benodigde capaciteiten voor wiskunde? Het debat betrof overigens de meisjes uit de midden- en hogere klassen. De laagste klasse moest gewoon zo spoedig mogelijk aan het werk en bleef vaak uit pure noodzaak betaald werk doen na het huwelijk. Over het algemeen vond men middelbaar onderwijs voor meisjes wenselijk. Echter, over de doelstellingen, de vakken en specifiek over wiskunde waren er nogal wat verschillende opvattingen. Onderwijs voor jongens moest zowel algemene vorming bieden als voorbereiden op een beroep, waarmee ze zichzelf en later hun gezin konden onderhouden. Wat betreft meisjes was een gangbare opvatting dat ze ook algemene vorming moesten krijgen. Het doel van dat onderwijs zou voorbereiding op hun leven als gehuwde vrouw zijn. Dat wil zeggen de steun en toeverlaat van haar echtgenoot, een goede huisvrouw en liefdevolle verzorger en opvoeder van de kinderen. Een tweede standpunt was, dat meisjes middelbaar onderwijs moesten krijgen ter voorbereiding op een huwelijk, maar ook ter voorbereiding op een vrouwelijk beroep. Een tweesporenbeleid dus, immers het kwam voor dat meisjes niet trouwden of dat ze als weduwe onverzorgd achterbleven.<sup>[1]</sup>

Wiskundeonderwijs had altijd al een praktisch aspect, het was bruikbaar in veel beroepen. Dat wiskundeonderwijs ook vormende waarde had, werd vanaf de 18<sup>e</sup> eeuw een geleidelijk invloedrijker idee. De ontwikkeling van het logisch denken werd erdoor gestimuleerd en dat zou doorwerken in andere aspecten van het leven.<sup>[2]</sup> Als meisjes zich alleen dienden voor te bereiden op een leven als huisvrouw en moeder, was rekenen en misschien wat boekhouden voldoende in het middelbaar meisjesonderwijs. Als ze zich ook moesten voorbereiden op een beroep dan was een beetje algebra en wat meetkunde handig. Dan konden ze onder meer hun bevoegdheid voor onderwijzeres halen. Dat beroep was zeer geschikt voor vrouwen, bovendien waren er na 1857 tekorten ontstaan. In de wet op lager onderwijs van 1857 was namelijk onder meer de maximale groepsgrootte omlaag gebracht en het aantal vakken was uitgebreid.<sup>[3]</sup>

Over de vraag of meisjes wel geschikt waren om logisch te denken en wiskunde te leren ontstond vooral discussie na invoering van de wet op het middelbaar onderwijs (1863). Die wet maakte onder meer de hbs mogelijk. Aan dat type middelbare school bestond grote behoefte. Tussen 1865 en 1885 werden 37 hbs-en met vijfjarige cursus opgericht, in 1925 waren het er 116, alle gesubsidieerd door de overheid. De hbs had als doel algemene vorming en voorbereiding op technische studies en hogere posities

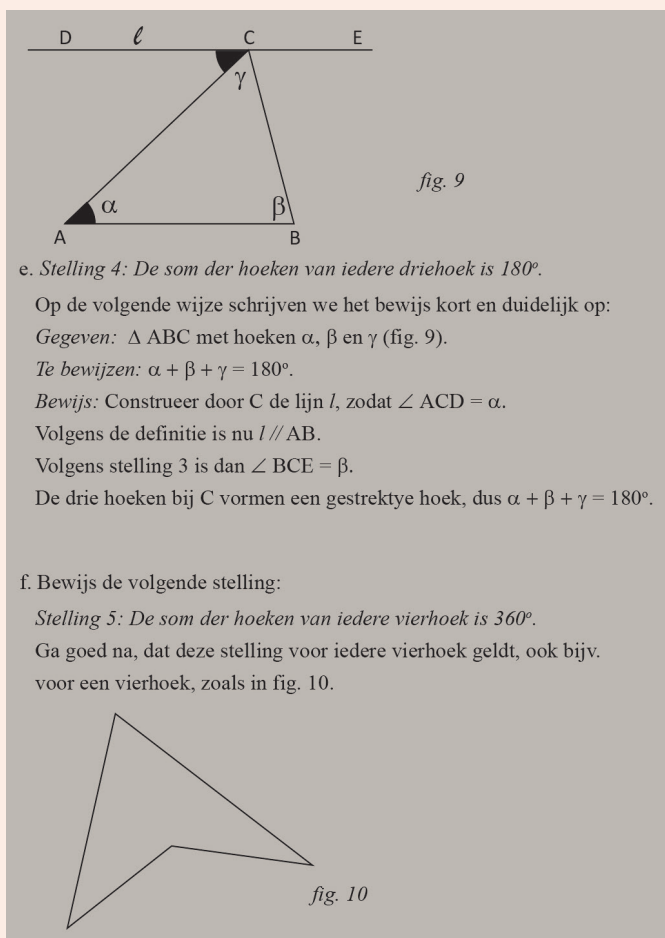
in industrie en administratie. Het programma was breed, met veel uren voor wiskunde, natuurwetenschappen en moderne vreemde talen en het werd afgesloten met een landelijk examen. Het was vanzelfsprekend een school die bedoeld was voor jongens.

Aan onderwijs voor meisjes besteedde de wet niet echt aandacht; als burgers of gemeenten meisjesscholen wilden oprichten, was dat hun verantwoordelijkheid.

## Middelbare meisjesscholen: mms

Er was vanuit de maatschappij wel degelijk vraag naar middelbaar onderwijs voor meisjes. Al in 1867 werd de eerste middelbare meisjesschool opgericht in Haarlem, op initiatief van burgers en gemeentebestuur. Advies over het te geven onderwijs kwam van niemand minder dan de invloedrijke inspecteur voor het Middelbaar Onderwijs, dr. Steyn Parvé, zelf gepromoveerd wiskundige. Hij was van mening dat meisjes, op aparte meisjesscholen, ook moesten leren om logisch te denken. Daarvoor achtte hij meetkunde bij uitstek geschikt. Het programma van deze eerste middelbare school voor meisjes was enigszins vergelijkbaar met dat van de hbs, maar minder diepgaand. Wiskunde werd drie uur per week gegeven, met de nadruk op meetkunde, zij het in beperkte mate. In 1881 was het aantal middelbare meisjesscholen gegroeid tot twaalf. Omdat er geen voorschriften waren voor het leerplan en geen landelijk examen verschilden de scholen nogal in aanbod. De school in Amsterdam bijvoorbeeld legde de nadruk vooral op esthetische vorming. Alle meisjes-scholen hadden wel handwerken op het rooster staan. Talen namen de meeste uren in beslag, wiskunde en boekhouden stonden ook op het rooster, maar het aantal uren voor wiskunde verminderde in de loop der jaren op de meeste meisjesscholen. Wiskunde bestond uit rekenen, wat algebra en wat meetkunde. Een aantal scholen kreeg tot 1886 een bescheiden subsidie van het Rijk, in dat jaar werd om politieke redenen de subsidie voor meisjes-scholen afgeschaft.

Desondanks handhaafden de mms-en zich, het aantal nam zelfs toe. In 1925 waren het er 19 en in 1962 maar liefst 177. In de jaren '50 en '60 van de 20<sup>e</sup> eeuw groeide het aantal meisjesscholen fors, vaak als afdeling van een hbs, lyceum of gymnasium. Om iets te doen aan de grote verschillen tussen de scholen stelde in 1924 een aantal schoolleiders zelf een gemeenschappelijk leerplan op. Invoering van deze lessentabel was op vrijwillige basis. Vanaf 1949 was er een wettelijke regeling, met een lessentabel, een eindexamenreglement en financiering door het Rijk.



figuur 2 Hiele-Geldof & Krooshof (1962). Wiskunde voor de MMS, dl.3

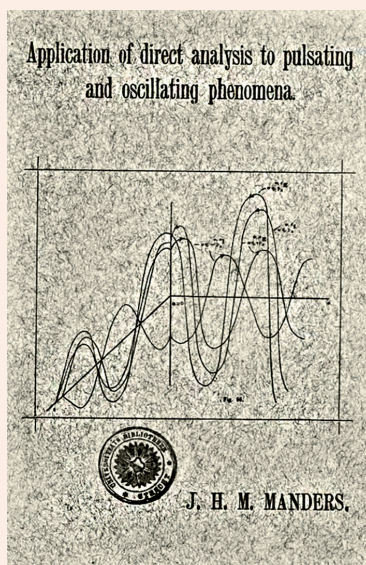
Het eindexamen omvatte de vier moderne talen, geschiedenis en aardrijkskunde. Wiskunde was toen meestal beperkt tot de eerste twee of drie jaar. Tijdens een conferentie in 1953 benadrukte ir. Landeweer, docent op een mms, dat het belangrijk was het peil van wiskunde-onderwijs niet verder te verlagen. Een aantal meisjes zou een opleiding als analist volgen, waarvoor wiskundige kennis noodzakelijk was. Anderen gingen naar de onderwijzersopleiding, gebrekkige wiskundige kennis zou onderwijzeressen opleveren die slecht rekenonderwijs zouden geven.<sup>[4]</sup> De mms had zich ontwikkeld tot een populair schooltype, dat algemene vorming bood en voorbereide op onder meer talenstudies, kunstgeschiedenis en een beperkt aantal beroepen, zoals onderwijs, administratie en verpleging. Er werd beperkt wiskunde onderwezen.

## Hbs voor en met meisjes

In de 'verslagen van de in 1911 gehouden eindexamens voor de hogere burgerscholen met vijfjarig cursus'

(Staten Generaal Digitaal 1912-1913) staat het volgende in Bijlage P:

Van de middelbare school voor meisjes te 's Gravenhage hadden zich aangemeld 7 kandidaten, die allen slaagden: van der Does de Bij, Josina Mathilda, geb. te 's Gravenhage 8 Juli 1892; Kern. Ernestine, Jacoba Carolina, geb. te Kedong Kebo 2 Maart 1892; Manders, Johanna Hendrika Maria, geb. te Leeuwarden 18 September 1892; van Nes, Johanna Milene Sara Antonia Henriette, geb. te Nieuwediep 15 April 1893; Voorduyn, Johanna Wilhelmina Lenoriarda, geb. te Sitse-bondo 6 November 1892; van de Vijver, Petronella Christina, geb. te 's Gravenhage 6 Maart 1892; van Weerden, Maria, geb. te Arnhem 12 Juni 1892



figuur 3 Titelpagina van proefschrift Johanna Manders

Leerlingen van een middelbare meisjesschool geslaagd voor het examen van de hbs? De zeven kandidaten waren inderdaad geslaagd, maar ze kwamen van de Haagse hbs voor Meisjes, een begrip dat kennelijk nog niet helemaal geland was in de verslaggeving van het Parlement. Johanna Manders, een van de zeven, ging vervolgens elektrotechniek studeren aan de TH in Delft, waar ze in 1916 haar ingenieurstitel behaalde. Ze promoveerde in 1919 cum laude bij J.A. Schouten op het eerste Engelstalige proefschrift van de TH en werkte tijdens en na haar promotieonderzoek bij de Octrooiraad.<sup>[5]</sup> De Haagse hbs voor Meisjes was in 1905 gestart als een keuzemogelijkheid: na de eerste twee jaar van de al

bestaande middelbare meisjesschool konden leerlingen nog drie jaar mms volgen of vier jaar hbs, met aan het eind het landelijk examen. Dit was een relatief succes, in nog zes steden werd zo'n constructie ingevoerd.<sup>[6]</sup>

## “Vanaf 1871 werd een toenemend aantal meisjes toegelaten tot de hbs.”

Al veel eerder waren er ouders die voor hun dochters ook hbs-onderwijs wilden, met alle natuurwetenschappen en wiskunde. In 1871 vroeg de heer Jacobs toestemming aan de minister om zijn dochter Frederika in te schrijven als leerling aan de driejarige hbs in Sappemeer. De hbs-directeur stond achter het verzoek. De toestemming werd verleend en Frederika behoorde tot het eerste groepje meisjes dat regulier alle lessen volgde. Ze zou later een van de eerste leraressen wiskunde worden, via de gebruikelijke weg van onderwijsbevoegdheid lagere school, akte LO (om les te kunnen geven op de mulo) en akte K1. Ze schreef ook enkele boeken voor wiskundeonderwijs.<sup>[7]</sup>

### Wiskundeonderwijs aan meisjes: de hbs

In het publieke debat waren de voorstanders van aparte middelbare scholen voor meisjes beter zichtbaar dan voorstanders van co-educatie. Maar zoals wel vaker, de praktijk was anders. Co-educatie, meisjes en jongens naar dezelfde school, was goedkoper. Bovendien sijnelden ideeën van de eerste feministische golf geleidelijk aan door in maatschappelijke opvattingen. Niet iedereen was overtuigd van de wenselijkheid van apart onderwijs. Vanaf 1871 werd een toenemend aantal meisjes toegelaten tot de hbs en vanaf eind 19e eeuw ook tot het gymnasium. Daarmee waren de twijfels, of meisjes wel de fysieke en mentale capaciteiten hadden voor wiskunde en natuurkunde, niet verdwenen. Ook niet bij de meisjes zelf. Veel meisjes gaven de voorkeur aan de A-afdeling van hbs en de  $\alpha$ -afdeling van het gymnasium. Dat werd tot ca. 1960 niet als een groot probleem gezien. Als meisjes kennelijk niet mee konden komen met de jongens, waren er andere mogelijkheden voor het zwakke geslacht. Als ze trouwden werden ze meestal toch huisvrouw.

