



EUCLIDES



Royal
Institute
of
Chemistry
1877-1977

VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELEERAAR

Nieuwe examenprogramma's wiskunde vmbo

Wiskundecurriculum in Zwitserland

Geschiedenis van de wiskunde: ontsluiting van de oneindigheid

Reis om de wereld in 80 spelletjes

100 jaar

Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

NR.5

JAARGANG 100 MAART 2025

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 100 NR 5



IN DIT NUMMER

NIEUWE EXAMENPROGRAMMA'S WISKUNDE
VMBO IN DE MAAK

René Leverink

4

EEN ZWITSERS WISKUNDECURRICULUM?

Meike Akveld

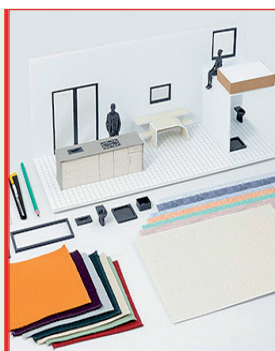
8

'ELKE DAG ZIN OM ER IETS
VAN TE MAKEN'

INTERVIEW MET VMBO-DOCENT
KARIN VAN DEN HEUVEL

Liesbeth Coffeng

12



EEN PRAKTISCH-HISTORISCHE BLIK
OP WISKUNDE

DEEL 3 ONTSluitING VAN DE ONEINDIGHEID

Roel van Asselt

15

COSSISCH OF NIET, DAT IS DE KWESTIE

Fred Muijers

20

WITJE: PIJLENKLOKKEN

23

BOEKBESPREKING
REIS OM DE WERELD IN
80 SPELLETJES

Rob van Oord

24



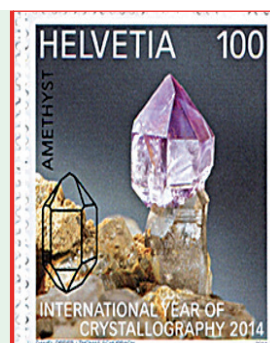
PRACHT EN KRACHT VAN
WISKUNDE

DEEL 4: VAN KRISTALSTRUCTUUR

TOT 'EIN STEIN'

Paul Igodt

26



WIS EN WAARACHTIG

33

DE EERSTE VROUW IN DE REDACTIE VAN
EUCLIDES: HENNY SUSIJN (1939-2023)

Bert Zwaneveld

Martinus van Hoorn

34

VIJF VRAGEN AAN ...
KLASKE BLOM

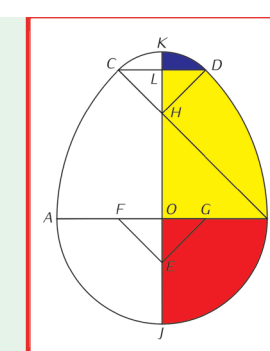
36



UITDAGENDE PROBLEMEN
EI, EI, EI

Jacques Jansen

38



Afbeelding voorkant: collage van postzegels met mineralen. Inspiratie voor deze collage kwam door het artikel van Paul Igodt, Pracht en kracht van wiskunde deel 4 (p.26)

Collage: Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

RUST ROEST (NIET)
BARUCH SPINOZA (1632 - 1677)
Ab van der Roest

43

30 JAAR
WERELDWISKUNDEFONDS
Monica Woldinga

44



OLYMPIADEPUZZEL
Esther Bod

37

SERVICEPAGINA

45



Kort vooraf

Eind januari heb je misschien wel meegedaan aan de Nationale Tuin-

vogeltelling van Vogelbescherming Nederland. De resultaten zijn inmiddels bekend en de website, elementair googlen en je hebt hem, meldt dat er 105721 deelnemers waren die samen 1412062 vogels geteld hebben. 13,4 vogel gemiddeld per deelnemer, was dat ook het eerste waar je aan dacht? Die website staat vol prachtige data waar je zonder al te veel moeite mooie opdrachten bij kunt bedenken. Van alle provincies, steden, postcodes, enzovoort kun je de lijstjes opvragen, tot aan de individuele waarnemers toe. Ter inspiratie kun je onder het kopje 'Opmerkelijk' kijken, dan blijkt bijvoorbeeld de huismus zonder enige twijfel de Bohemian Rhapsody onder de vogels te zijn: staat al vanaf de eerste telling in 2001 op 1.

Van de schoonheid van de natuur naar de pracht van wiskunde is een kleine stap. In deze *Euclides* zie je het extra lange slot van de vierdelige serie van Paul Igodt en de afbeeldingen van postzegels die Paul in zijn artikelen opnam inspireerde ons tot het maken van de collage op de voorkant. En we kunnen alvast uitkijken naar nog veel meer wiskunst gerelateerde bijdragen: van 14 t/m 18 juli wordt de internationale Bridges, Mathematics and the Arts conferentie in Eindhoven gehouden. We houden je op de hoogte wat je daar als docent van mee kunt beleven. Om alvast in de paasstemming te komen kun je aan de slag met een soort Tangram ei. Jacques Jansen geeft het constructievoorschrift en laat zien welke wiskunde er in het ei verstopt zit.

Veel genoeg met deze *Euclides*!

Tom Goris

Nieuwe examenprogramma's wiskunde vmbo in de maak

De examenprogramma's van vmbo-bb, -kb en -gl/tl worden vernieuwd. Beoogd zijn een betere aansluiting tussen de niveaus en inhouden die optimaal aansluiten bij de wereld van nu en straks. De drie conceptexamenprogramma's worden op dit moment uitgetest op negen scholen. Vanwege de urgentie is er gekozen voor een nieuwe vorm van beproeven. Een try-out: kort, compact en intensief. René Leverink ging in gesprek met de betrokkenen.

Nieuwe onderdelen beproeven

Madeleine Vliegthart is curriculumexpert bij SLO en docent/onderzoeker rekenen/wiskunde aan een pabo in Rotterdam. Voorheen was ze als lid van de vakvernieuwingscommissie wiskunde vmbo en als voorzitter van de syllabuscommissie betrokken bij de vernieuwing van de wiskundeprogramma's. Nu begeleidt ze namens SLO de try-out van de nieuwe examenprogramma's op de negen scholen. In overleg met de syllabuscommissie en de vakvereniging selecteerde SLO de onderdelen van de programma's die in de try-out worden beproefd. Madeleine: 'Het ging daarbij alleen om de onderdelen die nieuw of vernieuwd zijn. Het is namelijk niet zo dat de hele examenprogramma's voor het vmbo veranderd zijn. Vanuit SLO ondersteunen en begeleiden we de deelnemende scholen. We organiseren online sessies, landelijke bijeenkomsten en schoolbezoeken, en bespreken dan met de leraren en leerlingen hoe het gaat met zo'n nieuw onderwerp. Hoe bieden ze het aan, welke materialen gebruiken ze, hoe reageren leerlingen erop, is het haalbaar met deze leerlingen, hoeveel tijd kost het? Ook vragen we of de formulering van de nieuwe programma's en syllabi duidelijk is.'



figuur 1 Madeleine Vliegthart (SLO) begeleidt de negen vmbo-scholen bij de try-out ^[1]

Een try-out is een nieuwe manier om een vernieuwd examenprogramma in de praktijk uit te proberen. 'Negen scholen zijn zes maanden lang in klas 3 of klas 4 samen met leerlingen nieuwe onderdelen aan het beproeven – dus niet het hele examenprogramma. Er zijn in die periode drie landelijke bijeenkomsten van schoolleiders en docenten van de negen scholen. Daarnaast worden leerlingen bevraagd over de nieuwe lesstof die ze hebben gehad. Verder zijn er wekelijks online vragenuren voor de docenten, waarin ze ervaringen met elkaar delen en zeswekelijkse inspiratiesessies. In april sluiten we de try-out af, brengen we alle data samen, kijken we in hoeverre er aanpassingen aan de examenprogramma's en syllabi nodig zijn en worden vervolgens de eindtermen definitief gemaakt en aangeboden aan het ministerie van OCW.'

Burgerschap

In hoeverre voorzien de vernieuwingen in een duidelijk aanwezige behoefte in het veld? 'Voor een aantal onderdelen geldt dat zeker. Zo bestond bij gl/tl de wens om de aansluiting met de havo beter te maken. Daar is een aantal onderdelen voor in het betreffende examenprogramma gekomen. Een ander gewenst vernieuwend onderdeel voor alle leerwegen is het domein *Kwantitatieve Informatie en Kansen*, dat onder meer betrekking heeft op het grafisch weergeven en beoordelen van gegevensverzamelingen en kansen. Zo'n onderdeel draagt bij aan het weerbaarder maken van leerlingen als burgers in een samenleving die steeds meer beïnvloed wordt door data. In zekere zin hebben we het dan over burgerschap.'

Het Goese Lyceum

Linda de Smet en Mike Weijmans geven wiskunde aan het Goese Lyceum in Goes, een van de scholen die

deelnemen aan de try-out. De Smet: 'Wij zijn als school altijd gericht op onderwijsvernieuwing, dus toen deze kans zich voordeed waren Mike en ik meteen enthousiast. Onze teamleider zei: doen! Het is altijd goed om voorop te lopen bij vernieuwingen.' Wat wordt verwacht van deelnemende scholen? Weijmans: 'Dat we de lessen aanpassen aan de nieuwe eindtermen en de nieuwe stof toetsen in ons PTA. Dat doen we met eigen opgaven of met opgaven van Cito. Die laatste sturen we nagekeken op, zodat Cito kan zien hoe de leerlingen die opgaven maken. Voor de duidelijkheid: het gaat dus niet om een totaal nieuw PTA. We hebben het alleen op onderdelen aangepast en uitgebreid en dat is wat we in de try-out aan het uitproberen zijn.' De Smet vult aan: 'En het geldt ook alleen voor de klassen waaraan wij lesgeven. De beide andere collega's uit de sectie draaien het bestaande programma. We willen en kunnen ze niet met de try-out belasten, want wij krijgen er uren voor, en zij niet. Voordeel is dat we zo mooi het verschil tussen bestaand en nieuw kunnen zien. En uiteraard delen we onze bevindingen met onze collega's en zij passen soms nieuwe onderdelen alvast toe in hun lessen. Maar dan zonder ze te toetsen.'



figuur 2 Mike Weijmans en Linda de Smet van Goese Lyceum ^[2]

Het gaat hier om een try-out met slechts een deel van de leerlingen. Wat zeggen jullie tegen ouders of leerlingen die zich afvragen of ze wel even goed zijn voorbereid op het examen als de andere leerlingen? Weijmans: 'Het examen is afgestemd op het onderwijs dat de leerlingen hebben gehad. Daar is goed over nagedacht. De stof die wij nu aanbieden past bij het niveau van de leerling. Als wij bijvoorbeeld een exponentieel verband uitleggen of interpolatie, dan doen we dat misschien wel op een andere manier, maar wel op het voorgeschreven niveau.'

Soepeler overstappen

Een belangrijke vernieuwing in de conceptexamenprogramma's is volgens De Smet dat de niveaus beter op elkaar aansluiten: 'Als je eerst vmbo-basis hebt gedaan en je wilt overstappen naar vmbo-kader, dan zit er zoveel

overlap in de stof dat je maar een klein stukje kader hoeft in te halen. Hetzelfde geldt voor kader naar gemengd en voor gemengd/theoretisch naar havo. Die stappen zijn nu vaak nog te groot. Er zijn concepteindtermen toegevoegd waardoor de overstap soepeler zal worden. Een andere verandering is dat er meer aansluiting is met andere vakken. Zo zag ik vandaag hoe BWI-leerlingen [BWI= Bouwen, wonen en interieur, red] met de stelling van Pythagoras een diagonaal aan het berekenen waren op de manier zoals ze dat bij ons geleerd hadden. Als leerlingen die vakoverstijgende verbanden in de praktijk tegenkomen, is dat enorm goed voor hun motivatie bij wiskunde.' Verder zijn de eindtermen duidelijker, toegankelijker en eenduidiger omschreven, aldus Weijmans: 'Je ziet meteen waar je aan toe bent. Dat is prettig voor ons, bij het samenstellen van de toetsen, maar bijvoorbeeld ook voor de uitgevers. Tevens is er meer aandacht voor probleem oplossen en voor abstraheren. Wil je een wiskundig probleem oplossen, dan zul je dat probleem eerst tot de kern moeten terugbrengen. Dat zit nu uitgebreid in de eindtermen, in het domein *Verbanden, Verschijningsvormen en Vergelijkingen*.'



figuur 3 Gerdineke van Silfhout in gesprek met curriculumexpert wiskunde vmbo Harm Selten (SLO) ^[1]

Brede actualisatie kerndoelen en examenprogramma's

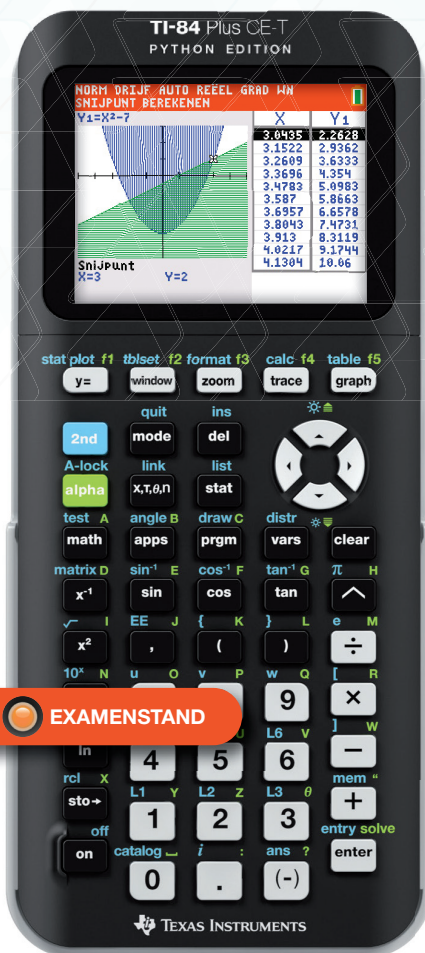
De vernieuwing van de programma's wiskunde maakt deel uit van een brede actualisatie van kerndoelen en examenprogramma's. In 2022 is SLO gestart met de vakvernieuwing in de bovenbouw van het vo met de volgende vakken: Nederlands, moderne vreemde talen, Fries, wiskunde, natuurwetenschappelijke vakken, klassieke talen en maatschappijleer. Andere vakken volgen later. 'Actuele examenprogramma's dragen bij aan een goede doorstroom naar vervolgonderwijs en tussen schoolsoorten en leerwegen. Ook helpen ze bij de voorbereiding van leerlingen op hun plek in de maatschappij', schrijft Gerdineke van Silfhout op de SLO-website. Zij is programmamanager actualisatie examenprogramma's bij

>

Welke grafische rekenmachine komt op de lijst voor de bovenbouw?



Sluit naadloos aan bij het Nederlandse curriculum



Met de

TI-84 Plus CE-T Python Edition

haal je jouw onderwijsdoelen!

- » Lichtgewicht én krachtig
- » Kleurrijke grafieken die inzicht geven
- » Goedgekeurd voor toetsen en examens
- » Inclusief emulatorsoftware



Zet op de lijst met schoolspullen!

education.ti.com/nl/groepsbestelling

SLO en als zodanig ook verantwoordelijk voor de herziening van de examenprogramma's wiskunde in het vmbo. 'Het is voor het eerst in de onderwijshistorie dat we in relatief korte tijd zoveel vakken tegelijk actualiseren, en dan ook nog voor vmbo, havo en vwo. In het verleden liep dat actualiseren lang niet altijd synchroon. Daardoor komt het dat de programma's soms behoorlijk van elkaar verschillen, zowel inhoudelijk als qua vormgeving, en dus onvoldoende op elkaar zijn afgestemd. Daarom heeft het ministerie van OCW ons de opdracht gegeven om de vernieuwing van een aantal vakken zoveel mogelijk consistent en in samenhang uit te voeren. Cruciaal voor een doorlopende leerlijn en afstemming tussen en binnen vakken en schoolsoorten.'

Beproeven, evalueren en bijstellen

Maar laat nu net de vernieuwing van wiskunde-vmbo uit de pas lopen, althans qua planning. Van Silfhout: 'Dat is het enige vak dat eerder is gestart met het actualiseren, op advies van onder andere de vakvereniging, die aangaf dat wiskunde op het vmbo dringend aan vernieuwing toe is. Vanwege deze urgentie is gekozen voor een andere vorm van beproeven dan voorheen. Tot nu toe ging het om een meerjarig traject met een groot aantal scholen. We noemen dat een cohortpilot. Een try-out is veel beperkter in duur en omvang. De examenprogramma's worden met name op de nieuwe aspecten beproefd in één schooljaar, voor wiskunde vmbo op negen scholen. Die scholen zijn geselecteerd op basis van locatie, verdeeld over heel Nederland, op de verschillende leerwegen die ze aanbieden en op de mogelijkheid om ten minste twee docenten een halve dag per week voor het beproeven beschikbaar te hebben. De reden van de nieuwe aanpak is dat we, zo snel als verantwoord is, de nieuwe inhoud in het onderwijs willen terugzien. Met deze vorm voorkomen we dat het jaren duurt voor we de nieuwe opzet van een vak officieel in het onderwijs kunnen invoeren. Ook in de compacte aanpak van een try-out wordt een examenprogramma beproefd op begrijpelijkheid, bruikbaarheid en haalbaarheid. Alleen kiezen we voor een meer kwalitatieve dan kwantitatieve aanpak, waarbij we met leraren ontwerpen en beproeven, meer dialoog organiseren en de diepte induiken over wat werkt en wat niet werkt. Dit doen we samen met Cito en CvTE. Samengevat: in één schooljaar beproeven, evalueren en bijstellen.'

Welke boodschap hebben De Smet en Weijmans voor hun vakcollega's? 'Het is echt niet zo dat alles op de kop gaat. Het examenprogramma en de eindtermen zijn aangepast aan de wensen en eisen van deze en de komende tijd, maar je hoeft niet totaal anders les te gaan geven. Het is wél een mooie aanleiding om weer eens kritisch naar je

eigen vak te kijken. Wat moet en wat mag? Kijk samen met je collega's naar je methode. Wat gebruiken we daar wel uit, en wat niet? Zo blijf je ook als docent letterlijk en figuurlijk bij de les.'

In het schooljaar 2025/2026 worden ook de andere conceptexamenprogramma's beproefd voor wiskunde.

- Op vmbo gaat het om de conceptexamenprogramma's gecijferdheid (rekenen), bedoeld voor leerlingen die nu het vak wiskunde niet als examenvak volgen op vmbo-bb, -kb, -gl/tl.
- Op havo-vwo: C&M vwo, E&M havo en vwo, N&G havo en vwo en N&T havo en vwo.
- In schooljaar 2026/2027 volgt dan nog wiskunde C&M havo, een nieuw vak dat via een cohortpilot zal worden beproefd.

Vanaf februari 2025 konden scholen (per vestiging) subsidie aanvragen voor het beproeven van de examenprogramma's. Een school vraagt subsidie aan voor één vak in één schoolsoort/leerweg. Een school kan voor meerdere vakken (maximaal drie) subsidie aanvragen. Dat moedigen we ook aan, vanwege het onderzoeken van samenhang tussen vakken, bijvoorbeeld Nederlands en Engels; Engels en Spaans; natuurkunde en scheikunde enzovoort. Per aanvraag geldt een subsidiebedrag van €35.000. Er zal een simpele aanvraagprocedure komen via de Dienst Uitvoering Subsidie aan Instellingen.^[3] Meer informatie vind je op de website van de Actualisatie Examenprogramma's ^[4].

Noten

- [1] foto: Jean-Pierre Jans (De Beeldredactie)
- [2] foto: Sander Koning (De Beeldredactie)
- [3] zie <https://www.dus-i.nl/subsidies/beproeven-examenprogrammas>
- [4] zie www.actualisatie-examenprogrammas.nl/wiskunde

Over de auteur

René Leverink is onderwijsjournalist en tekstschrijver. Hij publiceert over onderwijs in onder andere *Van Twaalf Tot Achtien*, *PrimaOnderwijs.nl* en een aantal uitgaven van SLO. Daarnaast is hij werkzaam als docent Nederlands in het voortgezet onderwijs. Voor inhoudelijke vragen kun je terecht bij SLO: beproevenexamenprogramma@slo.nl

Een Zwitsers wiskundecurriculum?

In Nederland wordt er gesleuteld aan de diverse curricula, maar hoe zou dat in Zwitserland gaan, waar ieder kanton min of meer een verschillende curriculum heeft? Er zijn 26 kantons...

Meike Akveld leidt ons rond in deze ogenschijnlijke chaos en komt tot een conclusie met een mooie Duitse term: *Lehrfreiheit*.

Inleiding

Om te begrijpen waarom er in Zwitserland niet één wiskundecurriculum is, moet je misschien eerst beter begrijpen hoe Zwitserland functioneert. Zwitserland is een klein land met een bevolking van bijna negen miljoen inwoners; er worden vier talen gesproken (Duits, Frans, Italiaans en Reto-Romaans) en het bestaat uit 26 kantons en half-kantons, zie figuur 1, die vrij autonoom zijn. Dit heeft belangrijke implicaties voor het onderwijssysteem.



figuur 1 Zwitserland is opgedeeld in kantons

Daarnaast gaan kinderen na de lagere school (die niet overal even lang duurt) naar het gymnasium (dat niet overal zo genoemd wordt) of naar de *Sekundarschule* (die ook niet overal hetzelfde heet of even lang duurt). De verdeling over deze twee schoolsystemen is ongeveer 20% gymnasium en 80% *Sekundarschule*. Het gymnasium is te vergelijken met het Nederlandse vwo en geeft direct toegang tot de universiteit (onafhankelijk van wat je wilt studeren). De *Sekundarschule* houdt na drie jaar op; daarna kiezen

de meeste jongeren een beroep en zijn dan parallel op school (een of twee dagen per week) en al aan het werk en sommigen gaan alsnog naar het gymnasium. En ook daarna zijn er nog veel manieren waarop je ook later naar de universiteit kunt gaan, zoals de *Fachhochschulen*, het is allemaal vrij gecompliceerd. En dat is dus in ieder van die 26 kantons net weer even anders.

Nationale en regionale curricula

In het verplichte onderwijs (elf jaar lang, meestal beginnend met de kleuterschool) worden regionale curricula gebruikt (afhankelijk van de taal), die vergelijkbaar zijn maar niet gelijk: *Lehrplan 21* in Duitstalig Zwitserland, het *Plan d'études romand* in Franstalig Zwitserland en het *Piano di studio* in het kanton Ticino (Tessin). Deze regionale leerplannen zijn gebaseerd op de nationale onderwijsdoelen van de EDK (= *die Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektorinnen und -direktoren*).

