

EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERaar

Mathness: toepassingen van wiskunde

Een praktisch-historische blik op wiskunde

Basisvaardigheden rekenen in het voortgezet onderwijs

Origami en wiskunde

NR. 4



Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

JAARGANG 101 FEBRUARI 2025

INHOUDSOPGAVE

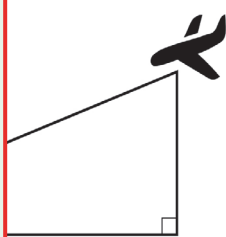
EUCLIDES JAARGANG 100 NR 4

IN DIT NUMMER

MATHNESS:
TOEPASSINGEN
VAN WISKUNDE

Jason Zijlstra
Frédérique Kool

4



EEN PRAKTISCH-HISTORISCHE BLIK
OP WISKUNDE

DEEL 2 TAAL VAN DE KOSMOS
Roel van Asselt

8

'HET IS VAN WEZENLIJK
BELANG OM ZELFVERTROUWEN
OP TE BOUWEN.'

INTERVIEW MET
VMBO-DOCENT
HILDE KALSBECK
Lambrecht Spijkerboer

12



PRACHT EN KRACHT VAN WISKUNDE
DEEL 3: NEWTON, GAUSS EN FRACTALEN

Paul Igodt

14

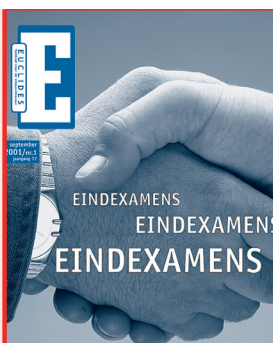
LEERLINGGEDRAG OP DE STUDIEDAG

Paul Durenkamp

18

VIJF VRAGEN AAN ...
Marja Bos

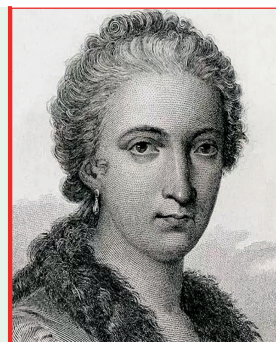
19



DE HEKS VAN AGNESI

Paul van de Veen

22



EEN VERGETEN
HOOFDREDACTEUR:
FRED GOFFREE

Martinus van Hoorn

24



AFFINITEIT MET FIBONACCI

Martin Kindt

28

WERKEN AAN BASISVAARDIGHEDEN
REKENEN IN HET VOORTGEZET
ONDERWIJS

Hugo Mulder
Lonneke Boels
Kees Hoogland

32

BOEKBESPREKING
ZEBRA 71: ORIGAMI EN WISKUNDE
Marjan Botke

35



Afbeelding voorkant: Schimmelkubussen. De kubussen zijn gemaakt door een schimmel in een kubusvormige mal te laten groeien. Elke kubus bestaat helemaal uit schimmelweefsel. Uit het onderzoekslaboratorium van prof. Han Wösten, Universiteit Utrecht I 2023. De mobiel is gemaakt door Ronald van de Waarsenburg. De schimmelkubussen zijn te zien in het Universiteitsmuseum Utrecht.

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

WIS EN WAARACHTIG

UITDAGENDE PROBLEMEN HOE VERHOUDEN WE ONS TOT VERHOUDINGEN?

Jacques Jansen

GIRAF 5: PL+SMIN-S SPELEN MET NEGATIEVE GETALLEN

Jasper Peemen

WERELDWISKUNDEFONDS IN KENIA

Dédé de Haan

PUZZELN MET HET GETAL 100

Lieke de Rooij

37

38

43

44

45



Kort vooraf

De 26^e Top2000 is voorbij en het Excel-bestand met alle edities en de nodige extra gegevens is weer te vinden op de *Euclides*-site, zodat je leerlingen

daarmee aan de slag kunnen gaan.

Zoals deze vraag, op welke posities komen de meeste titels binnen in de Top2000?

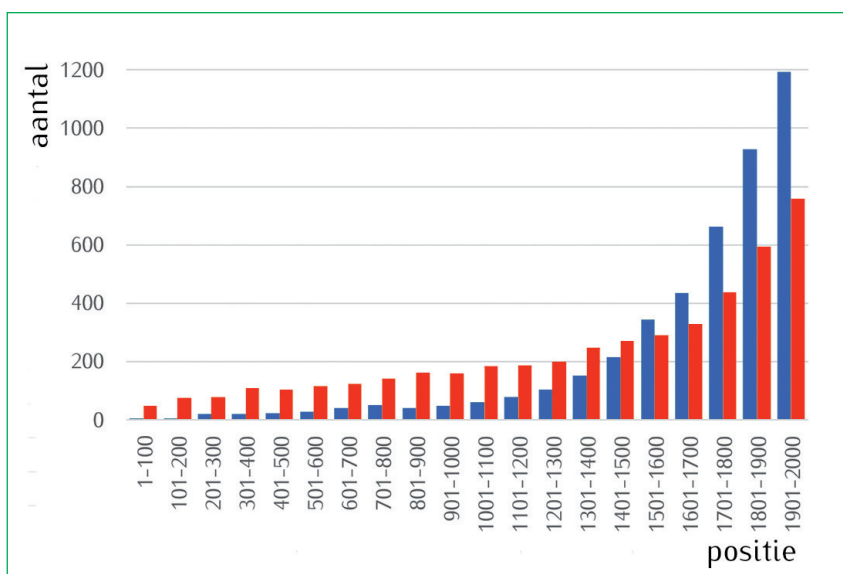
De hoogste binnenkomer ooit was Roller Coaster van Danny Vera: nieuw op 4 in 2021. De laagste binnenkomer kwam uiteraard op 2000 binnen, dat gebeurde zelfs elf keer. De laagste positie waar nog nooit een titel binnenkwam is 1670. In de figuur hiernaast zie je de verdeling weergegeven met de rode staven. De vorm van die verdeling heeft ongetwijfeld iets te maken met de verdeling van het aantal stemmen over de 2000 titels. Dat is bij benadering een Zipf-verdeling, waarbij de nummer 1 ongeveer vijftig keer zoveel stemmen krijgt als de nummer 2000.

Als er iets binnenkomt, dan moet daar plaats voor zijn: er moeten dus ook titels verdwijnen. Die verdeling ziet er heel anders uit: het komt vaker voor dat titels hoog binnenkomen dan dat ze vanaf hoge posities verdwijnen (zie de blauwe staven). De laagste positie waarvandaan nog nooit een titel verdween is 1688.

In deze *Euclides* komen voor het eerst in de jubileumjaargang oud-hoofdredacteurs aan het woord. Martinus van Hoorn schreef een bijdrage over Fred Goffree die in roerige tijden tijdelijk het hoofdredacteurschap op zich nam. En Marja Bos spreekt ons toe in de rubriek 'Vijf vragen aan'.

Veel genoegens tijdens de donkere winteravonden met deze *Euclides*!

Tom Goris

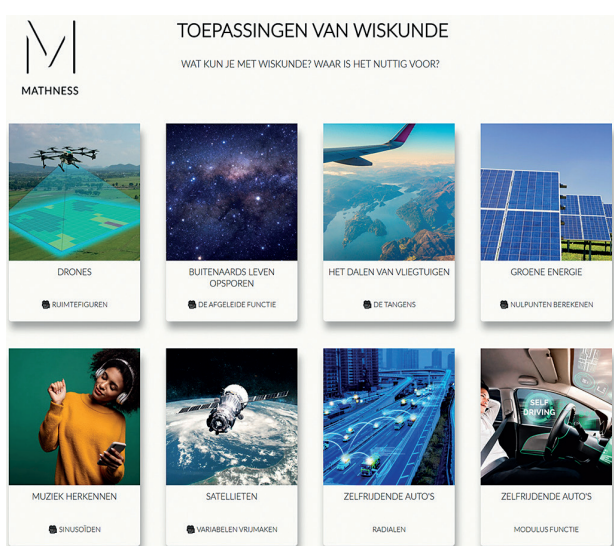


Top 2000

Mathness: toepassingen van wiskunde

Uit de lezersenquête bleek dat jullie graag toepassingen van wiskunde in *Euclides* willen zien.

Hier is een mooie toepassing van de tangens. We hebben hem 'geleend' van Mathness,^[1] de website van wiskundeleraren Jason Zijlstra en Frédérique Kool met video's van toepassingen. In de volgende *Euclides* komt een interview met Jason en Frédérique en bespreken we hoe je Mathness in de klas kunt gebruiken.



figuur 1 Mathness.nl

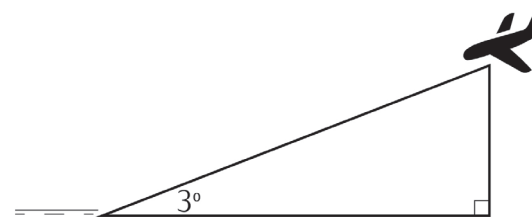
Hoe weet een piloot wanneer het vliegtuig moet dalen?

Bij een daling is een goede timing belangrijk. Te vroeg dalen zorgt ervoor dat je te lang laag vliegt, waardoor er meer geluidsoverlast ontstaat en je meer brandstof verbruikt. Dat laatste gebeurt omdat een laagvliegend vliegtuig te maken krijgt met meer luchtweerstand. Bovendien is de kans op een ongeval groter bij laag vliegen.

Te laat dalen is natuurlijk ook weer niet de bedoeling. Je krijgt dan een oncomfortabele landing met onnodige bochten en hoge snelheden. Voor een piloot is het dus belangrijk om te weten wanneer je het beste kunt beginnen met dalen.

The rule of 3

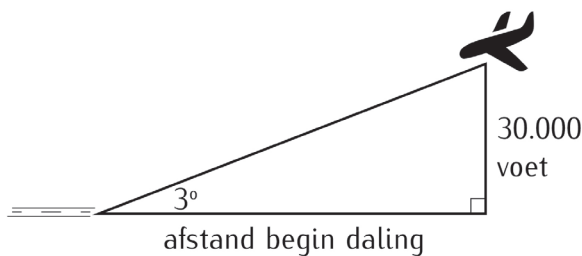
In de luchtvaart is 'the rule of 3' leidend bij een daling. Deze vuistregel geeft aan dat een vliegtuig het beste kan dalen onder een hoek van 3° . Hierdoor start de daling niet te vroeg en niet te laat, zodat alles zo efficiënt mogelijk verloopt. Om ervoor te zorgen dat het vliegtuig daalt onder deze hoek van 3° , moet de piloot dus op het juiste moment de daling inzetten. Dit wordt ook wel de 'top of descent' genoemd en is een belangrijk punt. Als de piloot te vroeg is, dan wordt de hellingshoek kleiner dan 3° en vlieg je te lang laag. Mist de piloot de 'top of descent', dan wordt de hellingshoek groter dan 3° en wordt er te laat gestart met dalen.



figuur 2 De figuur is niet op schaal. Een hoek van 3° is veel minder steil, de afstanden zijn daardoor veel groter.

Tangens

Het beginpunt van de daling kan worden berekend met behulp van de tangens! Stel dat het vliegtuig op 30.000 voet vliegt (ongeveer 9 kilometer hoog). Hiernaast zie je de situatie in een schets weergegeven. Zoals je ziet is dit een rechthoekige driehoek en moet het vliegtuig over de schuine zijde gaan dalen onder een hellingshoek van 3° . De piloot moet daarom de aanliggende zijde weten om precies op het juiste moment de daling vanaf 30.000 voet in te zetten.



figuur 3

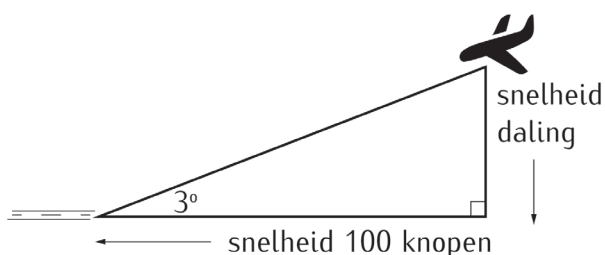
We hebben te maken met de overstaande en aanliggende zijde (TOA), dus we hebben hier de tangens voor nodig. Hieronder zie je de berekening. De piloot moet de daling dus inzetten op 572.434 voet, ofwel ongeveer 175 km vanaf het vliegveld. Vandaar dat je boven België al begint met dalen als je vanuit Portugal naar Schiphol vliegt!

$$\tan(3^\circ) = \frac{30.000}{\text{afstand begin daling}} \rightarrow$$

$$\text{afstand begin daling} = \frac{30.000}{\tan(3^\circ)} = 572.434 \text{ voet.}$$

Hoe blijft het vliegtuig op het 3°-pad?

Als de piloot weet wanneer de daling moet worden ingezet, moet de piloot ervoor zorgen dat het vliegtuig op die 3° blijft vliegen. In de lucht ziet de piloot natuurlijk geen lijn met een hellingshoek van 3° lopen. Hoe weet de piloot dan of het vliegtuig op de goede koers zit? Dit wordt gedaan met de zogeheten 'rate of descent'. Dit geeft aan hoe snel je per minuut moet dalen. Deze snelheid kun je weer met de tangens berekenen.



figuur 4

$$\tan(3^\circ) = \frac{\text{snelheid daling}}{100} \rightarrow$$

$$\text{Snelheid daling} = \tan(3^\circ) \cdot 100 = 5,2 \text{ knopen.}$$

Stel dat de piloot met een horizontale snelheid van 100 knopen vliegt (ongeveer 185 km/uur). Met de tangens kun je berekenen dat de piloot moet dalen met 5,2 knopen,

wat overeenkomt met een kleine 10 km/uur of 531 voet per minuut. Iedere minuut moet het vliegtuig dus 531 voet zijn gedaald.

Zijn piloten dan de hele tijd aan het rekenen?

In de praktijk wordt er meestal gewerkt met vuistregels. Veel piloten houden de volgende vuistregel aan: streep drie nullen van de hoogte weg en vermenigvuldig met drie om de top of descent in zeemijlen te berekenen.

Stel we vliegen op een hoogte van 30.000 voet, dan krijgen we na het wegstrepen van drie nullen (delen door 1000) en vermenigvuldigen van 3 een top of descent van 90 zeemijlen.

Laten we even checken met de tangens of deze vuistregel klopt. Hierboven hadden we berekend dat de top of descent bij een hoogte van 30.000 voet de top of descent 572.434 voet moet zijn (185 km). Om dit naar zeemijlen om te zetten moeten we nog delen door 6076 (1 zeemijl is ongeveer 6076 voet) en dan kom je uit op ongeveer 94 zeemijl. Dat is grofweg 90 zeemijl en dus klopt de vuistregel redelijk.

Hieronder hebben we deze berekening uitgeschreven:

$$\text{afstand begin daling} = \frac{30.000}{\tan(3^\circ)} \cdot \frac{1}{6076} = 94 \text{ zeemijl.}$$

De vuistregel was: drie nullen wegstrepen (delen door 1000) en vermenigvuldigen met 3. Dat komt neer op vermenigvuldigen met een factor 0,003. De berekening hierboven kun je omschrijven om te zien waar de vuistregel wiskundig vandaan komt.

$$30.000 \cdot \frac{1}{\tan(3^\circ) \cdot 6076} \approx 30.000 \cdot 0,003 = 90 \text{ zeemijl.}$$

Misschien denk je nu: en de boordcomputer in het vliegtuig dan? De boordcomputer kan natuurlijk alles voor de piloten berekenen, maar nu weet je wel precies hoe dit wordt berekend: met de tangens! Toch zijn er veel piloten die het ook zelf checken, sommigen met de vuistregel en anderen zelfs met de hand. Het is als piloot ook fijn om niet 100% afhankelijk te zijn van de computer en het kan nooit kwaad om de boordcomputer zo af en toe te checken!

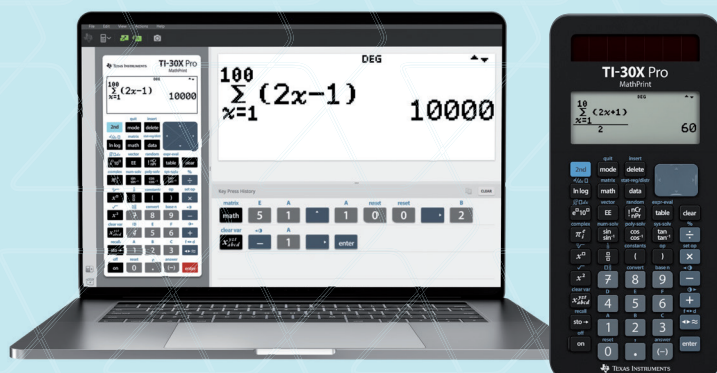
Snelheid en wind

We hebben hierboven gezien dat de tangens een belangrijke rol speelt bij het landen van een vliegtuig en het berekenen van de 'top of descent': het punt waar de daling moet worden ingezet. Bij een hoogte van 30.000 voet kwamen we uit op 572.434 voet, ofwel 94 zeemijl. In werkelijkheid moet er ook nog gecorrigeerd worden voor heel wat factoren zoals de wind, de snelheid, het gewicht, de luchtdruk en de temperatuur.

>

Elke klas kan rekenen op
Texas Instruments technologie

Wetenschappelijke rekenmachine voor alle vakken



TI-30X Pro MathPrint™

- » Toegestaan bij alle examens, behalve wiskunde-examens havo/vwo.

Inclusief **GRATIS** emulatorsoftware

Meest gebruikte grafische rekenmachine van Nederland

TI-84 Plus CE-T Python Edition

- » Door CvTE toegestaan bij wiskunde-examens havo/vwo.

Inclusief **GRATIS** emulatorsoftware



Uitgebreide mogelijkheden voor alle exacte vakken



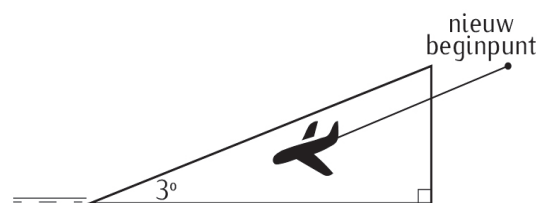
TI-Nspire™ CX II-T (CAS)

- » Door CvTE toegestaan bij wiskunde-examens havo/vwo.

Inclusief **GRATIS** software

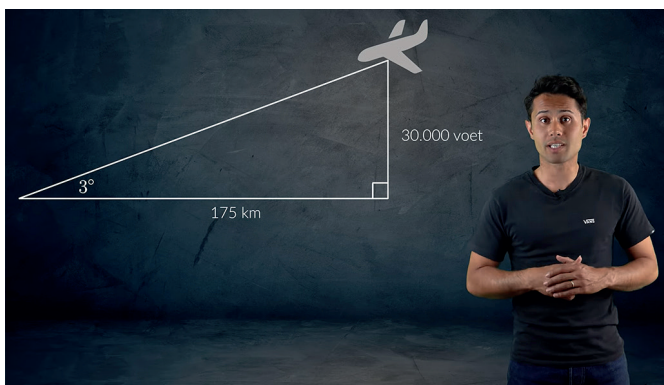
education.ti.com/nl/producten

Laten we eens kijken naar de snelheid. Tijdens de daling moet het vliegtuig, naast dalen, ook minderen in snelheid. Remmen met een vliegtuig in de lucht werkt uiteraard anders dan bijvoorbeeld remmen met een auto waarbij de wielen stoppen met draaien. Je kunt normaal gesproken snelheid minderen door gas te minderen, maar de motoren zijn tijdens de daling al uitgeschakeld. Hoe rem je dan af? Door het vliegtuig wat omhoog te sturen. Dit heeft wel gevolgen voor het uitgestippelde pad van 3° . Als het vliegtuig iets omhoog uitwijkt, moet er extra afstand ingecalculleerd worden om uiteindelijk weer op het pad van 3° uit te komen. In figuur 5 is dat schematisch weergegeven.