Maar na het midden van de 20e eeuw werd snellere technologische ontwikkeling een prioriteit en dus onderwijs in wiskunde en natuurwetenschappen, voor zoveel mogelijk leerlingen. Er waren veel meer mensen nodig

die in technische beroepen konden werken. De tweede feministische golf droeg bij aan de opvatting dat meisjes en vrouwen daaraan konden en moesten deelnemen. De herstructurering van het voortgezet onderwijs (de Mammoetwet) zou daar eveneens aan bijdragen. Mavo, havo en vwo kwamen in de plaats van mulo, mms en hbs, co-educatie was voortaan de norm. Jongens en meisjes kregen hetzelfde onderwijs, in de bovenbouw van havo en vwo was de vakkenkeuze voor het eindexamen vrij. Slechts het minimum aantal vakken waarin een leerling examen deed was vastgelegd.

Binnen tien jaar werd duidelijk dat een relatief groot aantal meisjes geen wiskunde of natuurkunde in haar examenpakket koos. Dat was een tegenvaller voor de verwachte uitbreiding van potentiële werknemers in wetenschappen en techniek. Het beperkte bovendien een grote groep meisjes in hun beroepskeuze. Waren meisjes als groep toch minder geschikt voor bèta? Inmiddels was er meer veranderd: het aantal vrouwelijke docenten wiskunde was toegenomen en in de maatschappij als geheel lieten vrouwen vaker van zich horen.

## Mededelingen

### Vrouwen en wiskunde onderwijs

Meisjes komen niet zo aan bod in de exakte vakken. Daar zijn verschillende redenen voor; enerzijds is het maatschappelijk niet zo geaccepteerd dat vrouwen zich met exakte vakken en techniek bezig houden, anderzijds is het ons inziens zo, dat b.v. de wiskunde zoals het nu gegeven wordt, jongens meer aanspreekt dan meisjes. Hierbij is de rol van de wiskundedocent(e) heel belangrijk.

In de Verenigde Staten is de laatste jaren nogal wat onderzoek gedaan om achter de factoren te komen die een rol spelen bij het onderscheid man-vrouw in het wiskunde onderwijs en zijn inmiddels cursussen ontwikkeld om wiskundedocenten bewuster te maken hiervan.

Wij zijn daardoor extra geïnspireerd om ook in Nederland iets te gaan doen aan het onderwerp vrouwen en wiskunde.

Wij zelf vinden wiskunde een belangrijk en leuk vak en zien het belang van wiskunde daarbij ook nog in verband met opleidingsmogelijkheden en b.v. in verband met de ontwikkelingen op het gebied van de computerkunde.

In eerste instantie willen we daarom in contact komen met andere vrouwen, die zich met wiskunde onderwijs bezig houden, omdat zij enerzijds zelf met het probleem van de vrouw als wiskundige anderzijds met hun rol als docente wiskunde ervaring hebben. Wij vragen wiskunde leraressen, die ook belangstelling hebben voor dit onderwerp om voor 1 oktober contact op te nemen met ons. Wij willen dan in het najaar een eerste bijeenkomst organiseren b.v. in Utrecht.

Marja Meeder, tel. 020-72 25 09.

Jophien van Vaalen, tel. 020-25 08 71.

figuur 4 Oproep van Marja Meeder en Jophien van Vaalen in *Euclides*, 57-1 (1981)

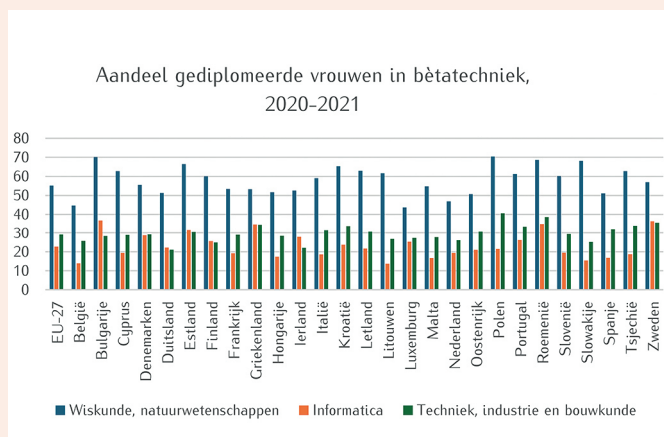
Deze oproep in *Euclides* 57-1 had als gevolg de oprichting van de groep Vrouwen & Wiskunde die, ook naar aanleiding van onderzoeken in het buitenland, vraagtekens zette bij de gangbare opvattingen over meisjes en wiskunde. De werkgroep voerde redenen aan voor de stelling dat in wiskundeonderwijs niet meisjes het probleem waren. Problemen kwamen voort uit de inhoud en boeken van schoolwiskunde en de manier waarop er les werd gegeven.



De leden van de werkgroep waren zeer actief. Ze organiseerden conferenties, vormden themawerkgroepen, verrichtten en publiceerden onderzoek, analyseerden internationaal onderzoek, maakten onderwijsmateriaal, gaven lezingen en interviews en publiceerden een aantal boeken over wiskundeonderwijs en meisjes.

Ze droegen bij aan de veranderingen in de wiskunde-programma's van havo en vwo in de lespraktijk. De aanpak in de klas en de boeken werden gevarieerder, met meer aandacht voor verschillen in gender en cultuur. De deelname van meisjes is toegenomen en de instroom van vrouwelijke studenten in bèta-opleidingen is gestegen, zij het in sommige richtingen, bijvoorbeeld informatica, mondjesmaat.<sup>[8]</sup>

De werkgroep Vrouwen & Wiskunde is zeker niet de enige oorzaak van deze veranderingen, maar ze heeft wel een aandeel gehad in het ombuigen van de processen in een bepaalde richting.



figuur 5 <sup>[8]</sup>

Volgens het CBS was in 2020-2021 het aandeel vrouwelijke afgestudeerden in wiskunde en natuurwetenschappen 46%, net boven België (44%) en Luxemburg (43%). In alle andere landen van de EU lag het aandeel vrouwelijke afgestudeerden hoger. Het blijft de vraag wat de reden is dat vooral in Nederland meisjes jarenlang in zeer geringe mate belangstelling toonden voor wiskunde en natuurwetenschappen. Dat verbetert nu wel, maar nog te langzaam.

## Noten

- [1] Essen, M. van (1990). *Opvoeden met een dubbel doel: twee eeuwen meisjesonderwijs in Nederland*. <https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/247750>
- [2] Krüger, J. (2014). *Actoren en factoren achter het wiskundecurriculum sinds 1600*. <https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/301858>
- [3] Boekholt, P.Th.F.M & Booy, E.P. de (1987). *Geschiedenis van de school in Nederland*. [https://www.dbnl.org/tekst/boek009gesc01\\_01/](https://www.dbnl.org/tekst/boek009gesc01_01/)
- [4] Landeweer, E. (1954). Discussie. *Euclides*, 29(4), 175-177.
- [5] Orsel, H. (1995). De gisse tante die schitterde. In *TU Delta*. <https://delta.tudelft.nl/article/de-gisse-tante-die-schitterde-profiel-van-johanna-manders>
- [6] Pouwelse, M. (1993). *Haar verstand dienstbaar aan het hart: middelbaar onderwijs voor meisjes: debatten, acties en beleid, 1860-1917*.
- [7] Wilde, I. de (2018). *Een sterke wilskracht. Vijf ambitieuze broers en zusters van Aletta Jacobs*.
- [8] zie: [www.ocwincijfers.nl/documenten/publicaties/2024/11/25/eu-landentabel-aandeel-ge diplomeerde-vrouwen-in-betatechniek-2021-2022](http://www.ocwincijfers.nl/documenten/publicaties/2024/11/25/eu-landentabel-aandeel-ge diplomeerde-vrouwen-in-betatechniek-2021-2022)

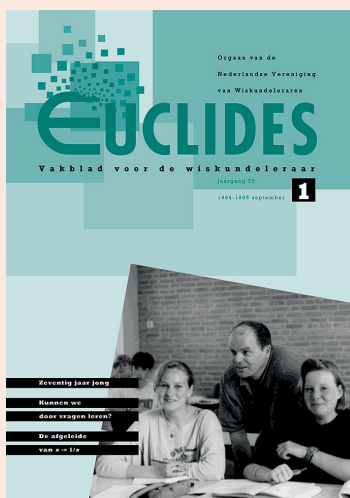
## Over de auteur

Jenneke Krüger heeft gewerkt als docent natuurwetenschappen en wiskunde, in onder meer havo en vwo en als onderwijsontwikkelaar in diezelfde vakken. Ze houdt zich nu bezig met de geschiedenis van de verspreiding en het gebruik van wiskundige kennis en met interdisciplinair onderwijs.  
E-mailadres: [jenneke.kruger@gmail.com](mailto:jenneke.kruger@gmail.com)

# Drie vragen aan....

## Martinus van Hoorn

Ter gelegenheid van het honderdjarig bestaan hebben we de voorgaande hoofdredacteuren benaderd om stil te staan bij hun hoofdredacteurschap en wat er speelde in het wiskundeonderwijs in die periode. Ze konden kiezen tussen een geheel eigen verhaal of een speciale versie van onze rubriek Vijf vragen aan. In deze *Euclides* Martinus van Hoorn, hij was hoofdredacteur van april 1987 tot juni 1996.



figuur 1 De nieuwe vormgeving vanaf jaargang 70 (1994).



1 Welke herinnering aan jouw *Euclides*-tijd is het mooiste?

Hier hoef ik niet lang over na te denken. Het mooiste waren de interviews met wiskundeleraars en -leraressen uit het hele land (plus één leraar uit Zwitserland). Ik had uitvoerig contact met ze, telefonisch en/of schriftelijk. Bij het interview in *Euclides* kwam altijd een foto waar de geïnterviewde zelf voor zorgde. Iedereen met wie ik contact zocht wilde meewerken, iedereen had eigen ideeën over het wiskundeonderwijs, over leerlingen, over het belang van goede leerboeken, en over veel meer

dingen. Je zou ook kunnen zeggen: iedereen wilde graag gehoord worden. En: iedere leraar of lerares die ik sprak was gewoon trots op zijn/haar werk. Daarom vond ik dit het mooiste.

Ik merkte dat juist deze interviews veel gelezen werden. Door een nieuwe vormgeving (in 1994) kon bovendien op de voorkant van *Euclides* een foto komen. Die foto's, van de leraren c.q. leraressen met hun leerlingen, trokken meteen de aandacht.

Met de interviews begon ik in 1993, en ik bleef het doen tot ik in 1996 met het redactiewerk stopte. Ik had eerder met de interviews moeten beginnen.

Mijn opvolgers gingen hier niet mee verder. Alleen Klaske Blom pakte de draad weer op, en ze pakte het serieuzer aan. Zij ging daadwerkelijk naar scholen en sprak met wiskundesecties. Degelijk werk. Het was lastig om dan het hele land te bestrijken, maar ook hier voelden de betreffende docenten zich duidelijk gehoord.

Op de voorzijde zijn niet weer foto's geplaatst van docenten met hun leerlingen. Tja, ik vond dit juist toepasselijk voor een blad voor wiskundeleraars.