Laten we in dit artikel de wiskunde op het Zwitserse gymnasium bekijken. Dit gymnasium duurt in veel kantons, afhankelijk wanneer je begint, vier of zes jaar (en soms drie, vijf of zelfs zeven jaar).^[1] Overal ongeveer gelijk is dat de scholieren met 18 of 19 jaar eindexamen (*Matura*) doen en dan met een studie kunnen beginnen aan de universiteit. En daarom is het belangrijk dat in de laatste paar jaren toch ongeveer hetzelfde geleerd wordt. Deze laatste fase van de middelbare school noemt men de *Sekundarstufe II*. Op de *Sekundarstufe II* is het onderwijs gebaseerd op leerplannen die zijn uitgegeven of goedgekeurd door het kanton en die gebaseerd zijn op de Zwitserse *Rahmenlehrplan* van de EDK.^[2]

Rahmenlehrplan Gymnasiale Maturitätsschulen

Het zogenaamde *Rahmenlehrplan* (RLP) wordt door de EDK geschreven en is vers van de pers: 20 juni 2024.

Het RLP heeft verschillende functies.

- Op nationaal niveau vormt het het referentiekader voor de curricula van de kantonale programma's op de middelbare scholen.
- Het concretiseert de onderwijsdoelstellingen die in documenten op een hoger niveau zijn vastgelegd.
- Het maakt de kantonale programma's onderling vergelijkbaar.
- Het biedt oriëntatie voor het tertiaire niveau.
- Het zorgt voor een goede aansluiting op het lager secundair niveau (Sekundarstufe I).

Het RLP bestaat uit drie delen. In het eerste deel staan de onderwijsdoelen van het gymnasium en wordt het competentiemodel toegelicht waarop het RLP is gebaseerd. Het tweede deel beschrijft de transversale onderwijsgebieden. Het derde deel van het RLP bevat de gespecialiseerde kaderleerplannen voor de specialisatie- en aanvullende vakken. In deel 1 is het volgende artikel te vinden, dat de oorzaak is van veel discussies en conflicten. Het 'und' opent een spagaat die in de wiskunde voor problemen zorgt:

Artikel 6 Absatz 1 MAR/MAV legt das Hauptbildungsziel fest: Ziel des Maturitätslehrgangs ist es, dass die Maturandinnen und Maturanden über jene persönliche Reife verfügen, die Voraussetzung für ein Hochschulstudium ist **und** die sie auf anspruchsvolle Aufgaben in der Gesellschaft vorbereitet. Gymnasiale Bildung dient demnach der Entwicklung einer persönlichen Reife im Hinblick auf die allgemeine Studierfähigkeit **und** auf die vertiefte Gesellschaftsreife mit einer akademischen Ausprägung. Dieses duale Hauptbildungsziel bildet die Grundlage für die zu erreichenden Kompetenzen, die im RLP beschrieben sind.^[3]

Naast de primaire curriculaire structuur bevat het RLP transversale leergebieden als secundaire curriculaire structuur: interdisciplinaire competenties, basisvakgerelateerde competenties voor algemene studievaardigheden in de onderwijstaal en wiskunde (BfKA), wetenschappelijke propedeutica, digitalisering, interdisciplinariteit, onderwijs voor duurzame ontwikkeling, burgereducatie. Ook dit moet voor een deel in het wiskundeonderwijs gebeuren. Het BfKA wiskunde dekt de wiskundige kennis en vaardigheden die vereist zijn voor een groot aantal opleidingen in de eerste semesters, zoals psychologie, economie of aardrijkskunde, en

zijn daarom een vereiste. Het onderwijzen van BfKA in wiskunde is een van de hoofdtaken van het wiskundeonderwijs en moet ook al gedeeltelijk worden onderwezen in de onderbouw van het voortgezet onderwijs. De andere gymnasiumvakken waarin delen van de formele wiskundetaal worden gebruikt, hebben echter ook de plicht om dit te bevorderen en te consolideren. Het hebben van BfKA in wiskunde betekent in principe niet alleen dat de leerling de overeenkomstige wiskundige kennis beheerst, maar ook flexibel of adaptief kan omgaan met overeenkomstige procedures en representaties en verbanden kan leggen tussen concepten.

Concreet

Oké, tot hier zijn we het waarschijnlijk allemaal met elkaar eens. Maar wat betekenen al deze zaken concreet? Na een korte inleidende aardige, maar weinig concrete tekst vinden we op pagina 66 van het RLP dan eindelijk wat er in de wiskunde moet gebeuren. Bekijken we bijvoorbeeld de integraalrekening, dan vinden we:

- de betekenis en interpretatie van de bepaalde integraal formuleren;
- de primitieven van een functie bepalen (BfKA);
- het verband leggen tussen de afgeleide en de integraal met behulp van de fundamentele stelling van differentiaal- en integraalrekening;
- de integraalrekening gebruiken om problemen op verschillende gebieden op te lossen.

En dat is het. Meer zegt het RLP niet over de inhoud of het niveau van het wiskundeonderwijs. Hoe kan dit dan toch functioneren?

Hoe wordt dit omgezet in de kantons?

We moeten verder inzoomen en kijken wat er gebeurt in de kantons. Laten we kijken naar Kanton Graubünden^[4] (qua oppervlakte het grootste kanton). In het kantonale leerplan vinden we allereerst het aantal lessen – dit is namelijk ook niet nationaal vastgelegd – op het UG (Untergymnasium, de Nederlandse brugklas) 6 uur wiskunde per week (waarvan 2 meetkunde!), daarna nog 4 uur per week, zie figuur 2.

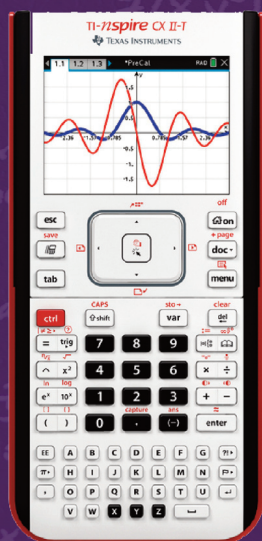
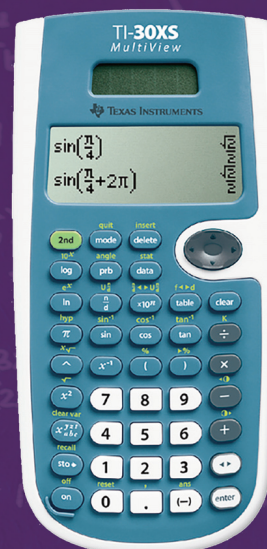
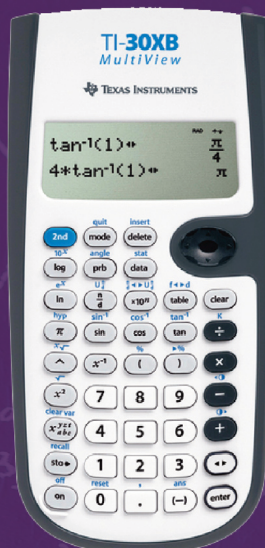
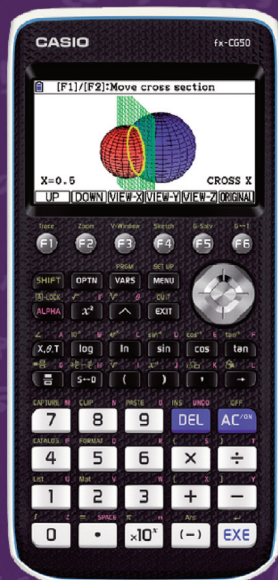
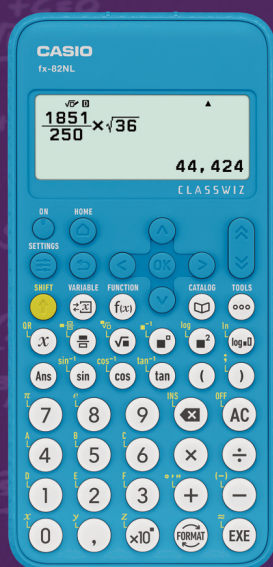
1 Studentafel/-dotation

Wochenstunden

1UG	2UG	3UG	4UG	5UG	6UG
6, davon 4 Arithmetik und Algebra 2 Geometrie	6, davon 3 Arithmetik und Algebra 3 Geometrie	4	4	4	4

figuur 2 Urentabel kanton Graubünden

“Als het gaat om goed rekenen, kunnen wij veel voor u betekenen!”



Beste service, beste prijs?

Neem dan contact met ons op voor een passend aanbod.
Wij leveren op school of rechtstreeks thuis bij de leerlingen.



Scan mij!

Onder integraalrekening vinden we het volgende:

De leerlingen

- kennen de primitieven van de elementaire functies;
- passen de som- en factorregel toe voor het bepalen van primitieven;
- kunnen de fundamentele stelling van differentiaal- en integraalrekening toepassen om oppervlakten onder functiegrafieken te berekenen;
- kunnen onderscheid maken tussen bepaalde, onbepaalde en oneigenlijke integralen en kunnen de bijbehorende integralen bepalen;
- kunnen het volume bepalen van vaste omwentelingen met behulp van integraalrekening;
- kunnen een primitieve bepalen met behulp van de substitutiemethode.

Aha, dat wordt concreet. Bekijken we nu een ander kanton, bijvoorbeeld Basel-Stadt, dan is het eerste wat we zien, dat de structuur anders is. Het gymnasium duurt maar vier jaar en het aantal lessen is in totaal 14 in de laatste vier jaar en niet 16, zoals in Graubünden, zie figuur 3.

1 Stundendotation

Fach	Mathematik
Jahreslektionen 1. - 4. Klasse total	14

figuur 3 Urentabel Kanton Basel-Stadt

“Er is veel vrijheid, en daarmee ook veel verantwoordelijkheid.”

Laten we nu weer de integraalrekening bekijken.

Hier vinden we:

- de primitieven van elementaire functies specificeren en de basisregels van integratie toepassen;
- de methode van infinitesimale benadering uitleggen;
- bepaalde integralen interpreteren als oppervlakte onder een kromme;
- het verband uitleggen tussen de afgeleide en de integraal met behulp van stelling van differentiaal- en integraalrekening.

Aha, voor Nederlandse verhoudingen heel anders. En dit zijn pas twee van 26 kantons. Hoe kan dit functioneren?

Gevolgen

Precies deze zelfde vragen, stelde ik mijzelf ook toen ik 25 jaar geleden begon met les geven aan een Zwitsers gymnasium. Als ik collega's vroeg welk boek ze gebruikten, of ze een methode wel of niet behandelden, en wat dan op het eindexamen gevraagd werd, kwamen voor mij onduidelijke antwoorden als 'dat bepaal je zelf', 'dat maakt toch niet uit' etcetera.

De reden hiervoor is *Lehrfreiheit*. De Zwitserse docent kan veel zelf bepalen. Vaak worden dingen per kanton vastgelegd, soms ook per school, of zelfs per klas.

Daardoor is er veel vrijheid, en daarmee ook veel verantwoordelijkheid. En ondertussen geloof ik dat dit geheim van het succes is. Docenten mogen veel zelf bepalen en doen dit ook (Zwitserse wiskundeleraren hebben allemaal een MSc in wiskunde). Niet iedereen leert hetzelfde. En niet op dezelfde manier. En ook niet altijd even diep. Maar uiteindelijk maakt dat allemaal niet zoveel uit. Zolang onze leerlingen leren na te denken over wiskunde, kunnen vele andere dingen later ook nog geleerd en begrepen worden. Het is geen slecht systeem, nee, het is een goed systeem, maar je moet er wel aan wennen en het duurt even voor je het begrijpt.

Noten

- [1] Vanaf 2026 wordt dat anders en duurt het Gymnasium in heel Zwitserland 4 jaar.
- [2] zie: <https://www.edk.ch/de/bildungssystem/beschreibung/lehrplaene>
- [3] zie de vertaling op de website
- [4] Dit is nog het oude leerplan, omdat het nieuwe momenteel geschreven wordt.

Over de auteur

Na tien jaar les gegeven te hebben op een Zwitsers gymnasium, is Meike Akveld nu hoogleraar op de Eidgenössischen Technische Hochschule (ETH), Zürich. Daarnaast is zij president van de Zwitserse en de internationale Kangoeroe vereniging (www.aksf.org). E-mailadres: meike.akveld@math.ethz.ch

'Elke dag zin om er iets van te maken'

Interview met vmbo-docent Karin van den Heuvel

SintLucas is een creatieve vakschool voor vmbo en mbo in Eindhoven en mbo in Boxtel. Op het vmbo van SintLucas volgen vmbo-leerlingen het profiel Media, Vormgeving en ICT. Een gesprek met Karin van den Heuvel over haar werk als wiskundedocent bij SintLucas vmbo.

Hoe kwam je in het onderwijs terecht?

Dit is mijn 26^e schooljaar. Daarvoor heb ik bij een bierbrouwerij gewerkt op het laboratorium als kwaliteits-medewerker. Ik heb namelijk levensmiddelentechnologie gestudeerd. Ook heb ik nog als procesoperator gewerkt bij een grote zuivelfabriek.

Toen ik zwanger was van onze oudste kon ik niet minder dan veertig uur werken in de fabriek. Dat wilde ik niet en toen heb ik mijn baan opgezegd. Ik heb gesolliciteerd op een vacature voor technisch onderwijsassistent en kon aan de slag gaan. In een jaar tijd kon ik mijn onderwijs-bevoegdheid halen voor de groene vakken, omdat ik al een hbo-opleiding had gedaan. Toen moest ik nog wel een stage vinden. Ik vond een werkplek en de rector bood me aan dat ik twee weken op proef zou komen, om te kijken of het wederzijds beviel. Mijn baan als onderwijs-assistent hoefde ik nog niet op te zeggen. Ik dacht: 'Ik heb niets te verliezen, ik doe het'. Ik vond het heel druk in het begin, maar ook heel leuk. De school zag het ook met me zitten. Ik ben daar eerst natuurkunde gaan geven en later natuurkunde en techniek. Dat laatste was echt een praktijkvak, met bijvoorbeeld houtbewerken. Dat was wel ver van mijn bed. Toen heb ik gevraagd of ik wiskunde kon gaan geven. Dat mocht, maar dan moest ik wel weer een opleiding doen.

Waarom heb je gekozen voor het vmbo?

Het was mijn eerste stageplek. Ik kreeg daar klassen van vijftien leerlingen met leerwegondersteuning. Ik vond het heel leuk. Elke dag had ik er gewoon zin in om er iets van te maken en dat voelden collega's en leerlingen ook, denk ik.

Een paar jaar geleden heb ik getwijfeld of ik nog eerste-graads wiskunde zou gaan studeren. Ik kon op een andere school zes lesuren geven aan twee eerste klassen

gymnasium. Ik heb het met plezier gedaan, maar op de een of andere manier paste dat toch niet helemaal bij mij. Vmbo-leerlingen zijn open en direct en daar houd ik van.

Wat is volgens jou kenmerkend voor het SintLucas?

Wat ik zo leuk vind, is dat leerlingen helemaal zichzelf zijn. Ze letten minder op elkaar en durven anders te zijn. Leerlingen met roze haren, gebloemde blouse met een geruite broek sieren het gebouw in plaats van dat ze nagekeken worden door de rest.

Welke voordelen heeft het voor de leerlingen om vmbo en mbo onder één dak te hebben?

Onze vmbo-leerlingen stromen makkelijk door naar onze aansluitende mbo-opleidingen. Vanaf volgend schooljaar starten we ook met SintLucas Sprint, een zesjarig vmbo-mbo traject voor leerlingen die interesse hebben in de richting Mediavormgeving. Het traject is voor leerlingen met een praktische manier van leren die net een stapje extra willen zetten. Na deze route kunnen ze o.a. doorstromen naar het hbo.

Jullie hebben een heel sterk profiel Media, Vormgeving en ICT. Waarom is gekozen voor dit profiel?

Sint Lucas is van oorsprong een grafische school. Druktechnieken zijn in de loop der tijd een steeds kleiner onderdeel van het programma geworden, creatief-technische opleidingen nemen steeds meer de overhand.

Leerlingen kiezen al heel jong voor een specifiek profiel. Hoe bevalt hen dat?

Leerlingen doen bij SintLucas een creatieve intake en kiezen bewust voor het MVI-profiel. Vanaf klas 1 zijn ze ieder dag bezig met creatieve vakken en dat spreekt ze enorm aan.

Welke rol speelt wiskunde in dit profiel?

Nask 1 en wiskunde zijn bij ons verplichte eindexamen-vakken. Dat heeft ermee te maken dat we een technische opleiding zijn. Dus aan ons de schone taak om ze vier jaar lang dat bij te brengen wat nodig is en te zorgen dat ze geen allergie gaan krijgen voor wiskunde.

St Lucas is kleinschalig en gericht op de leerling staat op de site. Wat betekent dat in de praktijk?

We hebben als vmbo een eigen plek in het gebouw. We zijn verder niet zo groot, ongeveer 550 leerlingen. Het team is heel hecht en we kennen de leerlingen. Bij de praktische vakken zijn vaak twee docenten aanwezig. Dan heb je tijd voor individuele begeleiding. Bij de theorie-vakken is er de mogelijkheid voor bijles en studie-begeleiding.

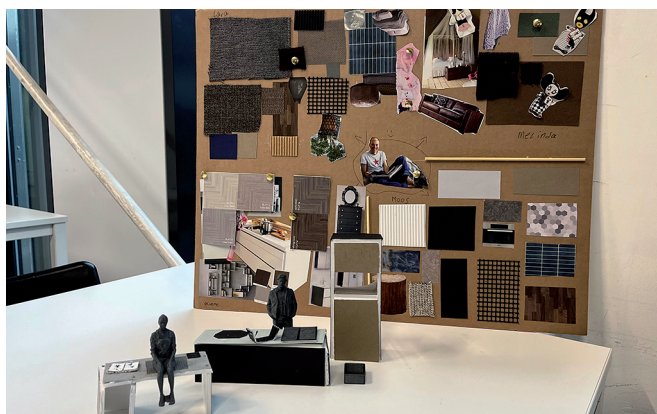
“Als het niet lukt, probeer eens iets anders.”

Hoe ziet een wiskundeles eruit op het Sint Lucas?

Ik begin met de leerdoelen van de les te vertellen, want dat heeft Sint Lucas hoog in het vaandel staan. Ik maak een rondje door de klas en maak even een babbeltje. Ik noem dat ‘iedereen in de oogjes kijken’. Dan schrijf ik op het bord welke bladzijden we voor onze neus hebben. Vanaf volgende week ga ik er wel bij zeggen dat alle spullen in de tas gaan behalve het boek. Want ja, het creatieve brein gaat door en alles wordt ondergetekend, het schrift en het boek, alles. Dat was ik niet gewend, dus dat ga ik even anders doen. Vervolgens komt er een uitleg, de ene keer is het een filmpje, de andere keer doe ik een opdracht voor. Eigenlijk niet anders dan op een andere school. Ik ben wel erg zoekende en vraag me af: hoe kan ik het creatieve brein prikkelen en inzetten voor de wiskundeles? Gisteren zag ik een voorbeeld bij een lid van de werkgroep vmbo, Rob van Kerkhoven. Hij laat leerlingen een stripverhaal maken om iets uit te leggen. Dan denk ik: dat kan ik wel gebruiken! Verder doen we een leerdoelencheck. Tegen de tijd dat het proefwerk eraan komt, krijgen ze alle leerdoelen nog eens opgesomd en daar staan dan opgaven bij genoemd, die ze kunnen doen en uitleg die ze kunnen bekijken. Dat is hartstikke goed voor deze leerlingen, omdat ze moeite hebben met het overzicht te bewaren. Ik heb het idee dat de leerlingen hier dat net wat moeilijker vinden dan op mijn vorige school. Misschien omdat ze meer creatief zijn?



figuur 1 Project Ontwerp een tiny house



figuur 2 Project Ontwerp een tiny house

Ik wil daar wel op inspelen. Als er een manier is die beter bij hen past, dan ga ik dat natuurlijk doen.

Werken jullie ook vakoverstijgend?

We hebben twee themaweken per jaar en die zijn vakoverstijgend. Ze gaan dan bijvoorbeeld een tiny house ontwerpen. Dan moeten ze een maquette van het huisje en de omgeving op schaal bouwen, dus daar zit al best wat wiskunde in. En ze moeten ook de capaciteit van een warmtepomp berekenen. Daar zit dan natuurkunde in, maar ook rekenen. Wat ik toen aan wiskunde en rekenwerk heb gezien, daar werd ik wel blij van. Voor de komende themawEEK staan ook mode en modeontwerpen, theater, muziek en Think in the box (kamer ontwerpen) op het programma.

Op de site las ik dat jullie ook projecten doen in samenwerking met bedrijven.

We werken inderdaad samen met bedrijven. Dit kan in projectvorm zijn of in de vorm van stages. Zo heeft een leerling bijvoorbeeld een ontwerp gemaakt voor een

>

hoogwaterstuw van Waterschap de Dommel. Ook zijn onze handdoekautomaten voorzien van ontwerpen van onze leerlingen. Daarnaast hebben we een keer per jaar de TechFunDay. In groepjes van vijf gaan leerlingen dan langs bij bedrijven. Tijdens de themaweken komen mensen vanuit diverse disciplines en bedrijven workshops verzorgen bij ons op school. We willen met deze activiteiten vooral interesse in techniek wekken.

Welke leerling is jou bijgebleven? En waarom?

Dat zijn er natuurlijk een heel aantal. Eén leerling zat in de brugklas waar ik mentor van was. Dat was me toch een druktemaker. Hij werd vaak weggestuurd bij andere collega's en dat snap ik ook, want hij was echt ontzettend druk. Als ik les gaf, kwam hij in mijn lokaal zitten, want ik wilde hem niet over de gang hebben. Hij was ongeveer vaste gast in mijn lokaal. Maar die jongen had het thuis moeilijk en geen wonder dat je dan stuitert. Ik kon het goed met hem vinden, want hij was oprecht.

“Als er een manier is die beter bij mijn leerlingen past, dan ga ik dat natuurlijk doen.”

Wat vind jij belangrijk om je leerlingen mee te geven?

Zelfredzaamheid. Ik vind het belangrijk dat leerlingen als er iets niet gaat zoals ze verwachten, daarmee om kunnen gaan. Deze week heb ik in de brugklas toetsen afgenomen. Leerlingen vinden het spannend. En dan vind ik het fijn dat een leerling 's morgens al naar me toekomt en zegt: 'Ik ben mijn geodriehoek vergeten en wat kan ik doen?' Dat heb ik liever dan dat ze hulpeloos gaan zitten wachten tot er misschien iets gebeurt. Als ik ze handvatten mee kan geven om zichzelf te redden, dan vind ik dat belangrijker dan dat ze een goed cijfer op een toets halen.