Ook hier zijn weer handige vuistregels voor. Voor iedere 10 knopen snelheidsvermindering komt er één zeemijl horizontale afstand bij. Stel dat het vliegtuig eerst met een snelheid van 250 knopen vliegt en moet landen met een snelheid van 200 knopen. Er moet dan nog 50 knopen aan snelheid worden verminderd en is er dus 5 zeemijl extra nodig. In het voorbeeld van een hoogte van 30.000 voet wordt de nieuwe top of descent dan $94 + 5 = 99$ zeemijl.

Voor de wind is de vuistregel hetzelfde. Bij een windje mee van 10 knopen komt er 1 zeemijl extra en bij een tegenwind van 10 knopen gaat er 1 zeemijl af.



figuur 6 Schermbeeld van de video 'Het dalen van vliegtuigen'

NVvW en Mathness

De NVvW heeft Mathness vanaf het begin gesteund. Via het projectenfonds konden wij onze ideeën en PowerPoints uit eigen lessen omzetten naar de eerste online versie van www.mathness.nl.

Met deze eerste versie van www.mathness.nl hebben wij een grotere Outreach subsidie aangevraagd waarmee we Mathness hebben opgebouwd tot wat het nu is. De NVvW was één van de partners in deze subsidieaanvraag (net als PWN en alle technische universiteiten).

We hebben in de beginfase ook een workshop gegeven op een NVvW-dag. Tijdens deze workshop hebben we feedback opgehaald bij de leden over hoe ons product er uiteindelijk uit moet gaan zien en hoe het zo bruikbaar mogelijk in de les kan worden ingezet

Noot

[1] zie www.mathness.nl

Over de auteurs

Frédérique en Jason hebben wiskunde aan de TU Delft gestudeerd en staan sinds 2017 voor de klas.

De toepassingen op Mathness zijn begonnen met PowerPoints voor hun eigen leerlingen. Dit hebben zij met subsidiegelden uitgebouwd tot het platform www.mathness.nl, zodat alle leerlingen en leraren er gebruik van kunnen maken. E-mailadres: info@mathness.nl

Een praktisch-historische blik op wiskunde

Deel 2 Taal van de kosmos

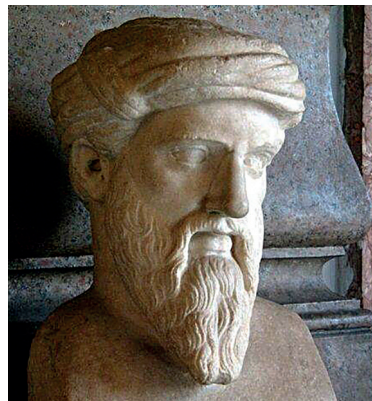
Welk praktisch nut heeft de wiskunde in de landen rond de Middellandse zee en in Europa in de loop der eeuwen gehad? Wat vinden we daarvan terug in het huidige onderwijs? In een reeks artikelen, waarvan dit de tweede is, gaat Roel van Asselt op zoek naar voorbeelden van historische toepassingen van wiskundige kennis. Roel legt hierbij de nadruk op de bruikbaarheid van de kennis in het beroepsonderwijs.

Weerbarstige problemen

Het grote wiskundige en filosofische vraagstuk in de klassieke wereld was het ontsluiten van de aard en de betekenis van de kosmos. Er speelden daarnaast ook drie grote praktische kwesties die alle wiskundigen bezig hielden. Te weten: 1. de constructie van een kubus met een dubbele inhoud als die van een gegeven kubus, 2. de driedeling van een hoek en 3. de constructie van een cirkel met een voorgeschreven oppervlakte (de kwadratuur van de cirkel). Geen van deze drie constructies bleek met passer en *ongemarkeerde* liniaal, zoals Euclides dat later voorschreef, uitvoerbaar. Toch zullen we zien dat op creatieve wijze oplossingen zijn bedacht voor de eerste twee kwesties. Opmerkelijk is wel dat er zeer weinig gedocumenteerde praktische toepassingen van deze oplossingen zijn teruggevonden.

Voor de aanpak van hun vraagstukken en toepassingen hadden de Grieken beperkte wiskundige gereedschappen. Bijna alles werd binnen een meetkundige context aangepakt: kwadraten werden voorgesteld als oppervlakten van vierkanten (denk aan het woord 'vierkantsvergelijking'), andere producten van grootheden waren oppervlakten en inhouden van geometrische objecten, $\sqrt{a}$ was de lengte van de zijde van een vierkant met oppervlakte a enzovoort. Getallen *in de wiskunde* waren altijd lengten van lijnstukken en breuken waren verhoudingen van lijnstuklengten. Letteralgebra zoals wij die kennen bestond niet.^[1] De getalsystemen van de Grieken waren bovendien een onhandige stapeling van tien-, honderd- en duizendtallen, waarbij meer symbolen nodig waren dan letters uit het alfabet. Negatieve getallen en het getal 0 bestonden niet binnen de wiskunde en de rekenkunde van de Grieken. Kortom, weerbarstigheid alom. Toch werden op uiterst ingenieuze wijzen diverse geometrische oplossingen voor vraagstukken gevonden, zoals we

gaan zien. Het praktisch, dagelijks nut van wiskunde was in die tijd echter niet leidend, veeleer ging het om de schoonheid van de meetkunde en de mystiek van de getallen en van de getalpatronen..



figuur 1 Pythagoras

Wiskunde als religie

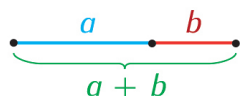
Ongeveer honderd jaar na Thales leefde de raadselachtige Pythagoras; leider van een gesloten religieus-filosofische gemeenschap. Hij was wiskundige, sociaal-filosoof, astronoom, mysticus en luitspeler. Aanvankelijk leefde en werkte hij in Samos, voor de westkust van het huidige Turkije. Een iconische voorstelling van hem is weergegeven in figuur 1.^[2]

Beweerd wordt dat uitspraken als: 'wiskunde is het wezen van alles' en 'alles is getal' vanuit zijn broederschap afkomstig zijn. Getallen beschouwden zij als wezens die goddelijke en mystieke kracht uitoefenen en die het ritme van de kosmos bepalen: een bijzondere 'praktische' toepassing van wiskunde.^[3] De kern van het Pythagorisch denken was dat de wereld rationeel en wiskundig gestructureerd was en dat de 'taal van het universum' de wiskunde was.

Geheel binnen de nieuwe tijdgeest gaf Pythagoras als eerste het bewijs van de al lang bekende stelling die nu zijn naam draagt. Het hoeft uiteraard geen betoog dat de praktische toepassingen van deze stelling in alle bèta-disciplines nog altijd van zeer grote betekenis is.

Gulden snede

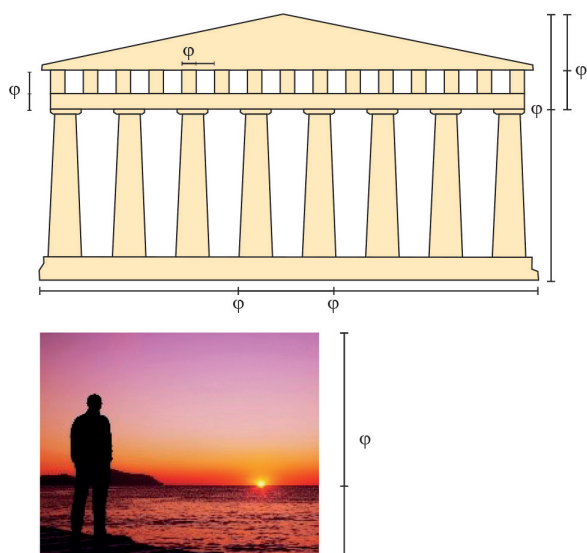
Binnen de pythagoreïsche gemeenschap is het, dan nog rudimentaire, begrip *gulden snede* onderzocht.^[4] Het betreft een harmonieuze verdeling (φ) van een lijnstuk die we om zijn aantrekkelijke visuele verhouding ook nu nog zeer vaak terugvinden in de architectuur, beeldende kunst, fotografie, ontwerptechnieken en in de vrije natuur. Het is niet duidelijk of binnen de school van Pythagoras ook al een praktische betekenis werd gegeven aan de gulden snede, of dat het ze alleen ging om de harmonie van de proportionaliteit.



figuur 2 De gulden snede

Het rechte lijnstuk in figuur 2 wordt in de gulden snede verdeeld indien $(a + b) : a = a : b$.^[5] Als we aan b de waarde 1 toekennen, dan zal a gelijk zijn aan 1,618..., wat gemakkelijk is na te rekenen. Ter illustratie zijn in de afbeeldingen van figuur 3 de gulden snede in een tempelontwerp en in een foto terug te vinden. Een dergelijke foto, die niet in deze zee-lucht-verhouding is genomen, oogt veel saaier. Er is geen verklaring waarom het menselijk brein de gulden snede als een harmonieuze vlakverdeling ervaart.

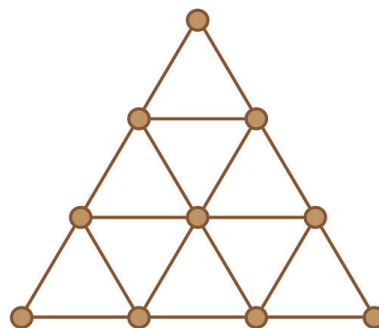
Harmonie der sferen



figuur 3 Gebruik van de gulden snede

Het toedichten aan Pythagoras' broederschap van de gulden snede is aannemelijk: hun wiskundefilosofie berustte op een harmonie van verhoudingsgetallen. Een praktische toepassing daarvan was de ontdekking dat luitsnaren in bepaalde lengteverhoudingen zuivere intervallen produceren, zoals: een octaaf hoger bij $\frac{1}{2}$ snaarlengte, half hoger bij $\frac{2}{3}$ snaarlengte (de kwint), een kwart hoger bij $\frac{3}{4}$ snaarlengte (de kwart) et cetera. Dit zijn nog steeds gebruikte intervallen in de hedendaagse westerse muziek!^[6] Deze vinding trok men in zijn school door naar een 'harmonie der sferen', door te stellen dat deze muzikale verhoudingen ook de verhoudingen waren van de afstanden van de aarde tot de toen bekende (vijf) planeten.

In zijn zoektocht naar harmonie en perfectie hanteerde Pythagoras ook bijzondere getallen. Dat waren o.a. het heilige getal 10: de som van de eerste vier gehele getallen. Dat verwerkten zij in het 'logo' van hun gemeenschap. Zie figuur 4, de zogenoemde tetractys (viervoud): het symbool voor orde en harmonie in de kosmos, en voor andere mystieke analogieën, zoals de opbouw van de genoemde muziekintervallen.^[7]



figuur 4 De tetractys

Meer bijzondere getallen

Pythagoreërs vatten getallen dus ook op als grootheden, die buiten meetkundige objecten bestaan. Ze onderscheiden daarbij onder meer zogenoemde 'perfecte getallen'. Dat zijn gehele getallen die de som zijn van hun eigen delers, exclusief het getal zelf. Zoals het getal $6 = 1 + 2 + 3$, of $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Het eerstvolgende perfecte getal is 496. Veel praktische betekenis hadden deze getallen niet, anders dan het tonen van harmonieuze patronen in de wiskunde en in de kosmos.^[8] Maar ook serieuze getalsequenties werden bestudeerd. Zo wist men dat het steeds toevoegen van een volgend oneven getal aan een kwadraat, weer een kwadraat

>

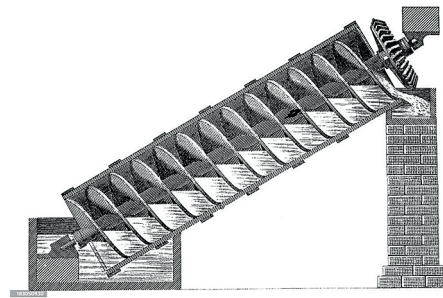
opleverde, aldus: $1 + 3 = 4$, $4 + 5 = 9$, $9 + 7 = 16$, $16 + 9 = 25$, et cetera. Dat hielp hen bij het ontwikkelen van het getalbegrip, zoals deze ‘vierkante getallen’ die de oppervlakten van vierkanten aangeven. Wij herkennen in deze opbouw nog de uitdrukking $n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Tevens ontdekten zij dat uit delers van getallen zoals 12 en 35 rechthoeken gemaakt konden worden van bijvoorbeeld respectievelijk van 3 bij 4 en van 5 bij 7. Bij sommige getallen lukte dat niet zoals bij 13 of 29. Zij noemden ze ‘rechtlijnige getallen’, die we nu priemgetallen noemen en die tegenwoordig toepassing vinden bij het versleutelen van data. We komen daar nog op terug.

Ontgoocheling

Wat een triomf voor de menselijke geest was, werd een debacle voor de harmonieleer van de eerste Pythagoreërs. Dat was de ontdekking van irrationale getallen; getallen die geen breuk zijn. Binnen de school werd bewezen dat $\sqrt{2}$ geen breuk is, maar wel de lengte van een lijnstuk kan zijn. Men stuitte aldus op onmeetbare lijnstukken. Het betekende een definitieve breuk tussen de meetkunde en de (harmonie van de) gehele getallen. Dat mocht zeker niet wereldkundig gemaakt worden!^[9] Dat ook de guldensnede verhouding (de 1,618...) een irrationaal getal bleek te zijn, zal het enthousiasme voor praktische toepassingen van de snede in de Pythagoreïsche school niet hebben verhoogd. Mede vanwege hun controversiële politieke, religieuze en sociale standpunten trok de gemeenschap van Pythagoras weg naar Croton, in Zuid Italië.^[10] Er zijn vermoedens dat Pythagoras aldaar is vermoord en begraven in het naburige Metaponto. Zijn graf is echter nooit gevonden. De wiskundig en religieus-filosofische stroming van de Pythagoreërs heeft eeuwenlang het wiskundig denken beïnvloed, tot ongeveer de 12^e eeuw n.C..

Wiskundige mechanica

Vanaf de vijfde en vierde eeuw v.C. is een aantal direct praktische toepassingen van wiskundige methoden in de mechanica bekend. Een voorbeeld hiervan is het volgende. De Egyptenaren kenden al voor 2000 v.C. het principe van de (houten) schroefdraad in hun olijf- en druivenpersen. Het principe van de schroefdraad is (her)ontdekt en sterk verbeterd door Archimedes, die leefde rond 200 v.C., zie figuur 5.



figuur 5 Een huidige spiraalpomp

Hij bestudeerde de spiraalvormige beweging van een punt langs de oppervlakte van een cilinder, wat leidde tot een wiskundige beschrijving van een helix of spiraal. De pomp werd ingezet bij onder meer irrigatiewerken en bij het wegwerken van lekwater uit schepen. Af en toe komen we zo'n helixpomp nog tegen in onze polders om de grondwaterstand te reguleren.

“Tijdgenoten van Archytas’, waaronder Plato, beviel het totaal niet dat hij de zuivere meetkunde besmette met aardse, praktische toepassingen.”

Archytas, die leefde rond 400 v.C., heeft vanuit zijn school de pythagorische gedachten verder ontwikkeld, zoals die uit de muzikaleer, met onder meer een wiskundige beschrijving van toonladders. Maar als ‘praktiserend’ wiskundige wordt hij vooral ‘de vader van de wiskundige mechanica’ genoemd. Dat dankt hij aan zijn rigoureuze wijze van berekenen en bewijzen van eigenschappen van ruimtelijke figuren, waardoor in de mechanica, de werktuigbouwkunde en de bouwkunde precieze constructies konden worden uitgevoerd. Als voorbeeld wordt vaak gerefereerd aan de opdracht die hij uitvoerde om een vierkant offerblok (met ribbelengte a) te vergroten tot een vierkant blok met een dubbele inhoud. Daarvoor heb je een ribbelengte van $a\sqrt[3]{2}$ nodig. Dat lukte hem. Zijn methode was ingenieus, waarbij prisma's, cilinders en een torus te pas kwamen; helaas te omslachtig om hier te beschrijven. Hij gebruikte daarbij de in zijn tijd al bekende verhouding van de dubbele middelevenredigheid: de verhoudingen (in onze schrijfwijze:) $1 : x = x : y = y : 2$, die voor x de waarde $\sqrt[3]{2}$ levert.

Archytas wordt genoemd als de eerste die een houten voorwerp (een duif) construeerde dat 200m zou hebben kunnen vliegen, aangedreven door perslucht. Er zijn evenwel nooit beschrijvingen of afbeeldingen van deze eerste 'drone' teruggevonden.

Heel bijzonder voor ons, nu, is dat veel van Archytas' tijdgenoten – waaronder zijn vriend Plato – het totaal niet beviel dat hij de zuivere meetkunde besmette met aardse, praktische toepassingen. Die opvatting is terug te voeren op het wereld- en werkelijkheidsbeeld dat de meeste Griekse filosofen hadden, en de rol die de wiskunde daarin vervulde, zoals we nog gaan zien. Bovendien had die elite niet veel respect voor handarbeid en werktuigkunde; dat was meer voor het volk en de slaafgemaakten.

Het begrip oneindig

Een wiskundig/filosofisch hardnekkig probleem bij het begrijpen van de kosmos was het begrip oneindig: oneindig veel en oneindig klein; was de kosmos zelf eindig of oneindig?^[11] Daar werd veel over gediscussieerd, zonder dat dat leidde tot een heldere opvattingen over het oneindige.

De Grieken aanvaardden het *denkbeeldig* (potentieel) oneindig, zoals de niet-eindige verzameling natuurlijke getallen $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$, hoewel de totale verzameling van deze getallen niet waarneembaar was.^[12] Met het *concreet* oneindige lag dat anders. Omdat in de conceptie van velen de kosmos eindig was, was er niet veel behoefte aan beschouwingen over concrete dingen waarvan er oneindig veel zouden bestaan, of aan oneindig grote ruimten.

Lijnen en vlakken waren dan ook altijd lijnstukken en vlakdelen, die wel naar behoefte verlengd of vergroot kunnen worden, maar er bestonden geen onbegrensde meetkundige of natuurkundige elementen.

Met het oneindig kleine ging het nog moeizamer. Het uitgangspunt was: alles in de natuur heeft een bepaalde omvang, en je kunt dus niet 'eindeloos' doorgaan met opdelen van objecten of lijnstukken. Het was voor hen bovendien moeilijk voorstelbaar dat oneindig kleine grootheden kunnen bijdragen aan een eindige opbrengst. Concepten zoals limieten en convergentie ontbraken om bewegingen en snelheden goed te kunnen begrijpen en te omschrijven. Het debat over het oneindig kleine leverde geen gedragen, samenhangend beeld op van dat begrip, maar wel een aantal paradoxen, zoals de redenering rond beweging en continuïteit, die het onmogelijk maakte dat Achilles de schildpad kon inhalen. Niettemin zullen we in het volgende deel een eerste aanloop naar een limietbegrip en integraalrekening aantreffen.

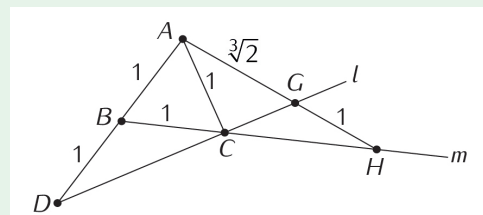
Praktische toepassingen in de les

1 De uitleg van het bewijs dat $\sqrt{2}$ geen breuk is, is een niet te missen kans om het fraaie bewijs – uit het ongerijmde – met leerlingen te delen.