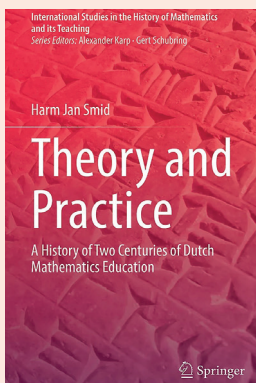
2 Welk advies zou je de hoofdredacteuren voor de komende eeuw willen meegeven?

Dat lijkt me vanzelfsprekend: zorg dat het blad relevant blijft. Zorg dat belangrijke discussies over het wiskundeonderwijs (ook) in *Euclides* worden gevoerd, vraag didactici om een doorwrocht artikel te schrijven over nieuwe leerplannen, vraag leerboekauteurs om na vijftwintig jaar een historische evaluatie te geven van W12-16, en beschouw eens kritisch de rol van het Cito en de SLO (een 'expertisecentrum', lees ik – wat een pretentie!). Kortom, zorg dat je nooit belangrijke discussies mist en zwengel ze gerust zelf aan. Speur bovendien naar didactische vernieuwingen en bespreek de merites daarvan.

Een voorbeeld. Gedurende meerdere jaren was er discussie over het rekenen, in het basisonderwijs en ook vanwege de plannen voor rekentoetsen aan het eind van het voortgezet onderwijs. Maar in *Euclides* was daar weinig over te vinden. Elders, onder meer in het *Nieuw Archief voor Wiskunde*, was dat anders. Het rekenen raakt de ziel van het wiskundeonderwijs, temeer daar de algebra in de onderbouw een directe voortzetting is van het rekenen in het basisonderwijs.

Opvallend in veel discussies is dat sommige uitspraken steeds worden herhaald, ook als er allang onderzoek bestaat waarin argumenten worden gewogen. Voor wat betreft het rekenen noem ik het rapport van de commissie-Lenstra uit 2009, waarin wordt onderbouwd dat goede leerresultaten vooral toegeschreven kunnen worden aan de kwaliteit van de leraar. Dit gaat weliswaar over het basisonderwijs – maar zou het niet ook gelden voor het voortgezet onderwijs?

Je kunt daarnaast best een discussie entameren over kleine onderwerpen. Zoals over de notatie van de sinusfunctie en de logaritmische functie. Ik las in *Euclides* dat je  $\sin(x)$  moet schrijven, en  $\log(x)$ . Als een leerling  $\sin x$  zou schrijven, of  $\log x$ , dan zou die leerling puntenaftrek moeten krijgen. Wat een flauwekul! Haakjes zijn verplicht als ze nodig zijn, anders zijn ze niet nodig. Simpel toch? Kan iemand mij uitleggen waarom dit ingewikkelder zou moeten?



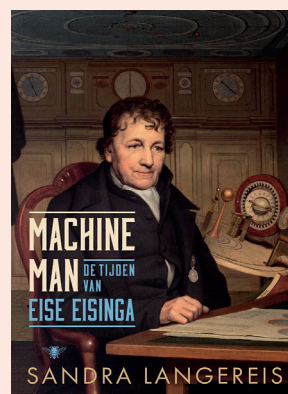
figuur 2 Harm Jan Smid – *Theory and Practice* (2022)



3 Welk boek zou je iedereen die met wiskunde bezig is adviseren?

De redactie stelde de vraag ietwat anders, namelijk; welk boek zou iedereen *moeten* lezen? Dat gaat me te ver, iedereen *moet zelf weten* welke boeken hij/zij leest. Ik ga acht boeken noemen, een beetje variatie kan geen kwaad:

- Imre Lakatos, *Proofs and refutations* (1976). Leert je relativeren.
- H.S.M Coxeter, *Introduction to geometry* (1961). Positioneert alle meetkunde, hoogst indrukwekkend.
- Martin Kindt, *Lessen in projectieve meetkunde* (1993). Dit heldere boek noem ik naast het boek van Coxeter. Was alle wiskundeliteratuur maar zo.
- D.J. Struik, *Geschiedenis van de wiskunde* (editie 1990). Legt fraaie verbanden, vanaf de Oudheid.
- Dirk van Dalen, *L.E.J. Brouwer* (2001). Sterke biografie van de man die de grootste wiskundigen liet nadenken.
- Henk Broer, *Hemelverschijnselen nabij de horizon* (2013). Voortbouwend op de klassieker van Minnaert, *De natuurkunde van het vrije veld*. Met verrassende wiskunde.
- Harm Jan Smid, *Theory and practice, a history of two centuries of Dutch mathematics education* (2022). Een uniek werk. *Euclides* zou verschillende mensen mogen vragen het te recenseren. Dat zou het boek recht doen.
- Sandra Langereis, *Machineman. De tijden van Eise Eisinga* (2024). Door dit boek kun je alles begrijpen, van Eise Eisinga, en van wat er om hem heen gebeurde. Meesterlijk.



figuur 3 Sandra Langereis, *Machineman. De tijden van Eise Eisinga* (2024)

## Over de auteur

Martinus van Hoorn was van 1987 – 1996 hoofdredacteur van *Euclides*. E-mailadres: [mc.vanhoorn@wxs.nl](mailto:mc.vanhoorn@wxs.nl)

# Een praktisch-historische blik op wiskunde

## Deel 4 Duurzame innovaties

Welk praktisch nut heeft de wiskunde in de landen rond de Middellandse zee en in Europa in de loop der eeuwen gehad? Wat vinden we daarvan terug in het huidige onderwijs?

In een reeks artikelen, waarvan dit het vierde is, gaat Roel van Asselt op zoek naar voorbeelden van historische toepassingen van wiskundige kennis. Roel legt hierbij de nadruk op de bruikbaarheid van de kennis in het beroepsonderwijs.

### Archimedes, vervolg

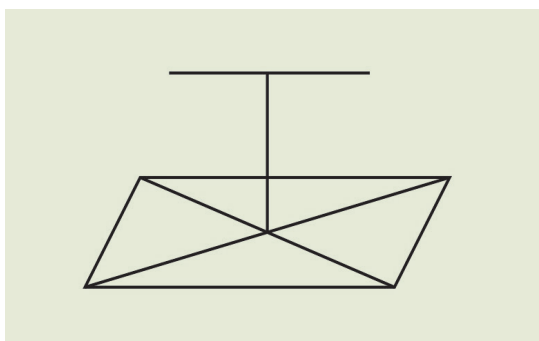
In deel 3 van deze serie bespraken we drie praktische bijdragen van Archimedes, namelijk:

- 1 nauwkeurigere waarde van  $\pi$
- 2 nieuw getalsysteem
- 3 oppervlakte- en inhoudberekeningen

Hierna volgen nog drie andere bijdragen van Archimedes.

#### 4. *Mechanica*

Een bijzonder sprekend voorbeeld van Archimedes' intuïtieve wijze van denken, het gebruik van gedachte-experimenten en van symmetrieën was de bepaling van middelpunten en zwaartepunten. Het ging hierbij om het geometrisch middelpunt van driehoeken, parabooldelen, cirkel- en bolsegmenten, en annex de bepaling van het zwaartepunt van stoffelijke lichamen. Het basisprincipe was steeds – in onze terminologie – het bepalen van het punt waarin alle krachtmomenten in evenwicht zijn.<sup>[1]</sup>



figuur 1 Opgehangen parallellogram in het zwaartepunt

Zwaartepuntberekeningen hadden naast de fraaie wiskundige toepassing toen ook al veel praktisch nut bij het ontwerpen en gebruiken van hefbomen en katrollen, en van oorlogstuig.<sup>[2]</sup> Voor de scheepsbouw waren de

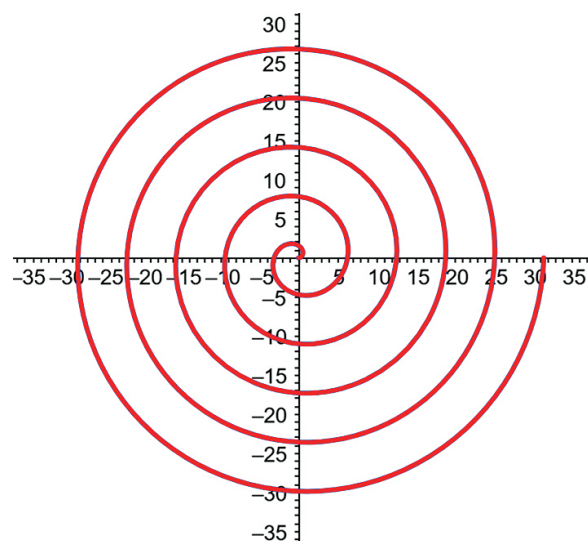
praktische toepassingen bijvoorbeeld de invloed van de scheepsvorm en de belading op de drijfkracht en stabiliteit.

Opmerkelijk is dat Archimedes in zijn *Methoden van mechanische stellingen* (in een pas in 1906 teruggevonden kopie) de genoemde infinitesimale berekeningen voor het eerst en eenmalig beschrijft.<sup>[3]</sup>

De grote kracht van de *Methoden* is dat hij mechanische principes – zoals evenwichten – gebruikte om wiskundige stellingen te bewijzen. En omgekeerd: wiskundige modellen toepaste op fysische problemen.

#### 5. *De spiraal van Archimedes*

De vergelijking van deze spiraal luidt, in onze notatie,  $r = a + b\varphi$ , met  $a$  en  $b$  positieve constanten en  $r$  en  $\varphi$  de poolcoördinaten van de punten op de spiraal. In figuur 2 is de spiraal afgebeeld voor  $a = 0$  en  $b = 1$ . Archimedes



figuur 2 Een spiraal van Archimedes



**“Dit stijgt uit boven wat  
een menselijke geest kan  
voortbrengen.”**

(Cicero over Archimedes)

definieerde de spiraal als het punt dat zich met constante snelheid op een roterende rechte voortbeweegt. Hij gebruikte de spiraal onder andere om hoeken en cirkels te verdelen in vooraf bepaalde verhoudingen en om inhouden en oppervlakten te berekenen.<sup>[4]</sup> De huidige toepassingen van de spiraal zijn legio, zoals in de stromingsleer, optica, telecommunicatie, pomp- en koeltechniek, DNA-structuren, in spiraalveren, et cetera.<sup>[5]</sup>



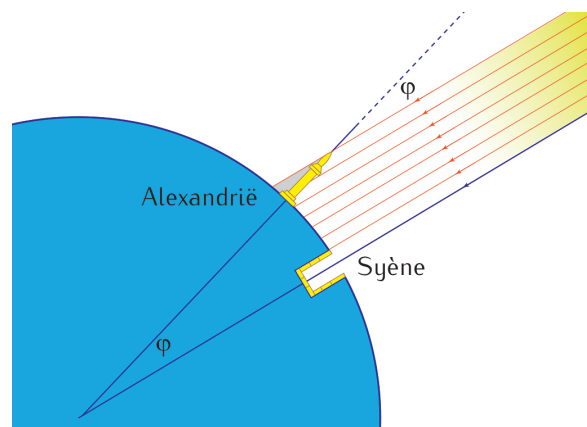
figuur 3 Nagebouwd planetarium van Archimedes

#### 6. Een mysterieus planetarium

Met behulp van 23 tandwielen zou Archimedes een planetarium gebouwd hebben waarin de bewegingen van de toen bekende vijf planeten<sup>[6]</sup> vanuit het gezichtspunt van de aarde volkomen zuiver werden weergegeven. Het zou voor die tijd een absoluut wereldwonder geweest zijn. Het planetarium is volgens sommige bronnen tweehonderd jaar lang tentoongesteld in Rome. Op basis van verhalen en schetsen van toenmalige bewoners, toeristen en bezoe-  
kende zakenlieden heeft men al verschillende keren het planetarium zo goed als mogelijk nagebouwd. In figuur 3 is een nagebouwd exemplaar te zien uit het Archimedes museum van Olympia (Griekenland). Cicero, die ook van het mirakel had gehoord, schreef rond 50 v.C.: ‘Dit stijgt uit boven wat een menselijke geest kan voortbrengen’<sup>[7]</sup>

## De aarde in kaart

In de derde eeuw v.C. wordt een eerste schatting gemaakt van de omtrek van de aarde. Dat doet Erastosthenes als volgt, op basis van niet ingewikkelde meetkundige principes, zie figuur 4. De schaduwhoek van een hoge toren in Alexandrië is bij de hoogste zonnestand  $7,2^\circ$ . Die hoek is overgebracht naar een middelpunthoek. De stad Syène (Aswan, precies zuidelijk onder Alexandrië) ligt op dat moment loodrecht onder de zon. De afstand van Alexandrië tot Syène was bekend, 5000 stadiën, en komt dus overeen met een aardcirkelboog van  $7,2^\circ$ . Die aardcirkelboog is dan het vijftigste deel van de omtrek van de aarde; 50 keer 5000 stadiën is 250.000 stadiën. Men weet niet precies hoe groot een stade in Alexandrië in die tijd was, maar men komt uit op een schatting van 39500 km (1,5% te laag).<sup>[8]</sup>



figuur 4 Omtrekbeoordeling van de aarde

Erastosthenes was ook de eerste die een geografische kaart van de toenmalig bekende wereld ontwierp, op basis van metingen, en niet alleen op basis van beschrijvingen van zeelieden en van reisverhalen. Hij gebruikte daarbij grove rasters van breedte- en lengte-cirkels: een eerste aanzet naar een meer betrouwbare cartografie met lengte- en breedtelijnen. Hij was niet de enige. Zo ontwierp een eeuw later Hipparchos zijn *Kwadrant*, zie figuur 5. Daarmee kon hij direct hoogten van gebouwen aflezen, maar ook de stand van hemel-  
lichamen boven de horizon, en kon hij door herhaalde metingen de beweging van de hemellichamen bestuderen. Hij wordt genoemd als grondlegger van een vroeg idee van coördinaten.