Ik heb het idee dat de laatste vijf jaar de populatie leerlingen meer is veranderd dan in de twintig jaar daarvoor. Ze zijn minder zelfredzaam geworden. Voorheen als het huiswerk niet lukte, dan vroegen er leerlingen of ik een bepaalde opgave kon uitleggen. Nu krijg ik nauwelijks vragen over het huiswerk.

Ze blijven hangen in 'ik snap het niet'. En als ik vraag: 'wat heb je gedaan?' Dan hebben ze eigenlijk geen andere stappen gezet. Ik zeg altijd: 'als het niet lukt, probeer eens iets anders.' Waar het aan ligt dat ze minder proberen? Ik heb geen idee.



figuur 3 Leerlingen aan het werk op whiteboardvellen.

Kun je een voorbeeld geven van een les waar je trots op bent?

Ik heb op een studiedag een workshop gevolgd waar gewerkt werd met whiteboardvellen aan de muur. Leerlingen werken in groepjes een opgave uit op zo'n whiteboardvel. Dat ben ik dit schooljaar gaan doen en het was een eyeopener. Alle groepjes bleven bij dezelfde stap steken. Ik denk: 'goh wat makkelijk.' Ik hoef alleen maar dat stukje uit te leggen en de rest is al duidelijk. Het mooie van deze werkvorm is ook dat het niet ingewikkeld is om uit te voeren, dus ik ga het zeker vaker doen. Een andere mooie les ging over het gebruik van de geodriehoek. Daar zijn allerlei filmpjes over. Die kan ik laten zien, maar ik kan het ook andersom doen. Ik gaf de opdracht om drie filmpjes te bekijken. Vervolgens wilde ik van leerlingen weten welk filmpje ze het beste vonden en waarom.

Zijn er nog dingen die je kwijt wilt die niet aan bod zijn gekomen?

Ik ben docent geworden en ik vind het nog steeds leuk. Als ik in 1990 toen ik eindexamen deed had geweten dat er een tweedegraads wiskundeopleiding bestond, dan weet ik bijna zeker dat ik al eerder wiskundeleraar geworden zou zijn.

Over de interviewer en de geïnterviewde

Liesbeth Coffeng is eindredacteur van *Euclides* en ze geeft wiskunde op het mbo (Laboratoriumtechniek) en hbo (Biomedische research). E-mailadres: l.coffeng@nvw.nl
Karin van den Heuvel is wiskundeleraar op het Sint Lucas College in Eindhoven en ze is lid van de werkgroep vmbo van de NVvW.

Een praktisch-historische blik op wiskunde

Deel 3 Ontsluiting van de oneindigheid

Welk praktisch nut heeft de wiskunde in de landen rond de Middellandse zee en in Europa in de loop der eeuwen gehad? Wat vinden we daarvan terug in het huidige onderwijs?

In een reeks artikelen, waarvan dit het derde is, gaat Roel van Asselt op zoek naar voorbeelden van historische toepassingen van wiskundige kennis. Roel legt hierbij de nadruk op de bruikbaarheid van de kennis in het beroepsonderwijs.

Eerste limietbegrip

Rond de vierde eeuw v.C. is een methode gevonden om de oppervlakten en inhoud van gekromde objecten in te schatten door deze te benaderen met geometrische vormen, zoals twee- en driedimensionale veelhoeken, blokken en piramides, waarvan de oppervlakte of inhoud (wel) bekend waren. We noemen dat de *uitputtingsmethode*. Aangekomen bij Archimedes zullen we een uitgewerkt voorbeeld geven. Algemeen wordt die aanpak en andere, latere, wiskundige berekeningen van Archimedes als vroege voorlopers van de huidige integraalrekening opgevat en als een visie op het begrip oneindig.

Een naam die aan de eerdere uitputtingsmethode is verbonden is die van Eudoxus van Cnidus, een tijdgenoot (en leerling) van Archytas en van Plato. Hij bewees met deze methode bijvoorbeeld dat de verhouding tussen het kwadraat van de straal en de oppervlakte van de cirkel constant is. Dat deed hij door de cirkel steeds dicht te benaderen (uit te putten) met omgeschreven veelvlakken, waarvan de oppervlakten berekend konden worden en die 'convergeerden' naar de oppervlakte van de cirkel. Het bleek dat de verhouding tussen het kwadraat van de straal van de cirkel en die van de oppervlakten van de veelhoeken steeds dezelfde was. De oppervlakte van de cirkel moest dus wel evenredig zijn met het kwadraat van de cirkel.

Deze Eudoxus wordt ook genoemd vanwege zijn werk aan de limietbenadering van irrationale getallen door te werken met limieten van verhoudingen; conceptueel komt dat (later) overeen met het werken met kettingbreuken (continue breuken). Zie figuur 1, met als voorbeeld de benadering van π , zoals wij dat in onze notatie met kettingbreuken doen.

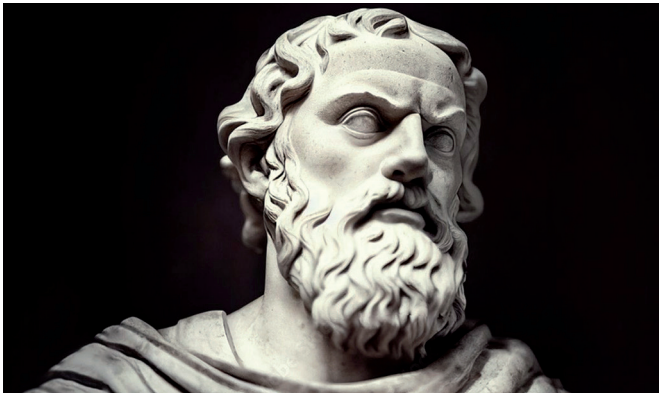
$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

figuur 1 Een 'moderne' weergave van een continue breukbenadering.

Filosofie en wiskunde

De wijsgeer Plato leefde rond 400 v.C. en had een zeer bijzondere, filosofische kijk op het 'praktisch' gebruik van wiskunde, hoewel hij zelf geen wiskundige was. Hij onderscheidde twee werkelijkheden: de zichtbare, veranderlijke alledaagse werkelijkheid, en een onzichtbare, onveranderlijke werkelijkheid van volmaakte vormen en ideeën,^[2] met een goddelijke intelligentie om de kosmos aan te sturen, en waarin ook de menselijke ziel huisde. Deze ware, onzichtbare wereld ontdekken en doorzien was uitsluitend mogelijk via de rede, het verstand, met als belangrijkste gereedschap: de wiskunde. De abstracte getallen, los gemaakt van de concrete werkelijkheid, en de ideale geometrische vormen boden een opening naar de ware realiteit. In de door hem gestichte Academie in Athene stond dan ook boven de toegangspoort: Μηδείς ἀγέωμეტρητος εἰσίτω: 'laat geen niet-meetkundige binnen'. Het praktisch nut van die wiskunde van de Academie werd gezien in het vermogen van de wiskunde om de ziel van de studenten naar de waarheid te trekken, wat noodzakelijk was om een goede bestuurder of wetenschapper te worden.^[3]

>



figuur 2 Een artist impression van Plato

Aristoteles, de meest universele filosoof uit de Oudheid en tijdgenoot van Plato, hechtte in tegenstelling tot Plato veel belang aan de empirie: het bestuderen van de waarneembare werkelijkheid om de wereld en de wiskunde te doorgronden. Daarnaast legde hij een methodologisch fundament onder de wiskunde: vanuit een formele logica bepleitte hij een systeem van deductief redeneren, dat met name in de meetkunde goed van pas kwam en zoals wij dat nog steeds hanteren in de (school-) wiskunde.^[4]

Aristoteles noemde wiskunde de 'leer der hoeveelheden' maar het werd toen ook aangeduid als mathema (μάθημα) dat 'wetenschap' of 'kennis' betekent.^[5]

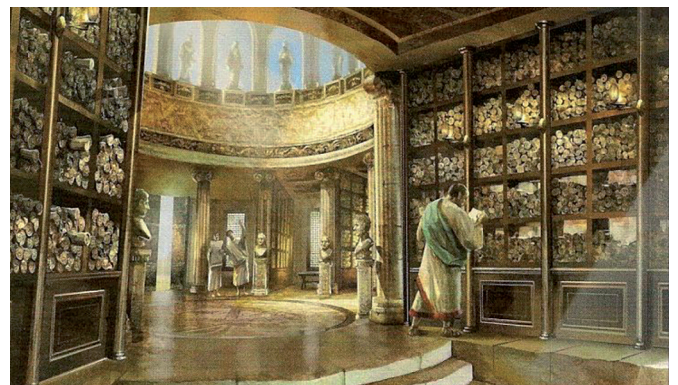
De invloed van Plato en Aristoteles op de verdere ontwikkeling van de wiskunde uit die tijd – en lang daarna – is immens groot geweest, zoals we nog gaan zien.

De Elementen



figuur 3 Euclides, met ongemarkeerde lijnaal

Sinds Thales waren denkers bezig om van wiskunde meer dan een praatje bij een plaatje te maken. Wiskunde dient opgebouwd te zijn vanuit heldere definities, axioma's en een daaruit deductief af te leiden stellingenrepertoire zoals Plato en Aristoteles voor ogen stond. Dit wiskunde-bouwwerk wordt rond 300 v.C. vastgelegd in het 13-delige werk *Elementen*. De auteur is Euclides van Alexandrië, hoogleraar wiskunde en raadsman van het Museion en de daarin gevestigde bibliotheek van Alexandrië ^[6]. Zie in figuur 4: de 'plaats van verzorging van de ziel', zoals de bibliotheek genoemd werd.



figuur 4 Een artist impression van de bibliotheek van Alexandrië.

De *Elementen* bevatte een zeer systematisch overzicht van bijna alle destijds bekende wiskundekennis, met name de vlakke meetkunde, ruimtemeetkunde en de getaltheorie. Het was opgebouwd – in de eerste edities – vanuit meer dan 400 definities, axioma's en stellingen. Een aantal onderdelen van de *Elementen* is afkomstig van andere wiskundigen zoals Eudoxus (benadering van irrationale getallen).

Honderden jaren lang is het werk bestudeerd, aangepast, uitgebreid en verduidelijkt. Het origineel bestaat niet meer, wel talloze bewerkingen en vertalingen.^[7] Het gebruik van de meetkunde en de getaltheorie uit de *Elementen* is niet meer weg te denken uit onze praktische en theoretische bezigheden in alle technische wetenschappen van dit moment. Denk aan afstands-, oppervlakte- en volumebepalingen, vlakgedrievoeksmeting, rekenen met verhoudingen, gelijkvormigheden, discrete wiskunde, stereometrie, enzovoort. De doorbraak was vooral de gestructureerde bundeling van wiskunde uit die tijd en de methodologische aanpak, zoals hierboven is beschreven.

Getallen waren als praktisch rekensymbolen *in de wiskunde* bij Euclides en zijn tijdgenoten niet populair: getalrekenen was meer iets voor de Oosterse volkeren en voor de marktplaats, vonden velen.

Veel van de berekeningen en analyses in de *Elementen* werden uitgevoerd binnen de toen gebruikelijke meetkundige context.^[8] Pas veel later – maar niet door de Grieken zoals we nog gaan zien – wordt de omslachtige wijze van rekenen met meetkundige figuren vervangen door de symbolische letteralgebra.

Varia en curiosa

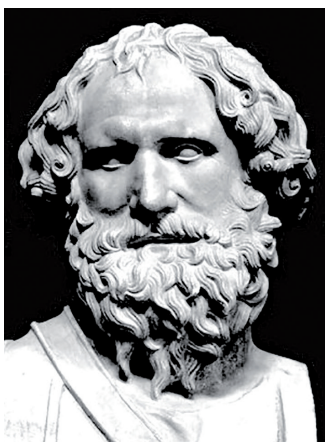
In de eerste editie van de *Elementen* vinden we een formule voor perfecte getallen, zoals we die bij Pythagoras hebben beschreven. In onze terminologie luidt die formule: als p een priemgetal is dan is $2^{p-1}(2^p - 1)$ een perfect getal. Deze formule bleek echter niet geheel juist.^[9]

Daarnaast vinden we in de *Elementen* het bewijs van het bestaan van oneindig veel priemgetallen en het bewijs dat ieder natuurlijk getal te schrijven is als een uniek product van priemgetallen. Tegenwoordig worden priemgetallen nog wel gebruikt bij de versleuteling van data.^[10]

De nog rudimentaire opvattingen over de gulden snede, zoals die in de school van Pythagoras ontstonden, worden in de *Elementen* verder uitgewerkt, maar niet als zodanig benoemd en zonder esthetische of filosofische duiding. Het legde wel de basis voor de latere praktische toepassingen van de gulden snede.

Interessant is nog dat – mogelijk voor het eerst – een stelling over optimalisering wordt vermeld in de *Elementen*. Er wordt aangetoond dat een rechthoek met voorgeschreven omtrek de grootste oppervlakte heeft als het een vierkant is.

Mede vanuit de *Elementen* is de basis gelegd voor een wiskunde die tot in de 19^e eeuw heeft standgehouden. Toen ontstonden ook nieuwe niet-Euclidische meetkunden en rigoureuzere grondslagen van de wiskunde gericht op onder meer een nieuwe getaltheorie en de verzamelingenleer.



figuur 5 Iconische (vermeende) afbeelding van Archimedes

Een Olympische gestalte (1)

De hoofdpersoon uit de praktisch-wiskundige historie is Archimedes van Syracuse. Hij leefde rond 250 v.C.^[11] Bijzonder is dat hij veel bruikbare wiskundige modellen voor de fysische wereld bedacht in een tijd waarin de wiskunde nog niet op de praktische alledaagse wereld was georiënteerd. Tevens introduceerde hij een vorm van infinitesimaal-rekening die met recht ‘de ontsluiting van de oneindigheid’ wordt genoemd.^[12]

Als wiskundige, werktuigkundige, astronoom en filosoof behoorde hij, vanwege zijn indrukwekkende veelzijdigheid, tot de buitencategorie van geleerden die ooit hebben geleefd. Zijn intuïtie, heuristisch vermogen, theoretische kennis, gedachte-experimenten en praktisch supervernuft maken hem tot de hoofdpersoon in een praktisch-historische beschouwing van wiskunde. Wij moeten ons beperken tot slechts zes superieure praktische vindingen van dit genie, die alle nog doorwerken in het huidige gebruik van wiskunde op school en in de wetenschap.

1. Nauwkeurigere waarde van π

Voor een nauwkeuriger waardebepaling van π gebruikte Archimedes een combinatie van de uitputtingsmethode en de insluitstelling. Voor een ‘moderne’ reconstructie van die aanpak, zie ook het kader ‘Praktische voorbeelden voor in de les’, aan het eind van dit artikel. Hij ging uit van een cirkel met een middellijn van 1 (eenheid); de omtrek van die cirkel is dan π (eenheden).

In die cirkel legde hij ingeschreven regelmatige n -hoeken, met hoekpunten op de cirkel, te beginnen met $n = 6$. De omtrek van die regelmatige zeshoek is 3 en benadert de omtrek van de cirkel een beetje. Daarna deed hij dat voor een regelmatige 12-, 24-, 48- en 96-hoek, waarvan de omtrek steeds dichterbij de cirkelomtrek komt te liggen. Hij berekende de omtrek van de regelmatige 96-hoek door de bases van de 96 driehoekjes op te tellen. Zo kwam hij uit op een waarde van $3\frac{10}{71}$.

Voor de omgeschreven 96-hoek kreeg hij een omtrek van $3\frac{10}{70}$, zodat $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$, een relatieve fout van maximaal 0,03%; wel 20 keer beter dan we vonden op de Rhind papyrusrol uit het oude Egypte.

De waarde voor π van $3\frac{1}{7}$ ($\frac{22}{7}$) is lange tijd de norm gebleven, hoewel $3\frac{10}{71}$ dichterbij π ligt.^[13]

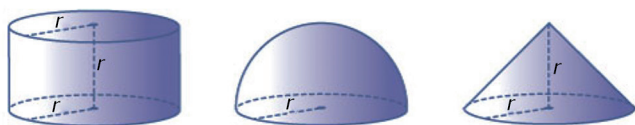
2. Nieuw getalsysteem

Grotere hoeveelheden dan 10.000 werden in de tijd van Archimedes niet in getallen uitgedrukt. Archimedes ontwikkelde een nieuw systeem door met 10.000-vouden te werken, wat hem in staat stelde om verdere astronomische berekeningen uit te voeren. Ter illustratie van

>

de mogelijkheden van zijn systeem berekende hij het aantal zandkorrels dat in de hemelkoepel kan worden opgeslagen. Op zichzelf een bizar gedachte-experiment, dat echter diende om aan te tonen dat het wel degelijk mogelijk was extreem grote hoeveelheden aan te geven en om ermee te rekenen. Dat stimuleerde dan weer om over het oneindige der dingen na te denken: de blokkade op het oneindige was opgeheven, omdat wel degelijk oneindig kon worden doorgerekend in de kosmos: een tweede stap in de ontsluiting van de oneindigheid. Overigens, volgens Archimedes' berekeningen pasten er 10^{63} zandkorrels in de hemelkoepel. Vanwege dit getsysteem wordt door enkele wetenschapshistorici Archimedes dan ook de vader van het begrip exponent genoemd. Dat lijkt wat overdreven omdat Archimedes werkte met klassen van steeds grotere getallen en niet met exponenten.^[14]

3. Oppervlakte- en inhoudberekeningen



figuur 6 cilinder, halve bol en kegel

Archimedes bewees dat de oppervlakte van een cirkel gelijk is aan de oppervlakte van een driehoek met als basis de omtrek van die cirkel ($2\pi r$) en als hoogte de straal r van die cirkel; de oppervlakte van die driehoek is $\frac{1}{2}r \cdot 2\pi r = \pi r^2$; alles in onze notaties.^[15]

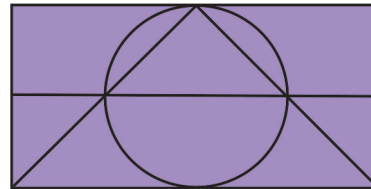
Tevens gaf hij als eerste een gerelateerde berekening van inhouden en oppervlakten van bollen, cilinders en kegels. Het betreft de verhoudingen 3 : 2 : 1 van de inhouden van deze lichamen, als ze zich verhouden zoals in figuur 6. Voor een ingeschreven bol in een omgeschreven cilinder bewees hij dat de oppervlakten én de inhouden zich verhouden als 2 : 3.

Al deze inhoud- en oppervlakteberekeningen, en die van cilinder- en bolsegmenten, voerde hij uit met behulp van oneindige sommaties, die sterk lijken op die uit de huidige integraalrekening.

Archimedes zelf heeft deze wijze van oppervlakte- en inhoudberekeningen zijn allergrootste vinding genoemd. Volume- en oppervlaktebepalingen van deze figuren zijn niet meer weg te denken in de huidige scheikunde, fysica, bouwkunde, handel etcetera.

Archimedes is vermoord in 212 v.C. bij zijn arrestatie tijdens de val van Syracuse in de tweede Punische oorlog. Toen Cicero (een adept van Archimedes) rond 50 v.C. voor bestuurlijke zaken naar Sicilië kwam, bracht hij al

snel een bezoek aan het (toen al leeggeroofde) graf van Archimedes. Aan de inscriptie op een van de muren van het graf kon men zien dat het om Archimedes ging: het symboliseert een van zijn grootste praktische vindingen, zie figuur 7

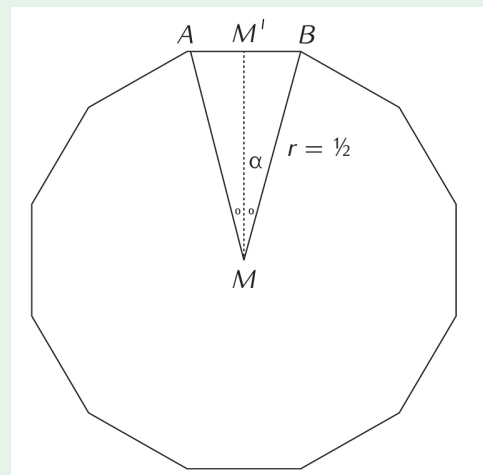


figuur 7 Epigraaf in Archimedes' graf

In deel 4 van deze serie gaan we verder in op zijn wiskundige analyses in de mechanica, zijn wiskundige spiraal en een planetarium.

Praktische toepassingen voor in de les

- 1 Dat een rechthoek met voorgeschreven omtrek de grootste oppervlakte heeft als het een vierkant is, is een praktisch standaardopgave in de differentiaalrekening. Wellicht interessant om dan te vermelden dat het probleem al ver voor onze jaartelling op een andere wijze is opgelost.
- 2 Als voorbeeld van de berekening van de omtrek van een regelmatige ingeschreven veelhoek, nemen we de 12-hoek. Dat kan met het huidige wiskundige gereedschap uitgevoerd worden zoals in de tekening in figuur 8 is aangegeven. Immers de middellijn is weer 1, de hoek $\alpha = \frac{\pi}{12}$ en $AB = 2M'B = 2 \cdot \frac{1}{2}\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{12})$; de totale omtrek van de 12-hoek is dan $12\sin(\frac{\pi}{12})$.

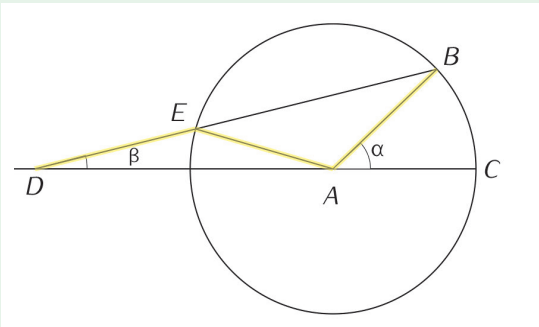


figuur 8 $\triangle MAB$ in regelmatig ingeschreven 12-hoek

Voor een regelmatige 96-hoek vinden we voor de omtrek analoog: $96\sin(\frac{\pi}{96})$. Mogelijk interessant te zien of we met 'onze' berekening ook in de buurt van $3\frac{10}{71}$ uitkomen. Voor de omgeschreven regelmatige 96-hoek vinden we $96\tan(\frac{\pi}{96})$ wat de waarde $3\frac{1}{7}$ benadert.