2 Het zoeken naar concrete voorbeelden van foto's of van hedendaagse praktische constructies die in een gulden snede zijn uitgevoerd kan leerzaam zijn. Tevens kan uit de verhouding $(a + b) : a = a : b$ voor $b = 1$ (met de *abc*-formule)

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\dots \text{ worden berekend.}$$

3 De bepaling van $\sqrt[3]{2}$ uit de dubbele middel-evenredigheid is voor leerlingen nog wel te doen. Maar $\sqrt[3]{2}$ kan ook, voor echte liefhebbers, meetkundig bepaald worden, zie figuur 6.^[13] Ga uit van een gelijkzijdige driehoek ABC , en verleng AB met $BD (= 1)$. Verleng daarna DC tot l , en BC tot m . Bepaal met een (gemarkeerde) liniaal het punt H op m , zó dat de lijn AH de lijn l snijdt in G en $GH = 1$. AG heeft dan de lengte $\sqrt[3]{2}$, wat met evenredigheden is aan te tonen.



figuur 6 Meetkundige constructie van $\sqrt[3]{2}$

4 De 'historische' paradox van Achilles en de schildpad kan als inleiding tot het limietbegrip, en de noodzaak van een goede definitie er van, behulpzaam zijn.

Op de website vind je de noten en een literatuurlijst.
vakbladeuclides.nl/1004praktischegeschiedenis_2

Over de auteur

Roel van Asselt studeerde wiskunde aan de Universiteit Utrecht en was wiskundeleraar aan de HTS in Hengelo. Hij was eindredacteur van een wiskundemethode voor het hoger onderwijs. Daarnaast was hij oprichter en directeur van het expertisecentrum LICA (Landelijk Informatie en expertiseCentrum Aansluiting hbo). Binnen Saxion Hogescholen werd hij lector Instroommanagement en Aansluiting mbo/vo-hbo. E-mailadres: r.v.asselt@ziggo.nl

'HET IS VAN WEZENLIJK BELANG OM ZELFVERTROUWEN OP TE BOUWEN'

Interview met vmbo-docent Hilde Kalsbeek

Hilde Kalsbeek werkt op GSG Guido, afdeling vmbo in Amersfoort. In één basis/kader-klas leken de leerlingen niet in beweging te willen komen en scoorden laag. Hilde werkte anderhalf jaar met deze klas en inmiddels hebben de leerlingen vertrouwen gekregen, zijn ze 'aan' gegaan en zijn de resultaten verbeterd. Ik ontmoette Hilde en hoorde haar enthousiast vertellen over het onverwachte succes bij basis/kader-2. Hieronder het interview dat ik later met haar hield.

Om welke klas gaat het?

Er zitten veertien leerlingen in de klas, waarvan enkelen met een kaderadvies, maar ook leerlingen met een gemengd advies, namelijk basis/kader. Sommigen zijn kansrijk geadviseerd. Vanaf de start van schooljaar '22-'23 zijn veel wiskundelessen om verschillende redenen uitgevallen. Al spoedig vroeg de schoolleiding Hilde om de klas van haar collega over te nemen. 'Ik begon met deze klas in november van het eerste brugjaar. Ik trof een klas aan die "uit" stond, alles wat ik zei, uitlegde en vertelde kwam gewoon niet binnen. Leerlingen beantwoordden mijn vragen met: "Ik snap het gewoon niet," maar konden niet uitleggen wat ze lastig vonden. Wat te doen?'



figuur 1

Hoe heb je het aangepakt?

Ik ben begonnen met heel veel geduld uit te stralen. 'Ik ben hier voor jullie en leg het net zolang uit tot je het begrijpt'. Ik blijf altijd doorvragen en bouw zo een vertrouwensrelatie met de leerlingen op. Ik wil weten hoe zij denken en blijf op zoek naar het aanbieden van meerdere mogelijkheden. Onderwijl heb ik overleg met de mentor. Er zijn duidelijke afspraken gemaakt met de

klas over het meenemen van spullen, het namen noteren bij verzaken en de consequentie is na vier keer vergeten: nablijven. Ook zijn er afspraken gemaakt over het maken van huiswerk: na vier keer 'vergeten' ook nablijven op school. In de les was de regel: je zit op je stoel en kijkt naar voren. Ik hanteerde de regels consequent en dat hielp.

"Een leerling die een 8 haalde reageerde: 'Hé ik kan het wél!'"

Met welke leerstof ben je begonnen?

We zijn begonnen met het onderwerp 'hoeken' in een praktische opdracht. De leerlingen moesten in de school foto's maken van rechte, scherpe en stompe hoeken. Daar kregen ze een cijfer voor. Met enkelen die er een potje van maakten heb ik een persoonlijk gesprek gevoerd met de vraag: wat gaat er nou mis? Daarna kregen ze een tweede kans. Uiteindelijk had iedereen een voldoende. De drie lesuren per week werden als volgt ingedeeld: gedurende de lesuren kregen de basis-leerlingen vijftien minuten uitleg terwijl de kader-leerlingen aan hun voorkennis werkten; daarna kregen de kader-leerlingen vijftien minuten uitleg terwijl de basis-leerlingen gingen oefenen. De rest van het uur was er tijd voor zelfstandig werken met individuele hulp van mij. Ik merkte dat ik zo toch nog te weinig tijd had voor de uitleg en begeleiding. Daarom hebben we voor een periode van twee maanden de uitleg per niveau per lesuur gedaan. De ene les kregen de basisleerlingen uitleg en gingen de kaderleerlingen zelfstandig oefenen met de leerstof van de les daarvoor. De volgende les draaiden we dit dan om. De kaderleerlingen

kregen de uitleg en de basisleerlingen gingen zelfstandig oefenen met leerstof van de vorige les. Mijn leerlingen mogen met muziek aan werken, ze ervaren dan minder verstoring door mijn uitleg aan anderen. Het streven was (en is) dat het werk zoveel mogelijk af is in de les.

Wat heb je in dat eerste jaar met ze kunnen bereiken?

Het lukte om een goede relatie op te bouwen door bijvoorbeeld veel complimentjes te geven. Ook over een soms kleine vooruitgang. Het lukte goed om ze aan de slag te krijgen maar de leerlingen bleven erg afhankelijk van mij als docent. De winst was dat leerlingen zeiden: 'Ik vind wiskunde niet leuk, maar ben wel blij dat u het geeft.' Ik legde heel veel uit en we deden sommen samen (op het bord) maar de leerlingen gaven aan er nog weinig van te begrijpen. De cijfers aan het einde van leerjaar 1 lagen voor de basis-leerlingen rond de 5, de cijfers voor de kader-leerlingen lagen rond de 3. Ik kreeg de klas ook voor het tweede leerjaar onder mijn hoede. Zo kon ik kijken hoe ik nog verder met ze kon komen.

Wat kon je nog meer doen?

De leerlingen deden wel mee in de les maar bleven wazig kijken en waren niet gericht op iets leren bij wiskunde. Ze stonden feitelijk nog steeds niet 'aan'. In overleg met de mentor en de afdelingsleider is verder gezocht naar het antwoord op de vraag: hoe krijg je deze leerlingen weer 'aan'? Om meer succeservaringen te creëren is toen besloten het niveau van de leerstof te verlagen. De ouders werden geïnformeerd en alle leerlingen (op één na) kregen vanaf oktober in leerjaar 2 een basisboek. Tevens veranderde dat de werkwijze, want vanaf nu hadden de leerlingen een werkboek, waarin ze hun antwoorden konden invullen. Er ging een zucht van verlichting door het lokaal; iedereen kon meedoen met de les en het werk was in de les (bijna) altijd af. De cijfers gingen omhoog en een leerling reageerde bij een 8 met: 'Hé ik kan het wél!' En ook: 'Ik begin het zelfs een beetje leuk te vinden.'

Hoe krijg je ze dan nog op het juiste niveau?

In maart van leerjaar 2 bleek uit de mentor-leerling-gesprekken dat er zeven leerlingen van deze klas naar kader wilden, terwijl zij voor wiskunde op het basisoniveau hadden gewerkt. De leerlingen hadden inmiddels echter vertrouwen gekregen dat zij wiskunde wel konden. Er was een sterke drive om ook wiskunde op kaderniveau af te sluiten en ze gingen ervoor. Bij het hoofdstuk over lineaire formules werden op kaderniveau zessen en zevens (één acht) gescoord en de zwakste leerling had zelfs nog een voldoende. Ze bleken veel meer te kunnen dan zij aanvan-

kelijk hadden gedacht. Zelfs een extra les over de stelling van Pythagoras konden ze aan, er was belangstelling en ze hadden de wil om het te begrijpen.

Hoe kijk je erop terug?

Ik had dit resultaat aanvankelijk niet verwacht maar in de reflectie op het werken met deze klas trek ik de conclusie: het is van wezenlijk belang om zelfvertrouwen op te bouwen en voortdurend te vragen: wat heb jij nodig om dit voor elkaar te krijgen? Ik weet uit ervaring, dat als de leerling een concreet doel voor ogen heeft, namelijk 'ik wil naar kader en dan moet ik wiskunde ook op kaderniveau afsluiten', én dat is met deze docent haalbaar', dan gaan ze er wel voor.

Conclusie

Hilde heeft door te investeren in de relatie zich verbonden aan de leerlingen en zij verbonden zich aan haar. Belangrijk bleek dat Hilde ook echt vertrouwen had in zichzelf en in de leerlingen dat dit goed zou komen. Daarna kwam er ruimte om met haalbare doelen succeservaringen op te doen en stonden de leerlingen meer open voor het vak; ze werkten voor de docent. Toen ik de afdelingsleider vroeg naar de 'key to succes' in dit geval, had hij maar één antwoord: 'een sterdocent erop zetten'. Er zijn meer leerlingen die – om welke reden dan ook – bij wiskunde zijn afgehaakt. In alle schooltypes is er een niet onaanzienlijk deel van deze leerlingen dat wiskundeangst heeft ontwikkeld door slecht (niet passend) onderwijs, door te hoge verwachtingen of door saai werk (alleen maar sommetjes maken). Deze leerlingen gaan op een gegeven moment 'uit' en als zij last hebben van een fixed mindset, dan krijg je deze leerlingen niet gemakkelijk weer 'aan'. Dan helpen extra uitleg, extra tijd, bijles of alle andere extra's niet meer. Waar we dan aan moeten werken is zelfvertrouwen ontwikkelen door wiskunde aantrekkelijker en toegankelijker te maken door (eerst) eenvoudiger opdrachten te maken.

Over de interviewer en geïnterviewde

Hilde Kalsbeek is vanuit het basisonderwijs doorgestroomd naar het voortgezet onderwijs en is wiskundeleraar voor vmbo geworden. E-mailadres: hkalsbeek@guido.nl

Lambrecht Spijkerboer is trainer/consultant in het voortgezet onderwijs en lerarenopleider. Hij is vanwege zijn ervaring en achtergrond met name geïnteresseerd in wiskundeonderwijs. E-mailadres: STA@Lambrechtspijkerboer.nl

Pracht en kracht van wiskunde

Deel 3: Newton, Gauss en fractalen

De rondreizende tweede editie van de *Imaginary* tentoonstelling is alweer voorbij. Paul Igodt neemt ons mee naar de wiskunde achter een aantal van de fenomenen die te zien en te ervaren waren. Deze serie artikelen is een bewerking van de eerder verschenen versies in *Wiskunde en Onderwijs*, ons 'zustertijdschrift' van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars.

De tentoonstelling Imaginary liet bezoekers kennismaken met de schoonheid en pracht van wiskunde. Op de website zijn de beelden blijvend te bewonderen.^{[1], [2]} Ook is daar educatief materiaal te vinden.



figuur 1 Isaac Newton

Newton-Raphson methode

Het numeriek benaderen van nulpunten van functies is een zeer frequent optredende taak in de wiskunde. De methode van Newton-Raphson (in de literatuur soms kortweg methode van Newton genoemd) kan hierbij niet ontweken worden. Ze behoort tot het lijstje basistechnieken in elke cursus numerieke wiskunde. Waar ze inzetbaar is, is ze vaak ook een zeer snel convergerende methode. Niemand minder dan Sir Isaac Newton (1642-1726) ontwikkelde de methode in zijn *De Methodis Serierum et Fluxionum* (1671). Dit werk werd echter pas in 1736 gepubliceerd. Newtons initiële aanpak was inmiddels reeds verfijnd door Joseph Raphson (ca.1668 – ca.1712) die het in 1690 publiceerde in zijn boek *Analysis aequationum universalis*. Over Raphsons leven ontbreken veel nauwkeurige gegevens. Dat hij in 1689 als lid van de Royal Society werd verkozen staat wel vast.

Reële functies

Het achterliggend idee van de methode is intuïtief te verduidelijken. Veronderstel dat $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de differentieerbare functie is waarvoor een nulpunt a gezocht wordt. Noteer x_0 voor een eerste schatting voor a . Het klinkt goed om de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(x_0, f(x_0))$ te gebruiken, als het ware in vervanging van de grafiek van f zelf. Deze raaklijn heeft als vergelijking:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) .$$

Het snijpunt met de x -as van de raaklijn vind je dan als:

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

en dit gebruiken we als een (verhoopte) betere benadering voor a . Vandaar dat we noteren:

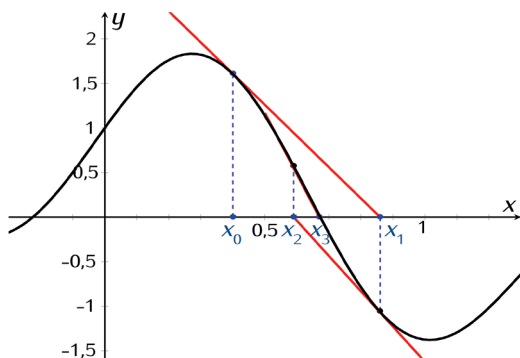
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \text{ en dat we verder kunnen itereren als}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} .$$

Zoals je merkt is het noodzakelijk dat je de afgeleide functie (f') kunt berekenen. Als deze afgeleide niet nul is in een interval rond het nulpunt, en als er een continue tweede afgeleide is, dan zal de methode vertrekend van een nauwkeurige startwaarde snel convergeren. Die snelheid maakt de methode zeer gewaardeerd. De fout bij een volgende stap is dan immers recht evenredig met het kwadraat van de fout bij de vorige stap, iets wat we snelheid van orde 2 noemen. Eenvoudiger gesteld: als je bij een vorige benadering tot op 0,1 nauwkeurig benadert, mag je verwachten dat dit bij de volgende stap reeds tot op 0,01 nauwkeurig zal zijn, en bij de daaropvolgende stap tot op 0,0001 nauwkeurig.

Enkele vervelende moeilijkheden kunnen weliswaar optreden. Zo is het niet steeds zo dat de convergentie

optreedt naar het nulpunt waarvoor de startwaarde x_0 een eerste schatting was. Goede startwaarden zijn dus aangewezen. Met een beetje pech kan de methode ook in een soort oneindige lus belanden, wanneer een volgende benadering in werkelijkheid een reeds eerder gebruikte benadering terug oplevert. Omdat we een andere richting uit willen, verkiezen we hierop niet verder in te gaan.



figuur 2 Een startwaarde en drie opeenvolgende iteraties om een nulpunt van de functie met voorschrift $f(x) = \sin 5x + \cos 2x$ te benaderen.

Complexe functies

Het iteratieve karakter van de Newton-Raphson methode nodigt uit om deze uit te proberen bij meer algemene functies. Waarom niet bij functies met een complexe variabele en met complexe functiewaarden, dit wil zeggen functies $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Om het niet moeilijker dan nodig te maken, opteren we om ons toe te leggen op veeltermfuncties. Dankzij het doctoraatswerk van Gauss (1777 - 1855) is er de indrukwekkende hoofdstelling van de algebra die garandeert dat elke complexe veelterm van graad k effectief ook k nulpunten in $\mathbb{C}$ heeft (multipliciteit meegerekend). In moderne taal zeggen we dat $\mathbb{C}$ algebraïsch gesloten is. Aan nulpunten bij veeltermen ontbreekt het dus nooit, iets wat we voor veeltermfuncties over $\mathbb{R}$ alvast niet kunnen zeggen.



figuur 3 Carl Friedrich Gauss

De zeer inspirerende grafische voorstelling die de Newton-Raphson methode ondersteunde voor functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is er nu echter niet meer. Immers, een grafische voorstelling geven voor functies $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ is, hoe moeten we het zeggen, enigszins problematisch. Bedenk daartoe dat we om $\mathbb{C}$ voor te stellen reeds twee dimensies nodig hebben. We spreken immers over 'het complexe vlak'. We zouden dus over vier dimensies moeten beschikken om een grafiek van een functie $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ te construeren.

Laat ons, ietwat pragmatisch en om de wiskundige diepgang niet al te sterk op te drijven, het hier nu ook niet hebben over een formele definitie van afgeleide noch over de analyse van complexe functies, maar ons beperken tot de formele afleidingsregels zoals we die kennen van reële functies. En voor veeltermen valt dat nogal mee. Afleiden doen we dus met de gebruikelijke rekenregels. Dat Newton-Raphson ook voor deze functies potentieel heeft, leert een eenvoudig voorbeeld.

Bekijk de functie $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto f(z) = z^4 - 1$.

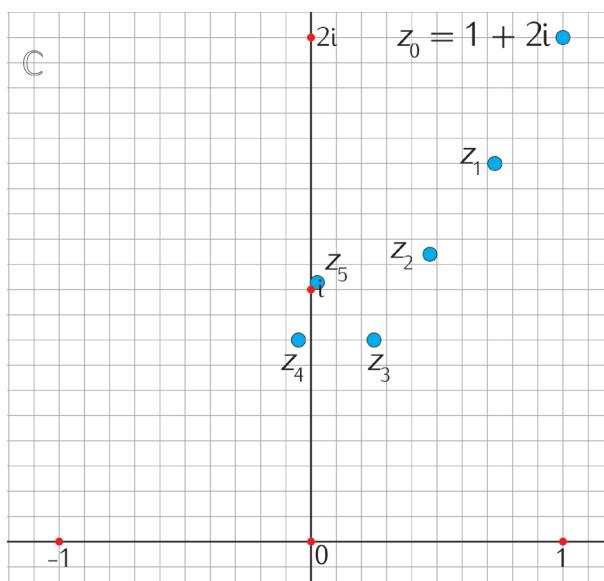
De nulpunten van deze functie zijn de vier vierdemachtswortels van 1, zoals we die ook noemen: 1, -1, i en -i.

Drie ervan worden voorgesteld door rode stippen in figuur 4.

In de figuur starten we met een startwaarde

$z_0 = 1 + 2i$ en itereren we vijf keer met de Newton-Raphson methode

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}.$$

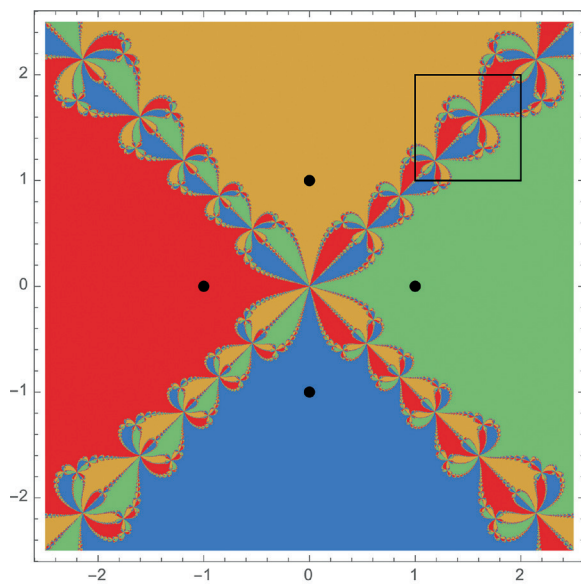


figuur 4 Een startwaarde en vijf verdere opeenvolgende Newton-Raphson iteraties benaderen de vierdemachtswortel i.