>

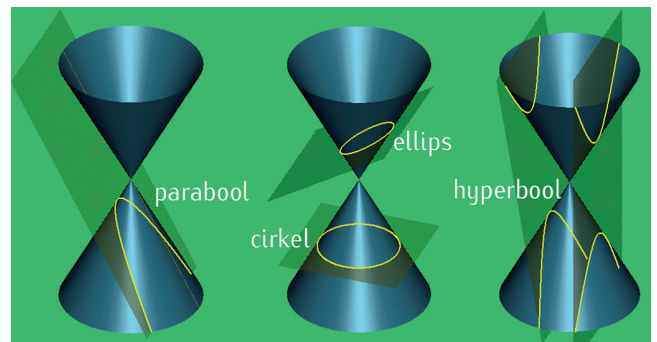


figuur 5 Reconstructie van een Kwadrant van Hipparchos (Stedelijk museum Zutphen)

## Kegelsneden

De manier waarop wij nu praktisch met cirkels, ellipsen, parabolen en hyperbolen omgaan, hebben we mede te danken aan Appollonios van Perga, die kort na Archimedes leefde. Hij analyseerde en rekende in zijn achtdeelige *Conica* aan de vlakke doorsneden van kegels, voortbouwend op het werk van Euclides en anderen. Appollonios noemde als eerste de kromme die ontstaat bij vlakdoorsnijding van een kegel – afhankelijk van de stand van het doorsnijdingsvlak ten opzichte van de as van de kegel – een ellips, hyperbool of parabool, zie figuur 6. Hij berekende raaklijnen aan kegelsneden en normaallijnen in de raakpunten, polen en ook de brandpunten en middel-lijnen van kegelsneden. Kennis en kunde die we ook nu nog dagelijks gebruiken. Tevens gaf hij manieren waarop kegelsneden geconstrueerd kunnen worden met passer en liniaal. Ook werden later handige instrumentjes ontworpen om kegelsneden te tekenen. Zie ook voorbeeld 2 in het kader ‘Praktische toepassingen voor in de les’.

We zitten met Appollonios weer in de meetkundige aanpak van wiskundige analyses. We kunnen evenwel de kegelsneden van Appollonios in onze schrijfwijze herleiden tot de vergelijkingen  $y^2 = px(1 + \varepsilon \frac{x}{d})$ , waarin  $p$  en  $d$  toen lengten van lijnstukken waren, en de kwadraten oppervlakten van vierkanten. Vanuit deze vergelijkingen zijn ook de namen van de kegelsneden af te leiden. Voor  $\varepsilon = -1$ , 0 en 1 verschijnen de drie typen kegelsneden, respectievelijk de ellips, de parabool en de hyperbool, wat gemakkelijk is na te gaan. De term  $\varepsilon \frac{x}{d}$  werd door Euclides en Appollonios de ‘aanpassing’ genoemd. Voor  $\varepsilon = -1$  is de aanpassing een tekort (in het Grieks: *elleipsis*), voor  $\varepsilon = 0$  is de aanpassing precies (*parabôle*) en voor  $\varepsilon = 1$  overmatig (*hyperbolé*).<sup>[10]</sup>



figuur 6 Kegelsneden (bron: Wikipedia)

Het vermoeden is dat Apollonios de eerste is die het begrip *evolvente* heeft geïntroduceerd.<sup>[11]</sup> De evolvente krommen zullen later een uiterst praktisch middel blijken om bewegingsoverdrachten te optimaliseren, zoals bij de constructie van tandwielen (en ... in het slingeruurwerk van Christiaan Huygens). In de tijd van Appollonios hadden kegelsneden echter nog weinig praktische betekenis; het ging vooral om de schoonheid en harmonie van de snedeverhouding. Wat later zien we toepassingen in onder meer de kracht van de reflecterende werking van parabolen en in de bouwkunst (overbruggingen). Een voorbeeld van een mogelijke toepassing is de parabolische gewelfconstructie uit ongeveer 300 n.C., (in Ctesiphon, in het huidige Irak)<sup>[12]</sup>, zie figuur 7. Nog veel later zien we toepassingen van kegelsneden in de optica, de astronomie (bij Kepler en Newton), in radar-navigatie, wiskundige modellering, design, architectuur, et cetera.



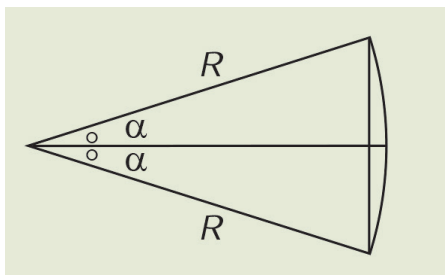
figuur 7 Tāq Kasrā te Ctesiphon (Irak)

## Een eerste goniometrie

Ptolemaios van Alexandrië, die leefde in de tweede eeuw n.C., heeft voor zijn astronomisch onderzoek tabellen ontwikkeld met hoekmaten van hoeken, uitgedrukt in

lengten van cirkelkoorden. De hoekmaten werden als volgt vastgelegd, zie figuur 8. De hoek  $\alpha$  wordt eerst verdubbeld, en  $2\alpha$  wordt de middelpuntshoek van een cirkel met straal  $R$ . De halve lengte van de koorde gedeeld door  $R$  was de hoekmaat voor  $\alpha$ . Wij zouden dat nu de sinus van hoek  $\alpha$  noemen. Ptolemaios gebruikte voor  $R$  een standaardwaarde van 60, wat fraai paste bij deze koordenmaat die hij aangaf in het 60-tallig Babylonisch talstelsel. Het delen door  $R = 60$  is alleen een positieverschuiving van de cijfers in het getal. Ptolemaios rekende met hoeken tussen de 0 en de  $180^\circ$ , in stappen van een halve graad. Voor zijn tijd waren de hoekmaten verrassend nauwkeurig.

Het woord *sinus* is overigens pas rond 1200 ingevoerd, bij de Latijnse vertaling van Arabische studies over hoekmetingen. Sinus betekent: *kromming of boezem*, wat verwijst naar de inbedding van de hoekmaat in cirkelbogen.<sup>[13]</sup>



figuur 8 hoekmaat voor  $\alpha$ : halve koorde /  $R$

## De stelling van Ptolemaios

Aan Ptolemaios danken we ook de goniometrische formules (uitgedrukt in de nu gangbare notaties):  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$  en  $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$ .

Daarmee kon hij met de maten van  $\alpha$  en  $\beta$ , direct die van  $(\alpha \pm \beta)$  vaststellen.<sup>[14]</sup> Om deze formules te bewijzen ontwikkelde hij een stelling die wij nu de stelling van Ptolemaios noemen. We laten in 'Praktische voorbeelden voor in de les', nummer 3, zien hoe die stelling luidt, hoe het bewijs loopt en hoe daarmee ter illustratie de formule  $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$  bewezen kan worden. Het geeft een indruk van het niveau waarop deze astronoom en zijn tijdgenoten praktisch werkten met de wiskunde en toepasten op de sterrenhemel.

Met de hoekmaattabellen kon Ptolemaios de bewegingen in sterrenbeelden nauwkeurig beschrijven, kon hij kaarten van de sterrenhemel ontwerpen en betrouwbare navigatiemethoden en kalenderrekeningen opstellen.<sup>[15]</sup>

Aan zijn tabellen en berekeningen was af te leiden dat, met de aarde als middelpunt van de kosmos, de planeten geen onveranderlijke cirkelbeweging maakten, hetgeen in die tijd wel ieders stellige uitgangspunt was. De afwij-

kingen werden toegeschreven aan verschillende standen van de cirkelbanen, en aan cirkelvormige bewegingscorrecties zoals Eudoxus al had bedacht.<sup>[16]</sup> Meer dan duizend jaar lang nadien werd de bouw van het heelal als geocentrisch opgevat met cirkelvormige planeetbanen. Aan Ptolemaios worden ook verbeterde landkaartprojecties toegeschreven waarbij hij lengte- en breedtelijnen op aardkaarten aanbracht, als een verbeterd begin van een geografisch coördinaatsysteem. Helaas zijn de originele kaarten van Ptolemaios verloren gegaan. In figuur 9 zie je een reconstructie. Het onderzoeken en simuleren van de beweging van hemellichamen en het ontwerpen van landkaarten leverde in die tijd ook veel nieuwe wiskunde op. Een voorbeeld is de niet-euclidische boldriehoeksmeting, om hoeken en afstanden te bepalen op een boloppervlak (de hemelkoepel of het aardoppervlak). In zijn boek *Sphaerica* behandelt Menelaos, in de eerste eeuw n.C., als eerste een boldriehoeksmeting.<sup>[17]</sup>



figuur 9 Een latere reconstructie van een wereldkaart van Ptolemaios

## Andere praktische toepassingen uit die tijd

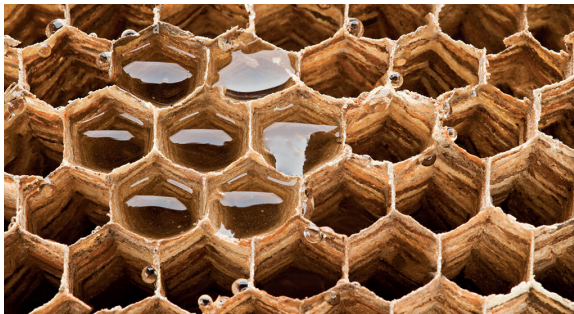
De oppervlakte  $O$  van een driehoek met zijden  $a$ ,  $b$  en  $c$  en halve omtrek  $s$ , is  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  en wordt genoemd door Heroon in de eerste eeuw n.C.

Aan het einde van de 3e eeuw n.C. treffen we een stelling aan die zegt dat een cirkel altijd een grotere oppervlakte heeft dan een regelmatige veelhoek met dezelfde omtrek als de cirkel. Volgens dezelfde schrijver (Pappos) zal de hexagonale vorm van een cel in een honingraat de grootste hoeveelheid honing kunnen bergen in de raatconstructie. In de Romeinse en Griekse tijd worden, buiten de Euclidische meetkunde om, constructies bedacht om twee van de drie 'grote kwesties' (de trisectie van een hoek en de verdubbeling van de kubus) op te lossen, zoals we eerder lieten zien. We weten niet of deze analyses zijn toegepast in bijvoorbeeld de landmeetkunde, de

>



bouwkunde of astronomie. Speculatief mag je vermoeden dat in de architectuur (openluchttheaters, renbanen) en astronomie (positiemetingen van en bewegingen in de kosmos) deze methoden betekenis hebben gehad.



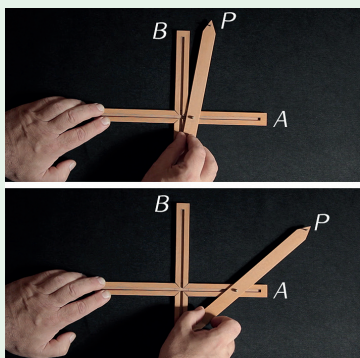
figuur 10 Honingraat

## Praktische toepassingen voor in de les

1 Trisectie van een hoek kan ook met een spiraal. Als we over een goede benadering van de spiraal  $r = \varphi$  met oorsprong  $O$  beschikken, kies dan een punt op het eerste stuk van de spiraal, met coördinaten  $r_1$  en  $\varphi_1$ . Het snijpunt van de cirkel met middelpunt  $O$  en straal  $\frac{1}{3}r_1$  heeft dan de hoekcoördinaat  $\frac{1}{3}\varphi_1$ .