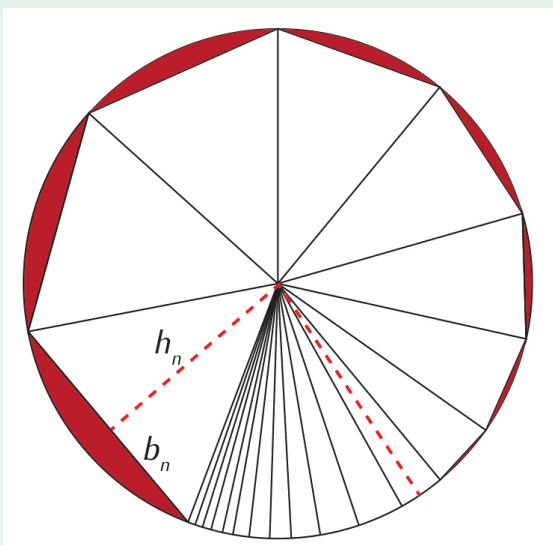
Algemeen zal de omtrek van een ingeschreven regelmatige n -hoek gelijk zijn aan $n \cdot \sin(\frac{\pi}{n})$, en inderdaad is de $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin(\frac{\pi}{n})$ gelijk aan π .

- 3 Het volgende voorbeeld van de driedeling van een hoek wordt toegeschreven aan Archimedes. Het is een van de vele varianten op de aanpak van de trisectie.



figuur 9 trisectie van $\angle \alpha$

Zie de tekening in figuur 9. Ga uit van een cirkel met middelpunt A en kies als de te verdelen hoek α de $\angle BAC$, met B en C op de cirkel. Bepaal met een gemarkeerde liniaal – die langs B mag schuiven en waarop de lengte van de cirkelstraal is aangebracht –



figuur 10 infinitesimale benadering van cirkeloppervlakte

het punt D op het verlengde van CA, zó dat als de liniaal de cirkel in E snijdt, DE de lengte van de straal is. Het is dan niet zo lastig meer om aan te tonen dat α gelijk is aan 3β .

Bedenk: die gemarkeerde liniaal maakte in de geest van Euclides deze constructie niet valide.

- 4 Een historische, aanschouwelijke berekening uit de Griekse tijd van de oppervlakte van een cirkel is de volgende, zie ook figuur 10.

Ga weer uit van ingesloten regelmatige n -hoeken in een cirkel met straal r . De omtrek van de cirkel is bekend: $2\pi r$. Vanuit de middelpunt hoeken $\frac{2\pi}{n}$ zijn aansluitende driehoeken te tekenen met een hoogte h_n en met een basis b_n . Deze bases gaan steeds dichter tegen de omtrek van de cirkel liggen naarmate n toeneemt, terwijl de hoogten h_n steeds meer de waarde van de straal nadert. De som van de oppervlakten van alle driehoeken in de n -hoek benadert de oppervlakte van de cirkel steeds beter. De oppervlakte van iedere driehoek is $\frac{1}{2}h_n b_n$. De oppervlakte van de n -hoek is dus $n \cdot \frac{1}{2}h_n b_n$, of $\frac{1}{2} \cdot h_n \cdot n \cdot b_n$. Bij toenemende n geldt dat h_n naar r nadert en $n \cdot b_n$ naar de omtrek van de cirkel ($2\pi r$). De oppervlakte van de veelhoek nadert aldus de waarde $\frac{1}{2} \cdot r \cdot 2\pi r = \pi r^2$.

Dat klinkt allemaal plausibel, maar het blijft een praatje bij een plaatje; er moet nog wel wat over de limietdefinitie en limieteigenschappen rechtgezet worden, maar dat gebeurt pas 2000 jaar later...

Op de website vind je de noten en een literatuurlijst.

 vakbladeuclides.nl/1005praktischegeschiedenis_3

Over de auteur

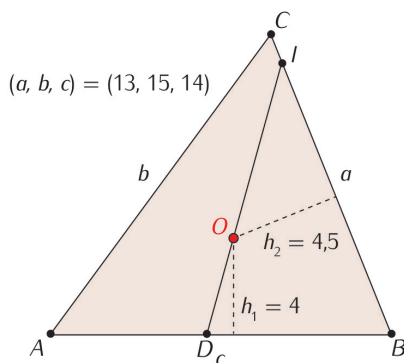
Roel van Asselt studeerde wiskunde aan de Universiteit Utrecht en was wiskundeleraar aan de HTS in Hengelo. Hij was eindredacteur van een wiskundemethode voor het hoger onderwijs. Daarnaast was hij oprichter en directeur van het expertisecentrum LICA (Landelijk Informatie en expertiseCentrum Aansluiting hbo). Binnen Saxion Hogescholen werd hij lector Instroommanagement en Aansluiting mbo/vo-hbo. E-mailadres: r.v.asselt@ziggo.nl

Cossisch of niet, dat is de kwestie

In het vo zijn methoden uit de analytische meetkunde nu standaard bij het oplossen van meetkundige vraagstukken. Dat is mooi maar soms kan een klassieke aanpak mooier zijn. Fred Muijers bekijkt dat aan de hand van een bijzondere kwestie en laat zien dat kennis van de *Elementen* van Euclides soms toch wel heel handig is.

De kwestie

Gezocht wordt een lijn door een punt binnen (of buiten) een driehoek die die driehoek in twee gelijke stukken verdeelt qua oppervlakte. Zie figuur 1 voor een voorbeeld.



figuur 1

Het punt O binnen de driehoek ligt met deze afstanden tot de zijden vast en gevraagd is nu hoe die lijn door O te vinden is. Ofwel: waar liggen de punten D en I zodat $\text{opp}(\triangle DBI) = \frac{1}{2}\text{opp}(\triangle ABC)$?

We nemen hier even aan dat de gevraagde lijn loopt zoals in figuur 1.

Een aanpak met cossische getallen

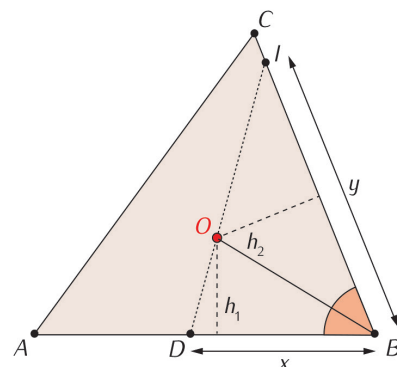
We pakken dit eerst aan met een methode afgeleid van die van Brasser (1663). In die tijd heette dat een aanpak met *cossische* getallen. Over die naam:

'Men leerde [rond 1600] dat het handig was om bij een probleem over getallen het gevraagde getal een naam te geven, meestal een variant van "ding", in Italië "cosa", in Duitsland verbasterd tot "Coss". Algebra heette daar, en ook in Nederland, nog lang de "Cossische Kunst".'

Henk Bos schrijft daarover in *Een cultuurgeschiedenis van de wiskunde*.^[1]

Brasser gebruikt niet de afstanden tot de zijden maar de afstanden tot de hoekpunten en kiest een punt buiten de driehoek.^[2] Dat geeft meer rekenwerk, want de afstanden tot de zijden worden vervolgens eerst berekend. Nu wordt anders begonnen.

Gezocht is de ligging van punt D . Zie figuur 2.



figuur 2

Benoem de te vinden lengtes. $|BD| = x$, $|BI| = y$.

Er geldt: $\frac{\text{opp}(\triangle DBI)}{\text{opp}(\triangle ABC)} = \frac{xy}{ac}$. Dit geldt omdat de

driehoeken een gelijke hoek B hebben.

Dan volgt: $xy = \frac{1}{2}ac = 91$.

Nu komen de hoogtelijnen in het verhaal en er geldt:

$\text{opp}(\triangle DBI) = \frac{1}{2}h_1x + \frac{1}{2}h_2y$.

$\text{opp}(\triangle ABC) = 84$. Dat is eventueel snel te vinden met de formule van Heron.

Dus: $\text{opp}(\triangle DBI) = 42$.

Met de gegeven lengtes volgt dan:

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot \frac{91}{x} = 42.$$

En dat geeft een vierkantsvergelijking:

$$4x^2 - 84x + 409\frac{1}{2} = 0.$$

Er zijn twee oplossingen: $x_1 = \frac{1}{8}(84 + \sqrt{504})$ en

$$x_2 = \frac{1}{8}(84 - \sqrt{504}).$$

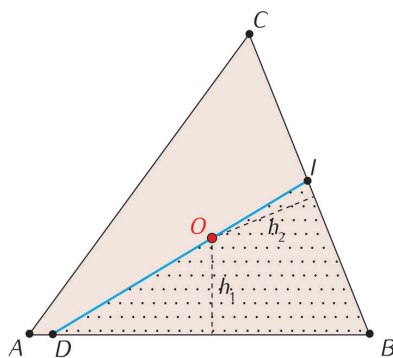
Er is dus gevonden:

$$|BD| = x_1 \approx 13,31 \text{ of } |BD| = x_2 \approx 7,69.$$

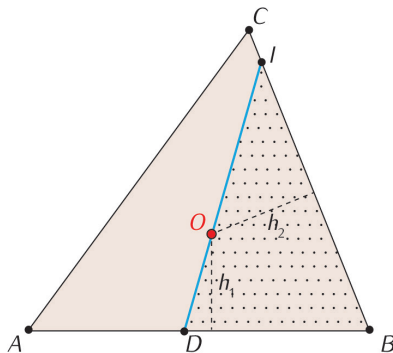
Zo'n punt D ligt tussen A en B en het daarbij behorende punt I ligt tussen B en C dus er zijn inderdaad twee oplossingen gevonden passend bij de situatie van figuur 1.

De oplossingen zijn ook daadwerkelijk te construeren.

In figuur 3 respectievelijk 4 zijn de gevraagde lijnen (lijnstukken) door O getekend met x_1 respectievelijk x_2 .



figuur 3



figuur 4

Bij een andere ligging van punt O kan de verdeellijn anders lopen maar de aanpak is vrijwel hetzelfde. En... mocht punt O 'toevallig' het zwaartepunt zijn van $\triangle ABC$ dan weten we dat er drie oplossingen zijn. De aanpak van hierboven zou dan geven:

$|BD| = 14 = |AB|$ of $|BD| = 7 = \frac{1}{2}|AB|$. Dat geeft alvast de zwaartelijnen uit A en uit C .

In het vo is dit zeker te doen als begonnen wordt met een gelijkzijdige driehoek bijvoorbeeld. Variëren van punt O is dan interessant en er is eenvoudig te onderzoeken wanneer er één oplossing is of wanneer de verdeellijn anders moet lopen. Een mooie aanpak maar met wat

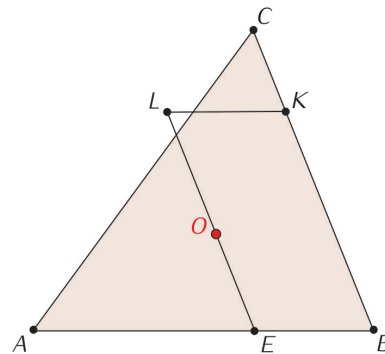
wildere getallen voor de zijden wordt de berekening ook wel wat wilder.

Hoe verrassend is het hierna een oplossingsroute zonder *cossische* getallen te lezen.

Een Euclidische aanpak

De nu volgende aanpak was al vóór Brasser gegeven namelijk door Cardinael rond 1612. Het is kwestie 92 in zijn prachtige boek '*Hondert geometrische questien en hare solution*'.^[3]

Cardinael vraagt zich af hoe dit geometrisch te doen. Er wordt niet gerekend maar met kennis van *De Elementen* van Euclides slim geredeneerd, zie figuur 5.



figuur 5

De driehoek is zonder getallen gegeven en door punt O is een lijn evenwijdig aan BC geconstrueerd. Daarmee ligt punt E op zijde AB vast. Vervolgens wordt punt L op zijde AC gezocht (geconstrueerd) zodanig dat $\text{Opp}(\text{parm } BELK) = \frac{1}{2}\text{opp}(\triangle ABC)$.

Dus $|BE| \cdot |BK| = \frac{1}{4}|BA| \cdot |BC|$.

Cardinael schrijft niet hoe dit te doen maar het kan snel als volgt.

De uitdrukking is te herschrijven naar verhoudingen nl.

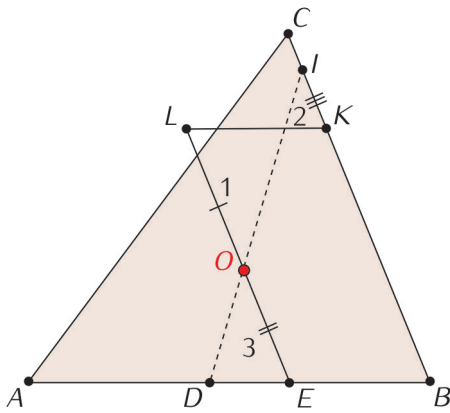
$$4|BE| : |BC| = |BA| : |BK|.$$

En dan met propositie 12 boek VI is het vierde lijnstuk te vinden bij de gegeven drie lijnstukken.

Cardinael past overigens eerst de gehele driehoek aan naar een parallellogram met hoek B en halveert daarna een zijde en krijgt zo punt L .^[4]

Hoe dan ook, de punten K en L zijn eenvoudig te construeren.

In de driehoek loopt de gevraagde lijn zoals in figuur 6.



figuur 6

Het inzicht van Cardinael is nu dat de driehoeken 1, 2 en 3 gelijkvormig zijn, dat is eenvoudig te bewijzen, maar ook dat er moet gelden:

$$\text{opp}(\Delta 1) = \text{opp}(\Delta 2) + \text{opp}(\Delta 3) \quad (*)$$

Wat te veel is in het parallellogram, namelijk oppervlakte driehoek 1, moet weg en verdeeld worden over de driehoeken 2 en 3. Dan voldoen we aan het gevraagde! En nu gebruikt hij propositie 19 van boek VI: 'de oppervlaktes van gelijkvormige driehoeken verhouden zich als het kwadraat van de verhouding van een paar overeenkomstige zijden'.

En daaruit volgt:

$$\text{opp}(\Delta 2) : \text{opp}(\Delta 1) = |IK|^2 : |OL|^2 \text{ en}$$

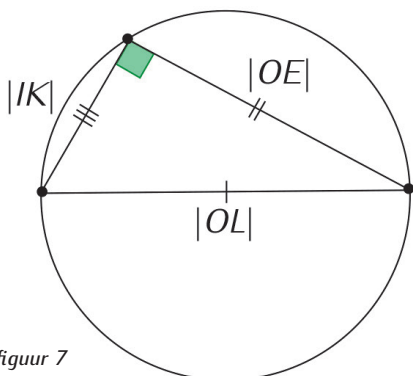
$$\text{opp}(\Delta 3) : \text{opp}(\Delta 1) = |OE|^2 : |OL|^2.$$

Waaruit volgt, kort genoteerd:

$$\begin{aligned} \text{opp}(\Delta 2) + \text{opp}(\Delta 3) &= \\ \frac{|IK|^2}{|OL|^2} \cdot \text{opp}(\Delta 1) + \frac{|OE|^2}{|OL|^2} \cdot \text{opp}(\Delta 1). \end{aligned}$$

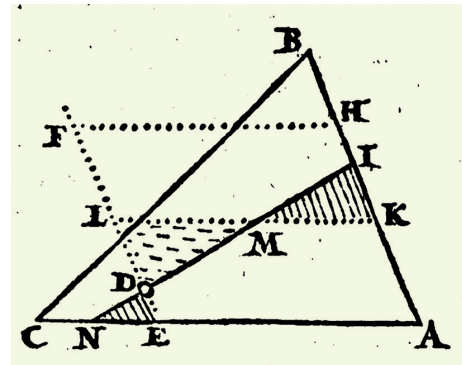
Als $|IK|^2 + |OE|^2 = |OL|^2$ dan hebben we (*) bereikt. $|OL|$ en $|OE|$ zijn bekend en $|IK|$ is te vinden met behulp van de stelling van Pythagoras, door Cardinael steeds propositie 47 van boek I genoemd.

Dus $|IK|$ is te construeren, zie figuur 7. OL is de middel-lijn van de cirkel.



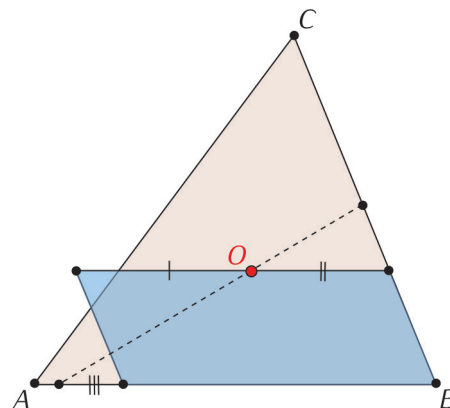
figuur 7

En daarmee ligt punt I vast en is de gevraagde lijn door punt O gevonden. Meesterlijk! Figuur 8 is het plaatje bij deze kwestie in het boek van Cardinael. Punt O is hier D.



figuur 8

Mogelijk denk je nu: zo wordt er één lijn gevonden maar met die algebraïsche aanpak vind je wel meteen de andere lijn, als die bestaat. Dat kan met de bovenstaande aanpak ook. Dan moet de lijn van het parallellogram evenwijdig aan AB getrokken worden, zie figuur 9.



figuur 9

Cossisch of niet?

Cardinael moet niets hebben van *cossische* getallen. Zo'n aanpak heeft geen fundament, vindt hij, terwijl zijn aanpak die wel heeft, namelijk in de *Elementen* van Euclides. Overigens werkt hij soms ook met een soort variabele. Hij stelt een onbekende lengte even gelijk aan 1 en rekt daarmee door. Uiteindelijk passeert een reeds bekende lengte maar die is een factor te groot of te klein berekend. De onbekende lengte wordt dan met die factor omgerekend. Zien we hiervan iets terug bij Brasser? De onbekende lengte $|BD|$ wordt niet x genoemd maar $1x$. Alsof de factor hier meteen wordt meegenomen.

Overpeinzing

De verrassende aanpak van Cardinael charmeert, dat laat dit voorbeeld zeker zien. Natuurlijk moeten methoden uit de analytische meetkunde gekend zijn, maar enige prachtige bewijzen en redeneringen uit de Euclidische meetkunde mogen eigenlijk niet gemist worden. Nu de schrijver dezes de kwesties van Cardinael heeft hertaald en zich gelaafd heeft aan de mooie bewijsvoeringen, blijft knagen dat in het vo de leerlingen toch iets onthouden wordt.

Tja, eens Euclides, altijd Euclides, dat is wellicht overdreven maar toch...

Noten

- [1] Keestra M. e.a. (2006). *Een cultuurgeschiedenis van de wiskunde*. Nieuwezijds.
- [2] <https://archive.org/details/regulacosalgebr00brasgoog/page/n384/mode/2up>
- [3] Beschikbaar op <https://lib.ugent.be/nl/catalog/rug01:001758905>
- [4] <https://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2003-04-4-309.pdf>

Over de auteur

Fred Muijers was docent aan de eerste- en tweedegraads lerarenopleiding wiskunde van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen. E-mailadres: fmuijers@yahoo.com

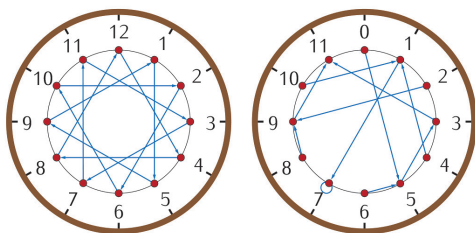
WiTje: Pijlenklokken

Wiskunde in
teams



WiTjes zijn korte modeller- of onderzoeksopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Olympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

In figuur 1 links zie je een klok met voor elk uur een pijl naar vier uur later. In feite is dit een plaatje bij de functie $f(x) = x + 4$, waarbij je modulo 12 rekent.



figuur 1

Algemener kun je voor lineaire functies $f(x) = ax + b$ kijken naar de bijbehorende pijlenklok. In figuur 1 rechts

de pijlenklok bij de functie $f(x) = 2x + 5$. Exploreer in GeoGebra^[1] hoe de parameters het plaatje beïnvloeden. Je kunt talloze vragen stellen en proberen te beantwoorden, bijvoorbeeld: hoe hangt het aantal lusjes af van de parameters? Hoe hangt de orde van de draaisymmetrie af van de parameters? Hoe hangt het aantal paren evenwijdige lijnen af van de parameters? Je zult zien dat er al gauw een beetje getaltheorie bij komt kijken om deze vragen te beantwoorden. Wat dat betreft is het een mooie opwarmer om te kijken naar functies van de vorm $f(x) = x + b$. Je ziet dan telkens een aantal veelhoeken (de pijlen lopen soms over elkaar heen in een soort stervorm). Hoe hangt het aantal veelhoeken van b af?

Dit WiTje is gebaseerd op de Wiskunde B-dag opdracht van 2017.

Noot

- [1] zie: <https://www.geogebra.org/m/ZUDcUk2C>



Reis om de wereld in 80 spelletjes



Titel: Reis om de wereld in 80 spelletjes
Ondertitel: De wiskunde achter de beste spellen
Auteur: Marcus du Sautoy
Uitgever: Uitgeverij Nieuwezijds, Amsterdam, 2024
360 pagina's paperback
ISBN: 601-14-3265-068-2
Prijs: € 26,99

Dit lijvige boek van Marcus de Sautoy neemt de lezer mee door de wereld van spelletjes. Het zijn 80 spelletjes die hij op persoonlijke voorkeur heeft uitgekozen voor zijn boek. Zijn hele leven is Marcus al gek van spelletjes. Hij kikt op de dopamine die vrijkomt als je een spel wint. Schaakmat, de winnende zet, het laatste punt, het eindpunt halen, de spanning die je voelt totdat je dat bereikt. Dat maakt dat veel mensen graag spellen spelen. Hij schrijft in dit boek hoe hij op al zijn reizen de spelletjes heeft gevonden die in het land dat hij bezoekt gespeeld worden. Verwacht niet de spelregels van al die spellen. Die kun je vinden op de websites die achter in het boek vermeld staan. Het is vooral een boek met al zijn belevenissen en overdenkingen die hij had bij het ontmoeten van de spellen die hem getoond worden.

In dit boek kun je lezen wanneer je kunt spreken van een spel (p.13, p.43 e.v.), wanneer een spel goed is (p.17) en aan welke eisen een goed spel moet voldoen (p.47, p.54). Hierbij worden verschillende filosofen aangehaald die hierover hun gedachten hebben opgeschreven. Hij begint het boek in het Midden Oosten met een hoofdstuk over racespellen.