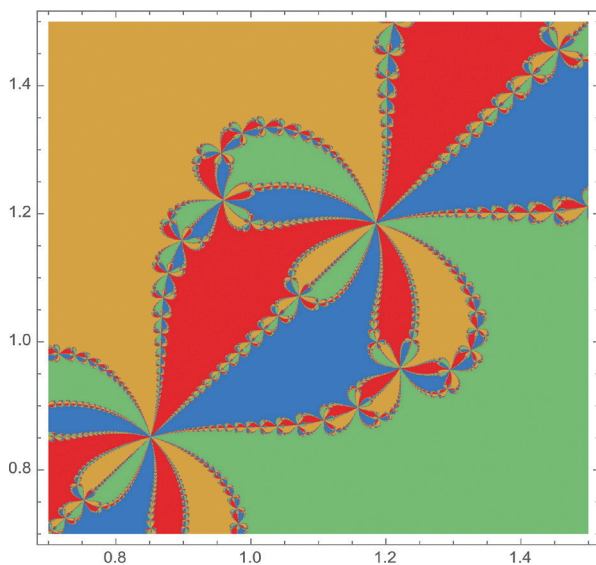
>

Zoals je kunt vaststellen, benaderen we ook in het geval van een complexe functie met de methode van Newton-Raphson een nulpunt; in dit geval van de veeltermfunctie $f(z) = z^4 - 1$. Veronderstel nu eens dat we dit vele keren opnieuw doen, door telkens met een andere startwaarde z_0 te vertrekken.

De veelterm die we bestuderen heeft vier nulpunten. We kunnen verwachten dat we, per startwaarde, naar een van die vier nulpunten zullen convergeren. Afhankelijk van het nulpunt waar we naartoe convergeren kunnen we de startwaarde een kleur geven. Dit is het achterliggende idee voor figuur 5.



figuur 5 Newton-fractal voor $f(z) = z^4 - 1$ met aanduiding van de vier nulpunten. Inkleuring volgens de nulpunten.



figuur 6 Afzonderlijke uitvergroting van het door het vierkant aangeduide deel.

De kleuren in deze figuur geven aan naar welk nulpunt de Newton-Raphson methode convergeert indien de startwaarde daar wordt gekozen. Zo leidt een startwaarde in de oranje zone, bijvoorbeeld, naar de vierdemachtswortel $z = i$. De uitvergroting in figuur 6 laat zien hoe de figuur steeds herhalende zelfsimilariteit laat zien, een typische eigenschap van fractalen.

Newton heeft zo iets ongetwijfeld nooit gezien, noch vermoed. En ook voor ons is dit eigenlijk pas mogelijk sinds pakweg veertig jaar. Wiskundig inzicht zoals voorbereid door Julia (1893 - 1978), verrassend genoeg reeds meer dan honderd jaar geleden, was niet voldoende.



Gaston Julia



Benoit Mandelbrot

figuur 7

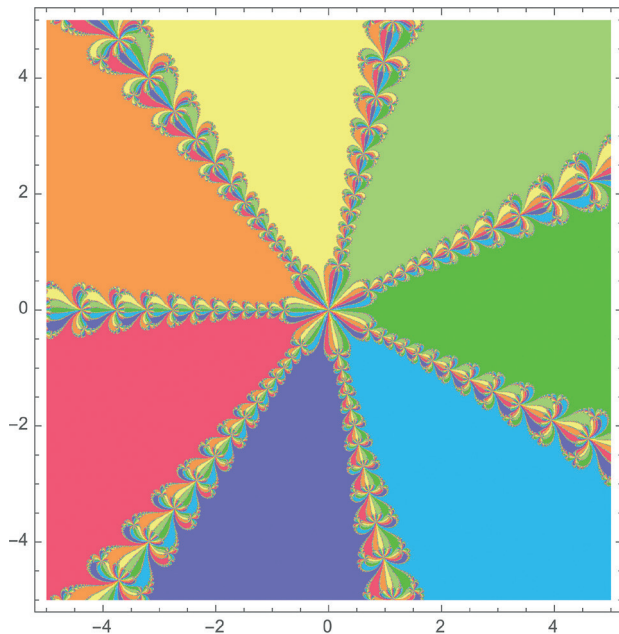
Julia- en Mandelbrot-verzamelingen

Nochtans was het Julia die in een indrukwekkende monografie de basis legde voor wat we vandaag als Julia-verzamelingen kennen.^[3] Hij werd voor dit werk bekroond met de Grand Prix de l'Académie des Sciences.

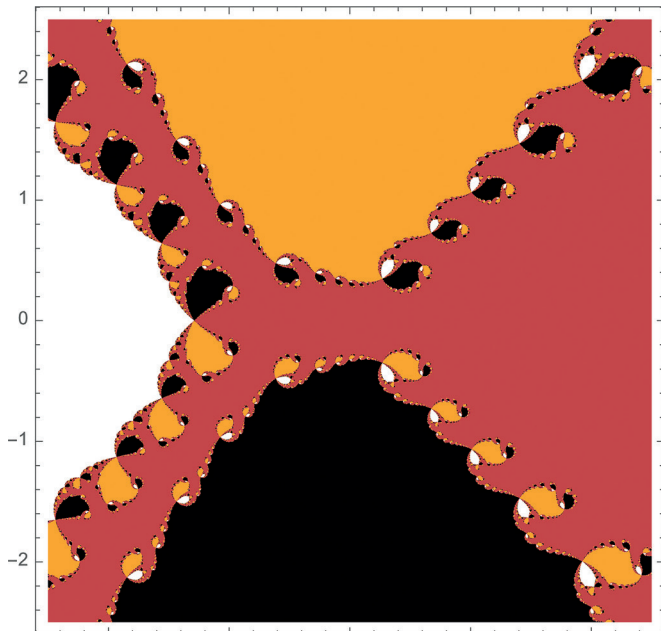
Grensverleggende exploratie door Mandelbrot (1924 - 2010), en computers met ruimere en vooral snellere rekencapaciteit waren onmisbaar. Geprikkeld door het werk van Julia, en als onderzoeker verbonden aan IBM, realiseerde hij de eerste indrukwekkende visualisaties van Julia-verzamelingen. De Mandelbrot-verzameling is een klassieker geworden, overigens. Na eerdere Franstalige publicaties (1975 en 1977) werd zijn boek *The Fractal Geometry of Nature*^[4] een prachtige klassieker van formaat.

De weg ligt nu open voor een oneindige familie van fractalen, enkel en alleen reeds op basis van het Newton-Raphson algoritme. Immers, wat we hier toonden voor de vierdemachtswortels (en de veelterm $z^4 - 1$) kan ook uitgevoerd worden voor iedere veeltermfunctie op de verzameling van de complexe getallen. De onbetwistbare kracht van Newton-Raphson voor dagelijkse toepassingen en studies leidt drie eeuwen na Newton op die manier tot het ontdekken van indrukwekkende pracht.

Alsof er ook hiervoor geen krachtige toepassingen zullen zijn. Kunstzinnige wiskundevrienden zijn er al langer mee aan de slag.



figuur 8 Newton-fractal voor $f(z) = z^7 - 1$



figuur 9 Newton-fractal voor $f(z) = z^4 + z^3 - z^2 + z - 2$

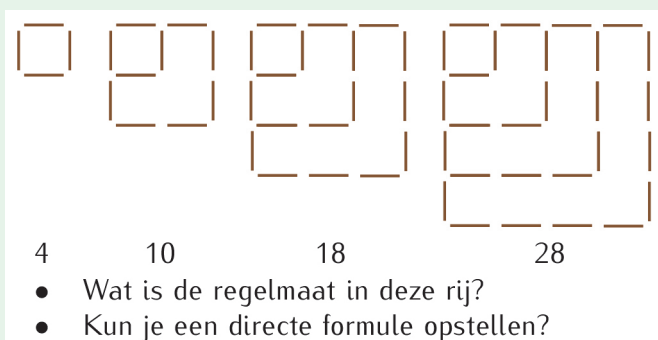
Noten

- [1] Zie: <https://www.imaginarymaths.be>
- [2] Illustratieverantwoording: alle beeldmateriaal met betrekking tot historische figuren is dankbaar ontleend aan de MacTutor website, die voor wat betreft de postzegelweergaves samenwerkt met de collectie van Jeff Miller. Zie: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>
- [3] Julia G. (1918). Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. *Journal de mathématiques pures et appliquées* 8, pp. 47-245.
- [4] Mandelbrot B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman and Co.

Over de auteur

Paul Igodt is emeritus gewoon hoogleraar verbonden aan het departement wiskunde van de KU Leuven en Campus Kulak. Hij is medeoprichter en coördinator van de Vlaamse Wiskunde Olympiade en coördineerde de Vlaamse stuurgroep die de reizende tentoonstelling 'Imaginary: pracht en kracht van wiskunde' organiseerde.
E-mailadres: paul.igodt@kuleuven.be

Het leuke van een studiedag is dat je je als docent weer even leerling mag wanen, zo ook op de studiedag van de NVvW. Desiree Agterberg beet het spits af met een lezing over 100 jaar wiskundeonderwijs en zoals het een goede docent betaamt begon ze met een check-in vraag (zie afbeelding).

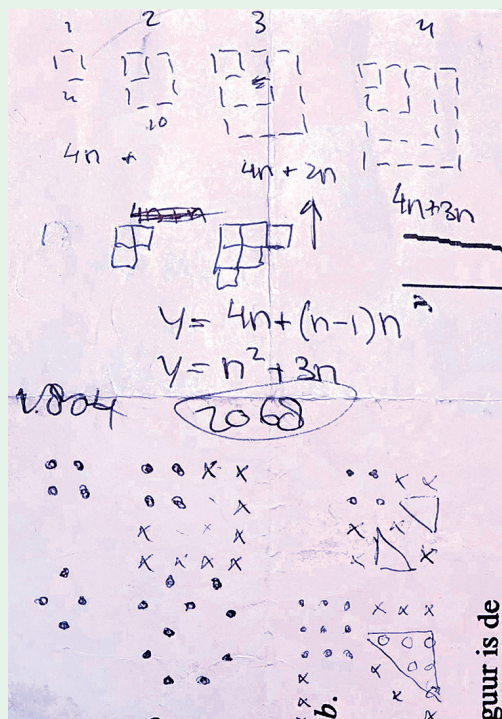


Helaas, geen pen en papier meegenomen... Mijn buurvrouw scheurde een stukje papier af en gaf mij een pen. Ik bekeek de opgave. De regelmaat herkende ik al snel, maar mijn kennis over rijen en reeksen was al ver weggezakt. Er was toch een regel om zo'n rij om te zetten naar een directe formule? Wat was die regel ook alweer? Ik begon te graven in mijn geheugen, maar moest tot de conclusie komen dat deze regel niet meer in mijn parate kennis zat.

De lezing vervolgde en de opgave verdween van het scherm. Ik had geen zin dat hele patroon over te nemen, dus noteerde alleen de getallen die met de patronen correspondeerden. Tekenend kost immers onnodig veel tijd. Ik begon wat mogelijke directe formules los te laten op de getallenrij, maar merkte dat dit niet in het juiste antwoord resulteerde. Dan toch maar de tekening herproduceren op mijn kladje.

Ik keek naar mijn schetsje en eigenlijk zag ik al vrij snel te formules ontstaan (zie afbeelding). Enerzijds opgelucht dat ik te midden van alle andere wiskundeleraars de oplossing had gevonden, anderzijds baalde ik van mijzelf dat ik in alle vallen was getrapt waar ik leerlingen ook vaak in zie lopen: niet het juiste materiaal bij mij hebben, proberen terug te grijpen op regels die je niet meer kent (of nog maar half), geen schetsen maken en de stellige overtuiging hebben dat iedereen het vraagstuk al heeft opgelost en ik nog niet.

Ik legde het papiertje weg en richtte me weer op de lezing, maar liet mijn oog er later toch weer op vallen. In mijn formule zit een ' n^2 ', wat doet suggereren dat er misschien een oppervlakte te herkennen is in het patroon.



Echter door het karakter van de 'luciferstokjes' kwam ik alleen tot lengtes en omtrekken. Ik probeerde nog de streepjes om te zetten naar stippen (omdat ik stippen vaak bij vergelijkbare TTP*-opdrachten had gezien), maar tevergeefs. Het liet mij niet helemaal los, maar je moet op een gegeven moment ook weer door met je leven.

In de avond, voorafgaande aan het afsluitend diner, legde ik het vraagstuk over de oppervlakte en ' n^2 ' nog voor aan een collega. 'Als je de stokjes nu tegen elkaar aanschuift?', zei hij, en krabbelde op de bar nog wat op mijn toch al kleine kladje. Het meisje achter de bar keek ons gebiologeerd aan en vroeg wat we aan het doen waren. 'Wiskunde', antwoordde ik en probeerde nog bondig de strekking van het vraagstuk over te brengen. Op haar gezicht verscheen ondertussen een grote lach: 'Oh, wiskunde, nee, dat begrijp ik toch niet...'

*Teaching Through Problem solving. Zie ook tpwiskunde.nl

Over de auteur

Paul Durenkamp is lerarenopleider wiskunde aan de RUG en NHL Stenden, en redactievoorzitter van de Giraf-reeks. E-mailadres: paul.durenkamp@nhlstenden.com

Vijf vragen aan....

Marja Bos

Ter gelegenheid van het honderdjarig bestaan hebben we de voorgaande hoofdredacteurs benaderd om stil te staan bij hun hoofdredacteurschap en wat er speelde in het wiskundeonderwijs in die periode. Ze konden kiezen tussen een geheel eigen verhaal of een speciale versie van onze rubriek Vijf vragen aan. Marja Bos bijt het spits af, ze was hoofdredacteur van 2001 tot 2008.



figuur 1 Marja's eerste *Euclides* als hoofdredacteur

Inleiding

Ons huidige vakblad *Euclides* ontstond in 1924 als *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*. Op 4 juni 1927 werd door de redactie besloten dat met ingang van jaargang 1927 / 1928 het bijvoegsel 'herdoopt' zou worden in *Euclides, tijdschrift voor de didactiek der exacte vakken*. Er werd geen nieuwe nummering aangebracht, dus de eerste jaargang met de naam *Euclides* werd uitgebracht als jaargang 4.

Even was ik in verwarring over het feit dat jaargang 2024 / 2025 nu als honderdste jaargang betiteld wordt: doortellend vanaf 1924 / 1925 zou 2024 / 2025 dan toch de 101e jaargang moeten zijn? Zou het jubileum per ongeluk eigenlijk te laat gevierd gaan worden? Maar na wat onderzoekwerk kwam ik erachter dat jaargang 1944 / 1945 (het laatste jaar van de Tweede Wereldoorlog) nooit verschenen is. Jaargang 1943 / 1944 was nog 'gewoon'

jaargang 20, maar het blad werd vervolgens pas weer uitgebracht ná de bevrijding, en daarmee werd jaargang 1945 / 1946 de 21^e jaargang. Het eerste nummer van die jaargang bevatte overigens meerdere verdrietige overlijdensberichten, en een oproep om ook andere namen door te geven van collega's die door de gruwelen van de oorlog waren omgekomen.

Hoe dan ook, 2024 / 2025 is dus wel degelijk de 100^e jaargang van *Euclides*.

Het leek de huidige redactie een leuk idee, enkele voormalige hoofdredacteurs een vijftal vragen voor te leggen voor deze jubileumjaargang. Zelf was ik hoofdredacteur in de periode 2001 – 2008. En hoe tijdvretend en intensief die zeven jaar ook waren, ik vond het fantastisch leuk en boeiend werk, en ik kijk er met heel veel plezier op terug!

Of mijn antwoorden op de vijf vragen nou zo interessant zijn voor de lezers, dat weet ik niet, maar vooruit, ik heb besloten een poging te wagen.



1 Welk advies zou je de hoofdredacteurs voor de komende eeuw willen meegeven?

Geen. Ik heb me daar niet mee te bemoeien, en bovendien zijn mijn opvolgers zeer wel in staat, hun eigen weg te kiezen. Wèl ben ik benieuwd hoe lang *Euclides* (ook) nog in papieren vorm zal blijven bestaan.

Destijds hadden we daar binnen de redactie al discussies over. Papier heeft immers nadelen: actueel nieuws publiceren gaat niet samen met de relatief trage productie van een papieren tijdschrift, en een goedverzorgde digitale archivering in plaats van het bewaren van een stapel mooie papieren tijdschriften is inmiddels ook gemeengoed – al kan tussentijdse verandering van het opslagmedium

>

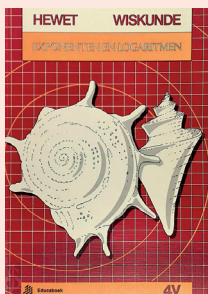
of de cloud in de toekomst mogelijk nog wel problemen opleveren. Ik constateer bij mezelf trouwens dat ik het nog steeds plezierig vind om 'van papier' te lezen, plezieriger dan digitaal, maar voor veel anderen en zeker voor jongeren ligt dat meestal al heel anders. Bovendien is het deels een kwestie van gewenning: ik gebruik al jaren wél een e-reader voor het lezen van romans, en het achtergrondlicht daarvan ervaar ik als veel comfortabeler voor mijn (oude) ogen, verder lees ik mijn dagelijkse krant gewoon op m'n tablet of m'n telefoon. Kortom...

Overigens, misschien leuk om in dit kader te vermelden: toen ik nèt hoofdredacteur was geworden, kreeg ik aanvankelijk nog aardig wat bijdragen per papieren post toegestuurd (snail mail), maar al heel snel was dat verleden tijd en kwam alle kopij per e-mail binnen.



2 Welke veranderingen heb je meegemaakt in het wiskundeonderwijs?

Ik beperk me voor deze vraag tot examenprogramma's. Ik startte als wiskundeleraar in 1982. En ik viel meteen met mijn neus in de boter: ik had weliswaar nog nèt even te maken met het staartje van de vwo-examenprogramma's wiskunde I en II, niet heel veel anders dan zoals ik ze zelf van 1969 tot 1975 als leerling had meegemaakt, maar de toenmalige wiskundesectie van mijn school schoof mij als nieuweling al snel alle voorbereidende werkzaamheden, nascholingscursussen en klassen toe rond de HEWET-experimenten. HEWET stond voor Herverkaveling Wiskunde Een en Twee; het ging om de introductie van de nieuwe vwo-vakken wiskunde A en B. Veel extra werk, maar ik vond het geweldig, en stortte me er volledig op. In die tijd had ik veel aan de informatie en artikelen uit de *Nieuwe Wiskrant* en *Euclides*, naast allerlei andere publicaties. Bovendien was ik zeer gecharmeerd van de HEWET-boekjes van OW&OC (de voorloper van het FI).



figuur 2 Eén van de legendarische HEWET-boekjes

Een paar jaar later volgde de invoering van wiskunde A en B in het havo (HAWEX). Inmiddels schreef ik mee aan de WiskundeLijn-schoolboeken voor 4/5-havo-A van Anne

van Streun, zodat ik me ook heel betrokken voelde bij de veranderingen voor het wiskundeonderwijs in de bovenbouw van het havo.

Ondertussen speelde er natuurlijk ook van alles in het toenmalige vbo/mavo. Ook daar werden de programma's ingrijpend gewijzigd, en wel vanuit het project W12-16 (en, algemener, vanuit de Basisvorming die ook in die tijd ingevoerd werd). Ik kreeg er rechtstreeks mee te maken toen ik hierover van 1991 tot 1993 in het kader van een onderzoeksproject van het RION (tegenwoordig GION geheten – een afdeling binnen de Rijksuniversiteit Groningen) samen met mijn geliefde leermeester Anne van Streun een tweejarige nascholingscursus voor mavo-leraren mocht verzorgen.