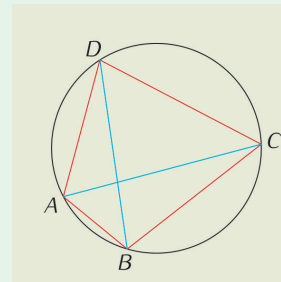
2 Een voorbeeld van een slim apparaatje uit de 'kinematische geometrie' is de ellipsograaf van Proklos (5<sup>e</sup> eeuw n.C.), zie figuur 11. De beweegbare schuine lat met schrijfpunt  $P$  beweegt met zijn pinnen  $A$  en  $B$  door de gleuven van een rechthoekig kruis. Met de schrijfpunt wordt dan een ellips getekend.

Een animatie in GeoGebra is hier te zien.<sup>[18]</sup> Het apparaatje wordt nog wel gebruikt bij het patroontekenen in de meubel- en ontwerpendustrie.



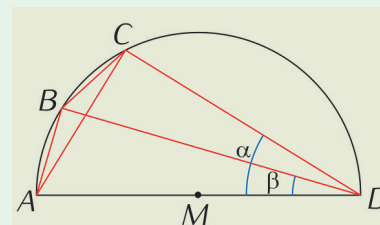
figuur 11 ellipsograaf van Proklos (Met dank aan Kotsanas Museum of Ancient Greek Technology, Athene)

De stelling van Ptolemaios voor een ingeschreven vierhoek luidt, zie ook figuur 12: het product van de lengten van de diagonalen van een ingeschreven vierhoek is gelijk aan de som van de producten van de lengten van de overstaande vierhoekszijden. In de tekening van figuur 12 geldt dus:  $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$ . Hier<sup>[19]</sup> vind je het complexe bewijs van die stelling.



figuur 12 Koordenvierhoek ABCD

Met deze stelling is de formule  $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha$  te bewijzen, zie figuur 13 waarin de willekeurige hoeken  $\alpha$  en  $\beta$  zijn ingetekend. De hoeken  $\alpha$  en  $\beta$  zijn in de tekening opgesloten in een koordenvierhoek  $ABCD$  in een cirkel met een diameter  $AD$  van 1.  $BC = \sin(\alpha - \beta)$ , zie hier<sup>[20]</sup> voor eventuele uitleg. Er geldt:  $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$ , dus  $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \sin\beta \cdot \cos\alpha + 1 \cdot \sin(\alpha - \beta)$ , of  $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha$ .



figuur 13 Koordenvierhoek ABCD in een cirkel met middellijn  $AD = 1$  (straal =  $\frac{1}{2}$ )

Op de website vind je de noten en een literatuurlijst.



[vakbladeuclides.nl/1006praktischegeschiedenis\\_4](http://vakbladeuclides.nl/1006praktischegeschiedenis_4)

## Over de auteur

Roel van Asselt studeerde wiskunde aan de Universiteit Utrecht en was wiskundeleraar aan de HTS in Hengelo. Hij was eindredacteur van een wiskundemethode voor het hoger onderwijs. Daarnaast was hij oprichter en directeur van het expertisecentrum LICA (Landelijk Informatie en expertiseCentrum Aansluiting hbo). Binnen Saxion Hogescholen werd hij lector Instroommanagement en Aansluiting mbo/vo-hbo. E-mailadres: [r.v.asselt@ziggo.nl](mailto:r.v.asselt@ziggo.nl)



## Squircle

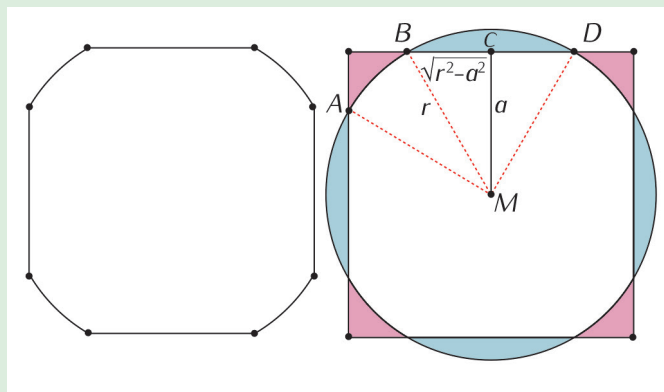
Mijn dochter Paulien heeft een ander huis. Na weken hard werken kan ze er met haar man en gezin in. Uiteraard is ze blij en mensen om haar heen feliciteren haar met de nieuwe woning.



figuur 1 squircle

Ze kreeg een kaartje van haar collega's met als aankondiging dat ze de squircle van het werk (het logo van het bedrijf) cadeau zou krijgen. Ik las dat en ik had geen idee waar het over ging. Even op het net gezocht en vond daar de volgende beschrijving: squircle is de samentrekking van square en circle. Ik dacht toen aan een vierkant met afgeronde hoeken, maar dat is niet goed. Ook de zijden van het vierkant van de squircle zijn gebogen.

Maar ik wil nu doorgaan op het vierkant met de afgeronde hoeken. Ik vroeg me af of je een cirkel over een vierkant kunt leggen en dan zo, dat de oppervlakte van het deel dat buiten het vierkant en binnen de cirkel valt gelijk is aan de oppervlakte van het deel binnen het vierkant, maar buiten de cirkel, zie figuur 2.



figuur 2

“ De formule voor squircle is  $x^4 + y^4 = a^4$ . ”

We noemen  $\angle BMD = \alpha$ , dan is  $\angle AMB = 90^\circ - \alpha$ . De straal noemen we  $r$  en de zijde van het vierkant  $2a$ . Met behulp van figuur 2 krijgen we, als we oppervlaktes gebruiken, de volgende vergelijking:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2 - a\sqrt{r^2 - a^2} = a^2 - a\sqrt{r^2 - a^2} - \frac{90^\circ - \alpha}{360^\circ} \pi r^2$$

Dit is te herleiden tot  $\frac{1}{4}\pi r^2 = a^2$  en vervolgens tot

$$r = \sqrt{\frac{4}{\pi}} a$$

Een verrassende uitkomst. De verhouding tussen de zijde van het vierkant en de straal van de cirkel is constant. Beter kijken is dan het devies.

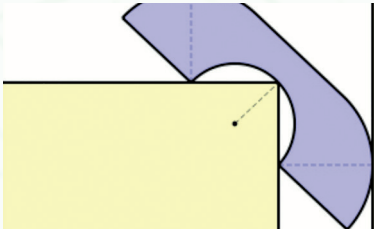
Dan zie je dat een kwart van het grote vierkant precies dezelfde oppervlakte heeft als een kwart van de cirkel. De moeilijke vergelijking was dus helemaal niet nodig.

Na dit gepuzzel waag ik me verder maar niet aan de squircle, maar Wolfram geeft uitkomst: de formule voor een squircle is  $x^4 + y^4 = a^4$  en als je dat invoert bij GeoGebra, dan zie je een mooie squircle...

### Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde in ruste.  
E-mailadres: [a.b.vanderroest@ziggo.nl](mailto:a.b.vanderroest@ziggo.nl)

## Best verhuisbare vorm voor een bank

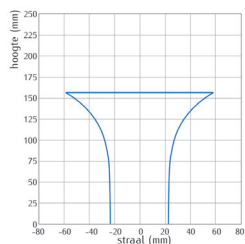


De optimale sofa. Bron: Wikipedia/Claudio Rocchini

Sinds 1966 buigen wiskundigen zich over het probleem hoe je een tweedimensionale sofa (je houdt dus geen rekening met de hoogte) door een gang met een hoek van 90 kunt navigeren: wat is qua oppervlakte de grootste mogelijke vorm? In 1992 vond Joseph Gerver van de Rutgers-universiteit in de VS de schijnbare optimale variant: een vorm die leek op een ouderwetse telefoonhoorn. Het lukte sindsdien niet om grotere vormen te vinden, waardoor het vermoeden rees dat Gervers sofa wel eens de grootste kon zijn. Jineon Baek van de Yonsei-universiteit in Zuid-Korea heeft nu aangetoond dat Gervers sofa inderdaad de grootst mogelijke is. In het bewijs van meer dan 100 pagina's (te vinden op <https://arxiv.org/pdf/2411.19826>) introduceert Baek de wiskundige grootheid  $Q$  die in verband staat met oppervlakte. Hiermee verandert het vraagstuk van een zogenaamd 'niet-convex probleem' in een probleem met 'convexe' oplossingen, te vergelijken met een bal die naar de bodem van een kom rolt en dan niet zomaar alle kanten opschiet, terwijl een bal afrollend van de top van een heuvel dat wel doet. De grootste waarde van  $Q$  is precies de oplossing van Gerver.

Bron: newscientist.nl

## Optimale vorm glas voor een koud biertje



Optimaal bierglas Bron: Claudio Pellegrini

De meeste bierliefhebbers drinken hun biertje het liefst koud. In welke glasvorm blijft het bier zolang mogelijk koud? De Braziliaanse natuurkundige Claudio Pellegrini

heeft dit uitgerekend. De uitkomst was geen grote verrassing: een glas met een smalle onderkant die naar boven breder uitloopt. Pellegrini onderzocht in zijn onderzoek uitsluitend vanuit een natuurkundig oogpunt naar de invloed van de vorm van een bierglas op het koud houden van de drank, andere factoren als een warme hand om het glas of een isolerende schuimkraag liet hij buiten beschouwing. Om het warmtetransport (waarbij omgevingswarmte het koude bier opwarmt) te minimaliseren heb je een glas nodig met een zo laag mogelijke verhouding tussen oppervlakte en volume. Dit zou pleiten voor een flink groot glas, maar een bierglas van bv. 100 liter is niet echt praktisch. Pellegrini onderzocht daarom bierglazen met een volume van maximaal 1 liter. De onderzochte glasvormen waren symmetrisch rondom de verticale as en hadden vloeiende vormen. Verder werd het warmtetransport bij de bodem verwaarloosd omdat de dikke onderkant goed isoleert. Het bleek dat een bierglas met een smalle onderkant die breed uitloopt het meest gunstig is voor een koud biertje. Wat precies de optimale hoogte en breedte is en hoeveel breder de bovenkant moet zijn ten opzichte van de onderkant kan Pellegrini nog niet zeggen, dit vraagt meer onderzoek. Van het meest gebruikte bierglas in Brazilië is Pellegrini niet erg onder de indruk. Dit glas houdt het bier koud door 'het meest primitieve proces', aldus Pellegrini: 'het glas is zo klein (slechts 190 ml) dat het glas zo snel leeg is dat het geen tijd heeft om warm te worden.'