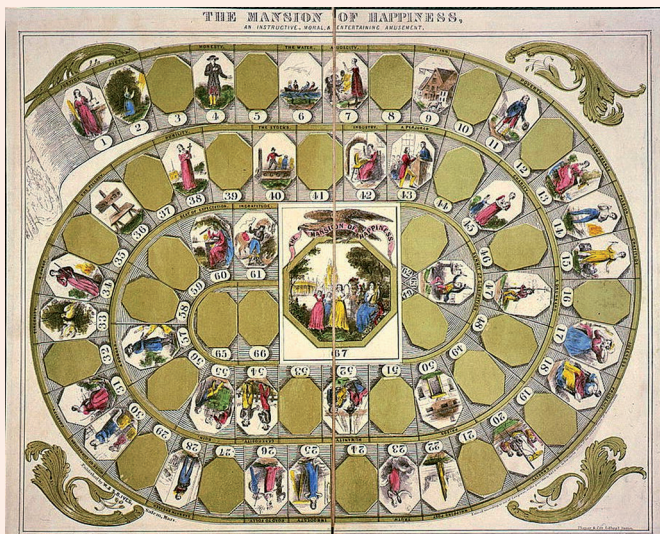


figuur 1 Backgammon

Daarin staat Backgammon (S1) ^[1] centraal. Dat spel voldoet het best aan alle eisen voor een goed spel, en is toeval of niet, ook een van de oudste spellen die er bestaan.

De reis gaat verder via India en China naar Japan. Daarna over de grote oceaan naar Amerika en vervolgens over de Atlantische oceaan naar Afrika en ten slotte naar Europa. In het boek kun je lezen welke spellen op elk continent populair zijn. Bij de meeste spellen speelt naast de kans om te winnen ook tactiek en strategie een rol. En daar kun je soms met wiskunde enige grip op krijgen. Bij de zogenaamde NIM spelen (S19) kun je zelfs een winnende strategie bepalen (p.88 e.v.).

Er wordt voornamelijk verteld welke plaats een spel speelt in de cultuur die De Sautoy bezoekt. India is de bakermat van een van de beste oorlogsspellen die de mens heeft uitgevonden: schaken (S11). De Engelsen brachten uit India een spel mee (Pachisi) waarbij je het hoogste doel moet zien te bereiken, maar waarbij je onderweg ook tegenslagen (terugzetten) kunt tegenkomen. Denk ook aan Mens-Erger-Je-Niet, een spel waar ik zelf een gruwelijke hekel aan heb. Terwijl je een pion bijna binnen hebt kun je ineens weer helemaal teruggezet worden. Bah. De versie Slangen en ladders (S14) die Marcus als kind vaak speelde vindt dus ook zijn oorsprong in India. In China draait het in Go (S22) niet om het verslaan van de tegenstander maar om het veroveren van gebieden. Een heel andere manier van een oorlogspel.



figuur 2 The Mansion of Happiness

Marcus heeft niet voor ogen dat de lezer per se het boek helemaal moet lezen. Je mag zelf bepalen in welke volgorde en over hoeveel spellen je iets wilt lezen. Ik ging op zoek naar het uit mijn jeugd bekende Ganzenbord. Marcus beschrijft de versie The Mansion of Happiness (S52), een spel uit 1843 in Amerika met 67 vakjes om de christelijke waarden uit te dragen.

Achterin het boek kun je aankruisen over welke spellen je hebt gelezen. Zelf ben ik een verwoed spellenspeler. In mijn studententijd speelde ik zo vaak Scrabble (S54) dat op een gegeven moment niemand dit meer met me wilde spelen (lees p.103). Met vrienden is Catan onze favoriet. Laat dit nu precies het meest gekozen zijn in een radioprogramma in het VK waarin luisteraars konden doorgeven wat zij het beste spel aller tijden vonden (S71). Mijn vrouw en ik spelen samen het liefst het kaartspel van Catan. Met negen uitbreidingen is het spelen van deze tweepersoonsversie telkens een nieuwe uitdaging.

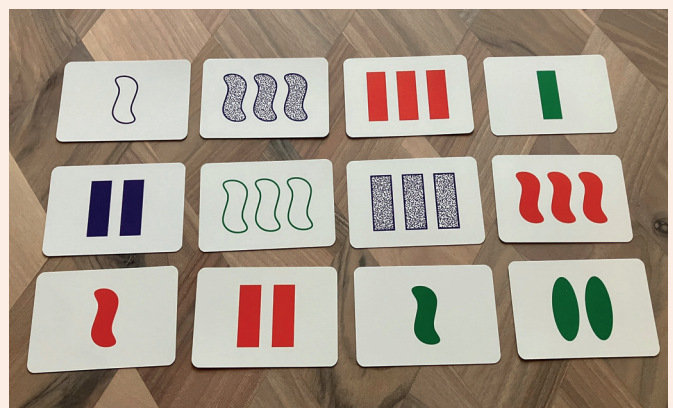


figuur 3 Kolonisten van Catan, het kaartspel

De wiskunde in dit boek bestaat uit wat berekeningen van aantallen mogelijkheden, of wat kansberekening voor winst. Een mooi verhaal dat eindigt met de gulden snede staat bij het Ultimatumspel (S20).

Naast de wiskunde die je bij een spel kunt gebruiken om te zien hoe je winstkansen kunt vergroten, is wiskunde soms ook een ingrediënt bij het bedenken van een nieuw spel. Lees over Dobble (S76) en Set (S77).

Het boek eindigt met Het Kralenspel (S80) waarvan niemand de spelregels kent. Tijd om weer terug te keren in de werkelijke wereld.



figuur 4 Set

Voor liefhebbers van spelletjes is dit een zeer lezenswaardig boek. Het is vooral een boek dat je niet in één keer uitleest, maar waar je zo nu en dan weer eens het verhaal achter een spel gaat lezen. Je komt in verschillende werelden/culturen die elk op hun eigen manier tegen spellen aankijken. De wiskunde die je tegenkomt is wel grappig en geeft af en toe inzicht in de winstkansen van een spel. Maar het is vooral de passie voor spelletjes waarmee Marcus me heeft weten te boeien.

Noot

[1] het getal achter de S verwijst naar het volgnummer in het boek.

Over de auteur

Rob van Oord was docent wiskunde, van augustus 1974 tot augustus 2014 op het Coenecoop College in Waddinxveen, sindsdien werkt hij als invaller op scholen in de regio. E-mailadres: robvanoord@tiscali.nl

Pracht en kracht van wiskunde

Deel 4: Van kristalstructuur tot 'ein stein'

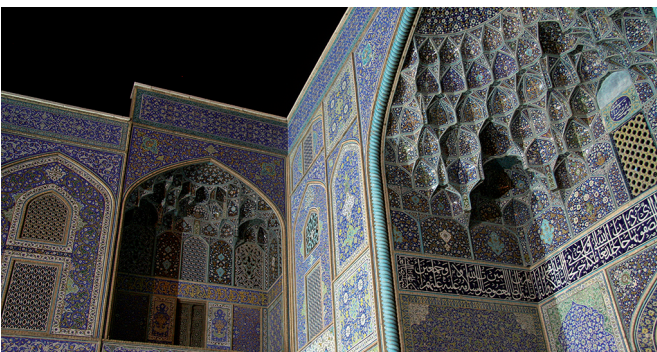
De rondreizende tweede editie van de *Imaginary*-tentoonstelling is alweer voorbij. Inmiddels is de mooie catalogus met onder meer alle beelden op de website blijvend te bewonderen.^{[1], [2]} Paul Igodt neemt ons mee naar de wiskunde achter een aantal van de fenomenen die te zien en te ervaren waren. Deze serie artikelen is een bewerking van de eerder verschenen versies in *Wiskunde en Onderwijs*, ons 'zustertijdschrift' van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars.

Inleiding

Kunstenaars, op zoek naar ultieme vormen van schoonheid en naar steeds betere vakkennis, waren reeds eeuwen geleden de voortrekkers. De vele patronen voor de muurversieringen in het Alhambra zijn een bekende illustratie van oogstrelende symmetrieën. De Nasridische kunstenaars van de veertiende eeuw beheersten met een verbluffende nauwkeurigheid de achterliggende meetkunde. In de Islamitische kunst komen sierlijke muurbetegelingen ook op andere plaatsen terug. Schitterend versierde moskeeën (o.a. in Iran) laten steeds een onvergetelijke indruk na. Maar ook de natuur zelf inspireert met verrassende en kleurrijke kristalstructuren zoals die van talrijke mineralen.



figuur 1 wandversieringen in het Alhambra (eigen foto's)



figuur 2 Sheikh Lotfollah Moskee, Isfahan, Iran (foto: Tom Goris)



figuur 3 In de natuur ontstaan mineralen in vele vormen en kleuren die inspirerend werken. Ze worden gekenmerkt door een karakteristieke kristalstructuur en groeien ruimtevullend.

1) 1850-1900: de wiskundige basis

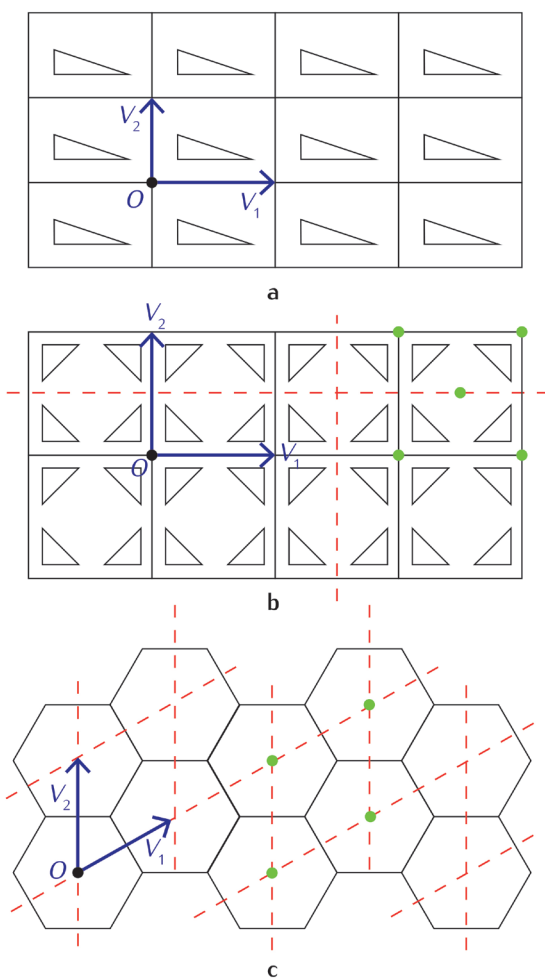
Het duurde tot de eerste helft van de negentiende eeuw vooraleer er meer abstract wiskundig nagedacht werd over de variaties van ruimtevullende kristalstructuren, voornamelijk onder invloed van natuurkundigen en mineralogen. Auguste Bravais (1811 - 1863), een Franse fysicus, kwam op het idee om een regelmatige ruimtevullende kristalstructuur te beschrijven aan de hand van roosterpunten met gehele coördinaten in de ruimte: een Bravais rooster (of tralie). Drie lineair onafhankelijke vectoren in de ruimte genereren zo een oneindig doorlopende tralie. De roosterpunten hebben gehele getallen als coördinaten ten opzichte van die basisvectoren. Elke translatie over een geheel aantal veelvouden van de basisvectoren laat de ruimtevullende structuur invariant. Bravais rangschikte



figuur 4 Auguste Bravais en het Atomium (foto: Tom Goris)

de ruimtelijke kristalstructuren aan de hand van veertien types tralies, naar verluidt ook nu nog van belang in de materiaalwetenschappen. Het Atomium te Brussel beeldt een van die types uit.

Keren we even terug naar het tweedimensionale geval. Onder een regelmatige of periodieke betegeling van het vlak verstaan we een vlakvullende betegeling die invariant is (dus qua uitzicht niet wijzigt) door het uitvoeren van translaties over gehele veelvouden van twee onafhankelijke vectoren, die we v_1 en v_2 noemen. Is dit net niet wat we zien in de wandversieringen van het Alhambra of, meer huiselijk, in muurbekledingen met behangpapier? Er ontstaan een soort eenheidscellen die we door verschuiving in twee richtingen telkens zien terugkeren. In figuur 5 zie je drie voorbeelden van eenvoudige vlakvullingen.



figuur 5 Regelmatige vlakvullingen met hun eenheidscel en vectoren v_1 en v_2 . We zien sterk verschillende symmetrie-eigenschappen. In a een vlakvulling met enkel translatie-invariantie. In b een vlakvulling met meer symmetrie: de twee rode assen zijn spiegellijnen, de vijf groene stippen zijn middelpunten voor rotaties over 90° . In c een vlakvulling met parallellogrammen als eenheidscellen en o.a. met zes- (en dus ook drie-) voudige rotatiesymmetrie.

Alhoewel ze allemaal translatie-invariant zijn, kan de betegeling extra symmetrie-eigenschappen verkrijgen afhankelijk van wat er in de eenheidscellen getoond wordt. Deze extra symmetrieën zijn isometrieën, zoals spiegelingen, rotaties en schuifspiegelingen en gelden bij elk van de roosterpunten.

In het algemeen is een isometrie van het vlak een samenstelling van een orthogonale transformatie en een translatie. Voor regelmatige betegelingen gebeuren de translaties volgens vectoren die lineaire combinaties met gehele coëfficiënten zijn van de basisvectoren v_1 en v_2 . Alle symmetrieën zijn dus van de vorm

$$f_{(A,a)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$(A \text{ orthogonaal en } a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2)$$

We noteren

$$t_b: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

voor een translatie met vector b . De verzameling van alle symmetrieën van de betegeling vormt een groep voor de samenstelling en dus horen ook de inverse transformaties erbij. Zo is de inverse transformatie van

$$f_{(A,a)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

(Controleer je even?)

Als t_b en $f_{(A,a)}$ allebei symmetrieën van de betegeling zijn, dan hoort ook deze samenstelling erbij:

$$f_{(A,a)} \circ t_b \circ f_{(A^{-1}, -A^{-1}a)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad [1]$$

We zien zo dat $f_{(A,a)} \circ t_b \circ f_{(A^{-1}, -A^{-1}a)} = t_{Ab}$ opnieuw een translatie is.

Puntgroep

De verzameling van die orthogonale transformaties A , waarbij voor een zekere $a \in \mathbb{Z}^2$ $f_{(A,a)}$ een isometrie is die de betegeling invariant laat, wordt de puntgroep van de betegeling genoemd. Uit vergelijking^[1] besluiten we dat, als de transformatie A tot de puntgroep behoort en t_b een translatiesymmetrie is, de translatie t_{Ab} dat ook moet zijn. A beeldt de oorsprong op zichzelf af (want is lineair) en beeldt dus roosterpunten op roosterpunten af.

Kristallografische restrictie

Slechts een zeer beperkt aantal rotaties kunnen tot de puntgroep van een regelmatige ruimte-vullende kristalstructuur behoren. We argumenteren voor een vlakke betegeling aan de hand van twee verschillende redeneringen die haalbaar kunnen zijn voor leerlingen van het secundair onderwijs. Dat er rotaties kunnen bestaan van orde 4 (en dus ook 2) zagen we reeds in figuur 5. Beeld je nu even een rotatie in van orde 5 of groter, dus over een hoek $\frac{2\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$ en veronderstel dat ze de betegeling invariant laat. Roosterpunten moeten door deze rotatie op roosterpunten afgebeeld worden.

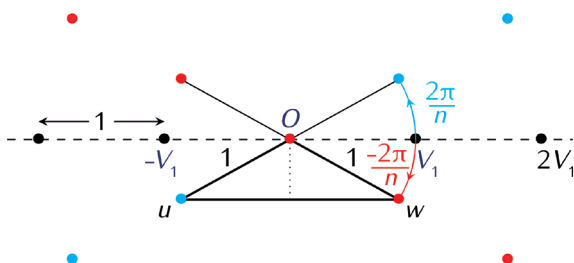
Meetkundig:

Zie figuur 6, de rotatie in tegenwijzerzin beeldt $-v_1$ af op het roosterpunt u en de rotatie in wijzerzin beeldt v_1 af op het roosterpunt w . De beeldpunten u en w liggen op een evenwijdige aan de rechte door $-v_1$ en v_1 . Hun onderlinge afstand, $|uw|$, is dus een geheel veelvoud van de lengte van v_1 die we eenvoudigheidshalve 1 noemen. Driehoek $\triangle uow$ is gelijkbenig met basishoeken $\frac{2\pi}{n}$ en dus vinden we die afstand ook als:

$$|uw| = 2\cos\frac{2\pi}{n} \in \mathbb{N}$$

We besluiten dat $\cos\frac{2\pi}{n} \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ en bijgevolg dat n enkel de waarden 1, 2, 3, 4 en 6 kan hebben. Omdat $n \geq 5$ verondersteld werd, besluiten we dat $n = 6$.

Enkel rotaties van orde 6 (en bijgevolg ook nog 3) zijn dus mogelijk, naast die van orde 4 (en dus 2). Een rotatie in de puntgroep van een periodieke ruimte-vullende structuur kan dus enkel over hoeken $\pm 180^\circ$, $\pm 120^\circ$, $\pm 90^\circ$ en $\pm 60^\circ$.



figuur 6 De kristallografische beperking limiteert sterk de mogelijke rotaties in de puntgroep van een periodieke vlakvulling. Enkel rotaties van orde 2, 3, 4 en 6 zijn nog mogelijk.

Algebraïsch:

Hou je meer van algebra, dan kun je dit resultaat ook op de volgende manier beredeneren. Indien je de rotatie over hoek θ voorstelt ten opzichte van een orthonormale basis, dan wordt ze beschreven met een (orthogonale) matrix van de vorm $\text{rot}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Het spoor van deze matrix is dus gelijk aan $2\cos\theta$. Helaas vormen de twee vectoren (v_1 en v_2) die het rooster voortbrengen niet steeds een orthonormale basis. De matrixvoorstelling ten opzichte van die basis levert een gelijkvormige matrix op. En gelijkvormige matrices hebben hetzelfde spoor. Bovendien moet die laatste matrix gehele getallen als elementen hebben, omdat de rotatie het rooster op zichzelf afbeeldt. We besluiten dat $2\cos\theta \in \mathbb{Z}$.

Intuïtief:

komt de kristallografische restrictie neer op het volgende idee. Neem de kortste basisvector. Een rotatiesymmetrie van het rooster zal die vector op een andere vector van het rooster afbeelden. Als de hoek waarover je roteert niet groot genoeg is, ligt die andere vector onvoldoende ver van de eerste, waardoor het verschil tussen beide een kortere vector wordt die ook tot het rooster behoort.

Doorbraak in dimensie 3



figuur 7 Evgraf Fedorov (l) en Arthur Schönflies (r)

Indrukwekkend baanbrekend werk over ruimte-vullende kristalstructuren gebeurde in de periode 1880 - 1895, aanvankelijk onafhankelijk van elkaar, en op zeer verschillende wijze, door Evgraf Fedorov (1853 - 1919), een Russische mineraloog met een bijzonder wiskundig talent, en door Arthur Schönflies (1853 - 1929), een Duitse wiskundige.

Fedorov, opgeleid als ingenieur en mineraloog, was gefascineerd door ruimte-vullende veelvlakken. Na vele jaren onderzoek publiceerde hij in 1890 een gebundeld werk waarin hij aantoonde dat er slechts 230 mogelijke ruimte-vullende configuraties zijn van veelvlakken.

Hij analyseerde hiervoor alle mogelijke symmetrieën voor kristalstructuren en bouwde zo verder op eerder werk van Bravais en anderen. Schönflies werd aangemoedigd door Felix Klein om ruimtevullende kristalstructuren te classificeren aan de hand van hun symmetriegroep. Klein maakte, sterk vernieuwend, de verbinding tussen vormen (veelvlakken) enerzijds en hun symmetriegroepen anderzijds, en kende de meest recente vorderingen in de toen nog jonge groepentheorie ontwikkeld door Arthur Cayley (1821 – 1895). Schönflies publiceerde zijn classificatie van de ruimtevullende kristalstructuren in 1891.

Na een intense conversatie per briefwisseling tussen Fedorov en Schönflies waarbij ze elkaars werk grondig bestudeerden, bleek dat beide classificaties minime foutjes bevatten, maar werd uiteindelijk in 1892 sluitend aangetoond dat er precies 230 verschillende symmetriegroepen zijn (en dus evenveel verschillende regelmatige ruimtevullende kristalstructuren). Deze symmetriegroepen werden kristallografische groepen of ook wel ruimtegroepen genoemd. Strikt wiskundig gezien blijken er slechts 219 ruimtegroepen te zijn. De opsommingen van Fedorov en Schönflies bevatten immers elf groepen die (wiskundig gezien) dubbel geteld werden.

Aan de aandacht ontsnapte toen dat Fedorov in zijn (in het Russisch geschreven) werk toevoegde dat hij 17 verschillende regelmatige betegelingen van het vlak had gevonden.

2) 1900-1965: enorme impact van kristallografie

Het baanbrekende werk van Fedorov en Schönflies werd snel opgepikt door de grote David Hilbert (1862 – 1943). Op het tweede internationaal wiskundecongres (ICM), gehouden te Parijs in 1900, presenteerde hij in zijn tot op vandaag historische voordracht een lijst van 23 open problemen waarvoor hij het vinden van oplossingen als belangrijk stipuleerde.

Bij het 18-de probleem uit zijn lijst vinden we de vraag terug of er in elke dimensie n (net zoals voor $n = 2$ en $n = 3$) slechts eindig veel verschillende kristallografische groepen waren.

Ruim tien jaar later werd het bestaan van slechts een eindig aantal kristallografische groepen in elke dimensie aangetoond door Ludwig Bieberbach (1886 – 1982). Eigenaardig genoeg kwam pas in 1924 met werk van George Pólya (1887 – 1985) een sluitend bewijs dat er effectief slechts 17 verschillende periodieke vlakke betegelingen mogelijk zijn. Is het niet opmerkelijk dat de Nasridische kunstenaars in de wandversieringen van het Alhambra ook die 17 verschillende types symmetrie meester waren!

Twee Nobelprijzen fysica

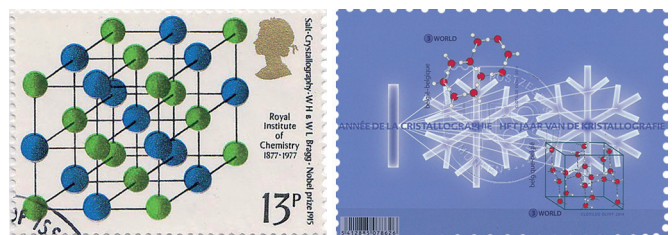
Een ongekennde verbreding van het belang van de classificatie van kristalstructuren kwam er in de jaren 1910-1915.

Max von Laue (1879 – 1960) ontdekte dat een bundel röntgenstraling die invalt op een kristalstructuur zorgt voor een diffractiepatroon, in tegenstelling tot een invalende bundel zichtbaar licht. Röntgen of X-straling was toen nog maar pas ontdekt. Het diffractiepatroon maakte iets van de structuur op atomair niveau zichtbaar. Voor zijn ontdekking werd Von Laue bekroond met de Nobelprijs fysica in 1914.