Naast mijn leraarschap was ik inmiddels ook werkzaam als universitair lerarenopleider van de RuG (wederom samenwerkend met Anne), en ook dat gaf natuurlijk weer extra aanleiding om de ontwikkelingen op de voet te volgen.

Eind jaren 1990 werd voor havo en vwo de Tweede Fase ingevoerd. Er werden 2 x 4 wiskundeprogramma's opgetuigd: wiskunde A1, A12, B1 en B12. Inmiddels was de methode WiskundeLijn geïntegreerd in *Moderne Wiskunde*, en deed ik concept-, schrijf- en eindredactiewerk voor de 7e editie – die meteen de eerste editie voor de Tweede Fase was. Ook daardoor voelde ik me opnieuw zeer betrokken bij de veranderingen en de vele te maken keuzes voor deze nieuwe examenprogramma's. Om een voorbeeld te noemen: Er werd pas in een laat stadium van ons schrijfwerk door het ministerie besloten dat de grafische rekenmachine gebruikt mocht (dus 'moest') gaan worden bij de nieuwe examens. Een vraag voor ons als methodeschrijvers werd dus ook, hoe we dit nieuwe hulpmiddel het best een plaats zouden kunnen geven in onze boeken. Ik had overigens in een eerder stadium in een experiment in mijn vwo-4-klassen op school al enige ervaring opgedaan met de TI-81.

Nadat ik mijn werkzaamheden bij de RuG en bij de uitgever beëindigd had, werd ik aangesteld als hoofdredacteur van *Euclides* – nog steeds naast mijn leraarschap, overigens. Tijdens die periode (2001 – 2008) was er voortdurend verschrikkelijk veel 'gedoe' rond de wiskunde-vakken binnen de Tweede Fase. Direct na de invoering van de nieuwe vakken A1, A12, B1 en B12 was de minister al gekomen met allerlei verlichtingsmaatregelen en andere (wisselende!) aanpassingen, die het er niet duidelijker op maakten, laat stáán beter (in mijn ogen). Vervolgens werd er nog harder ingegrepen: organiseerbaarheid van de profielen werd het toverwoord vanuit het ministerie, wat leidde tot gekortwiekte programma's wiskunde A en B.

Voor de wiskunde voor het NT-profiel werd daarvan het slachtoffer, maar er ontstonden door deze ‘vernieuwing’ ook allerlei andere problemen en inconsistenties. In mijn ogen werd het er alleen maar slechter op, en in bijna elk hoofdredactioneel (‘Van de redactietafel’ respectievelijk ‘Kort vooraf’) had ik weer nieuwe wijzigingen vanuit het ministerie te melden en uitte ik mijn zorgen over de beslissingen van hogerhand.

In 2007 werd deze zogeheten Vernieuwde Tweede Fase uiteindelijk ingevoerd, maar inmiddels was ook het plan opgevat om de wiskunde-examenprogramma’s havo/vwo nogmaals te wijzigen. De vernieuwingscommissie cTWO (commissie Toekomst WiskundeOnderwijs) deed daartoe voorstellen voor de vakken wiskunde A, B en D voor havo en vwo, en wiskunde C voor vwo. Als commissielid van cTWO was ik betrokken bij de totstandkoming van deze programma’s, ingevoerd in 2015. Persoonlijk was ik niet helemaal gelukkig met enkele elementen van het eindresultaat, ik had en heb zo mijn bezwaren aangaande o.m. de nieuwe vakken wiskunde C en D, maar uiteraard is zo’n gezamenlijk resultaat een compromis, en ik weet ook dat veel collega’s in het land juist enthousiast zijn over deze twee nieuwe vakken. Overigens was mijn school tevens pilotschool voor het vernieuwde cTWO-havo-A-programma, waardoor ik er samen met enkele andere collega’s uit mijn sectie ook in de dagelijkse praktijk bij betrokken was en wij wat zaken zelf in de klas konden uittesten. Daarbij ging het met name om de nieuwe insteek van het onderdeel statistiek.

Inmiddels zijn er alweer nieuwe plannen in de maak, maar daar ben ik niet meer bij betrokken. Ook de veranderingen in het vmbo (inclusief mavo) en het hoger onderwijs volg ik tegenwoordig slechts op afstand.



3 Welke onderdelen uit de tijd van jouw hoofdredacteurschap vind je nu nog steeds relevant?

– De invoering van het Studiehuis, behorend bij de Tweede Fase, leek gepaard te gaan met het idee dat de rol van de leraar nog maar heel beperkt hoort te zijn, namelijk als die van algemeen begeleider/coach. De leerling zou aan de hand van het lesmateriaal, al dan niet digitaal, de leerdoelen prima kunnen bereiken, via (vooral) individuele zelfwerkzaamheid... Ik maak me zorgen over die teruggetreden rol van de leraar. Volgens mij horen interactie (tussen de leerlingen onderling en met de leraar) en reflectie een grote rol te spelen in het wiskundeonderwijs, zeker in het voortgezet onderwijs. De leraar (didactisch, pedagogisch en zeker ook vakinhoudelijk bekwaam!) is degene die de benodigde diepgang kan

‘afdwingen’ door dóór te vragen, degene die de vereiste niveauverhoging kan stimuleren door samen met de leerlingen over de leerstof te praten en hen onder zijn/haar ogen wiskundige activiteiten uit te laten voeren, degene die het leren van de leerling organiseert en erop toeziet wat er tijdens de leeractiviteiten gebeurt om waar nodig adequate feedback te kunnen bieden.

– Sinds nog niet eens zo heel lang geleden wordt gecijferdheid expliciet benoemd als een belangrijk doel van wiskundeonderwijs. De wereld om ons heen wordt steeds complexer, en ik vind het van groot belang dat we als burgers in staat zijn allerlei kwantitatieve informatie kritisch te duiden. Dat gaat niet vanzelf.

– Veel wiskundeleraren hebben de indruk dat ze gereduceerd zijn tot slechts de simpele uitvoerder van andermans ideeën (de schoolleiding, het schoolbestuur, de overheid...). Dat is niet goed. Niet voor je eigenwaarde, maar belangrijker: niet goed voor de kwaliteit van je werk. Pak als leraar het initiatief terug, leun niet teveel op het aange-reikte lesmateriaal maar zet ook zelf je kennis en creativiteit in, ontwerp je eigen lessen, volg de ontwikkelingen en blijf op de hoogte, hou de verbinding met collega’s elders,...

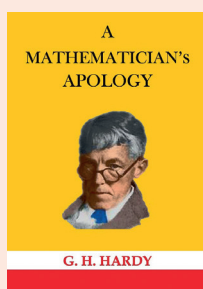
Ook daarin kunnen de vereniging en *Euclides* je trouwens ondersteunen.



4 Welk (wiskundig) boek of andersoortig kunstwerk raad je de lezers aan?

Ach, er is zoveel... Twee tips:

– G.H. Hardy: *A Mathematician’s Apology* (Apologie van een wiskundige; 1940). Een fascinerend boekje over onder meer de schoonheid van de wiskunde, mede bedoeld ter verdediging van de ‘zuivere wiskunde’. Hardy was van mening dat wiskundeonderwijs zich voornamelijk zou moeten richten op de intrinsieke waarde en de esthetiek van de wiskunde, zonder per se aandacht te schenken aan mogelijk praktisch nut van de wiskunde. Ik denk daar persoonlijk heel anders over, maar ik vond het desondanks een genot om dit boekje te lezen! Aanrader.



figuur 3 Een heruitgave uit 1987 (Hawk Press)



– Werk van Rinus Roelofs, beeldend kunstenaar en wiskundige. Zie onder meer zijn website, www.rinusroelofs.nl. Hij voorzag destijds op mijn verzoek de omslagen van jaargang 79 (2003/2004) van enkele van zijn prachtige ontwerpen. Klaske Blom interviewde hem voor nr 79/4, de *Euclides*-special ‘Kunst & Wiskunde’ (verschenen januari 2004).



5 Waar wil je de lezers tot slot ook nog op attenderen?

Als beginnend hoofdredacteur was ik verbaasd dat de oude jaargangen van *Euclides* niet in een voor ieder toegankelijk archief terug te vinden waren. Daarom nam ik in 2002 het initiatief tot archivering. Wolters-Noordhoff bleek nog in het bezit te zijn van bijna alle oude nummers, en men was daar bereid om deze collectie af te staan aan de NVvW, mits zorg gedragen zou worden voor een goed

beheer. Het NVvW-bestuur heeft de nummers vervolgens overgedragen aan de Koninklijke Bibliotheek, waar de (papieren) exemplaren op verzoek op te vragen zijn. Zie ook het artikel van Gert de Kleuver in nr 84/6 (jaargang 2008/2009).

Daarnaast heeft met name Dick Klingens (overleden in 2021) zich destijds ontfermd over de digitalisering van al die nummers, een helse klus. Ze zijn nu snel en gemakkelijk terug te vinden via archief.vakbladeuclides.nl.

Over de auteur

Marja Bos was onder meer wiskundeleraar van 1982 tot 2019 en hoofdredacteur van *Euclides* gedurende de jaren 2001-2008. Inmiddels is ze met pensioen.

E-mailadres: mgwbos@outlook.com

Paul van de Veen

De heks van Agnesi

Paul van de Veen belicht de historische context van een kromme die opduikt in een analytische meetkundeopgave van deze tijd.

In het vwo wiskunde-B-programma heeft analytische meetkunde en differentiaalrekening een belangrijke plaats. De volgende opgave, zie figuur 1, uit één van de heden-daagse wiskundeboeken is een goed voorbeeld. Een mooie opgave, ook behoorlijk pittig. Om uit de parametervoorstelling de baanformule af te leiden zonder die al te kennen vereist handig manipuleren van gonio-

metrische uitdrukkingen. Gelukkig neemt de opgave de leerling stevig bij de hand. Helaas wordt de schitterende historische context weggelaten. Want deze constructie en deze kromme staat namelijk bekend onder de vreemde naam ‘de heks van Agnesi’. Het verhaal achter die kromme en vooral áchter Maria Gaetana Agnesi bevat verschillende aspecten die didactisch goed bruikbaar zijn.

Een punt P legt een baan af die als volgt ontstaat. Zie figuur 14.74. De cirkel c heeft middelpunt $M(0,1)$ en straal 1. De lijn door de oorsprong en een punt A op c snijdt de lijn $y = 2$ in het punt B . De horizontale lijn door A en de verticale lijn door B snijden elkaar in P . De hoek die de lijn OA met de x -as maakt is t radialen met $0 < t < \pi$.

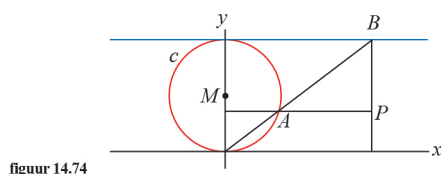
In figuur 14.75 zie je de baan van P .

Voor deze baan geldt
$$\begin{cases} x_P(t) = \frac{2\cos(t)}{\sin(t)} \\ y_P(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}$$

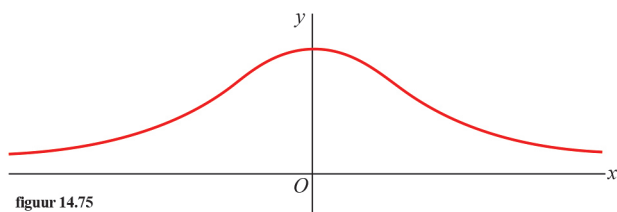
- a Toon aan dat de formule voor $x(t)$ juist is.
- b Druk de hoeken van driehoek OAM uit in t en toon aan dat de formule voor $y(t)$ juist is.

Bij de baan hoort de formule $y = \frac{8}{x^2 + 4}$.

- c Toon dit aan.



figuur 14.74



figuur 14.75

figuur 1

Vreemde naam

Allereerst die vreemde naam. Het is een vertaalfout!

Omdat die lijn OA ronddraait rond punt O gaf Agnesi de kromme de naam 'versiera' hetgeen 'rondgaan' betekent. (Denk bijvoorbeeld aan het Franse 'anniversaire', (verjaardag, de 'rondgang' van het jaar"). Maar een ander Latijns woord kwam hier dicht bij in de buurt, het Italiaanse 'aversiera' en dat betekent 'vrouwelijke duivel, heks'. Bij het vertalen naar het Engels werd per ongeluk 'aversiera' overgenomen als naam van de kromme. Vandaar die vreemde naam 'the witch of Agnesi'. Leerlingen denken wel eens bij wiskunde dat al die vaak zo moeilijke wiskunde 'lineair' ontwikkeld is door genieën. Niets is minder waar. Foute vertalingen leiden soms, zoals in dit geval, tot een heel vreemde naam. Leerzaam om



figuur 2 Maria Agnesi

leerlingen te laten zien dat fouten maken menselijk is. En dat er een woord is voor 'vrouwelijke duivel, heks' zegt ook iets over de manier waarop lang door mannen tegen vrouwen is aangekeken.

Agnesi

Een tweede aspect is Maria Agnesi zelf. Een bijzondere vrouw! Ze leefde van 1718 tot 1799 in Italië en was de oudste van 21 kinderen. Maar ze wist voor zichzelf op te komen. Op haar negende hield ze in het Latijn een lange toespraak waarin ze opkwam voor vrouwenrechten. Op haar elfde sprak ze Frans, Italiaans, Grieks, Hebreeuws, Spaans, Duits, Latijn en nog wat talen. Ze schreef het eerste boek waarin differentiaal en integraalrekening behandeld werden. Ze was de eerste vrouw die professor in de wiskunde werd. En ze ontdekte deze mooie kromme. In 1752, na de dood van haar vader, ging ze theologie studeren en vanaf dat moment liet ze de wiskunde achter zich en begon zich in te zetten voor de armsten van die tijd. Ze richtte een bejaardentehuis op in Milaan. Niet zo lang geleden werd er om haar te eren een krater op Venus en een asteroïde naar haar genoemd.

Kijk, dat is toch prachtige context die niet weggelaten mag worden?

Over de auteur

Na 25 jaar als zelfstandig werktuigbouwkundig ingenieur in de revalidatietechniek gewerkt te hebben stapte Paul in 2007 over naar het wiskunde onderwijs. Op dit moment is hij examinator Staatsexamens en senior docent wiskunde bij het Vavo Enschede.

De mooie geschiedenis van de wiskunde heeft zijn niet aflatende belangstelling, zie www.vandeveen.nl
E-mailadres: info@vandeveen.nl

Een vergeten hoofdredacteur: Fred Goffree

In het kader van 100 jaar *Euclides* en 100 jaar NVvW duiken we in het verleden, op zoek naar gebeurtenissen en personen die nu nog relevant zijn, mede aan de hand van publicaties in *Euclides*. Martinus van Hoorn vindt dat de betekenis van Fred Goffree voor het wiskundeonderwijs en voor *Euclides* onderbelicht is en laat daarom zijn licht schijnen op deze bijzondere man.



Fred Goffree 1934 -2020

Inleiding

Fred Goffree werd geboren te Amsterdam. Vermoedelijk bezocht hij de mulo, en in elk geval doorliep hij de kweekschool, waarna hij ook de onderwijsakten voor wiskunde behaalde. Dit was een gebruikelijke weg voor mensen met talent die niet naar de hbs of het gymnasium waren gegaan. Fred behaalde de akte mo-B wiskunde in 1962 en werd leraar aan een kweekschool in Twente. Omdat in 1968 de kweekscholen werden omgezet in

pedagogische academies was een nieuw leerboek voor de didactiek van het rekenen welkom. Met A.A. Hiddink en J.M. Dijkshoorn schreef Fred toen *Rekenen en didactiek* (1968) voor studenten aan pedagogische academies. Zijn medeauteurs waren ook kweekschoolleraren.

Wiskobas

Na kennismaking met Hans Freudenthal werd Fred lid van de werkgroep Wiskobas, samen met Adri Treffers en Edu Wijdeveld. Ook traden tot de werkgroep Wiskobas toe Huub Jansen, Ed de Moor en anderen. In 1971 werden de leden van de werkgroep Wiskobas medewerker van het IOWO, dat toen werd opgericht; het IOWO werd geleid door Freudenthal. De opdracht voor de 'Wiskobassers' was de ontwikkeling van verbeterde leerplannen voor de basisschool. Aan het eind van de jaren 1970 verscheen als resultaat hiervan een unieke serie van elf Leerplanpublicaties.



figuur 1 Drie Wiskobassers van het eerste uur:
Adri Treffers, Fred Goffree en Edu Wijdeveld, in 1970
Foto uit het jubileumboek, bladzijde 359.

Fred Goffree organiseerde samen met Huub Jansen Wiskobas-conferenties voor docenten aan pedagogische academies. Dit begon al voor 1971. Deze conferenties waren nogal strak geregisseerd. Leerkrachten basisonderwijs en medewerkers van pedagogische instituten werden er niet voor uitgenodigd. De focus lag op de docenten aan de pedagogische academies; zij zouden bij uitstek de ambassadeurs moeten worden van het nieuw ontwikkelde reken- en wiskundeonderwijs.

Deze docenten werden dus beschouwd als betrokkenen – maar feitelijk kwamen zij steeds meer in een volgende rol. Dit laatste werd niet door iedereen binnen het IOWO onderkend – en nog steeds niet. Het heeft de latere implementatie van de nieuwe leerplannen vast geen goed gedaan.

Anekdote

In de jaren '70 werkte ik aan de pedagogische academie te Appingedam. Vanuit deze pedagogische academie gingen wij met z'n tweeën of drieën naar de meeste Wiskobas-conferenties. Aldus togen wij een keer naar Egmond aan Zee. We waren die keer met z'n drieën: een andere (oudere) wiskundige, een pedagoog die zich gespecialiseerd had in het rekenonderwijs en ik. Mijn beide collega's waren opgeklommen via aktestudie, vanaf het onderwijzerschap. De conferentie duurde tot en met de zaterdagmiddag. Maar ditmaal besloten wij het zaterdagmiddagprogramma aan ons voorbij te laten gaan. Dan hadden we immers nog een weekend. De daaropvolgende week ontvingen wij een brief van F. Goffree met als inhoud: wij dienden de gehele conferentie bij te wonen. Eerder vertrekken gaf geen pas.

Euclides

Fred was al in 1969 toegetreten tot de redactie van *Euclides* (zie *Euclides* 44-6, maart 1969). Het daaropvolgende nummer van *Euclides* bevatte een uitvoerige bijdrage van Edu Wijdeveld en Fred Goffree over hoe de mavo-wiskunde vernieuwd zou kunnen worden, zowel inhoudelijk alsook methodisch. Hier mag in het midden blijven of mavo-docenten bijzonder gecharmeerd waren van dit artikel. Maar later berichtte Fred in *Euclides* over datgene waar hij het meest over vertellen kon: de ontwikkelingen in het basisonderwijs. Samen met Edu Wijdeveld en Adri Treffers schreef hij daarover een serie artikelen.

Pedagogiek en didactiek

Fred richtte zich sterk op de pedagogisch-didactische kant van het (reken)onderwijs. In 1971 had hij een kandidaats-examen pedagogiek gedaan (te Utrecht), waarna hij in 1973 een doctoraal examen in de onderwijskunde deed (te Groningen). Zes jaar later promoveerde hij op het pedagogische proefschrift *Leren onderwijzen met Wiskobas* (1979), bij H. Freudenthal en J. Sixma te Utrecht. Hij publiceerde daarna *Het land van Okt*, voor studenten aan pedagogische academies, over het rekenen in het achttallig stelsel, bedoeld om de rekenalgoritmen te leren doorgronden. *Het land van Okt* was zeer degelijk doordacht, maar ondervond weinig bijval onder de docenten aan pedagogische academies. Zij waren er niet van overtuigd dat iedereen de algoritmen in het achttallig stelsel moest doorgronden. Dit was voor Fred een teleurstelling. Vervolgens publiceerde Fred *Wiskunde en didactiek*, bestemd voor studenten aan de nieuwe pabo (vanaf 1984 de opvolger van de pedagogische academie alsook van de opleiding voor kleuterleidsters). Het boek was de logische opvolger van het eerdere *Rekenen en didactiek*. Fred verving het woord 'rekenen' graag door het woord 'wiskunde'. Dit zat trouwens ook al in het woord Wiskobas.