Bron: newscientist.nl

## Wachttijden in de zorg verminderen



Rebekka Arntzen

Op 12 februari promoveerde Rebekka Arntzen aan de VU op haar bij het CWI ontwikkelde wiskundige modellen die de weinige beschikbare plekken in bijvoorbeeld verpleeghuizen efficiënter verdelen. Hierdoor vermindert de wachttijd en krijgen ouderen zorg die beter is afgestemd op hun behoeften. In het huidige systeem, waarin elke instelling haar eigen wachtlijst heeft, kan een oudere maar op één

wachttijd staan. Urgentiecategorieën bepalen de plek op die lijst, niemand heeft zicht op alle wachtlijsten. Het nieuwe model bundelt alle wachtlijsten, houdt rekening met urgentie en persoonlijke voorkeuren, en belooft flexibiliteit. Als je meerdere voorkeuren opgeeft voor een verpleeghuis, dan kan de wachttijd halveren, zo blijkt uit simulaties. Naast langdurige zorg richtte Arntzen zich ook op acute ouderenzorg. Ze ontwikkelde een simulatiemodel dat inzicht geeft in de bewegingen van patiënten tussen verschillende zorginstellingen. De verrassende conclusie: er zijn genoeg plekken, maar ouderen die kortdurende zorg nodig hebben, komen lang niet altijd op de juiste plek terecht. Het probleem ligt bij de opnamecapaciteit, vooral buiten kantooruren. Instellingen hebben dan vaak minder personeel beschikbaar, waardoor ouderen onnodig in het ziekenhuis belanden. Arntzen rekende aan oplossingen en ontdekte dat regionale samenwerking de sleutel is. Als eerstelijns verblijven in een regio om de beurt de avond- en weekendopnames verzorgen, dan kun je buiten kantooruren mensen opnemen zonder dat elke instelling ieder weekend meer personeel moet inzetten. Invoering van de wiskundige modellen zou de zorg efficiënter en menselijker maken, stelt Arntzen. Maar dat vergt wel belangrijke, structurele aanpassingen. Er is onder meer een centraal orgaan nodig dat alle wachtlijsten bijhoudt. Ook zullen de zorgorganisaties op regionaal niveau moeten gaan samenwerken.  
*Bron: cwi.nl*

## Hoelahoepen

Drie onderzoekers van New York University hebben enkele wiskundige geheimen van het hoelahoepen ontrafeld. Ze onderzochten welke bewegingen en lichaamsvormen het meest geschikt zijn om een hoepel tegen de zwaartekracht omhoog te houden. De experimenten werden uitgevoerd met 3d-geprinte miniatuurmodellen in verschillende vormen zoals cilinders, kegels en zandlopers, om de variatie in tailles te simuleren. De resultaten lieten zien dat de draai-beweging en de dwarsdoorsnede van het lichaam er niet veel toe doen. Wel van belang is het postuur. Schuine heupen en een gebogen taille zijn het meest effectief om de hoepel zwevend te houden. Hellende heupen helpen om de hoepel omhoog te duwen, terwijl een gebogen taille stabiliteit biedt. Voor het theoretisch deel van het onderzoek werd gebruikt gemaakt van een uit twee delen opgebouwd wiskundig model. Aan de basis van het eerste deel staan de Euler-Lagrange vergelijkingen. Deze werden gebruikt om de bewegingen te modelleren van de hoepel in het horizon-

tale vlak terwijl deze rond het lichaam beweegt. Het tweede deel van het model richtte zich op de verticale beweging van de hoepel: hoe deze langs het lichaam omhoog en omlaag beweegt en hoe hij op een bepaalde hoogte blijft hangen. Hiervoor werden concepten uit de mechanica gebruikt, zoals evenwicht. Zo kon worden vastgesteld onder welke omstandigheden de hoepel in een stabiele baan blijft. Het wiskundig model hoeft zich niet te beperken tot de kunst van het hoelahoepen, maar kan ook worden gebruikt voor andere doeleinden zoals het ontwerpen van robots die hun balans bewaren tijdens dynamische bewegingen, het verbeteren van de stabiliteit van voertuigen of het ontwikkelen van efficiënte methoden om ongewenste trillingen te dempen of nuttige trillingen te versterken.

*Bron: NRC 14 januari 2025*

## Muziek helpt bij wiskunde

Op een secundaire school in het Belgische Tienen brengen twee kunstleerkrachten elke vrijdag een creatieve twist in de wiskundeles. Wiskundige begrippen beklijven beter als je ze beleeft. Daarom staken de muziekleerkrachten de rekenregels in een muzikaal jasje en maakten ze deze visueel met een toneelstuk. Van abstracte formules naar een opzwevend technolied of een eigentijds dramastuk – een speelse aanpak die niet alleen het ruimtelijk inzicht versterkt, maar ook wiskundestress vermindert en de leerlingen op andere wijze motiveert.

*Bron: degazetvanhoegaarden.be*

## Rekenfout maakt zwart keukengerei verdacht

Zwart plastic keukengerei zoals spatels en spanen werd eind vorig jaar opeens verdacht. In een publicatie hadden drie onderzoekers berekend dat er in dat zwarte gerecyclede plastic gevaarlijke hoeveelheden zaten van een chemische stof. Door het verwarmen van, of het likken aan het zwarte plastic zouden mensen te veel van deze potentieel toxische stof kunnen binnenkrijgen. Chemicus Joe Schwarcz ontdekte echter een rekenfout. De onderzoekers schreven dat voor een persoon van 60 kilo de maximaal toelaatbare dosis dicht bij de 42.000 ng/dag lag. Daar hadden zij zich echter verrekend: de maximaal toelaatbare dosis was  $60 \times 7.000$  ng, ofwel 420.000 ng ... De onderzoekers hebben een correctie gepubliceerd en hun spijt betuigd, maar dat verandert niks aan de conclusie dat via recycling schadelijke stoffen terecht kunnen komen waarin ze helemaal niet nodig zijn.

*Bron: NRC 4 januari 2025*





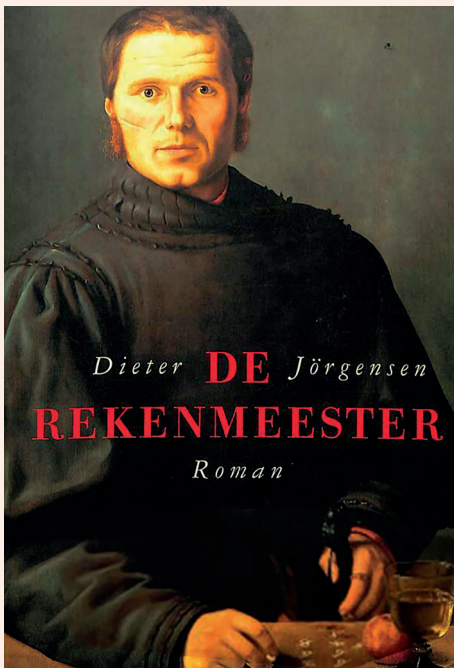
## De rekenmeester

Titel: De rekenmeester

Auteur: Dieter Jörgensen

Oorspronkelijke Uitgever: BZZTôH, Den Haag, 2000

Prijs: tweedehands dagwaarde



figuur 1 De voorkant van het boek uit de editie van 2000 toont een afbeelding van een schilderij van Barthel Beham dat een rekenmeester uitbeeldt. Het schilderij beeldt echter niet Niccolò Tartaglia uit.

### Inleiding

Tijdens het jaarcongres van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, dat in november in Veenendaal werd gehouden, werd er tweedehands een interessant boek aangeboden voor degenen die geïnteresseerd zijn in de geschiedenis van de wiskunde: *De Rekenmeester* van Dieter Jörgensen. Dit boek, dat in 2019 is verschenen, was al eerder in 2000 uitgebracht in een andere editie. Het betreft een geromantiseerde biografie van de zestiende-eeuwse wiskundige Tartaglia (1499-1557). Jörgensen belicht zijn vijftien tumultueuze jaren (1534-1548) in Venetië, waarin het oplossen van derdegraads vergelijkingen een centrale rol speelt.

In 1534 vertrekt Tartaglia vanuit Brescia naar Venetië om zijn uitgebreide en veelgevraagde wiskundige en rekenkundige kennis aan te bieden aan de rijke kooplieden. Echter, hij is een ernstige stotteraar, introvert en heeft

een laag zelfbeeld, wat zijn werk aanzienlijk bemoeilijkt. Jörgensen schetst op overtuigende wijze het moeizame leven van Tartaglia vanaf zijn aankomst, tegen de achtergrond van het welvarende Venetië.

### Rekenmeester Niccolò Tartaglia

Niccolò Tartaglia was een Italiaanse wiskundige, boekhoudkundig rekenmeester en militair ingenieur, beroemd om zijn bijdragen aan zowel de algebra als de ballistiek. In zijn roman onthult Jörgensen, door middel van innerlijke monologen, het complexe, eenzame en ambitieuze karakter van Tartaglia. Deze moeilijke persoonlijkheid leidde tot heftige conflicten met zijn vakgenoten en zelfs tot een confrontatie met de inquisitie. De auteur schetst een levendig beeld van het bedrijvige en welvarende Venetië in de zestiende eeuw. De Joden in Venetië hadden, net als elders in Europa, een ambivalente positie. Gedurende de late middeleeuwen en de renaissance vormden ze een belangrijke economische en intellectuele groep, maar ze waren ook blootgesteld aan vooroordelen en beperkingen. Ze waren actief in sectoren die door christenen als riskant of immoreel werden beschouwd, zoals het verstrekken van leningen met rente. Voor de bijbehorende berekeningen huurden ze rekenmeesters in, zoals Tartaglia. Het getto fungeerde als een centrum voor Joodse drukpersen en intellectuele uitwisseling. In Jörgensen's boek speelt deze context een prominente rol, vooral vanwege Tartaglia's hartstochtelijke, maar verboden, liefdesrelatie met een Joodse vrouw. Het hoofdthema van Jörgensen's werk betreft echter het moeizame oplossen van derdegraads vergelijkingen door Tartaglia, die daarmee een cruciale rol speelde in de ontwikkeling van de wiskunde in de zestiende eeuw.

### De stotteraar

Tartaglia, wiens echte naam Niccolò Fontana was, werd in 1499 geboren in Brescia, Italië. De naam Tartaglia betekent de stotteraar, een verwijzing naar zijn spraakgebrek. Dieter Jörgensen vertelt dat hij tijdens het Franse beleg van Brescia in 1512, een strategisch belangrijke stad vanwege zijn ligging en controle over de omliggende regio, ernstige verwondingen aan zijn hoofd opliep door de zwaardslagen van een Franse soldaat die hem probeerde te doden. Deze soldaat zou zijn moeder hebben misbruikt terwijl zij, samen met haar zoontje, de kathedraal was ingevlucht. Zijn moeder redde zijn leven en zorgde voor hem. Door de verwondingen aan zijn keel, gezicht en



schedel kon Tartaglia de rest van zijn leven alleen nog stotterend en stamelend spreken. Ondanks zijn spraakgebrek was hij een briljante rekenmeester en wiskundige die belangrijke bijdragen heeft geleverd aan de ontwikkeling van de meetkunde en algebra.



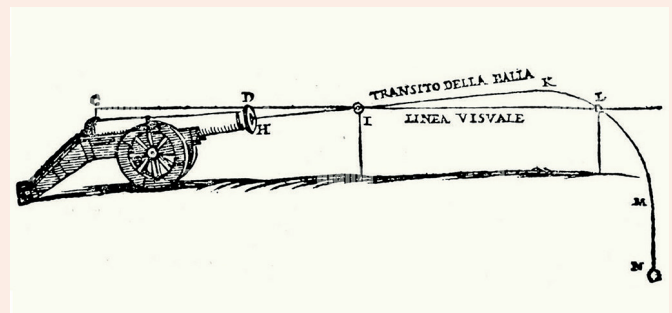
figuur 2 Een van de bekendste afbeeldingen van Tartaglia (met passer) die altijd een zware baard had en een hoofddeksel droeg om zijn littekens te verbergen. Bron: Wikimedia Commons.

## Ingenieur en wiskundige

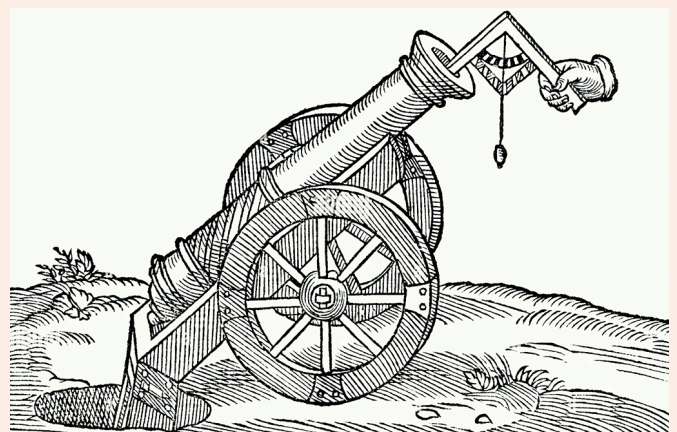
Tartaglia was een autodidact die als kind zijn kennis voornamelijk ontleende aan het beroemde boek *Summa de Arithmetica, Geometrica, Proportioni e Proportionalità* van Luca Pacioli. In dit werk ontdekte hij fouten in de berekeningen met betrekking tot kubische vergelijkingen. Daarnaast vertaalde hij de *Elementen* van Euclides in het Italiaans en schreef hij een belangrijk boek over ballistiek en fortificatie.