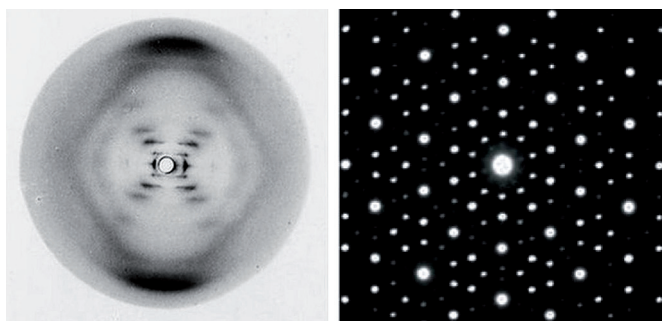
figuur 8 Max von Laue (l) en William Henry & William Lawrence Bragg (r) ^[2]

Korte tijd later slaagden William Henry Bragg (1862 – 1942) en zijn zoon William Lawrence Bragg (1890 – 1971) erin een wiskundig model op te stellen waarmee de kristalstructuur (op atomair niveau) met behulp van diffractie door X-stralen effectief beschreven kon worden. Ze toonden aan hoe, bij een passende invalshoek van de bundel stralen, de diepte van de atomen in de structuur berekend kon worden. William Henry Bragg studeerde wiskunde en fysica aan de universiteit van Cambridge, waar ook William Lawrence een topper werd. Ze werden samen voor hun werk bekroond met de Nobelprijs fysica in 1915. William Lawrence Bragg was tot 2014 de jongste laureaat van een Nobelprijs. Kristalstructuren waren plots niet meer beperkt tot de studie van mineralen of ruimtevullende veelvlakken, maar werden een topic van cruciaal wetenschappelijk belang in fysica en chemie, en bij uitbreiding in biochemie en geneeskunde. De classificatie van kristallografische groepen, zoals beschreven door Fedorov en Schönflies kreeg een nieuwe impact.



figuur 9 Kristallografie op postzegels

In 1947 werd de International Union of Crystallography (IUCr) opgericht, tot op vandaag een leidende internationale wetenschappelijke vereniging met focus op kristallografie en haar toepassingen. De organisatie is een waardevolle bron van niet enkel historische, maar ook educatieve informatie en ze huisvest de bekende 'International Tables for Crystallography'. Alle kristalstructuren die men observeerde tot 1982, ook die met röntgendiffractie, waren regelmatig en dus periodiek.

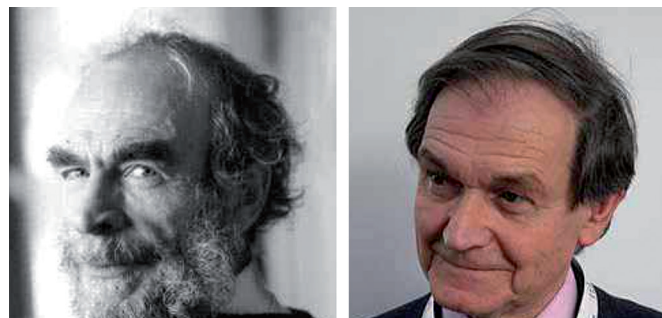


figuur 10 Het beeld links (Bron: King's College London) wordt door sommigen de belangrijkste foto ooit genomen genoemd. Het toont een X-stralen diffractiebeeld van een DNA-kristal, genomen door Raymond Gosling onder leiding van Rosalind Franklin in mei 1952. Deze foto inspireerde voor de ontdekking van de dubbele helix structuur van DNA, waarvoor de ontdekkers bekroond werden met de Nobelprijs geneeskunde in 1962. Het beeld rechts hoort bij een Mangaan-Aluminium composiet en toont een elektronenmicroscop diffractiebeeld met een vijfvoudige rotatiesymmetrie, ontdekt in 1982 door Daniel Shechtman (Bron: Nobelprize Outreach AB).

3) 1965-2023: nieuwe horizons

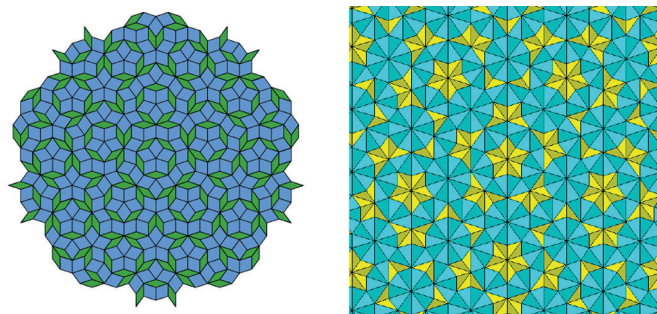
Kristallografische groepen blijken in het actuele wiskunde-onderzoek een inspirerend bijzonder geval van een meer algemene familie groepen die een sleutelrol spelen op de grens tussen meetkunde, algebra, topologie en dynamische systemen. Het werk van Mikhael Gromov (1943) legde hier de basis voor. Gromov is ongetwijfeld een van de grootste wiskundigen van de laatste eeuw. Hij werd voor zijn vele verdiensten in 2009 bekroond met de Abelprijs.

In 1974 ontdekte Roger Penrose (1931) twee vierhoeken met de merkwaardige eigenschap: je kunt met die vierhoekige tegels het volledige vlak vullen, maar geen enkele van deze vlakvullingen is periodiek. Die betegelingen hebben met andere woorden geen translatiesymmetrie. Dat zo'n betegeling überhaupt al mogelijk was, en dan nog door gebruik te maken van slechts twee vormen,

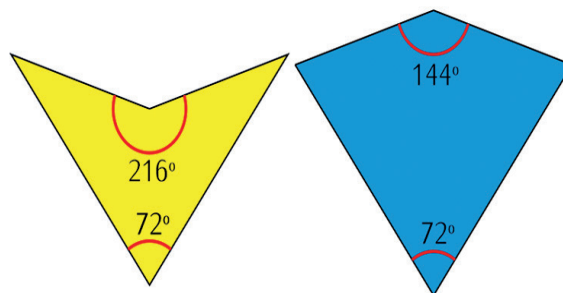


figuur 11 Mikhael Gromov (l) en Roger Penrose (r)

was een complete verrassing. De Penrose betegelingen inspireerden onder meer voor allerlei puzzels. Sir Roger Penrose is een veel gelauwerde wetenschapper, met onder meer in 2020 de Nobelprijs fysica, voor zijn aandeel in de theorie van de zwarte gaten. In figuur 12 zien we slechts twee voorstellingswijzen, maar er zijn er meer. Het gaat hem telkens echter wel om heel goed uitgekiende constructies, vertrekkend van regelmatige vijfhoeken, en het slim herverdelen van veelhoeken.^[3] Uiteindelijk ontstaat, zoals beter zichtbaar in figuur 13 een bundeling van 'vliegers' en 'pijlen' ('kites' en 'darts' in de woorden van Penrose).



figuur 12 Niet-regelmatige (aperiodieke) betegelingen van het vlak, zoals ontworpen door Penrose in 1974. Links met dikke en dunne ruiten; rechts met pijlen en vliegers



figuur 13 'Kites' en 'darts'

De subtiel berekende constructie met pijlen en vliegers laat toe om de verhouding van het aantal vliegers tot het aantal pijlen te berekenen, althans in de limiet voor een oneindig doorlopend vlak. Deze verhouding is gelijk aan het irrationaal getal $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, de welbekende gulden snede. Dit toont aan dat er geen translatie-invariantie kan optreden, vermits in dat geval de verhouding duidelijk een rationaal getal zou zijn.

De aperiodieke penrosebetegelingen van het vlak (bij uitbreiding ook mogelijk in dimensie 3) leken een wiskundig folietje te zijn. Niemand geloofde dat zo iets ook echt in de natuur kon bestaan; kristalstructuren werden immers geacht periodiek te zijn. De Israëlische scheikundige Daniel Shechtman (1941) ontdekte echter in 1982 bij een experiment onder de elektronenmicroscop een 10-voudige rotatiesymmetrie in een kristalstructuur (zie figuur 9). Met andere woorden, een kristallijn beeld waar een 5-voudige rotatie in optreedt, volkomen onmogelijk in een periodieke kristalstructuur omwille van de kristallografische restrictie. Shechtman gebruikte de term quasikristal om de gevonden structuur te typeren. Er volgden heel wat jaren van tegenstand tegen de ideeën van Shechtman. Verschillende collega's, zelfs een topper als Linus Pauling, bestempelden zijn vondst als nonsens. Pas in 2011 volgde de ultieme wetenschappelijke erkenning, toen Shechtman bekroond werd met de Nobelprijs chemie.

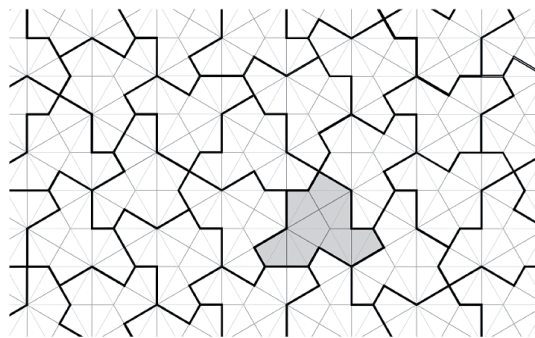


figuur 14 Daniel Shechtman ^[2]

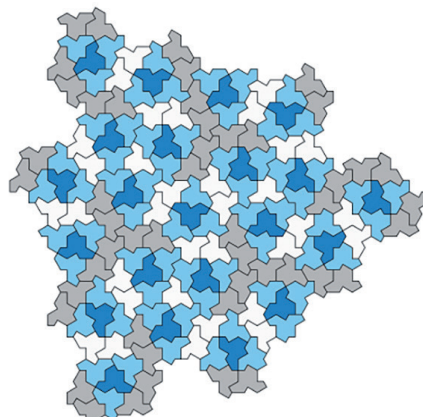
Is het niet indrukwekkend hoe reeds in de vijftiende eeuw in de Islamitische kunst zogenaamde *girih tegels* ontworpen werden waarmee men toenemend complex het vlak periodiek kon betegelen en in de praktijk nagenoeg perfecte betegelingen volgens Penrose patronen kon genereren.^[4] In maart 2023 volgde misschien wel dé verrassing van dat wiskundejaar: het bestaan van een aperiodieke betegeling van het vlak met slechts één type

samenhangende figuur, een *ééntegel* of *einstein*.

Met een vermoeden van iets bijzonders zocht David Smith, een amateur visueel kunstenaar contact met enkele wetenschappers over een figuur waarmee hij klaarblijkelijk het vlak kon betegelen maar geen regelmaat ontdekte. Een *polykite* werd het genoemd, want hij bestaat uit een veelheid aan *vliegers*. De auteurs noemen het *de hoed*.



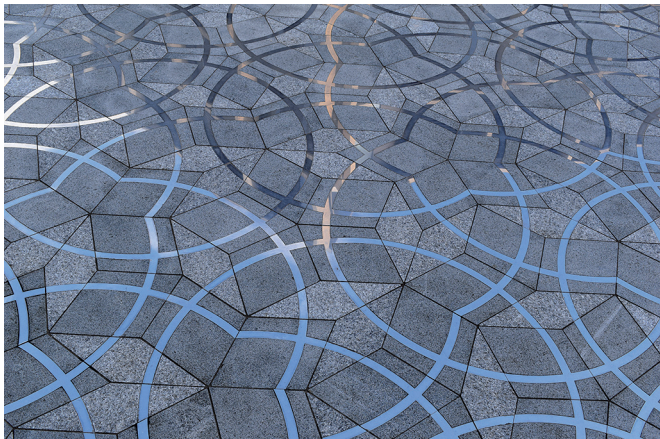
figuur 15 Bemerkt in de achtergrond van de figuur links de hexagonale betegeling van het vlak, en de constructie van 'de hoed' als een niet-symmetrische dertienhoek opgebouwd met driehoekjes uit aangrenzende zeshoeken.^[5]



figuur 16 Systematisch met enkele tegels een 'supertegel' bouwen die opnieuw in een bepaalde configuratie wordt samengevoegd

Dat je het vlak effectief met deze dertienhoek sluitend kunt betegelen volgt door een constructieve, na te rekenen en iteratief uitdijende eigenschap van de betegeling. Dit kun je uitstekend simuleren op de website van de auteurs.^[5] De auteurs geven twee verschillende subtiële argumenten om de aperiodiciteit aan te tonen. Zij bieden ook een animatie aan die hun argumentatie ondersteunt. Ook bij deze constructie en de ontdekking van Shechtman speelt de gulden snede $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ een rol. Het lijkt wel een sleutel tot een nieuw soort regelmaat.

>



figuur 17 Het Mathematical Institute van Oxford University liet een deel van de vloer betegelen met een Penrose patroon (foto: Ruud Stolwijk)

Puzzel je graag en wil je dit in de praktijk uitproberen, dan is *Einsteins hoedje*^[6] een zeer goede informatiebron. En dat vele wiskundeminnaars bereid zijn hierbij te helpen, bleek op het recente MathFest^[7] te Brugge, waar zowaar het eerste wereldrecord voor deze aperiodieke betegeling werd gevestigd: 6250 tegeltjes, onder goede begeleiding van een vijfkoppig team gelegd door heel wat vrijwilligers. Kan het mooier?



figuur 18 Het eerste wereldrecord met 6250 tegeltjes, gevestigd te Brugge op 17 september 2023. Wat een MathFest! (foto: Jens Bossaert)

De auteur dankt Karel Dekimpe en Stefaan Vaes voor hun kritische lezing en waardevolle suggesties. Zie een online lesopname van Stefaan Vaes over vlakke betegelingen.^[8]

Noten

- [1] Zie: <https://www.imaginarymaths.be>
- [2] Illustratieverantwoording: alle beeldmateriaal met betrekking tot historische figuren is dankbaar ontleend aan de MacTutor website, die voor wat betreft de postzegelweergaves samenwerkt met de collectie van Jeff Miller. Zie: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>
- [3] Penrose, R. (1979). Pentaplexity. A Class of Non-Periodic Tilings of the Plane. *The Mathematical Intelligencer*, vol. 2, pp. 32-37.
- [4] Lu, P.J., Steinhardt, P.J. (2007). Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture. *Science*, vol 315, pp. 1106-1110.
- [5] Smith, D., Myers, J.S., Kaplan, C.S., Goodman-Strauss, C. (2023). An aperiodic monotile. <https://arxiv.org/abs/2303.10798>
- [6] zie www.bollebus.be
- [7] Een initiatief van Platform Wiskunde Vlaanderen, zie <https://platformwiskunde.be/mathfest-2024/>
- [8] https://kuleuven.mediaspace.kaltura.com/media/Wiskundetoernooi+-+Lezing+Einstein+-+Puzzelen+met+een+stukje+-+Stefaan+Vaes/1_1d7r53bt

Over de auteur

Paul Igodt is emeritus gewoon hoogleraar verbonden aan het departement wiskunde van de KU Leuven en Campus Kulak. Hij is medeoprichter en coördinator van de Vlaamse Wiskunde Olympiade en coördineerde de Vlaamse stuurgroep die de reizende tentoonstelling 'Imaginary: pracht en kracht van wiskunde' organiseerde.
E-mailadres: paul.igodt@kuleuven.be

Bernoulli Society New Researcher Award voor Rianne de Heide



Rianne de Heide. Foto: Patrick Siemons

Rianne de Heide van de Universiteit Twente ontvangt een van de drie New Researcher Awards 2025. Voor het eerst in de geschiedenis wordt de prijs toegekend aan iemand uit Nederland. De Bernoulli Society New Researcher Award erkent het werk van uitmuntende jonge onderzoekers op het gebied van wiskundige statistiek en waarschijnlijkheid. De prijs eert innovatieve en impactvolle bijdragen aan deze vakgebieden. Winnaars presenteren hun werk op het Bernoulli Society World Congress, waarmee de essentiële rol van opkomende onderzoekers in de vooruitgang van de wiskundige wetenschappen wordt benadrukt. Het onderzoek van De Heide richt zich op de grondslagen van het leren van data. Het centrale concept in haar onderzoek was de e-waarde. E-waarden maken het mogelijk om data toe te voegen aan een lopend experiment, of om duizenden hypothesen tegelijk te toetsen.

Bron: Nieuwsbrief Platform Wiskunde Nederland, Wiskunde E-brief 961

Nieuwe manier om priemgetallen te vinden

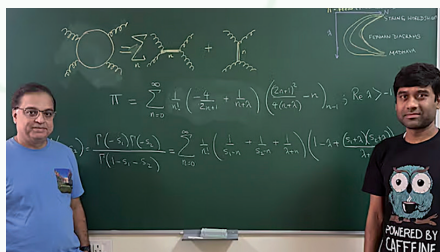
Voor het eerst in meer dan 25 jaar is er een nieuwe manier gevonden om priemgetallen te identificeren. Daarmee is bovendien een gereedschapskist ontwikkeld die tot andere doorbraken kan leiden. 'Nieuwe resultaten over priemgetallen komen niet zo vaak voor. Elke nieuwe ontwikkeling is dus de moeite waard', zegt wiskundige Benjamin Green (Universiteit van Oxford).

In 1998 toonden Henryk Iwaniec en John Friedlander aan dat er oneindig veel priemgetallen zijn van de vorm $x^2 + y^4$. Ze konden echter geen bewijs vinden voor een variant op dat idee, het vermoeden van de Gauss-

priemgetallen. Dat stelt dat er oneindig veel paren van priemgetallen zijn die gecombineerd in de vorm $x^2 + 4y^4$ ook een priemgetal opleveren. Nu heeft Green samen met collega-wiskundige Mehtaab Sawhney (Columbia-universiteit New York) dat vermoeden wel bewezen. Dit is het eerste nieuwe bewijs over het combineren van getallen tot priemgetallen sinds dat van Iwaniec en Friedlander.

Bron: newscientist.nl

Nieuwe manier om π te berekenen



Aninda Sinha (l) en Arnab Saha (Photo: IISc)

De natuurkundigen Aninda Sinha en Arnab Saha van het Indian Institute of Science hebben bij toeval een nieuwe formule gevonden om π te berekenen. Deze werd ontdekt toen de twee onderzoekers deeltjesbotsingen bestudeerden met behulp van de snaartheorie. Ze wilden de hoge-energiefysica in de kwantumtheorie bestuderen door een model te ontwikkelen met minder en preciezere parameters om te begrijpen hoe deeltjes op elkaar inwerken. Uiteindelijk creëerden ze echter ook een nieuwe reeksontwikkeling van π .

De onderzoekers zochten naar een manier om de interacties van deeltjes te beschrijven met behulp van combinaties van trillingen, massa en een groot aantal willekeurige bewegingen. Ze gebruikten een zogeheten Feynmandiagram, dat de energie beschrijft die wordt uitgewisseld tussen twee deeltjes die met elkaar in contact komen en zich verspreiden. Daarnaast keken ze naar zogeheten bètafuncties van Euler, waarmee problemen worden opgelost in verschillende gebieden van techniek en natuurkunde. Dit leverde een efficiënt model op voor de interacties tussen deeltjes en hun energie, maar ook een nieuwe formule voor π , die in veel opzichten lijkt op het 600 jaar oude model van Madhava van Sangamagrama. Voorlopig heeft de nieuwe beschrijving van π alleen een functie in de berekeningen van de twee natuurkundigen aan botsingen van deeltjes, maar ze hopen er ook meer alledaagse toepassingen voor te vinden.

Bron: wibnet.nl

De eerste vrouw in de redactie van *Euclides*: Henny Susijn (1939-2023)

Henny Susijn was van 1981 tot 1989 eindredacteur van *Euclides*. Niemand realiseerde zich dat zij de eerste vrouw in de redactie was, totdat dat feit genoemd werd op een symposium dat zij zelf maar al te graag zou hebben bezocht. Bert Zwaneveld en Martinus van Hoorn vertellen wie zij was en bedanken de familie Susijn voor de medewerking aan dit artikel.



Inleiding

Toen in juli 2023 het bericht van Henny's overlijden bekend werd, hadden we daar direct contact over. We hadden Henny allebei gekend als redactielid. En ook allebei hadden we bijzonder prettige herinneringen aan haar. Henny was een sterke collega in de redactie. Ze had een duidelijk oordeel, waarmee ieder zijn voordeel kon doen. Als een artikel niet goed was, legde zij al gauw de vinger op de zere plek. Maar vooral: ze deed enthousiast mee, ze was zeker kritisch, maar bovenal collegiaal. We hadden er niet bij stilgestaan dat Henny de eerste vrouw in de redactie was. Dat werd gezegd bij een

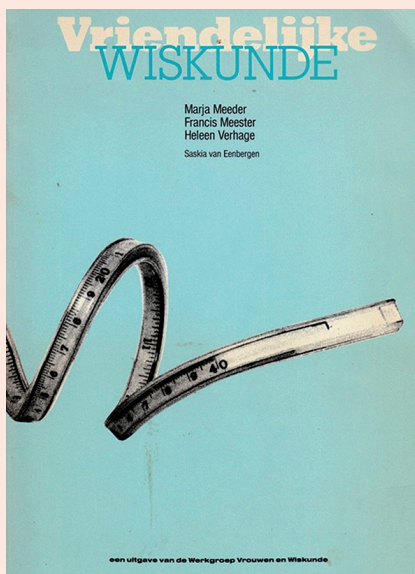


Henny Susijn-van Zaale genoot van haar pensioentijd.
Foto: familie Susijn

presentatie tijdens het symposium van de Werkgroep Geschiedenis van de NVvW op 28 september 2024. En dat werd meteen de aanleiding om dit stuk te schrijven.