Fred Goffree was niet de leider van Wiskobas (dat was Edu Wijdeveld), en evenmin was hij de theoreticus achter de leerplannen (dat was Adri Treffers). Hij is ongetwijfeld van grote betekenis geweest door zijn sterk pedagogisch-didactische inslag, en vast ook door zijn soms missionaire optreden.

SLO en UvA

Na de opheffing van het IOWO (1980) ging Fred naar de SLO te Enschede. Dat werd hem niet door ieder in dank afgenomen, want de opheffing van het IOWO was immers geïnstigeerd door de oprichting van de SLO. In dienst van de SLO publiceerde Fred *Ik was wiskundeleraar* (1985), een fraaie bundel interviews, volgens velen verplichte literatuur. Zo gaf hij mensen als Jan Karel Timmer, Johan Wansink en Pierre van Hiele (vooral deze drie, vind ik, MvH) de eer die ze zeker verdienden. Timmer en Van Hiele waren sterke analytici, en ik denk dat Fred met Wansink een visie op het leraarschap gemeen had. Daarna verscheen van zijn hand *Nanda, lerares wiskunde* (1989), over de altijd nuchtere lerares Nanda Querelle, met bijdragen van onder anderen Hans Freudenthal en George Schoemaker. Hiermee had Fred een monument opgericht voor Nanda. Je ziet aan de twee SLO-boeken duidelijk Freds oriëntatie op het voortgezet onderwijs, meer dan vroeger.

>

In 1985 werd Fred bijzonder hoogleraar aan de UvA, in de faculteit van de sociale wetenschappen; waarbij hij als leeropdracht kreeg 'Educatief ontwerpen ten behoeve van volwasseneneducatie, in het bijzonder wat betreft wiskunde'. Deze functie vervulde hij tot 1995. Vaak kwam Freds voorkeur voor de pedagogisch-didactische aspecten in zijn stukken naar voren. Dit is altijd zo gebleven. Zo verscheen in 2002 zijn artikel 'Wiskundendidactiek in Nederland' in het *Nieuw Archief voor Wiskunde*, het tijdschrift van het Wiskundig Genootschap; hierin besprak hij enkele wiskundig didactische dissertaties.

Redding van *Euclides*

Toen in september 1986 het tijdschrift *Euclides* onverwacht in een crisis belandde (namelijk omdat er geen hoofdredacteur bleek te zijn), nam Fred Goffree, die vice-voorzitter van de redactie was, het roer in handen. Dat er een vice-voorzitter was, dat was tot die tijd niet bekend! Tot april 1987 nam Fred toen het hoofdredacteurschap waar. Hij wist nieuwe kopij te verwerven en stelde ook orde op zaken in de redactie; hij hield duidelijk niet van lanterfant en vooral niet van humbug. Van al zijn uitgaande brieven uit die tijd bewaarde hij afschriften. Ook als een redactielid een reden zou hebben tijdelijk weinig actief te zijn vond Fred dat hij of zij beter plaats kon maken voor een ander. Sommige van zijn brieven waren echte juweeltjes qua stijl en inhoud – maar zo zullen de geadresseerden er niet tegenaan gekeken hebben. Fred kon het zich permitteren en het diende een belangrijk doel: de voortgang van *Euclides*. Al die tijd werd in het colofon van *Euclides* trouwens geen melding gemaakt van Freds feitelijke functie-uitoefening. In april 1987 nam Fred afscheid van de redactie, waarbij hij een redelijke voorraad kopij naliet, terwijl de wat kleinere omvang van de redactie ruimte gaf nieuwe mensen aan te trekken.

Fred had *Euclides* gered uit een lastige situatie. De hele tijd had het bestuur van de NVvW dit niet in de gaten. De NVvW besteedde geen aandacht aan zijn werk voor *Euclides*. De uitgever schonk hem een mooie hotelbon voor twee personen.

Jubileumboek NVvW

In het voorjaar van 1997 begonnen de voorbesprekingen in verband met de beoogde uitgave van een jubileumboek van de NVvW in 2000. Een gezelschap van aanzienlijke omvang kwam bijeen aan de Tiberdreef te Utrecht, in een ruimte van het Freudenthal Instituut. Fred Goffree was erbij en nam intensief deel aan de beraadslagingen. Het voorzitterschap werd eerst vervuld door Bert Zwaneveld,



figuur 2

herschreef hij een hoofdstuk; dit was in één geval primair uit respect voor de auteur. Maar vervolgens schreef hij zelf een hoofdstuk dat niet voldeed aan de tevoren gestelde eisen. Zijn hoofdstuk was veel te lang en tamelijk ongestructureerd. Met enige tegenzin – maar toch – begon hij aan het revisiewerk, en dat deed hij goed.

Toen kwam er een kink in de kabel. Vanwege een zijns inziens onbevredigend verlopende discussie met de uitgever trok hij zich uit protest terug uit de redactiecommissie; het had te maken met de vermelding van namen op de voorkant van het jubileumboek. Fred lette op de vormgeving, en wilde dat zijn oordeel gehoord werd. Hij kreeg zijn zin en kwam na enige tijd – na geruime tijd, mag je wel zeggen – terug in de redactiecommissie. Het jubileumboek wordt sindsdien aangehaald als: F. Goffree e.a., *Honderd jaar wiskundeonderwijs*. Zo zie je maar.

De namen staan alfabetisch op de voorkant. Door Freds afwezigheid hadden Bert en ik de vrijheid gehad om met z'n tweeën beslissingen te nemen. Fred nam het resultaat van ons werk in ogenschouw en betuigde toen expliciet zijn instemming met de intussen gemaakte keuzen. We werkten met veel plezier verder aan het jubileumboek.



figuur 3 Plezier bij de redactiecommissie van het jubileumboek, 1997-2000. Foto uit het jubileumboek, bladzijde 33.

Basisonderwijs

Uit het bovenstaande blijkt weliswaar dat Fred na zijn periode bij het IOWO vaak bezig was met het voortgezet onderwijs of de volwasseneneducatie. Maar hij vergat het basisonderwijs nooit. Het persbericht van de Universiteit Utrecht bij zijn overlijden vermeldt (zie *Euclides* 96-1, september 2020) dat hij de hoofdauteur was van de *Proeve van een nationaal programma rekenen-wiskunde en didactiek op de pabo* (1995). Freds specialiteit was nog altijd de didactiek voor rekenen en wiskunde op de basisschool, en in 1995 had hij maar liefst zijn derde leerboek daarover gepubliceerd.

Betekenisvol en van blijvende waarde

Na 2000 trof ik Fred nog enige malen. Eén keer trof ik hem in verkreukelde toestand, met een racefiets, op het station van Groningen. Hij ging er regelmatig met de fiets op uit, en die keer was hij lelijk gevallen.

De laatste keer dat ik contact met Fred had was toen ik (samen met Jan Guichelaar) bezig was met het eerste artikel over de geschiedenis van het blad *Pythagoras*, bestemd voor het *Nieuw Archief voor Wiskunde*. Ik wilde in dit artikel de bekende foto opnemen van de Wiskunde Werkgroep in 1948 (zie voor deze foto het jubileumboek, bladzijde 201). Ik wist dat Fred het origineel van deze foto bezat. Hij stuurde mij de foto per post, uiterst degelijk

verpakt. Ik liet er door een vakfotograaf een goede scan van maken en stuurde de foto terug. De correspondentie met Fred was uiterst hartelijk. Je beseft dan niet dat dit de laatste keer zou zijn. Bert heeft later nog contact met hem gehad – ook over die foto.

Wat ik achteraf bedacht: dat Fred die originele foto bezat, zegt iets over zijn relatienetwerk.

Fred Goffree heeft gedurende meer dan veertig jaar op heel verschillende manieren gewerkt aan verbetering van het wiskundeonderwijs. Hij deed dat karaktervol en met respect voor belangrijk werk van anderen. Dit laatste mag wel eens extra worden benadrukt. Mensen als Wansink, Van Hiele, Treffers en (vooral) Freudenthal had hij heel hoog zitten – sterker nog, kritiek op Freudenthal vatte hij soms bijna persoonlijk op.

Fred stelde eisen aan zichzelf en aan anderen. Hij was geen verenigingsman, en zocht graag zelf zijn weg. Hij zag nooit op tegen extra werk. Wat hij deed was betekenisvol, en Fred heeft werk nagelaten van blijvende waarde.

Over de auteur

Martinus van Hoorn was van 1987-1996 hoofdredacteur van *Euclides*. E-mailadres: mc.vanhoorn@wxs.nl



HAN.NL/OPENAVOND

1E-GRAADS BEVOEGDHEID HALEN?

KIES VOOR DE DUALE MASTER
LERAAR WISKUNDE AAN DE HAN.
CHECK DE MOGELIJKHEID OM JE
MASTER TE FINANCIËREN MET DE
LERARENBEURS.

KOM NAAR DE OPEN AVOND OP
12 MAART VOOR MEER INFO!



OPEN UP
NEW
HORIZONS.

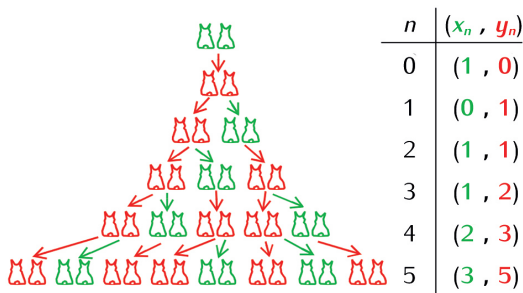
HAN UNIVERSITY
OF APPLIED SCIENCES

Affiniteit met Fibonacci

Het konijntjesprobleem uit Fibonacci's *Liber Abaci* geeft hier aanleiding tot een hapje transformatiemeetkunde en een toetje lineaire algebra.

De Fibonacci-transformatie

Het beroemdste probleem uit *Liber Abaci*, het eerste boek in Europa waarin het decimale talstelsel uit de doeken wordt gedaan, is dát waarin wordt gevraagd het aantal konijnenparen dat zich bevindt in een ommuurde tuin, te berekenen. Daarbij is gegeven dat een vruchtbaar paar elke maand één nieuw gemengd paar voortbrengt en dat zo'n nieuw paar na één maand zelf productief is. In het 'productieschema', figuur 1, zijn de pasgeboren paren groen en de geslachtsrijpe paren rood gekleurd. Fibonacci vraagt dan naar het aantal paren na één jaar uitgaande van één geslachtsrijp paar, onder de aanname dat er geen konijnen voortijdig dood gaan.



figuur 1

Fibonacci begon zijn proces met één rood paar en dat leverde hem na twaalf stappen 377 paartjes op. Was de som dan klaar? Mooi niet dus! In de loop der eeuwen heeft menig wiskundige zich intensief bezig gehouden met de zo rijk gebleken rij van Fibonacci^[1]:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, enzovoort. Ik let nu, zie figuur 1, op de getallenparen die bij de paren (groen, rood) van elke generatie passen. De stap van generatie n naar $n + 1$ correspondeert met de recursieformules:

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Of meer dynamisch genoteerd:

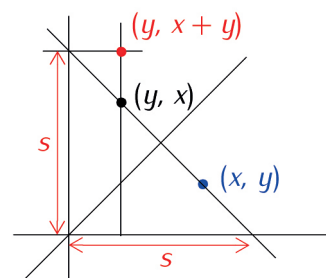
$$(x_n, y_n) \rightarrow (y_n, x_n + y_n)$$

Vergeet nu even dat het ging om paren opvolgende Fibonacci-getallen en beschouw de transformatie die aan elk paar reële getallen (x, y) het paar $(y, x + y)$ toewijst. Het staat in alle schoolboeken: bij de verzameling van alle geordende paren reële getallen past een meetkundige voorstelling, het (cartesisch) coördinatenvlak.

De transformatie $(x, y) \rightarrow (y, x + y)$ kan dan worden opgevat als een puntransformatie van het platte vlak.

Deze 'Fibonacci-transformatie' kan in twee stappen worden uitgevoerd, zie figuur 2:

- (1) spiegel in de lijn $x = y$, ofwel $(x, y) \rightarrow (y, x)$
- (2) verschuif verticaal: $(y, x) \rightarrow (y, s)$ met $s = x + y$



figuur 2

Dit nu is een voorbeeld van een zogeheten *affiene transformatie* (ook wel *affiniteit*). Affiene transformaties van het vlak worden gekenmerkt door twee eigenschappen:

- 1 Ze beelden rechte lijnen af op rechte lijnen.
- 2 Ze zijn *paralleltrouw*: evenwijdige lijnen worden afgebeeld op evenwijdige lijnen.

Dat de transformatie $(x, y) \rightarrow (y, x + y)$ voldoet aan deze twee kenmerken, wil ik hier wel even verifiëren.

Dat horizontale lijnen op verticale lijnen worden afgebeeld is zonder rekenwerk te zien: eerst spiegelen en dan schuiven langs het verticale spiegelbeeld.

Verticale lijnen worden afgebeeld op schuine lijnen die parallel zijn met de diagonaal $x = y$. Zie maar: de punten (c, t) met c constant en t variabel worden afgebeeld op punten $(t, c + t)$ die dan allemaal op de lijn $y = x + c$ liggen. Stel nu dat de drie punten $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ en $C(c_1, c_2)$ op één rechte lijn liggen, die noch horizontaal, noch verticaal is. Er geldt dan dat AB en AC gelijke richtingscoëfficiënt ($\neq 0$) hebben. ofwel:

$$\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{c_2 - a_2}{c_1 - a_1}$$

Pas ik nu de transformatie $(x, y) \rightarrow (y, x + y)$ toe op de drie punten, dan hebben de beeldpunten A' , B' en C' de coördinatenparen: $(a_2, a_1 + a_2)$, $(b_2, b_1 + b_2)$ en $(c_2, c_1 + c_2)$. De richtingscoëfficiënt (helling) van $A'B'$ is nu:

$$\frac{(b_1 + b_2) - (a_1 + a_2)}{b_2 - a_2} = \frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2} + 1$$

dus: $1 +$ omgekeerde van de helling van AB .

Analoog voor de hellingen van $A'C'$ en AC . De hellingen van $A'B'$ en $A'C'$ zijn dan aan elkaar gelijk omdat die van AB en AC dat zijn.

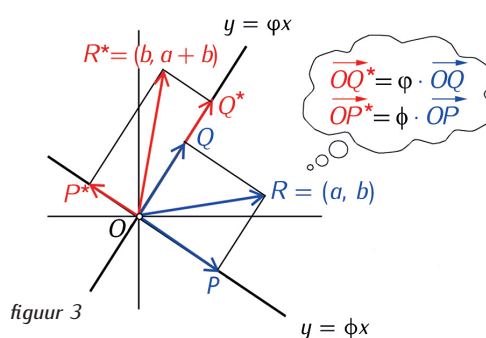
Conclusie: A' , B' en C' liggen op één lijn. Dat aan de tweede eis van affiniteit is voldaan, dus dat evenwijdige lijnen worden afgebeeld op evenwijdige lijnen is ook helder: lijnen met helling m worden afgebeeld op lijnen met helling $1 + \frac{1}{m}$.

Omdat de Fibonacci-transformatie het punt $(0, 0)$ invariant laat, wordt een lijn door de oorsprong O afgebeeld op een lijn die ook door O gaat. Het beeld van de lijn $y = mx$ ($m \neq 0$) is zo de lijn $y = (1 + \frac{1}{m})x$. Kan een lijn door O samenvallen met zijn origineel? Ja, als (en alleen als) m voldoet aan $m = 1 + \frac{1}{m}$ ofwel $m^2 = m + 1$. Dit is alleen het geval voor $m = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$. De positieve waarde van m is gelijk aan de 'gouden reden' ('golden ratio') die vaak aangeduid wordt met de Griekse letter φ . De negatieve waarde voor m duid ik hier in het vervolg aan met ϕ . Merk op dat $\varphi + \phi = 1$ en $\varphi \cdot \phi = -1$. Uit de tweede gelijkheid volgt dat de twee lijnen in het orthonormale Oxy -vlak die door de Fibonacci-transformatie op zichzelf worden afgebeeld, loodrecht op elkaar staan! Dat de lijnen $y = \varphi x$ en $y = \phi x$ op zichzelf worden afgebeeld, betekent niet dat ze ook *puntsgewijs* invariant zijn. Sterker: afgezien van het punt O is geen enkel punt

invariant. De punten op de lijn $y = \varphi x$ worden stuk voor stuk vanuit O vermenigvuldigd met φ . Immers uit $\varphi^2 = \varphi + 1$ volgt:

$$(t, \varphi t) \rightarrow (\varphi t, t + \varphi t) = (\varphi t, \varphi^2 t) = \varphi \cdot (t, \varphi t)$$

In de bovenstaande regel kan overal φ worden vervangen door ϕ , zodat ook op de lijn $y = \phi x$ sprake is van een vermenigvuldiging vanuit O , maar hier met (de negatieve) factor ϕ . Dit geeft dan een nieuwe meetkundige kijk op de Fibonacci-transformatie $(x, y) \rightarrow (y, x + y)$. Bij elk punt (a, b) hoort een plaatsvector die kan worden ontbonden in componenten langs de lijnen $y = \varphi x$ en $y = \phi x$, zie figuur 3.

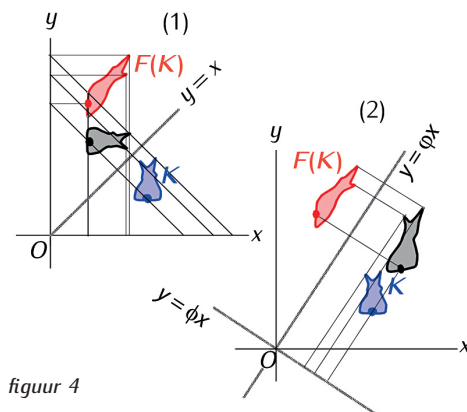


figuur 3

Het effect van de Fibonacci-transformatie - die ik vanaf hier zal aanduiden met F - op die componentvectoren is dat ze respectievelijk worden vermenigvuldigd met factor φ en ϕ . Omdat F paralleltrouw is en parallellogrammen afbeeldt op parallellogrammen, kan het beeld van (a, b) worden gevonden via de beelden van de componentvectoren, zie figuur 3.

F kan dus op twee manieren worden opgevat als het product van twee affine transformaties, zie figuur 4:

- (1) *spiegeling* (in de lijn $y = x$) gevolgd door een verticale 'afschuiving';
- (2) samenstelling van twee axiale *vermenigvuldigingen* (of 'strekkingen'), de een met factor φ t.o.v. de lijn $y = \phi x$ en de ander met factor ϕ t.o.v. de lijn $y = \varphi x$.



figuur 4

>

Recursief versus direct

Er zijn twee voor de hand liggende manieren om een oneindige getallenrij $x_0, x_1, x_2, \dots$ vast te leggen:

- (1) Via een *recursie-formule*, waarbij de n^{de} term van de rij $x_0, x_1, x_2, \dots$ algebraïsch wordt uitgedrukt in een (of meer) voorganger(s).
- (2) Via een *directe formule* waarbij de n^{de} term van de rij $x_0, x_1, x_2, \dots$ algebraïsch wordt uitgedrukt in n .

Twee (vroeger op school overbekende) rijen, met a en c als constanten $\neq 0$:

de *rekenkundige* (of *lineaire*) rij.