Een van Tartaglia's bekendste werken is *La Nova Scientia*, dat voor het eerst werd gepubliceerd in 1537. Het boek is vooral beroemd vanwege zijn behandeling van de wiskundige principes die ten grondslag liggen aan de ballistiek, de kunst van het schieten en de studie van projectielen. In *La Nova Scientia* legde Tartaglia de fundamente van de moderne mechanica en introduceerde hij concepten die later cruciaal zouden worden voor de natuurkunde en de techniek, zoals de beweging van voorwerpen onder invloed van zwaartekracht. Hij gebruikt wiskundige technieken en geometrische modellen om de trajecten van projectielen te analyseren en om de wetten

van de beweging te formuleren, zie figuren 3 en 4. Een ander belangrijk aspect van het boek is de combinatie van wiskunde en praktische toepassingen. Tartaglia biedt inzicht in de gevolgen van zijn theorieën in de echte wereld, waardoor zijn werk relevant werd voor zowel wetenschappers als ingenieurs uit zijn tijd. Een dergelijk praktisch boek was uitzonderlijk. Gewoonlijk maakten wetenschappers zich niet druk om mogelijke toepassingen van hun vaak vergezochte abstracte theorieën, die meestal gebaseerd waren op het filosofische werk van Aristoteles, dat door de katholieke kerk was gecanoniseerd. Iemand die de moed had om hiervan af te wijken, liep al snel het risico in aanraking te komen met de inquisitie. Deze instantie was bijzonder geïnteresseerd in de opvattingen van Tartaglia over de kogelbaan, omdat deze afweken van de bewegingswetten van Aristoteles. Dankzij zijn intelligentie en de steun van hoger geplaatste kerkelijke functionarissen wist Tartaglia vervolging te ontlopen. In essentie kan *La Nova Scientia* worden beschouwd als een brug tussen de middeleeuwse en moderne wetenschap, waarin Tartaglia's bijdragen de basis legden voor verdere ontwikkelingen in de natuurkunde en de wiskunde.



figuur 3 Afbeelding die laat zien dat Tartaglia nog niet de parabolobaan van projectielen kende. Uit: *La Nova Scientia*.



figuur 4 Afbeelding uit *La Nova Scientia*

## De wedstrijd tussen Fior en Tartaglia

In de wiskundige wereld van de zestiende eeuw hielden wiskundigen onderling openbare wedstrijden om complexe vraagstukken op te lossen. De uitdager formuleerde dertig vraagstukken die de uitgedaagde binnen een vooraf bepaalde tijd moest oplossen. Dit kon aanzienlijke sociaal-economische gevolgen hebben: de verliezer verloor vaak een lucratieve functie als rekenmeester voor rijke handelaren of als hoogleraar, moest een kostbaar diner organiseren voor dertig hooggeplaatste en veeleisende genodigden en werd soms verplicht het land of de stadstaat te verlaten.

De historische wedstrijd tussen Fior en Tartaglia is beroemd geworden. Deze maakte Tartaglia in één klap bekend binnen het wetenschappelijke milieu van Europa. In 1536 werd hij, inmiddels burger van Venetië, uitgedaagd door de met hem concurrerende rekenmeester Antoniomaria Fior, die dertig vraagstukken bij de notaris deponeerde. Toen Tartaglia deze onder ogen kreeg, bleek dat ze allemaal betrekking hadden op derdegraads vergelijkingen van de vorm  $x^3 + px = q$ , waarbij  $p$  en  $q$  positieve gehele getallen waren (negatieve getallen waren toen nog onbekend).

Tartaglia realiseerde zich dat de middelmatig getalenteerde wiskundige Fior in het geheim een oplossingsmethode moet hebben ontvangen (of gestolen) van zijn hoogleraar Scipione del Ferro, die enkele jaren eerder was overleden. Koortsachtig ging Tartaglia op zoek naar een methode om deze vergelijkingen zelf te kunnen oplossen. Vlak voor het verstrijken van de gestelde termijn vond hij een geometrische oplossing, die bekend staat als de *gnomon van Tartaglia*. Met behulp van deze driedimensionale figuur loste hij vervolgens de dertig vraagstukken in slechts enkele uren algebraïsch op. Het eindresultaat was 30-0 in het voordeel van Niccolò Tartaglia!

## Grote druk

Jörgensen beschrijft in zijn biografie op indrukwekkende wijze hoeveel mentale inspanning het voor Tartaglia vergde om onder grote druk die succesvolle wiskundige methode te ontdekken.

De wedstrijd tussen Tartaglia en Fior is een belangrijk moment in de geschiedenis van de wiskunde, vooral als het gaat om de oplossing van derdegraads vergelijkingen. Tartaglia's succes en de unieke methode die hij ontwikkelde, leidden tot zijn erkenning als een van de grootste wiskundigen van zijn tijd. De overwinning op Fior, met het indrukwekkende resultaat van 30-0, markeerde een keerpunt in zijn carrière en vestigde zijn naam in de Europese wiskundige gemeenschap.

Deze wedstrijd zou echter enkele jaren later op een onvoorspelbare manier nog een vervolg krijgen. Was hij werkelijk de eerste die een derdegraads vergelijking kon oplossen? Deel 3 van de biografie van Jörgensen behandelt de implicaties van deze vraag voor het leven van Niccolò Tartaglia.

## Conflict met Gerolamo Cardano

Het conflict tussen Tartaglia en Cardano, dat zich uitstrekte van 1538 tot 1548, is een fascinerende episode in de geschiedenis van de wiskunde, met name voor de ontwikkeling van de algebra. Tartaglia was een arme rekenmeester en privédocent wiskunde in Venetië, terwijl Cardano een gerespecteerde hoogleraar was. Gerolamo Cardano (1501-1576), een Italiaanse wiskundige, arts en filosoof, leefde in Pavia, in de regio Lombardije, ten zuiden van Milaan. Hij is vooral bekend om zijn bijdragen aan de algebra en de kansrekening. Jörgenson beschrijft uitvoerig de strijd om de prioriteit van de ontdekking van de oplossingen van derdegraads vergelijkingen tussen deze twee titanen van de toenmalige wiskunde. De meningsverschillen tussen Niccolò Tartaglia en Gerolamo Cardano over de prioriteit van de ontdekking van de oplossingsmethode voor derdegraads vergelijkingen, ook wel kubieke vergelijkingen genoemd, escaleerden in de loop der jaren en werden steeds heftiger en onvriendelijker. Dit geschil ontstond nadat Tartaglia, in het kader van de wedstrijd met Fior, de methode met de *gnomon* had ontdekt voor het oplossen van een specifiek type van deze vergelijkingen. Hij weigerde echter deze methode openbaar te maken, omdat hij van plan was deze in een eigen boek te publiceren. Cardano, die geïnteresseerd was in het werk van Tartaglia in verband met een wiskundeboek dat hij aan het schrijven was, vroeg hem om zijn methode bekend te maken. Tartaglia stemde weliswaar toe, maar alleen onder de voorwaarde dat Cardano het geheim voorlopig niet zou publiceren. Uiteindelijk besloot Cardano echter om Tartaglia's methode toch openbaar te maken in zijn boek *Ars Magna* (1545), waarin hij zowel zijn eigen werk als de methoden van anderen opnam. Dit leidde tot een openlijke breuk tussen de twee mathematici, aangezien Tartaglia zich zeer verbolgen voelde over de schending van hun overeenkomst. De situatie escaleerde verder toen Tartaglia ontdekte dat Cardano ook de oplossingsmethoden van Scipione del Ferro had opgenomen. Scipione del Ferro was de voormalige mentor van Antoniomaria Fior, die in 1536 met Tartaglia de rivaliserende wiskundewedstrijd was aangegaan, die Tartaglia overtuigend had gewonnen.

Cardano was echter van mening dat hij de eed tegenover Tartaglia niet had geschonden. In 1543 reisde hij, samen met zijn veelbelovende student Ludovico Ferrari, die later zelfs vierdegraads vergelijkingen kon oplossen, naar Bologna om het aantekenboek van de hoogleraar Scipione del Ferro te bestuderen.

„De oplossingsformule voor derdegraads vergelijkingen wordt terecht de formule van Cardano genoemd en niet die van Tartaglia.”

Daaruit bleek duidelijk dat Tartaglia niet de eerste was die derdegraads vergelijkingen kon oplossen, waardoor Cardano zijn belofte aan Tartaglia niet had geschonden. Tartaglia was enkel in staat om een heel specifieke klasse van derdegraads vergelijkingen op te lossen, terwijl Cardano zelf al beschikte over een veel algemenere oplossingsmethode. De oplossingsformule, die nog steeds wordt gebruikt, wordt dan ook terecht de formule van Cardano en niet die van Tartaglia genoemd. Jörgensen beschrijft indrukwekkend hoe Tartaglia nog lange tijd verzet bleef bieden. Tartaglia vocht zijn strijd uit met venijnige brieven vol beledigingen, maar moest na verloop van tijd toch toegeven dat hij had verloren.

## Conclusie

*De Rekenmeester* van Jörgensen is een boeiend verhaal over een wetenschapper die ondanks een grote handicap in staat was tot uitzonderlijke wetenschappelijke prestaties. Het boek volgt de inspanningen van Tartaglia om een buitengewone bijdrage aan de wiskunde te leveren, tegen de intrigerende achtergrond van de Renaissance in Venetië, een periode van bloeiende handel en wetenschappelijke vooruitgang. Kortom, dit boek is een aanrader voor iedereen die geïnteresseerd is in de geschiedenis van rekenen en wiskunde.

## Over de auteur

Simon van der Salm was 27 jaar docent wiskunde en statistiek aan de HTS-E in Hilversum en vijftien jaar opleider van medisch technici voor de ziekenhuizen in Nederland. Nu is hij gepensioneerd.

E-mailadres: [s.salm@kpnmail.nl](mailto:s.salm@kpnmail.nl)

# Bridges



*Bridges* is een internationale conferentie op het gebied van wiskunde en kunst in de meest brede zin van het woord: grafisch, architectuur, poëzie, dans, theater enzovoort.

De komende editie, van 14 t/m 18 juli wordt georganiseerd door de TU Eindhoven. Een vast onderdeel van Bridges is de *Family Day* (17 juli op het TU terrein) met allerlei activiteiten (workshops, performances, poster-presentaties etc) op het grensvlak tussen wiskunde en kunst. Deze Family Day is voor iedereen gratis toegankelijk.



# Resultaat van de ledenenquête NVvW

In de maanden mei en juni van 2024 is een enquête uitgezet onder de leden van de NVvW. Dit was een samenwerking tussen de redactie van *Euclides* en het bestuur. Tanja Groenendaal bespreekt het resultaat, nou ja... meer de leermomenten.

## Inleiding

Het resultaat? 48 respondenten, ofwel ongeveer 1,6 % van onze leden. Voor een representatieve steekproef zijn minimaal 341 respondenten nodig (bij een ledental van circa 3000). Nu geef ik zelf les in statistiek aan eerstejaars studenten Marketing bij de Hogeschool Utrecht. Het analyseren van de data die deze enquête heeft opgeleverd, was een mooie confrontatie met de praktijk. Ik heb drie valkuilen geïdentificeerd en daarbij leermomenten geformuleerd.

### *Valkuil 1: pas op met lange vragenlijsten*

Om te beginnen wat getallen:

- de vragenlijst bestaat uit 41(!) vragen
- in totaal zijn er 146 (!) opties om op te klikken
- er zijn twaalf open vragen, waarop in totaal 169 open antwoorden zijn gegeven.

De aanname is dat veel respondenten zijn afgehaakt door de omvang van de enquête. De eerste keer dat we in de redactie de mogelijkheid bespraken van een onderzoek onder de lezers van *Euclides* dachten we aan een korte peiling naar het soort artikelen dat graag gelezen wordt, of juist ontbreekt. Bij de uitwerking van de vragenlijst is het vervolgens nogal uit de hand gelopen. Er kwamen steeds meer onderwerpen bij waarover we ook graag jullie mening zouden weten. Dat leidde tot een vragenlijst met:

- zeven vragen over de vereniging zelf
- elf vragen over thema's waar de NVvW aandacht aan zou kunnen besteden
- zestien vragen over *Euclides*
- zeven vragen over de achtergrond van de respondent.

Leermoment: maak een reële inschatting van de tijd die nodig is om de enquête in te vullen en bedenk vooraf of je doelgroep die tijd daarvoor over heeft.

### *Valkuil 2: niet vooraf controleren in welke vorm de data beschikbaar komt*

Een digitale enquêtetool heeft als grote voordeel dat je als output een Excel-bestand krijgt. Maar of je daar eenvoudig analyses mee kunt uitvoeren hangt af van de tool en van het vraagtype dat wordt gebruikt. Als voorbeeld vraag 30 van de enquête: 'Welke drie van de volgende onderwerpen vind jij het meest interessant om over te lezen in *Euclides*? (Klik maximaal drie onderwerpen aan)'. Onder de vraag staan vijftien opties. In het ideale geval wordt iedere antwoordoptie een eigen variabele van het soort 0 = niet gekozen, 1 = wel gekozen. Daarmee kun je een nette multivariabele-analyse maken.