Passen en meten

Naast haar redacteurschap van *Euclides* was Henny Susijn vanaf 1981 meteen ook eindredacteur. De eindredacteur zorgde er destijds voor dat alle artikelen en verdere bijdragen, inclusief de illustraties, op de juiste plek in het tijdschrift kwamen. Het was altijd een kwestie van passen en meten, en dat moest toen tien keer per jaar, met elke keer veertig bladzijden. Formules mochten niet afgebroken worden, illustraties moesten nabij de bijbehorende tekst worden opgenomen, alles moest kloppen. Digitaal werken bestond nog niet, zodat het letterlijk neerkwam op knippen en plakken. Alles moest dan voor de deadline bij de drukker liggen voor verdere verwerking. Dit werk heeft Henny ruim drie jaar gedaan. Voor dit werk moest je geduld hebben, en tegelijk moest je de inhoud van de artikelen tot je nemen, je moest ze begrijpen. Dit stukje over Henny Susijn is tevens een eerbetoon aan alle eindredacteurs. Zonder hen geen *Euclides*, ook al behoort het knippen en plakken tot het verleden en wordt de lay-out door een vormgever verzorgd. Toen Henny de eindredactie had overgedragen, bleef ze in de redactie, collegiaal, kritisch, enthousiast. Ze was aanwezig zonder zich op te dringen. Naar haar werd geluisterd om wat ze naar voren bracht. In 1989 nam ze afscheid van de redactie. Zelf heeft Henny het lidmaatschap van de redactie altijd heel plezierig gevonden. Ze bleef op de hoogte, ze kon er nuttig werk doen, en ze werd er gewaardeerd. Henny was niet actief in de werkgroep Vrouwen en Wiskunde. Maar ze zag heel duidelijk het belang van versterking van de positie van vrouwen in de wiskunde,



figuur 2 Vriendelijke wiskunde

en elders. In mei 1988 noemde ze dit expliciet in haar bespreking van *Vriendelijke wiskunde* (opgenomen in *Euclides* 63-8, mei 1988).

Talent voor wiskunde

Henny had in Rotterdam gymnasium- β gedaan. Ze had een talent voor wiskunde. Een studie in Delft bleek toch niet aan de verwachtingen te voldoen, mede omdat elektrotechniek, dat nog verplicht was als je verder wilde in de wiskunde, niet haar keuze was. Switchen naar een andere studie was om financiële redenen geen optie. Henny werd toen programmeur bij Shell in Amsterdam – één van de eerste vrouwen in dit werk. Ze stopte hiermee toen ze trouwde.

De wiskunde bleef trekken en Henny begon al gauw met een studie MO wiskunde. Na een verhuizing vond ze een baan op een school voor mavo, in Drenthe. Intussen legde Henny contacten in de wiskundewereld, onder meer met Ton Kelfkens, die auteur was bij de welbekende methode *Getal & Ruimte*. Henny kon bij *Getal & Ruimte* aan de slag als eindredacteur. Zij kon ook ideeën aandragen: bij een tak aan een boom zág zij de hoek van die tak met de stam, bij de overspanning van een brug zág zij gelijkenis met een parabool. Het fascineerde Henny, en geleidelijk kreeg ze veel meer een helicopterview over de wiskunde.

Didactiek van de wiskunde

In het voorwoord van het standaardwerk van Joop van Dormolen, *Didactiek van de wiskunde* (1974), wordt Henny met ere genoemd. Zij nam samen met een collega

alle conceptteksten van Joop door, waarbij tegelijk gelet werd op de wiskunde, de didactiek van de wiskunde en het Nederlands. Henny deed dit uiterst zorgvuldig. Het contact met Joop van Dormolen bleef, en zo werd Henny ook betrokken bij de correctie van Joops proefschrift *Aandachtspunten* (1983). In het nawoord hiervan schrijft Joop: 'Henny Susijn-van Zaale en Frans Dolmans ben ik dankbaar voor [...] de nauwgezetheid waarmee ze Nederlands van mijn taal hebben willen maken en niet in het minst voor hun mentale steun waarmee ze me uit diepe putten hebben willen en kunnen trekken.' Joop had het gezien: Henny lette altijd ook op de menselijke kant.

Tot slot

Henny was toen allang gestopt met lesgeven, maar ze had wel steeds emplooi in de wereld van het wiskunde-onderwijs. Ze heeft ook aan veel leerlingen bijles gegeven. Altijd met plezier, en met mentale steun natuurlijk. Henny bleef vol belangstelling voor de wiskunde en het onderwijs. Ze bezocht geregeld het Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap, en ook andere bijeenkomsten, zoals van werkgroepen van de NVvW. Ze trof er altijd bekenden, die het op hun beurt prettig vonden haar weer te ontmoeten.

Ze heeft ook jarenlang de bijeenkomsten bezocht van *Ars et Mathesis*. Onder meer trof ze daar Frederik van der Blij, die op een bepaald moment bij haar in de buurt kwam te wonen. Henny woonde toen met haar man in Deventer, in een prachtig appartement met uitzicht over de IJssel. Henny heeft Frederik van der Blij vervolgens ook thuis bezocht. Zo was ze, de wiskunde daagde haar uit en maakte haar nieuwsgierig, maar de menselijke maat ging daar bovenuit.

Henny Susijn was kritisch, collegiaal en enthousiast. Ze heeft een zeer mooie rol gespeeld in het wiskunde-onderwijs. Wij gedenken haar met respect en waardering en we zijn dankbaar voor haar vriendschap.

Over de auteurs

Martinus van Hoorn was van 1987 – 1996 hoofdredacteur van *Euclides*. E-mailadres: mc.vanhoorn@wxs.nl

Bert Zwaneveld was van 1976 – 1983 hoofdredacteur van *Euclides*. E-mailadres: bertzwaneveld46@gmail.com

Vijf vragen aan....

Klaske Blom

Ter gelegenheid van het honderdjarig bestaan hebben we de voorgaande hoofdredacteurs benaderd om stil te staan bij hun hoofdredacteurschap en wat er speelde in het wiskundeonderwijs in die periode. Ze konden kiezen tussen een geheel eigen verhaal of een speciale versie van onze rubriek Vijf vragen aan. In deze *Euclides* Klaske Blom, ze was hoofdredacteur van september 2008 tot juni 2011.



figuur 1 Klaskes laatste *Euclides* als hoofdredacteur

Inleiding

100 jaar *Euclides*! Mijn felicitatie aan alle lezers, aan alle schrijvers en aan alle redactieleden van de afgelopen eeuw. Alleen dankzij dit grote genootschap van betrokkenen bereikte *Euclides* dit jubileum en voorziet het blad in een inmiddels steeds zeldzamer wordende behoefte aan 'interessants op papier en in de hand'. Zoiets als dat potlood en kladje... dat ons wiskundigen ondanks alle digitaal vernuft zo dierbaar blijft.

Als één van de voormalig hoofdredacteurs kreeg ik een paar leuke vragen voorgelegd van de redactie waarmee ik even terug kon duiken in deze boeiende tijd.



1 Welke mooie of grappige herinnering aan je *Euclides*-tijd schiet je spontaan te binnen?

Dick Klingens komt als eerste binnen natuurlijk, de onmisbare eindredacteur voor veel hoofdredacteurs; een man met stevige opvattingen, een warm hart en een enorme voorliefde voor meetkunde. Daarover schreef hij prachtige artikelen en ik keurde ze regelmatig af, omdat de overdaad te groot was. Het weerhield hem van niets: niet van mopperen, niet van schrijven en vooral niet van me loyaal steunen.



2 Welk (wiskundig) boek, film of kunstwerk zou iedere *Euclides*-lezer moeten lezen of zien?

Ik heb kort geleden in 3 havo met de leerlingen gekeken naar 21, een film uit 2008, gebaseerd op het waar-gebeurde verhaal van een blackjackteam van het MIT. Het is geen ontroerende film zoals bijvoorbeeld 'A beautiful



figuur 2

mind', maar gewoon leuk en vooral een goede aanleiding om met leerlingen in gesprek te gaan over kansberekening, over casino's, de droom van het grote geld en zo de wiskunde te koppelen aan grote maatschappelijke thema's. Iets waar ik eerlijk gezegd heel zelden de tijd voor neem en me ook zelden lukt.



3 Wat is het vreemdste artikel dat je in jouw tijd toegestuurd gekregen hebt?

Dat zou iedereen graag weten, dat snap ik, maar helaas ... het is een ongeplaatst stuk, dus daarover zwijg ik. Wel vond ik bij het terugbladeren in mijn archief een mailtje van mezelf aan Marja Bos - mijn voorgangster - over mijn aanvankelijke worsteling met het afwijzen van ingezonden stukken. Misschien leuk voor lezers om te weten hoe dat achter de schermen ging. Ik schreef: '..... De tweede versie vond ik nog niet goed genoeg om naar referenten te sturen en dus heb ik eerst zelf suggesties ter verbetering gedaan. Daarna kwam de derde versie die qua opzet en structuur sterk verbeterd was, maar inhoudelijk nog te weinig concreet in mijn ogen; toch doorgestuurd naar twee redactieleden die commentaar in dezelfde lijn teruggaven. Weer een commentaar gestuurd met het verzoek om het nog concreter te maken en zelfs een voorstel gedaan tot een eventueel alternatief voor versie 4, in de meest voorzichtige bewoordingen. Waar ligt de grens? Wanneer geef ik op met denken dat-het-beter-kan? Wanneer moet ik toch publiceren omdat er al zoveel energie in gestoken is? Poehpoeh... het kost wat hoofdbreken, maar blijft de moeite waard. Zoveel verrassend leuke contacten, email-wisselingen en inzending, ik heb er veel plezier in.'



4 Van welke wiskunde geniet je nu nog het meest?

Dat was, is en blijft vermoedelijk de vlakke meetkunde!



5 Welk advies zou je de hoofdredacteurs voor de komende eeuw mee willen geven?

Blijf je hard maken voor de papieren versie van *Euclides*.

Over de auteur

Klaske Blom was hoofdredacteur van *Euclides* van september 2008 tot juni 2011. Nu is ze werkzaam als wiskundedocente vmbo en havo bij het Heliomare College, school voor vso in Heemskerk, e-mailadres: klaskeblom@gmail.com

Rekendictee en pensioen Marjolein Kool

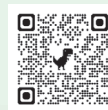
In 2004 organiseerde Marjolein Kool voor de eerste keer het Bartjens Rekendictee. De voorlopig laatste versie van dit landelijke rekenfeest vond in 2022 plaats. Toen bleef het even stil, maar er is goed nieuws voor alle rekenliefhebbers van Nederland: Marjolein gaat het nog één keer doen. Op 28 februari a.s. bereikte ze de pensioengerechtigde leeftijd. Ze blijft nog een dag per week werkzaam bij de Hogeschool Utrecht, maar wil deze mijlpaal wel vieren. Daarom organiseert ze op maandag 12 mei 2025 om 15.30 uur een nieuwe versie van het Bartjens Rekendictee: een rekenwedstrijd met een knipoog naar de actualiteit, bestemd voor iedereen van jong tot oud, van prof tot amateur. Deelname is gratis.

We spelen in drie categorieën:

- basisschoolleerkrachten, schoolopleiders, pabostudenten
- leraren, studenten en opleiders in rekenen-wiskunde of andere exacte vakken
- overige deelnemers

Aanmelden

Geef je per omgaande op, zodat we tijdig weten of cursus- en vergadercentrum Domstad in Utrecht groot genoeg is voor deze happening. Durf je de strijd niet aan, maar wil je dit rekenfeest wel meevieren? Meld je dan aan voor de publieke tribune. Deelnemers en toeschouwers kunnen zich aanmelden via de website www.rekendictee.nl of de QR-code.



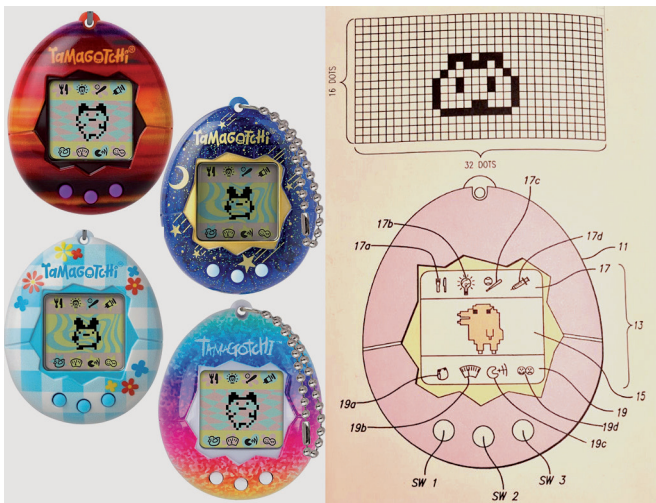
Voorproefje

Dick Schoof loopt de halve marathon van afgerond 21 km lengte. Hij loopt eerst met een gemiddelde snelheid van 14 km/uur. Dan komt de man met de hamer en wordt zijn snelheid gemiddeld 11 km/uur. De tocht na de man met de hamer duurde twee keer zo lang als de tocht daarvoor. Hoeveel minuten heeft hij in totaal over zijn halve marathon gedaan?

Uitdagende problemen

Ei, ei, ei

Met de paasdagen in zicht is het goed om stil te staan bij het ei. En helemaal mooi om vóór de paasvakantie met je leerlingen een ‘toverei’ te maken zodat je die dagen al ‘tangrammend’ door kunt brengen.



figuur 1

Wat is er zo interessant aan een ei? Het kan zijn dat je ooit in het bezit was van een speeltje met de naam Tamagotchi, zie figuur 1. Dit speeltje zorgde voor een rage aan het eind van de vorige eeuw. Tamago is het Japanse woord voor ei. De ‘ch’ is afkomstig van het Engelse woord ‘watch’ dat, zoals je waarschijnlijk weet, klok betekent. Het speeltje was een kunstmatige levensvorm in een computertje zo groot als een ei. Het was een virtueel huisdier voor kinderen en volwassenen. Je kon het verzorgen, vriendschap laten sluiten en het huisdier kon doodgaan. De software zat in een eivorm en had een interface met drie knopjes en een lcd-scherm. Op dat scherm verscheen een wezentje, eerst in de vorm van een ei dat zich verder ontwikkelde, afhankelijk van de hoeveelheid aandacht dat het kreeg. Vormen? Misschien ben je ook in het bezit van het prachtige boek *Spelen met puzzels*^[1] uit 1978. Er staan o.a. diverse lucifer – en legpuzzels in.

Constructie toverei

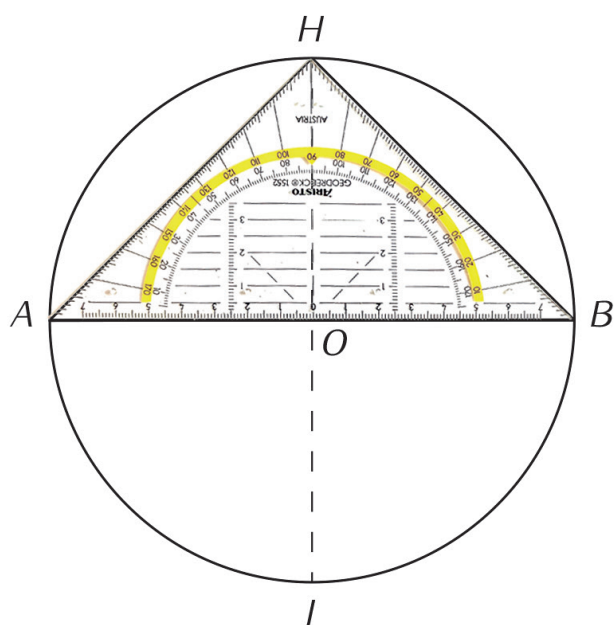
Een ietwat flauwe puzzel, en die staat niet in dat boek, is deze: ‘kippen leggen eieren, maar probeer eens met zestien lucifers een ei te leggen.’ We geven meteen de oplossing, zie figuur 2.



figuur 2

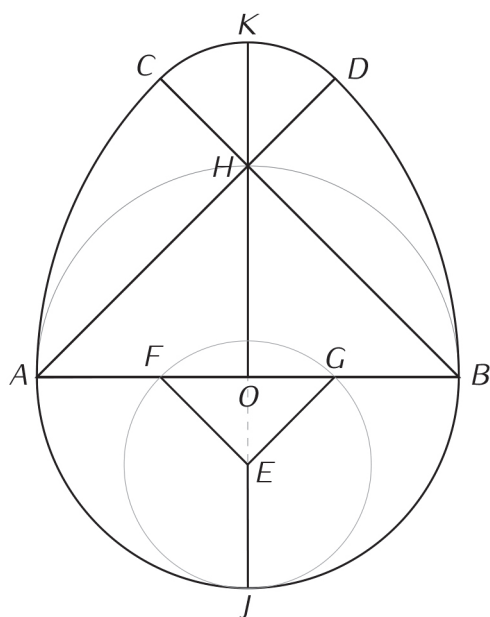
Waarschijnlijk had je gedacht om de vorm van een ei te leggen. En om die vorm gaat het. De legpuzzel *Tangram* ken je vast. Het bestaat uit zeven delen. We maken nu een legpuzzel met de naam *Toverei*, uit dat boek *Spelen met puzzels*, die uit negen stukjes bestaat. Voor het maken van een toverei heb je een blanco A-viertje, een geodriehoek en een passer nodig. Leg de geodriehoek, met de top naar boven gericht, ongeveer op het midden van het A-viertje. Teken met je passer de omgeschreven cirkel van de geodriehoek (stelling van Thales) en teken ook het profiel van de driehoek. Zet er letters bij zoals dat gedaan is in figuur 3.

De driehoek noemen we $\triangle ABH$ waarbij AB de middellijn van de omgeschreven cirkel is. Het onderste punt van deze cirkel noemen we punt J . Verleng nu lijnstukken AH en BH met een stuk, zodat de nieuwe lijnstukken even lang zijn als middellijn AB . De eindpunten noemen we achtereenvolgens D en C . Er geldt nu dat $AD = BC = AB$. Teken boog BD waarbij punt A het bijbehorende middelpunt is. Teken boog AC waarbij punt B het bijbehorende middelpunt is. De bijbehorende stralen zijn dus gelijk aan AB . Teken boog CD waarbij



figuur 3

punt H het bijbehorende middelpunt is en HD de straal. Teken punt E op lijnstuk JH zodat $JE = HD$. Teken tot slot de cirkel met E als middelpunt en HD als straal. De snijpunten van deze cirkel met middellijn AB noemen we achtereenvolgens F en G . Het toverei bestaat uit negen stukjes, zie de volledige constructie in figuur 4. In figuur 5 zie je een geschilderde houtuitvoering, ook leuk om zelf te maken.



figuur 4



figuur 5

Je kunt met deze legpuzzel heel verschillende vogels maken. Om er even in te komen, de volgende opdracht: maak met de negen stukjes van het toverei de vogel die in figuur 6 is afgebeeld.



figuur 6

Maak vervolgens de constructie van het toverei ook in GeoGebra. Neem voor de lengte van middellijn AB 10 cm. Bereken nu exact de omtrek van het toverei. Voor leerlingen uit 3 havo of 3 vwo moet dat goed te doen zijn. Voor vmbo misschien iets voor de vierde klas? De exacte uitkomst van de omtrek van de eivorm, ga maar na, is $15\pi - 2,5\sqrt{2}\cdot\pi \approx 36$ cm.

>

Vrouw met pofmouwen

Met de negen stukjes van legpuzzel toverei kunnen we niet alleen vogels leggen.



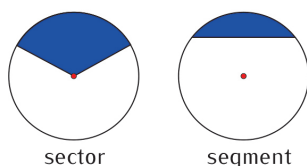
figuur 7

In figuur 7 zien we de legpuzzel van een vrouw met pofmouwen en grote voeten. Ga er weer van uit dat middellijn AB 10 cm lang is. Wat willen we van die vrouw weten? Haar lengte? Dat betekent dat er goed gekeken moet worden naar de afmetingen van de verschillende stukjes maar ook naar figuur 4. De exacte lengte is $15 + 5\sqrt{2}$. Afgerond op één decimaal, levert het een lengte op van 22,1 cm. Controleer maar!

Veronderstel dat de vrouw een lengte heeft van 180 cm. Welke lengte moet je dan nemen voor middellijn AB als je de vrouw op ware grootte wilt verkrijgen? Het antwoord is $AB \approx 81,6$ cm. Ga maar weer na. In 4 havo en 4 vwo zullen ze deze opdracht wel aankunnen.

Berekening (exacte) oppervlakte eivorm

Het is handig bij de berekening om even aandacht te schenken aan de begrippen sector en segment. Zowel voor de cirkel als voor de bol, zie figuur 8. Een bolsegment noemen we ook wel een bolkapje.



figuur 8

In figuur 4 zijn te zien een grote halve cirkel met straal 5 en een gelijkbenige rechthoekige driehoek met een schuine zijde van lengte 10. Boven in het ei is een cirkel-sector te zien met straal $10 - 5\sqrt{2}$ en een hoek van 90° . En verder zijn er nog twee congruente vlakdelen.

$$\text{Opp(halve cirkel } A/B) = 12,5\pi$$

$$\text{Opp}(\triangle ABH) = \frac{1}{2}(5\sqrt{2})^2 = 25$$

$$\text{Opp(sector CHD)} =$$

$$\frac{1}{4}\pi(10 - 5\sqrt{2})^2 = \frac{1}{4}\pi(150 - 100\sqrt{2})$$

$$\text{Totale oppervlakte overige twee vlakdelen} =$$

$$2\left(\frac{1}{8}\pi \cdot 100 - 25\right) = 25\pi - 50$$

$$\text{Opp(ei)} =$$

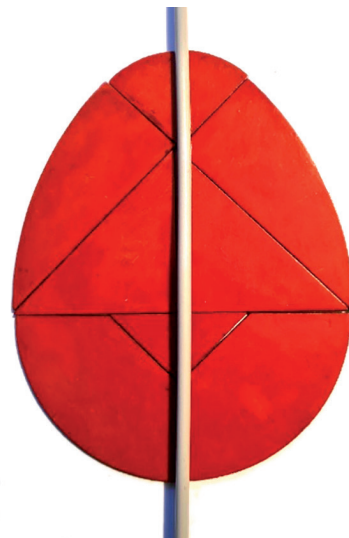
$$12,5\pi + 25 + \frac{1}{4}\pi(150 - 100\sqrt{2}) + 25\pi - 50 =$$

$$75\pi - 25 - 25\sqrt{2}\pi = (75 - 25\sqrt{2})\pi - 25 \approx 99,5.$$

Afgerond $99,5 \text{ cm}^2$. Vergeet niet om met leerlingen andere aanpakken te bespreken. Het middengedeelte kun je ook zien als twee overlappende congruente sectoren die $\triangle ABH$ gemeenschappelijk hebben. Van de oppervlakte van een kwartcirkel met straal 10 trek je dan de oppervlakte af van $\triangle ABH$.

Berekening (exacte)inhoud (toverei)

Om een inhoud uit te rekenen kunnen we kijken naar het profiel en een mogelijke symmetrieas, zie figuur 9. We wentelen het profiel om de symmetrieas. We kunnen dat nabootsen door het profiel te draaien om de as. Maar gaat dit lukken zonder integraalrekening?



figuur 9

We willen ook nagaan hoe goed dit eimodel de werkelijkheid benadert. Zal het oplossen van dit probleem voor de leerlingen appeltje-eitje zijn, of zal er flink gerekend moeten worden? We gaan het onderzoeken.