Manier (1): $x_0 = a$ en $x_n = x_{n-1} + c$

Manier (2): $x_n = a + (n-1)c$

de *meetkundige* (of *exponentiële*) rij.

Manier (1): $x_0 = a$ en $x_n = c \cdot x_{n-1}$

Manier (2): $x_n = a \cdot c^{n-1}$

Het moet me even van het hart: rekenkundige en meetkundige rijen met hun somformules, waar zijn die gebleven in ons curriculum? Sowieso wordt 'discrete wiskunde' nu stiefmoederlijk behandeld op school, in mijn ogen is dit onbegrijpelijk. Maar in de kringloop van ons onderwijsprogramma komt er vast wel weer eens een revival, daar troost ik mij dan maar mee.

Formules van Binet

De rij van Fibonacci is exemplarisch voor een via recursie gedefinieerde rij. Maar luistert zij ook naar een directe formule? Het antwoord is ja en de ontdekking van die formule wordt toegeschreven aan Jacques Binet (1786-1856). Hij bewees dat de rij van Fibonacci de som is van twee meetkundige rijen. Er zijn diverse manieren om deze som te vinden. Hier laat ik eerst zien dat dit via de transformatie F , opgevat als product van twee strekkingen, goed lukt. De termen van de Fibonacci-rij geef ik in het vervolg aan met $f_0, f_1, f_2, \dots$ waarbij $f_0 = f_1 = 1$.

Terug naar het Oxy -vlak. Als startpunt neem ik $(f_0, f_1) = (1, 1)$. Bij herhaald toepassen van de transformatie F komt er

$$F(f_0, f_1) = (f_1, f_2) = (1, 2)$$

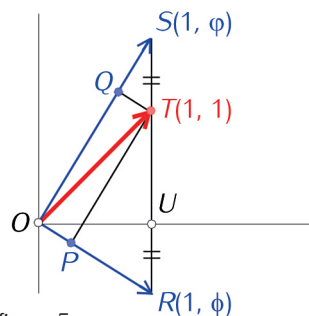
$$F^2(f_0, f_1) = (f_2, f_3) = (2, 3)$$

$$F^3(f_0, f_1) = (f_3, f_4) = (3, 5)$$

enzovoort.

Bij iedere stap worden de componenten van deze vectoren langs de twee invariante lijnen $y = \varphi x$ en $y = \phi x$ respectievelijk met φ en met ϕ vermenigvuldigd en n keer toepassen van F op $(1, 1)$ geeft het punt of de vector (f_n, f_{n+1}) . Door

de vector $(1, 1)$ te ontbinden in componenten langs de lijnen $y = \varphi x$ en $y = \phi x$ en deze componenten dan keer op keer respectievelijk met φ en met ϕ te vermenigvuldigen, vind ik zo een directe uitdrukking van f_n in n .



figuur 5

In figuur 5 geldt om te beginnen:

$$|SU| = \varphi \text{ en } |RU| = -\phi$$

Hieruit volgt dan:

$$|ST| = \varphi - 1 = -\phi = |RU|$$

En verder:

$$\frac{|OQ|}{|OS|} = \frac{|RT|}{|RS|} = \frac{1-\phi}{\varphi-\phi} = \frac{\varphi}{\varphi-\phi}$$

$$\frac{|OP|}{|OR|} = \frac{|ST|}{|RS|} = \frac{\varphi-1}{\varphi-\phi} = \frac{-\phi}{\varphi-\phi}$$

Hiermee zijn langs meetkundige weg (!) de gezochte componenten van $(1, 1)$ gevonden.

Dit lukt overigens ook eenvoudig via algebra.

Uit $(1, 1) = a(1, \varphi) + b(1, \phi)$ volgt $a + b = 1$ en daarom:

$$\varphi a = \phi(1 - a) = 1, \text{ dus: } a = \frac{1-\phi}{\varphi-\phi} = \frac{\varphi}{\varphi-\phi}.$$

En analoog:

$$b = \frac{-\phi}{\varphi-\phi}$$

Nu de componenten bekend zijn is het een kwestie van herhaald vermenigvuldigen met φ en ϕ . Dit levert dan op:

$$f_n = \frac{\varphi^n - \phi^n}{\varphi - \phi}$$

ofwel:

$$f_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$$

Dat deze laatste formule irrationale getallen bevat en toch natuurlijke getallen oplevert, zou je verrassend kunnen noemen. Dat bij uitwerking van de teller via Newtons binomium juist de even machten van $\sqrt{5}$ verdwijnen, zodat de teller deelbaar is door $\sqrt{5}$ garandeert dat de uitkomst voor elke n -waarde rationaal is. Dat die rationale uitkomst steeds geheel is, zie je niet zo een-twee-drie, maar het volgt natuurlijk wel uit het voorgaande verhaal.

Fibonacci-verwante rijen

Elke rij $x_0, x_1, x_2, \dots$ die voldoet aan $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ voor $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ en die zo affiniteit heeft met de rij van Fibonacci noem ik *Fibonacci-verwant*.

Duidelijk is dat de som van twee van zulke rijen ook weer Fibonacci-verwant is. En als een Fibonacci-verwante rij wordt vermenigvuldigd met een zekere factor (*scalair*), is het resultaat ook weer zo'n rij. Kortom:

de verzameling van Fibonacci-verwante rijen is een *lineaire ruimte*, zeg L_{Fib} . Een willekeurige Fibonacci-verwante rij, kan worden voorgesteld als:

$(a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b, 3a + 5b, \dots)$

ofwel door:

$a(1, 0, 1, 1, 2, 3, \dots) + b(0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots)$.

L_{Fib} is duidelijk een 2-dimensionale ruimte. In deze ruimte zijn er juist twee meetkundige rijen met beginterm 1.

Immers, een nodige en voldoende voorwaarde dat de rij $(1, r, r^2, \dots)$ Fibonacci-verwant is, luidt $r^2 = r + 1$.

De rijen $(1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \dots)$ en $(1, \phi, \phi^2, \phi^3, \dots)$ voldoen hieraan en die kun je als alternatieve basis kiezen. Gevolg:

als $x_0, x_1, x_2, \dots$ een Fibonacci-verwante rij is, dan geldt $x_n = p\varphi^n + q\phi^n$ voor reële p en q .

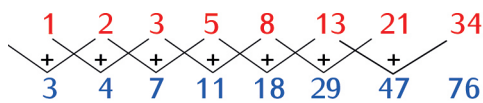
De rij van Lucas

Zo zijn er als het ware oneindig veel Binetformules. Bekijk nu het geval $p = q = 1$. Deze rij (vernoemd naar Lucas^[2]) luistert naar de formule: $l_n = \varphi^n + \phi^n$. De eerste twee termen van deze rij zijn;

$$l_0 = 2, l_1 = \varphi + \phi = 1$$

De rij gaat dan verder met 3, 4, 7, 11, 18, ...

Tussen de rijen van Fibonacci en Lucas bestaat een aardig verband, zie figuur 6 (rood Fibonacci, blauw Lucas).



figuur 6

Er lijkt te gelden: $f_n + f_{n+2} = l_{n+1}$.

$$\text{Ofwel: } \frac{\varphi^n - \phi^n}{\varphi - \phi} + \frac{\varphi^{n+2} - \phi^{n+2}}{\varphi - \phi} = \varphi^{n+1} + \phi^{n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{Bewijs: } (\varphi - \phi)(\varphi^{n+1} + \phi^{n+1}) &= \\ \varphi^{n+2} - \phi\varphi^{n+1} + \varphi\phi^{n+1} - \phi^{n+2} &= \\ \varphi^{n+2} + \varphi^n - \phi^n - \phi^{n+2} \text{ (want } \phi \cdot \varphi = -1) &= \\ (\varphi^n - \phi^n) + (\varphi^{n+2} - \phi^{n+2}) \end{aligned}$$

Het bewijs kan ook geleverd worden via de recursieformules en een soort tweetraps volledige inductie.

Start: $f_1 + f_3 = l_2$ en $f_2 + f_4 = l_3$, zie figuur 6.

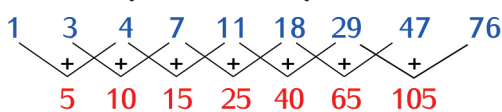
De inductiestap verloopt nu op rolletjes.

Stel: $f_{n-2} + f_n = l_{n-1}$ en $f_{n-1} + f_{n+1} = l_n$

Dan volgt:

$$\begin{aligned} f_n + f_{n+2} &= (f_{n-2} + f_{n-1}) + (f_n + f_{n+1}) \\ &= (f_{n-2} + f_n) + (f_{n-1} + f_{n+1}) \\ &= l_{n-1} + l_n = l_{n+1} \end{aligned}$$

Wat krijg je als je de rijen van Fibonacci en Lucas van rol laat verwisselen? Zie figuur 7, de rode getallen zijn allemaal vijfvoudig, van..., ja dus.



figuur 7

Vermoeden: $l_n + l_{n+2} = 5f_{n+1}$

Het inductiebewijs dat dit klopt, is analoog aan het bewijs van hierboven. Bij het bewijs uit de directe formules moet je behalve van de relatie $\varphi \cdot \phi = -1$ ook gebruik maken van $\varphi + \phi = \sqrt{5}$ en dan komt alles op zijn pootjes terecht.

Tot slot

Ik maak hier van de gelegenheid gebruik om de rij van Lucas te kronen tot *koningin van alle Fibonacci-verwante rijen*. Dat is niet alleen omdat zij luistert naar de mooiste Binet-formule. Mijn belangrijkste reden is de volgende. Alle Fibonacci-verwante rijen hebben de eigenschap dat bij een deelrijtje ('blok') van 5, 9, 13, 17, ..., kortom $4n+1$ termen, de som van begin- en eindterm een *vast getal* maal de middelste term van dit deelrijtje is. En die vaste getallen zijn? Juist, getallen uit de rij van Lucas. Een uitdaging voor de lezer en stof voor een volgend artikel.

Noten

- [1] De rij komt voor in Fibonacci's boek *Liber Abaci* (1202) als 'rijtje', dat niet verder gaat dan 377. De Frans-Nederlandse wiskundige Albert Girard (1595-1632) is vermoedelijk de eerste geweest die zich boog over de oneindig voortlopende rij die bekend werd als de rij van Fibonacci.
- [2] Edouard Lucas (1843-1891), uitvinder van de bekende puzzel 'toren van Hanoi', wordt gezien als de eerste die de oneindige rij 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... naar Fibonacci heeft genoemd.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

Werken aan basisvaardigheden in het voortgezet onderwijs

Het Lectoraat Wiskundig en Analytisch Vermogen van Professionals van de Hogeschool Utrecht schetst drie mogelijke scenario's om aan de slag te gaan met gecijferdheid.

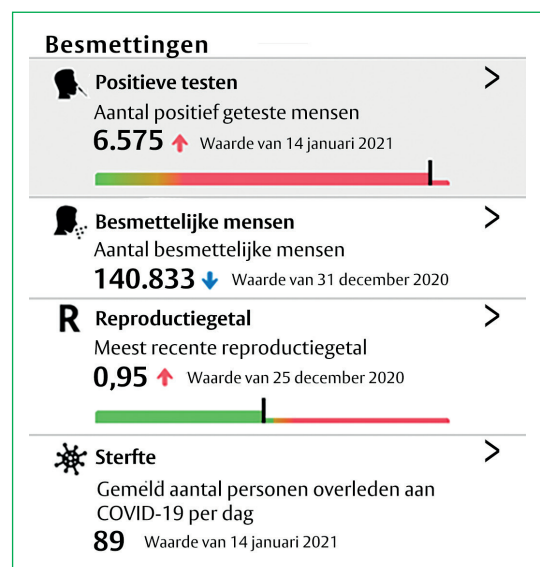
Inleiding

Afgelopen september organiseerde het ministerie van OCW startbijeenkomsten over de subsidieregeling Verbetering basisvaardigheden. Gedurende twee jaar kunnen scholen een research-informed onderwijsaanpak ontwikkelen die deze vaardigheden op duurzame wijze bevordert. De subsidie biedt mogelijkheden, maar brengt ook uitdagingen met zich mee. Basisvaardigheden in rekenen-wiskunde zijn namelijk minder eenduidig gedefinieerd dan in andere domeinen, waardoor de mogelijkheid bestaat dat de basisvaardigheden rekenen-wiskunde weinig gestructureerd aandacht krijgen of dat de nadruk komt te liggen op een gedateerd beeld van wat die basisvaardigheden zijn. We zien ook dat docenten zich afvragen: *Wat zijn nu écht de belangrijkste basisvaardigheden rekenen-wiskunde?* en *Hoe kun je als school deze basisvaardigheden benutten, versterken, maar vooral laten gebruiken?*

In de bijeenkomsten over basisvaardigheden, georganiseerd door het ministerie van OCW in september 2024, hebben wij vanuit het Lectoraat Wiskundig en Analytisch Vermogen van Professionals van de Hogeschool Utrecht geprobeerd een gefundeerd antwoord op deze vragen te geven en het concept van basisvaardigheden te verduidelijken. We geven bewust geen kant-en-klare lijst van basisvaardigheden, omdat de belangrijkste vaardigheden sterk afhangen van het schooltype, de sector en de context waarin ze worden gebruikt. Bovendien is het aan scholen zelf om deze vaardigheden te definiëren en in hun onderwijspraktijk te integreren. In dit artikel bieden we handvatten en scenario's om scholen te ondersteunen bij het maken van deze keuzes en het duurzaam versterken van basisvaardigheden rekenen-wiskunde.

Gecijferdheid en basisvaardigheden rekenen-wiskunde

De basisvaardigheden. Het klinkt zo vanzelfsprekend, het zijn die vaardigheden die we allemaal zouden moeten beheersen om volwaardig deel te kunnen nemen aan de samenleving. Toch blijft het daar niet bij, want vaardigheden aangeleerd hebben is niet genoeg. Het belang van basisvaardigheden ligt in het toepassen hiervan in situaties die we allemaal dagelijks tegenkomen, zie figuur 1.

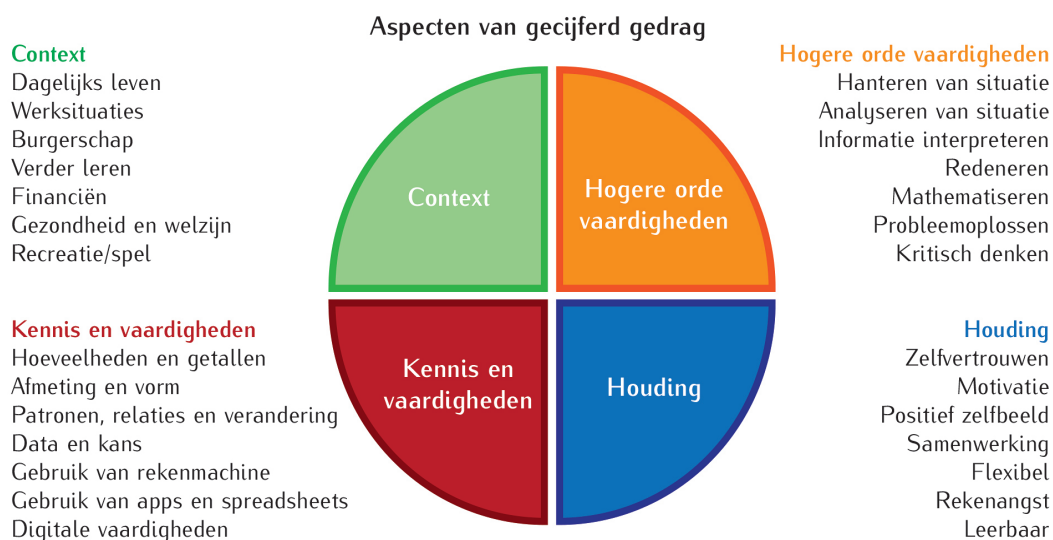


figuur 1 Hoe de Nederlandse overheid cijfers gebruikte tijdens de coronaperiode

Binnen het domein rekenen-wiskunde gaat het om het vermogen om rekenvaardigheden en wiskundige kennis functioneel in te zetten in uiteenlopende contexten. Hierbij staat niet alleen het uitvoeren van rekenkundige bewerkingen centraal, maar vooral het interpreteren, gebruiken en beoordelen van kwantitatieve informatie. Dit stelt leerlingen in staat om weloverwogen beslissingen te nemen,

Common European Numeracy Framework

Aangezien gecijferdheid gekoppeld wordt aan de basisvaardigheden rekenen-wiskunde, geeft het Common European Numeracy Framework (CENF) ^[2] houvast. Dit raamwerk is ontwikkeld om het begrip en de onderwijspraktijk rond gecijferdheid te verduidelijken en te verbeteren. De wiskundige concepten zijn te vinden in het kwadrant *Kennis en vaardigheden*. Er moet aandacht zijn voor een reken-wiskundige *houding*, die cruciaal is om wiskundige uitdagingen met succes aan te pakken. Daarnaast vraagt het werken aan gecijferdheid om meer dan alleen technische kennis; het vereist *hogere orde vaardigheden*. En tot slot is het vermogen om wiskunde in herkenbare *contexten* toe te passen belangrijk en is het oefenen van vaardigheden in een relevante en herkenbare situatie essentieel.

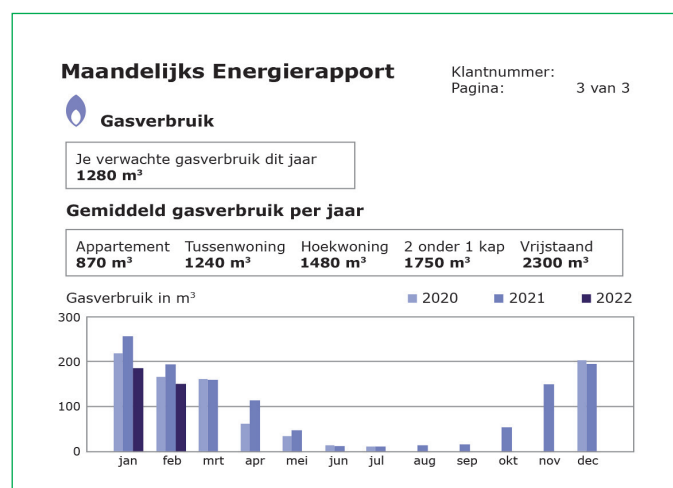


figuur 2 Het Common European Numeracy Framework

zowel in alledaagse situaties als in andere vakgebieden. Daarom wordt het begrip gecijferdheid vaak aan de basisvaardigheden rekenen-wiskunde gekoppeld. Gecijferdheid bestaat uit de verbinding van kennis, vaardigheden en persoonlijke competenties die nodig zijn om adequaat en autonoom om te gaan met de kwantitatieve kant van de wereld om ons heen ^[1]. Zie ook het kader.

Wanneer basisvaardigheden regelmatig worden toegepast in betekenisvolle en herkenbare contexten worden ze niet alleen beter begrepen, maar worden ze ook een essentieel onderdeel van het persoonlijke repertoire van leerlingen. Alleen door regelmatig te oefenen met het toepassen van deze vaardigheden in betekenisvolle contexten, ontwikkelen leerlingen een duurzame en flexibele kennisbasis. Ze leren niet alleen rekenvaardigheden en wiskundige principes, maar verwerven ook het vertrouwen om de vaardigheden toe te passen bij het oplossen van problemen en het maken van keuzes in verschillende contexten. Als we leerlingen onvoldoende voorbereiden op de maatschappij kan dit tot gevolg hebben dat ze uiteindelijk moeite kunnen krijgen met het aanvragen van een

toeslag, het interpreteren van hun energieverbruik, zie figuur 3, het kiezen tussen huurkoop en lease van een wasmachine als er geen geld is voor vervanging van een kapotte, enzovoorts.^[3]



figuur 3 Een energierapport begrijpen in tijden van stijgende energiekosten

Wat zijn nuttige basisvaardigheden rekenen-wiskunde?