In het Excel-bestand van deze tool waren alle gekozen antwoorden achter elkaar geplakt, in de volgorde dat ze waren gekozen. Stel dat iedereen netjes drie opties heeft gekozen, dan levert dat  $15 \times 14 \times 13 = 2730$  verschillende antwoordmogelijkheden op. Daar kun je geen zinvolle tabel of grafiek bij maken. En het was nog erger: elf respondenten hadden (veel) meer dan drie antwoorden geselecteerd, want die beperking was niet ingesteld. De enige optie is zelf alle antwoorden nalopen en turven. Bij 48 respondenten is dat nog wel te doen. In totaal zijn 160 antwoordopties gekozen. De meest gekozen optie is 'Vakdidactiek, praktijkvoorbeelden' (29 x) gevolgd door 'Toepassingen van de wiskunde' (19 x) en Geschiedenis (14 x).

Leermoment: laat de conceptenquête een aantal keren invullen en bekijk daarna de output. Kies de technische vraagvorm en de overige instellingen zorgvuldig met als doel om analyse van de data mogelijk te maken.



### Valkuil 3: conclusies trekken terwijl de steekproef niet representatief is (en te klein)

Als voorbeeld vraag 24: 'Hoeveel nummers van *Euclides* wil je per schooljaar ontvangen, als het totale aantal pagina's gelijk blijft? (Er verschijnen nu zeven nummers per jaar).'

Na wat bewerking van de antwoorden levert Excel de tabel van figuur 1:

| Rijlabels                | score Vraag 24v |
|--------------------------|-----------------|
| Neutraal / geen antwoord | 12,50%          |
| Vier of minder           | 8,33%           |
| Vijf                     | 14,58%          |
| Zes                      | 18,75%          |
| Zeven                    | 41,67%          |
| Acht of negen            | 4,17%           |
| Eindtotaal               | 100,00%         |

figuur 1

Als een student dit bij mij zou aanleveren, dan zou hij de volgende feedback krijgen:

- 100,00% is onzin, 100% is precies goed
- bij de tabel ontbreekt het aantal respondenten ( $n = 48$ )
- bij deze kleine aantallen zijn twee decimalen overdreven specifiek

Los daarvan: het is verleidelijk om aan deze analyse de conclusie te verbinden dat we wel goed zitten met zeven

nummers per jaar, maar die conclusie is ongepast, want gebaseerd op een niet-representatieve steekproef.

Leermoment: het heeft weinig nut om tijd te besteden aan de analyse van deze data, want wat je ook denkt te zien, de steekproef is te klein voor valide en betrouwbare conclusies.

### Tot slot

Was het dan allemaal voor niets? Nou nee, ten eerste was het een leerzame ervaring, ten tweede heeft het vier e-mailadressen opgeleverd van leden die wel geïnterviewd willen worden over hun ervaringen als wiskundedocent en ten derde mogen we veertien leden benaderen om verder te praten over de onderwerpen van deze enquête. Als we echte inzichten willen, is nader onderzoek nodig. Misschien toch nog een kleine peiling uitzetten onder onze leden, om te weten te komen waarom de respons op deze enquête zo laag was?

### Over de auteur

Tanja Groenendaal is docent kwantitatief onderzoek bij Hogeschool Utrecht, opleiding Commerciële Economie. Tanja was negen jaar bestuurslid van de NVvW en is nu lid van de redactie van *Euclides*.  
E-mailadres: [tanja.groenendaal@hu.nl](mailto:tanja.groenendaal@hu.nl)

# Verschenen



Zebra 72:  
Rekenen voor het  
LevenWiskunde bij  
levensverzekeringen

Jeroen van Wageningen,  
Dennis Dannenburg

Van de uitgever:

Je kunt een levensverzekering afsluiten die uitkeert bij overlijden of juist bij in leven zijn. In dit boekje berekenen we hoeveelheid geld die bepaalde levensverzekeringen kosten en hoe groot de pot met geld moet zijn die een verzekeraar opzij moet zetten om aan zijn toekomstige verplichtingen te kunnen voldoen. Kortom, we duiken in de wiskunde achter de levensverzekeringen waarbij het vooral gaat om het rekenen met kansen en het effect van tijd.

# COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.  
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.  
ISSN 0165-0394

## Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur  
Liesbeth Coffeng, eindredacteur  
Rogier Bos  
Hugo Duivesteijn, voorzitter  
Tanja Groenendaal  
Ernst Lambeck  
Constantijn Tilanus

## Inzenden bijdragen

Tom Goris,  
Molenbochtplein 38, 5014 EJ Tilburg  
E-mail: [vakbladeuclides@nvvw.nl](mailto:vakbladeuclides@nvvw.nl)

## Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.  
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.  
Zie voor nadere aanwijzingen: [vakbladeuclides.nl/richtlijnen](http://vakbladeuclides.nl/richtlijnen)

## Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailing-services.  
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, [www.dekleuver.nl](http://www.dekleuver.nl)

## Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: [www.nvww.nl](http://www.nvww.nl)

## Voorzitter

Margot Rijnierse  
E-mail: [m.rijnierse@nvvw.nl](mailto:m.rijnierse@nvvw.nl)

## Secretaris

Els Franken  
E-mail: [e.franken@nvvw.nl](mailto:e.franken@nvvw.nl)

## Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld  
Tel. 06 21 50 96 79 E-mail: [ledenadministratie@nvvw.nl](mailto:ledenadministratie@nvvw.nl)

## Helpdesk rechtspositie

NVvW - Juridisch Centrum  
E-mail: [nvww@juridischcentrum.com](mailto:nvww@juridischcentrum.com)  
Vermeld bij je contact je lidnummer en telefoonnummer.

## Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.  
De contributie per verenigingsjaar bedraagt met ingang van 1 augustus 2023

- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 72,50
- leden, maar dan zonder Euclides: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 75,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.  
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.  
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

## Abonnementen Euclides niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang  
Personen (niet-leden van de NVvW): € 90,00  
Instituten en scholen: € 160,00  
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00  
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

## Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie  
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal,  
Tel. (0318) 555 075  
E-mail: [secretariaat@dekleuver.nl](mailto:secretariaat@dekleuver.nl)

# KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: [vakbladeuclides@nvvw.nl](mailto:vakbladeuclides@nvvw.nl)

2025

## EINDHOVEN

Ma  
14/07  
Vr  
18/07

### Bridges

Internationale conferentie over wiskunde en kunst

Op 17 juli: familiedag

Organisatie: TU Eindhoven

## AMSTERDAM

Vr  
19/09  
Za  
20/09

### Nazomercursus 2025

Thema: Reële toepassingen van complexe getallen

Organisatie: Platform Wiskunde Nederland en  
Platform Wiskunde Vlaanderen

## ANTWERPEN

Vr  
26/09  
Za  
20/09

### Nazomercursus 2025

Thema: Reële toepassingen van complexe getallen

Organisatie: Platform Wiskunde Nederland en  
Platform Wiskunde Vlaanderen

Za  
01/11

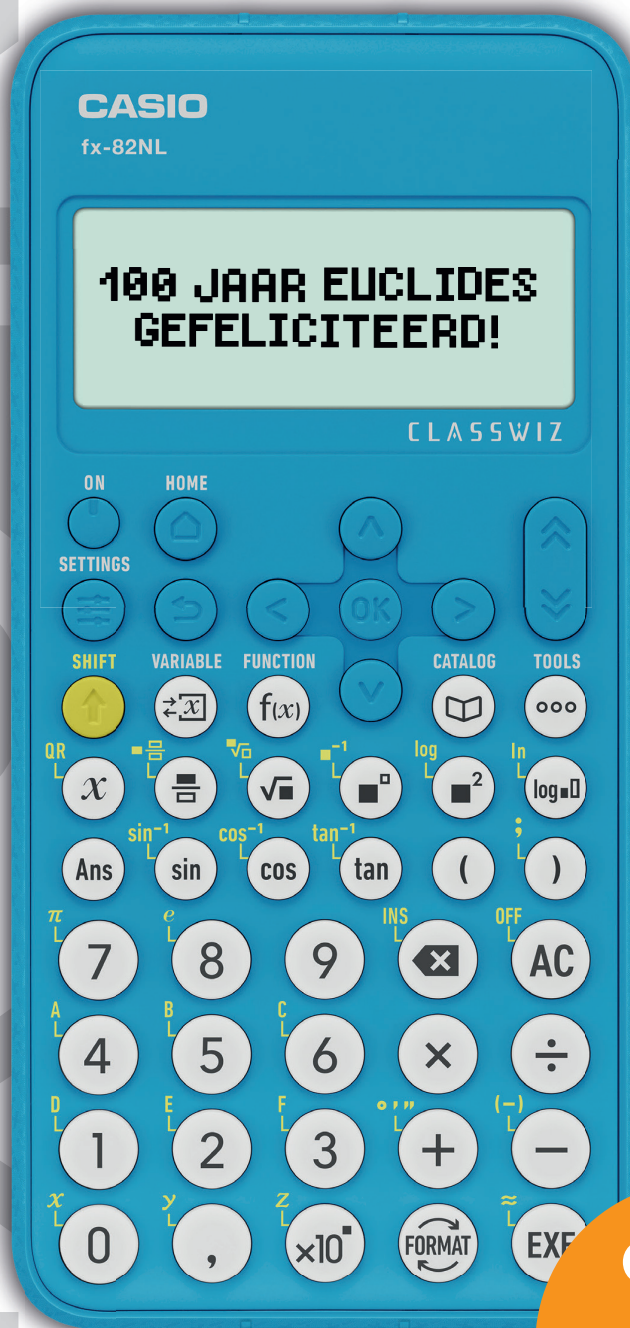
NVvW jaarvergadering en studiedag

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook [vakbladeuclides.nl](http://vakbladeuclides.nl)

## JAARGANG 100

| Nr. | Verwachte verschijningsdatum | deadline      |
|-----|------------------------------|---------------|
| 7   | 18 juni 2025                 | 20 april 2025 |

**CASIO**



Opvolger van:  
fx-82MS  
fx-82EX

**Voor Nederlands  
curriculum gemaakt**



Met deze advertentie vertellen we je **onze** **kijk** op de **kerndoelen** en hoe we jou als **docent** daarbij gaan **helpen**.

# Natúúrlijk kerndoelenedities

bij Getal & Ruimte en Moderne Wiskunde

## Evolutie, geen revolutie

Met de huidige 13e editie ben je als docent wiskunde al grotendeels 'kerndoelproof'.

De nieuwe kerndoelen zetten het vak wiskunde niet op z'n kop: het is een evolutie, geen revolutie. Toch verdienen leermiddelen het om vanuit de nieuwe wettelijke kaders ontwikkeld te worden. Alleen zo krijg je kwalitatief hoogwaardig lesmateriaal dat de verschuivende accenten in het vak goed tot hun recht laat komen.

## Belangrijkste veranderingen in de nieuwe kerndoelen

- De nieuwe kerndoelen leggen meer nadruk op de samenhang tussen wiskundige concepten en wiskundige denk-werkwijzen.
- Ook worden contexten uit de werkelijkheid sterker benadrukt, zodat leerlingen beter leren hoe wiskunde en de wereld zich tot elkaar verhouden.
- Daarnaast is er meer aandacht voor rekenvaardigheid, statistisch redeneren en het kritisch beoordelen van data.

De achterliggende gedachte is dat leerlingen een toekomstbestendige mix van wiskundige kennis en vaardigheden opdoen. Zo kunnen ze wendbaar en kritisch meedoen in een snel veranderende samenleving.

## Klaar voor het nieuwe schooljaar!

Daarom zorgen wij ervoor dat je vanaf schooljaar 2026/2027 kunt werken met een wiskundemethode die helemaal is geschreven vanuit de nieuwe kerndoelen. We hebben regelmatig contact met het SLO, zodat onze methodes Getal & Ruimte en Moderne Wiskunde naadloos aansluiten op de laatste voorschriften. Niet achteraf nieuwe doelen aan bestaand lesmateriaal koppelen. Wel gemak én zekerheid voor jou als wiskundedocent.

Tot die tijd kun je prima verder met de 13e editie. En stap je straks - met LIFO of met hardcover boeken - moeiteloos over naar de kerndoeleneditie.

Aernout Pilot  
Uitgever Getal & Ruimte

Erik Jan de Vries  
Uitgever Moderne Wiskunde