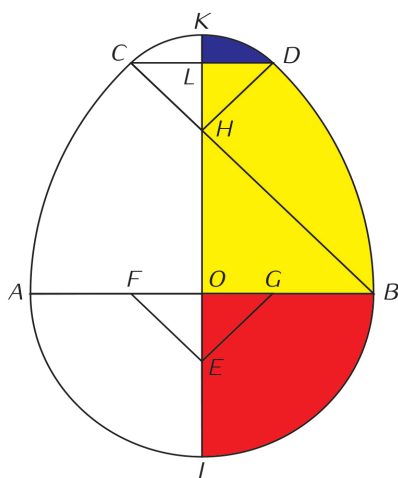
Een gemiddeld ei weegt ongeveer 66 gram, is 6 cm lang en 4,4 cm breed. Om de berekening wat makkelijker te maken nemen we voor OB de lengte 1. De breedte van het ei is dan 2 en de lengte is JK .

$$JK = 2 + HD = 2 + (2 - \sqrt{2}) = 4 - \sqrt{2}.$$

Om te komen tot een ei van lengte 6 cm gebruiken we de vermenigvuldigingsfactor $\frac{6}{4-\sqrt{2}}$.

De breedte van een gemiddeld ei zou dan 4,64 cm zijn. Om de inhoud van een gemiddeld ei uit te rekenen, rekenen we eerst de inhoud uit van ons eimodel met breedte 2. Vervolgens vermenigvuldigen we die inhoud met $(\frac{6}{4-\sqrt{2}})^3$.

Het eiprofiel is symmetrisch in de lijn KJ . Het vlakdeel rechts van lijn KJ verdelen we in drie stukken, zie figuur 10.



figuur 10

Stap 1

We beschouwen eerst de roodgekleurde sector OJB . Dit vlakdeel wentelen we om de symmetrieas en dat levert een halve bol op. De inhoud van deze halve bol is $\frac{2}{3}\pi$.

Stap 2

Vervolgens wentelen we het geelgekleurde vlakdeel $LOBD$ om de symmetrieas. We hebben nu een assenstelsel nodig en een formule voor kromme BD . Voor de x -as nemen we lijn AB en voor de y -as lijn KJ . Boog BD is deel van een cirkel met punt A als middelpunt en $AD = 2$ als straal. De formule van deze cirkel is $(x+1)^2 + y^2 = 4$. Het woord omwentelingslichaam korten we nu af met OW.

$$\text{Inhoud}(\text{OW} - \text{LOBD}) = \int_0^{OL} \pi \cdot x^2 dy. OL =$$

$$OH + HL = 1 + \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

$$x^2 \text{ drukken we uit in } y: (x+1)^2 = 4-y^2 \rightarrow x = \sqrt{4-y^2} - 1$$

$$x^2 = 4-y^2 - 2\sqrt{4-y^2} + 1 = (5-y^2) - 2\sqrt{4-y^2}$$

$$\text{Inhoud}(\text{OW} - \text{LOBD}) =$$

$$\int_0^{OL} \pi \cdot x^2 dy = \pi \int_0^{\sqrt{2}} 5-y^2 dy - 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} 4-y^2 dy =$$

$$\pi \left(\left[5y - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^{\sqrt{2}} - 2 \left(\frac{1}{2}\pi + 1 \right) \right) =$$

$$\pi \left(\frac{13}{3}\sqrt{2} - 2 - \pi \right)$$

In het volgende Intermezzo leggen we uit dat

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-y^2} dy = \frac{1}{2}\pi + 1.$$

Intermezzo

Bij de vergelijking $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-y^2} dy = \frac{1}{2}\pi + 1$ vervangen we de

variabele y door de variabele x . We gaan uitrekenen de

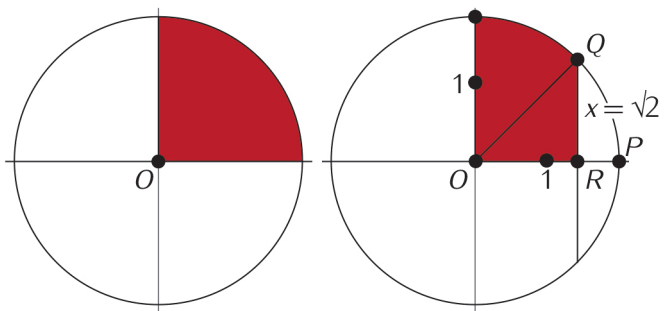
$$\text{integraal } \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

Het is verleidelijk om je te concentreren op het vinden van de primitieve van de integrand $y = \sqrt{4-x^2}$. Dat kan wel met substitutie van $x = \sin(t)$ maar dat gaan we niet doen. We proberen door de integraal heen te kijken en een beeld te vormen.

Kijken we naar de integraal $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ dan kunnen we

denken aan de oppervlakte van een kwartcirkel. Het gaat om de eenheidscirkel: $x^2 + y^2 = 1$. De oppervlakte is

$$\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{1}{4}\pi.$$



figuur 11

Bij de integrand $y = \sqrt{4-x^2}$ hoort de cirkel $x^2 + y^2 = 4$.
Daarin kunnen we een voorstelling maken van

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx,$$

zie het roodgekleurde vlakdeel. De punten

P , Q en R hebben de coördinaten $(2, 0)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ en $(\sqrt{2}, 0)$.

Merk op dat $OR = \sqrt{2} = RQ$. $\triangle ORQ$ is een gelijkbenige rechthoekige driehoek.

$$\text{Opp}(\triangle ORQ) = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1.$$

$$\angle QOP = 45^\circ$$

$$\text{Dus Opp(overgebleven rode deel)} = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot 4 = \frac{1}{2} \pi.$$

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{2} \pi + 1.$$

We kunnen tot een generalisatie komen van het type

$$\text{integralen } \int_0^b \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

waarbij $0 \leq b \leq a$. We kijken dan naar de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$.

Stap 3

Tot slot wentelen we het blauwgekleurde halve segment KLD om de symmetrieas, zie weer figuur 10.

$$\text{Inhoud(OW - KLD)} = \int_{y_L}^{y_K} \pi \cdot x^2 dy.$$

Boog KD is deel van de cirkel met punt H als middelpunt en met straal $HD = 2 - \sqrt{2}$.

De vergelijking van deze cirkel is $x^2 + (y-1)^2 = (2-\sqrt{2})^2 = 6 - 4\sqrt{2}$.

Merk op dat $OK = OH + HK = 1 + 2 - \sqrt{3} = 3 - \sqrt{2}$.

Eerder is opgemerkt dat $y_L = OL = \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Inhoud(OW - KLD)} &= \int_{y_L}^{y_K} \pi \cdot x^2 dy = \\ &= \pi \int_{\sqrt{2}}^{3-\sqrt{2}} (6 - 4\sqrt{2} - (y-1)^2) dy = \end{aligned}$$

$$\pi \left[(6 - 4\sqrt{2})y - \frac{1}{3}(y-1)^3 \right]_{\sqrt{2}}^{3-\sqrt{2}} =$$

$$\pi \left(25 - \frac{53}{3}\sqrt{2} \right) \approx 0,0489$$

Kan de berekening ook zonder integraal? Jazeker. Het kopje van een ei is bij ons toverei een bolkapje. Daar hebben we de volgende formule voor:

$$\text{Inhoud} = \frac{1}{3} \pi \cdot h^2 (3R - h)$$

waarbij R de straal van de cirkels waarbij boog CKD deel van is en h de hoogte van het kapje. $R = 2 - \sqrt{2}$ en $h = 3 - 2\sqrt{2}$. En invullen maar. Wel een beetje flauw omdat de afleiding van de formule met integraalrekening gaat. Ga dat maar na.

De totale inhoud van het eimodel met $OB = 1$ is:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3} \pi + \pi \left(\frac{13}{3} \sqrt{2} - 2 - \pi \right) + \pi \left(25 - \frac{53}{3} \sqrt{2} \right) = \\ &23 \frac{2}{3} \pi - \frac{40}{3} \sqrt{2} \pi - \pi^2 \approx 5,243 \end{aligned}$$

Nemen we een gemiddeld ei, dan is de inhoud

$$\left(23 \frac{2}{3} \pi - \frac{40}{3} \sqrt{2} \pi - \pi^2 \right) \times \left(\frac{3}{7} (4 + \sqrt{2}) \right)^3 \approx 65,5 \text{ cm}^3,$$

uitgaande van dit eimodel.

Een vraag aan de leerlingen kan nog zijn of het profiel van het toverei een vloeiende kromme is. Is bij het checken de afgeleide hierbij nodig?

Meer lezen?

Zie de *Nieuwe Wiskrant* van 2004. Algebra en meetkunde kunnen tot leven gebracht worden met de nieuwste versie van Cabri via digitale foto's. André Heck laat zien hoe wiskundig onderzoek aan een ei er dan uit kan zien. Met name de vraag 'Wat is het volume en de oppervlakte van een gegeven kippenei?' staat centraal.

Noot

[1] Delft, P. van & Botermans, J. (1978). *Spelen met puzzels*. De Bezige Bij.

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde. Hij is sinds 2014 met pensioen.
E-mailadres: jacques.jansen@wx.nl.

Baruch Spinoza (1632-1677)

De afbeelding van figuur 1 stond in mijn krant bij een artikel met de titel 'Het publieke debat wordt vaak gedomineerd door emoties, wat meer Spinoza is een prima medicijn'.



figuur 1 Nicolaas Dings, Spinoza, 2008

Het standbeeld zal dan ongetwijfeld Spinoza zijn. Ik had het ook wel eens tijdens mijn omzwervingen in Amsterdam gezien, ergens vlakbij het Waterlooplein. In de Joodse buurt, want Spinoza was van Joodse afkomst. Wat mij trof was dat naast het standbeeld een icoesaëder is geplaatst, een regelmatig twintigvlak. Twintig gelijkzijdige driehoeken vormen een lichaam. In totaal $20 \times 3 \div 5 = 12$ hoekpunten en $20 \times 3 \div 2 = 30$ ribben. Wat zal de beeldhouwer hiermee bedoelen?

Bij het standbeeld is de volgende tekst te lezen: 'Spinoza is op deze plaats als zoon van Joodse vluchtelingen geboren. Zijn belangrijkste werk is de *Ethica*. Daarin verwerpt hij alle traditionele voorstellingen van God en stelt hij dat de ogenschijnlijk chaotische natuur is onderworpen aan onveranderlijke natuurwetten, die ook gelden voor mens en maatschappij. Met behulp van de wiskunde kunnen we die wetten kennen en door ons leven daarmee in overeenstemming te brengen worden wij gelukkig.'

Spinoza's denkbeelden over de vrijheid van meningsuiting, tolerantie en democratie zijn nog steeds actueel.

Het doel van de staat is de vrijheid vat zijn politieke filosofie samen.'

Nicolaas Dings, de maker van het beeld, licht het als volgt toe: 'Het denken van de filosoof wordt verbeeld door een stenen icoesaëder, een wiskundige vorm bestaande uit een ruimtelijke aaneenschakeling van twintig driehoekige vlakken, twaalf hoekpunten en dertig ribben, gemaakt van geslepen graniet en daarmee verwijzend naar zijn beroep: lenzenslijper.' De icoesaëder wijst dus op het beroep van Spinoza.

Maar ik las ook nog een andere verklaring, die past in het licht van de tekst op de sokkel: *Het doel van de staat is de vrijheid*. De icoesaëder is dan een symbool voor het denken van de filosoof: het universum als model, geslepen door de menselijke geest. Dit komt duidelijk niet overeen met de betekenis die Plato aan de regelmatige lichamen gaf. Voor Plato lag in de vijf regelmatige veelvlakken de essentie van de gehele natuur besloten. Hij bracht ze in verband met de vier elementen: vuur, lucht, water en aarde. De tetraëder stond voor vuur vanwege de scherpe punten. De icoesaëder stond voor water vanwege de stompe (= gladde) hoeken. Lucht zit tussen water en vuur, daarom is lucht de octaëder die immers tussen de tetraëder (drie driehoeken in een hoekpunt) en de icoesaëder (vijf driehoeken in een hoekpunt) in zit. Ten slotte stond de kubus voor aarde, omdat hij stevig als een berg is. De overblijvende dodecaëder stond voor het hemelgewelf, omdat hij er het meest bolvormig uitziet. Overigens is de sokkel ellipsvormig. Dit symboliseert de banen van de planeten en dit verwijst naar zijn poging het universum te begrijpen.

Of je het wel of niet eens bent met de denkbeelden van Spinoza, zo'n standbeeld werkt toch wel weer inspirerend en iedere voorbijganger zou op zijn minst de mooie vormen van de icoesaëder en de ellips moeten waarderen.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde in ruste.

E-mailadres: a.b.vanderroest@ziggo.nl

30 jaar Wereldwiskunde Fonds

Niet alleen de NVvW viert feest, ook het Wereldwiskunde Fonds heeft een jubileum bereikt. Geen 100 jaar, maar wel 30. In menig artikel zou achter die 30 een uitroepetekens staan, maar in een wiskunde-vakblad geeft dat veel verwarring. Toch zijn we trots op die leeftijd en is een uitroepetekens wel op zijn plaats.

Schoolboeken

In de afgelopen 30 jaar hebben we heel wat mooie projecten kunnen financieren. Meestal gaat het om schoolboeken. Helaas is het nog altijd zo dat er landen zijn waar men zich in het onderwijs vreselijk moet behelpen: er zijn leerlingen, er is een leslokaal, er is een docent, er is een schoolbord met krijtjes, en daar blijft het bij. Wanneer de docenten via het WwF over leerboeken kunnen beschikken, ontstaat er ineens een omgeving waarin zowel de docent als de kinderen enorm gestimuleerd worden om zich de wiskunde eigen te maken. In plaats van dat de docent de theorie uit een boek op het bord schrijft, de leerlingen dat overschrijven, komt er tijd om zelf te oefenen en te begrijpen. Belangrijker is misschien nog wel dat ze in zichzelf gaan geloven. Hoop op een goede toekomst begint met onderwijs.



Financiering

Er staan regelmatig stukken in *Euclides* over projecten van het WwF, maar het is goed om nog eens te benadrukken dat we het niet alleen kunnen doen: Al die

leden die een vrijwillige opslag op hun lidmaatschap van de Vereniging betalen, mensen die bij de veilingen bieden op de boeken, mensen die hun boeken gratis aan ons geven, collega's die bij de jaarvergadering en de Wiskundedagen die boeken dan weer kopen. Ook de ondersteuning, zowel financieel als in vrijwilligerswerk, van de NVvW maakt het mogelijk dat we dit werk nu al 30 jaar kunnen volhouden. Door het onderhouden van de veilingssite en het financieren van andere overheadkosten zorgt de Vereniging ervoor dat 100% van de binnengekomen gelden ook echt naar projecten gaat. Ook bij de projecten zelf zijn we kostenbewust: Er gaat geen geld naar reiskosten om projecten te bezoeken, of luxe projectverslagen. We kiezen voor kleinschalige projecten, en door een financiële controle, foto's en een verslag hopen we dat het geld volledig bij het wiskundeonderwijs terecht komt. Het is niet zo dat de gedoneerde boeken zelf naar de projectlanden gestuurd worden, zoals soms wordt gedacht.

Elk land heeft een eigen wiskundecurriculum, en dus zou versturen ook geen zin hebben. Verder is een flink aantal van onze boeken ongeschikt voor middelbare scholieren maar een parel voor een geïnteresseerde docent. Het gaat dus om de opbrengst van de verkoop ervan. Een andere kant van de verkoop via boekenstands en veilingen is de recycling van de wiskunde-gerelateerde boeken. Zelfs in deze digitale tijden is het goed om te zien dat ook jonge collega's nog steeds blij kunnen worden van een boek. Het zijn maar hele kleine druppels, die projecten, en zeker op wereldschaal, maar de trotse blik van een kind met een écht nieuw wiskundeboek, dat is zo mooi om te zien en geeft hoop voor de toekomst.

Over de auteur

Monica was wiskundeleraar in Zambia, Botswana en Nederland en medewerker bij de werkgroep Wereldwiskunde Fonds. E-mailadres: mwoldinga@gmail.com
Website WwF: www.wereldwiskundefonds.nl

Driehoeken

De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor leerlingen van havo en vwo. Alle leerlingen van klas 1 t/m 5 met belangstelling voor wiskunde kunnen meedoen aan de eerste ronde. Deze wordt altijd in januari gehouden op alle deelnemende scholen. De speelse maar uitdagende opgaven testen je creativiteit en wiskundig inzicht. Meer informatie is te vinden op www.wiskundeolympiade.nl.



Inzenden oplossingen

Stuur je oplossing uiterlijk 11 april naar euclides@wiskundeolympiade.nl. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een cadeaubon van € 20,-.

Terugblik puzzel nr. 3

De vorige puzzel was een logisch raadsel waarbij bepaald moest worden hoeveel kabouters een rode hoed op hebben. Uit de uitspraken van de kabouters is door de meeste inzenders correct beredeneerd dat kabouters B en C beiden een rode muts op hebben en dat de andere mutsen niet rood zijn. Door meerdere inzenders werd bovendien opgemerkt dat slechts een deel van de opmerking van kabouter B nodig was om dit te bepalen.

Met dank aan oud-olympiadedeelnemers Aimée Jacobs en Kati Overbeeke voor het nakijken van de inzendingen.

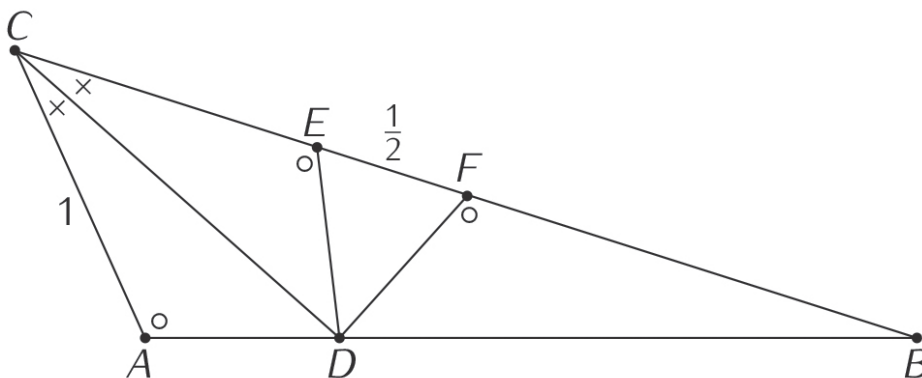
De juiste oplossing (inclusief toelichting) is te vinden op de website, samen met de namen van de 11 inzenders die deze oplossing gevonden hadden. De cadeaubon van deze editie gaat naar Lars Hoogeven.



vakbladeuclides.nl/1005olympiadepuzzel

Laat $\triangle ABC$ een driehoek zijn met een stompe hoek bij A . De bissectrice van hoek C snijdt de overstaande zijde AB in het punt D . Laat E en F de schuine projecties van D op BC zijn onder diezelfde stompe hoek, en wel zo dat C , E , F en B in die volgorde op een lijn liggen; zie onderstaande figuur. Er geldt dus dat $\angle DEC = \angle DFB = \angle CAB$. Er is verder gegeven dat $|AC| = 1$, $|EF| = \frac{1}{2}$ en $|BD| = 3 \cdot |AD|$.

Bereken $|AB|$.



Deadline Puzzel uit Euclides 100-4

In *Euclides* 100-4 staat op p. 45 de puzzel: Puzzelen met het getal 100. De deadline voor het opsturen van de oplossingen stond er helaas niet bij vermeld, maar is woensdag 26 maart. Oplossingen kun je sturen naar: Lieke_de_rooij@hotmail.com. Onder inzenders met de juiste of beste oplossingen wordt een boekenbon van 20 euro verloot.

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Hugo Duivesteijn, voorzitter
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck
Constantijn Tilanus

Inzenden bijdragen

Tom Goris,
Molenbochtplein 38, 5014 EJ Tilburg
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailing-services.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvww.nl

Voorzitter

Margot Rijnierse
E-mail: m.rijnierse@nvvw.nl

Secretaris

Els Franken
E-mail: e.franken@nvvw.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06 21 50 96 79 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Juridisch Centrum
E-mail: nvww@juridischcentrum.com
Vermeld bij je contact je lidnummer en telefoonnummer.

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt met ingang van 1 augustus 2023

- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 72,50
- leden, maar dan zonder Euclides: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 75,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen Euclides niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 90,00
Instituten en scholen: € 160,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal,
Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2025

LANDELIJK

Do
20/03
Ma
31/03

De scholen kiezen zelf een dag.

Op de scholen: W4Kangoeroewedstrijd, wereldwijde wiskundewedstrijd

Organisatie: Stichting Wiskunde Kangoeroe

NOORDWIJKERHOUT

Vr
04/04
Za
05/04

Nationale Wiskundedagen

Organisatie: Freudenthalinstituut

AMSTERDAM

Vr
19/09
Za
20/09

Nazomercursus 2025

Thema: Reële toepassingen van complexe getallen

Organisatie: Platform Wiskunde Nederland en Platform Wiskunde Vlaanderen

ANTWERPEN

Vr
26/09
Za
27/09

Nazomercursus 2025

Thema: Reële toepassingen van complexe getallen

Organisatie: Platform Wiskunde Nederland en Platform Wiskunde Vlaanderen

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook vakbladeuclides.nl

JAARGANG 100

Nr.	Verwachte verschijningsdatum	deadline
6	30 april 2025	24 februari 2025
7	18 juni 2025	20 april 2025

CASIO®



Opvolger van:
fx-82MS
fx-82EX

**Voor Nederlands
curriculum gemaakt**

Schrijf jij mee aan het wiskundeonderwijs van de toekomst?

Wil jij naast je werk als docent bijdragen aan het Nederlands wiskundeonderwijs? Wij zoeken enthousiaste auteurs voor Getal & Ruimte en Moderne Wiskunde. Heb je nog geen ervaring als auteur? Geen probleem! We leiden je op!

Wat ga je doen?

- Schrijven van hoofdstukken en proefwerken.
- Voorbereiden en beoordelen van geschreven werk.
- Ontwikkelen van ICT-materiaal.
- Meedenken over de inhoud, met oog voor de nieuwste kerndoelen en eindtermen.

Je werkt grotendeels vanuit huis, in combinatie met live vergaderingen.

Wat bieden wij?

- Een unieke kans om jezelf te ontwikkelen als auteur.
- Een inspirerende samenwerking met andere auteurs.
- De kans om jouw ervaring als docent in te zetten op landelijk niveau.
- Een passende honorering.

Interesse of meer weten?

Neem contact op met Aernout Pilot, uitgever Getal & Ruimte

✉ A.Pilot@Noordhoff.nl

of Erik Jan de Vries, uitgever Moderne Wiskunde

✉ E.deVries@Noordhoff.nl