Basisvaardigheden rekenen-wiskunde zijn vaardigheden die leerlingen gebruiken in andere vakken, in vervolgopleidingen en in het dagelijkse leven, maar wat zijn concreet deze vaardigheden? Het uitrekenen met pen-en-papier van grote rekensommen of kale sommen met breuken of het omrekenen van eenheden in het metriekstelsel zonder context, behoren sinds de invoering van de rekenmachine en andere digitale gereedschappen eigenlijk niet meer tot het praktisch menselijk handelen en dus niet meer tot de basisvaardigheden. Sommen als 345×654 rekenen we uit met een rekenmachine. Rekenfeiten paraat in het hoofd hebben, zoals $12 + 9$, 9×8 en 8×25 , blijven wel belangrijk in praktische situaties, maar minstens net zo belangrijk én relevant in veel praktijken is het kunnen omgaan met verhoudingen, bijvoorbeeld in een verhoudingstabel. Is het behalen van goede scores op een rekentoets van een leverancier voldoende om de basisvaardigheden van leerlingen te meten? Het behalen van een goede score op een gestandaardiseerde toets betekent niet automatisch dat een leerling in praktische situaties basisvaardigheden beheerst of gecijferd is. Het is ook gemakkelijk om met behulp van oefenmateriaal van de leverancier redelijke scores te halen. Dit soort *teaching to the test* leidt tot oppervlakkig leren waarbij de nadruk op reproductie komt te liggen. Bovendien kan een sterke focus op toetsen stress en angst vergroten bij leerlingen en kunnen hogere orde vaardigheden (zie kader) hierdoor geblokkeerd worden. Wat dan wel?

Scenario's voor middelbare scholen.

Vanuit het lectoraat zijn drie scenario's ontwikkeld om scholen te ondersteunen bij het implementeren van gecijferdheid in het voortgezet onderwijs. Deze scenario's zijn afgestemd op de twee leerlijnen: po-pro/vmbo-mbo en po-havo/vwo-ho. Elk scenario bouwt voort op het voorgaande: scenario 1 vormt de start en wordt uitgebreid in scenario 2, dat op zijn beurt weer deel uitmaakt van scenario 3. Beide leerlijnen hebben dezelfde opbouw, maar houden rekening met de behoeften van de verschillende leerlingenpopulaties. Hieronder staat de leerlijn po-pro/vmbo-mbo toegelicht, waarbij het uiteindelijke doel is dat leerlingen worden voorbereid op de nieuwe *Rekeneisen mbo*, waarin gecijferdheid centraal staat. De leerlijn po-havo/vwo-ho is vergelijkbaar qua scenario's. Hij wijkt echter deels af in inhoud, omdat de leerlijn afgestemd is op een andere leerlingenpopulatie, andere vakken en te ontwikkelen materiaal, eindtermen, vervolgonderwijs en beroepsperspectieven, evenals specifieke hulpmiddelen die wel of niet ingezet kunnen worden.^[4]

Scenario 1: Visieontwikkeling op de basisvaardigheden

In scenario 1 ligt de nadruk op het ontwikkelen van een gezamenlijke visie, waarbij overeenkomsten en verschillen tussen vakken voor leerlingen overzichtelijk worden gemaakt. Het benoemen en zichtbaar maken van deze elementen in de les draagt hieraan bij.

- Start met een kleine commissie en stem met elkaar af wat je verstaat onder de basisvaardigheden. Ontwikkel dus een gemeenschappelijke visie.
- Zorg dat collega's van verschillende vakken met elkaar in gesprek gaan over hun aanpak bij reken-vraagstukken en wiskundige problemen.
- Leer leerlingen hoe en wanneer zij tools (rekenmachines, apps, etcetera) effectief kunnen gebruiken, zowel bij rekenen en wiskunde als bij andere vakken, en sta hen altijd toe om hulpmiddelen te gebruiken in de les en tijdens toetsen (denk hierbij aan rekenkaarten).
- Creëer een overzicht waarin staat hoe rekenen en wiskunde in verschillende schoolboeken voorkomen en zorg dat leerlingen dit overzicht gebruiken.

Scenario 2: Vakdidactisch overleg en stroomlijnen van vaardigheden

Na het ontwikkelen van een visie in scenario 1 en het uitwerken van de overlap binnen het schoolcurriculum, richt dit scenario zich op het stimuleren van vakdidactisch overleg.

- Organiseer meerdere keren per jaar vakdidactisch overleg. Bespreek met collega's van verschillende vakken hoe je begrippen benoemt, noteert, uitlegt en gebruikt in de les. Bespreek ook met elkaar wie wanneer iets uitlegt.
- Creëer (didactische) kaarten en posters met daarop vakoverstijgende rekenbegrippen, die in verschillende lokalen worden opgehangen. Deze kaarten helpen de docenten en leerlingen bij het herkennen van begrippen in verschillende vakken.

Scenario 3: Vakinhoudelijke samenwerking en het ontwikkelen van lesmateriaal

Het meest intensieve scenario vereist aanzienlijk wat tijd, energie en doorzettingsvermogen van docenten en de school. Naast vakdidactische samenwerking is hier ook sprake van vakinhoudelijke samenwerking tussen secties.

- Faciliteer tijd en ruimte voor docenten om aanvullend lesmateriaal te ontwikkelen waarbij het gebruik in het dagelijks leven van deze leerlingen centraal staat. Schoolleiders kunnen taakuren vrijmaken voor (maandelijks) ontwikkeloverleggen.

- Stel gezamenlijk (jaar)doelen op en zorg dat de vakdidactische samenwerking grondig is opgezet en uitgevoerd.
- Stimuleer teamdeelname aan conferenties en bijeenkomsten over basisvaardigheden en kerndoelen rekenen-wiskunde. De conferentie 'Werken aan de basisvaardigheid rekenen-wiskunde in de andere vakken' op 13 maart 2025 in Utrecht is de moeite waard.^[5]

Tot slot

Om leerlingen als gecijferde burgers af te leveren, is het essentieel dat scholen en docenten aanvullend beleid ontwikkelen voor het aanleren van basisvaardigheden, met aandacht voor hogere orde vaardigheden, context en houding. Wij hopen dat deze scenario's houvast bieden voor een duurzame, vakoverstijgende basis, zodat scholen met een gerichte aanpak wezenlijk kunnen bijdragen aan de reken-wiskundige basisvaardigheden van hun leerlingen. Wanneer gecijferdheid als kernvaardigheid in het onderwijs wordt geïntegreerd, worden alle leerlingen voorbereid op vervolgonopleidingen en op het dagelijks leven, waar deze vaardigheden onmisbaar zijn.

Noten

- [1] Zie ook: www.gecijferdheid.nl
- [2] Numeracy in Practice (2024). Framing numerate behavior. www.cenf.eu/framework
- [3] Boels, L., Hoogland, K., Jonker, V., Kleine Deters, B., & Wijers, M. (2022) *Het interpreteren en begrijpen van hedendaagse informatiebronnen*. Hogeschool Utrecht.
- [4] Meer informatie hierover valt te vinden op <https://www.gecijferdheid.nl/scenarios-voor-basisvaardigheden-rekenen-wiskunde-in-het-vo/>
- [5] zie de agenda op nvw.nl

Over de auteurs

Hugo Mulder, Lonneke Boels en Kees Hoogland zijn onderzoekers van het Lectoraat wiskundig en Analytisch Vermogen van Professionals van de Hogeschool Utrecht. E-mailadres: hugo.mulder@hu.nl

Zebra 71: Origami en Wiskunde

Marjan Botke



Titel: Origami en Wiskunde
Auteur: Jacoliene van Wijk en Amy Besamusca
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam, 2024
Zebra-reeks, deel 70,
68 pagina's
ISBN: 978-90-5041-203-2
Prijs: € 10,00

Inleiding

Als echte vouw-addict mag ik dit boek over origami en wiskunde beschrijven. Nu ben ik een groot fan van vouwen, maar niet direct van origami zoals het vouwen

van dieren en andere ingewikkelde vormen. Maar ik ben gewoon begonnen bij pagina 1 van dit boek en heb het helemaal met veel plezier doorgewerkt.

De inhoud in het kort

In de inleiding wordt uitgelegd wat origami is. Origami = vouwen van dieren of andere vormen. Daarnaast wordt ook wiskundige figuren vouwen genoemd, dit zijn bijvoorbeeld de parabool, ellips, hyperbool. Het vouwen van deze wiskundige figuren heeft als doel het beter laten begrijpen van de kegelsneden en hun kenmerken.

In het tweede hoofdstuk wordt heel helder en duidelijk uitgelegd hoe je de vouwinstructies moet uitvoeren en de patronen in dit boek moet lezen. Er worden twee oefenopdrachten gegeven om te oefenen met de vouwinstructies. >

In het derde hoofdstuk komen de meetkundige regels van origami aan bod: de axioma's.

- Door twee punten gaat een vouw
- Er is precies één vouw die twee punten op elkaar brengt
- Er bestaat een vouw die twee lijnen l en k op elkaar brengt
- Er is precies één vouw loodrecht op een lijn door een punt
- Er bestaat een vouw door een punt die een ander punt op een lijn brengt
- Er bestaat een vouw die twee punten op twee verschillende lijnen brengt
- Er bestaat een vouw loodrecht op een lijn die een punt op een andere lijn brengt, de lijnen mogen niet evenwijdig zijn.

Het vierde hoofdstuk laat zien hoe een origami-ontwerp ontstaat uit een stokfiguur en cirkeldelen. Daarna wordt een aantal bases voor origami besproken en geoefend. De volgende bases komen aan bod: vliegerbasis, visbasis, vogelbasis, kikkerbasis, kastbasis, windmolenbasis, waterbombbasis en de eerste grondvorm. Ook wordt in dit hoofdstuk aangegeven aan welke voorwaarden een patroon moet voldoen. Hier wordt dan besproken:

- Niet doorkruisen
- Platvouwbaarheid
- Stelling van Maekawa-Justin: $M - V = \pm 2$. Dit houdt in dat het verschil tussen het aantal bergen en dalvouwen in een knooppunt altijd twee is, als een figuur plat vouwbaar is.
- Stelling van Kawasaki-Justin (hoeken). Deze stelling geeft aan dat bij een plat vouwbaar figuur voor alle knooppunten moet gelden dat de som van alle oneven genummerde hoeken van opeenvolgende hoeken in een knooppunt gelijk moeten zijn aan de som van alle even genummerde hoeken in datzelfde knooppunt.
- Als laatste wordt hier geleerd hoe je een Tato moet vouwen. Een Tato is een traditionele Japanse envelop, met verschillende patronen erop, zie figuur 1.



figuur 1

In het vijfde hoofdstuk komt een mooie toepassing van vouwen aan de orde: de Miura-vouw. Deze vouwmethode wordt onder andere gebruikt om heel eenvoudig een

landkaart te kunnen uitvouwen en invouwen, door aan twee hoekpunten te trekken of te duwen. Hier staat ook een aantal oefeningen bij. Voor dit onderdeel heb je veel geduld nodig met vouwen. Maar het is een mooi voorbeeld van een toepassing van vouwen die regelmatig wordt gebruikt, bijvoorbeeld ook in de ruimtevaart (o.a. satellieten). Het zesde hoofdstuk gaat over fold-and-one-cut. Deze toepassing van vouwen heb ik eerder gezien. Met de theorie over het plat vouwen bij origami werd dit onderdeel makkelijker te begrijpen en uit te voeren. Het zevende hoofdstuk gaat dieper in op vouwbaarheid.

De twee leukste onderdelen van dit boek over vouwen vind ik persoonlijk de Tato en de Miura-vouw. De Tato omdat dit lijkt op modules vouwen (waar ik erg van houd) en omdat je er mooie regelmatige cadeau-envelopjes mee kunt maken. Ik kan er mijn creativiteit in kwijt. En de Miura-vouw, zie figuur 2, omdat je stap voor stap leert en kunt zien hoe je grote oppervlakken heel klein kunt vouwen. Met de eerdere beschrijving en regels over platvouwbaarheid is dit ook voor mij als wiskundige een mooi onderdeel. Je kunt zien waarom iets wel of niet plat vouwbaar is. Ik denk dat ik beide onderdelen met mijn leerlingen wil gaan proberen te vouwen en ook de regels voor platvouwbaarheid wil bespreken. Dat is een leuke extra activiteit in mijn wiskundeles voor leerlingen met of zonder interesse in wiskunde. Er is weinig voorkennis voor nodig en het levert een leuk resultaat op.



figuur 2

Ik heb veel plezier beleefd aan het vouwen van alle opdrachten in het boek. Heel handig is dat alle werkbladen te printen zijn via de website bij het boekje en er ook uitlegvideo's beschikbaar zijn. Soms zie je met een video in één keer hoe het moet, terwijl je een beschrijving soms vijf keer moet lezen (beelden zeggen dan meer dan woorden).

Over de auteur

Marjan Botke is wiskundedocent in de bovenbouw van het Erasmiaans Gymnasium in Rotterdam en vakdidacticus wiskunde aan de lerarenopleiding van de TU Delft. Daarnaast is zij lid van de havo-vwo werkgroep van de NVvW en van de werkgroep onderwijs van PWN.
E-mail: m.a.botke@tudelft.nl

Perfekte score finale WiskundeOlympiade



Alle 15 winnaars

Vierdeklasser Naïm Hofstede (15) uit Makkum heeft bij de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade alle vijf opgaven perfect opgelost. Hij loste als enige van de meer dan 150 deelnemers de vijfde opgave foutloos op. Bij de vijfdeklassers won Josiah 't Hart uit Groningen, terwijl Lucas van de Sande uit Nieuwerkerk aan den IJssel bij de zesdeklassers de eerste prijs in ontvangst mocht nemen. Vier van de vijf opgaven waren bedacht door oud-deelnemer Mike Daas. Daas: 'Ik had nooit gedacht dat ik ooit zo'n omvangrijke bijdrage kon leveren aan de finale van de Wiskunde Olympiade toen ik daar zelf in 2012 voor het eerst aan meedeed, maar de zaken kunnen soms gek lopen!' Ook de lastige opgave 5 was door hem bedacht.

Bron: <https://platformwiskunde.nl/>

Invoering nieuwe doelen rekenen en taal vertraagd

Na jaren onderzoek van onderwijsexperts werden eindelijk de nieuwe, wettelijke kerndoelen rekenen, wiskunde en Nederlands opgeleverd. De huidige doelen zijn vaag en al twintig jaar oud, en dus hard aan vernieuwing toe. Dat de nieuwe kerndoelen eindelijk af zijn, daar is de gehele Tweede Kamer blij mee. Maar ze worden pas in 2027 ingevoerd, omdat het ministerie eerst nog eens wil kijken naar een aantal van de doelen. Dat is zo afgesproken in het hoofdlijnenakkoord van dit kabinet. De vertraging zorgt voor woedende reacties bij alle oppositiepartijen. Ook de onderwijsbonden zoals de VO- en PO-raad, de Algemene Onderwijsbond en CNV noemen de vertraging in een brandbrief onbegrijpelijk. Ze roepen de Tweede Kamer op de doelen snel in te voeren op alle scholen.

Bron: rtl.nl

Medailles Nederlandse studenten IMC 2024



Studenten van de wiskunde-opleidingen van de universiteiten van Amsterdam, Groningen, Leiden en Utrecht hebben meegedaan met de *International Mathematics Competition* in Blagojevgard, Bulgarije. De Amsterdamse equipe heeft twee zilveren en

een bronzen medaille behaald, naast vijf eervolle vermeldingen. De studenten uit Groningen hebben twee eervolle vermeldingen gekregen en het team uit Utrecht heeft drie medailles gewonnen, één van ieder eremetaal, en nog een eervolle vermelding. Het Utrechtse goud is voor Lammert Westerdijk met 72 punten. Het Leidse team spant de kroon met tweemaal zilver, goud voor Samuel Tiersma (57 punten) en Lance Bakker (56 punten) en een 'Grand Grand First Prize' voor Casper Madlener, die wereldwijd nipt als vierde eindigde met 80 van de 100 punten.

Bron: *Platform Wiskunde Nederland*

'Nobelprijs' statistiek

Peter Rousseeuw werkte als briljant statisticus jaren bij het succesvolste en geheimzinnigste hefboomfonds ter wereld. Met de miljoenen die hij daar verdiende financiert hij nu de tweejaarlijkse Rousseeuw Prijs voor Statistiek. Het frustreerde Rousseeuw dat er amper erkenning was voor mooie statistische resultaten zoals de ontdekking van het gat in de ozonlaag in de jaren '80 en het aangetoonde verband tussen roken en longkanker in de jaren '50. In 2022 werd de prijs voor het eerst uitgereikt. James Robin van de Harvard University en vier van zijn collega's kregen hem voor hun inzichten rond causale inferentie (het aantonen van oorzaak en gevolg).

Dit jaar gaat de prijs naar Yoav Benjamini, Daniel Yekutieli en Ruth Heller van de Universiteit van Tel Aviv voor hun baanbrekend werk rond schijnontdekkingen (vaak een groot probleem in de wetenschap).

Bron: tijd.be

Uitdagende problemen

Hoe verhouden we ons tot verhoudingen?

Jacques Jansen werd (opnieuw) geïnspireerd door een artikel in het tijdschrift *Pythagoras*.^[1]

Er staat in het juninummer van 2023 een leuk artikel van Rik Biel: 'Uit de projectieve meetkunde: dubbelverhouding'.^[2] Dat 'leuk zijn' zit voor Jacques vooral in een toepassing: de hoogte van een flat met veel verdiepingen moet met behulp van foto's geschat worden.

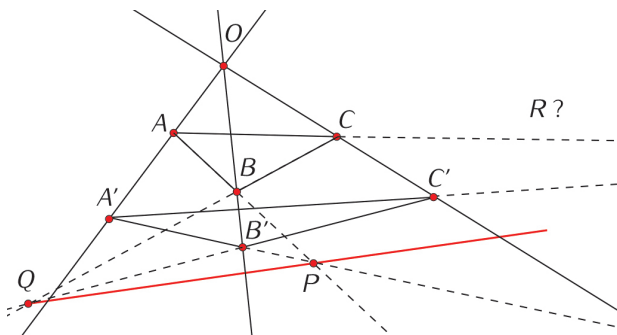
En de koppeling met de stellingen van Menelaus en Desargues.



voorkant *Pythagoras* 62-6 juni 2023

Eerst even zelf aan de slag

Teken op een A-viertje een punt O en teken drie verschillende lijnen die door dat punt O gaan. We noemen dat *concurrente* lijnen. Kies op elke lijn één punt zodat er een driehoek ontstaat. Noem die driehoek $\triangle ABC$. Herhaal die laatste opdracht en verkrijg zo $\triangle A'B'C'$, zie figuur 1.



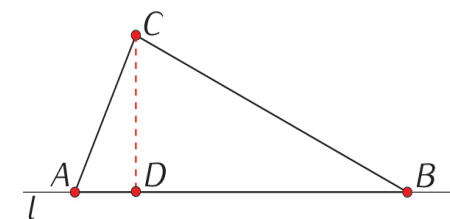
figuur 1

Bepaal nu de snijpunten van de overeenkomstige zijden van de beide driehoeken AB en $A'B'$, BC en $B'C'$ en tot slot AC en $A'C'$ en noem die achtereenvolgens P , Q en R . Probeer het maar eens, voordat je verder leest.

Bij mijn eigen pogingen merkte ik dat één van de drie snijpunten, meestal de derde, wat verder weg lag of buiten het A-viertje terecht was gekomen, zie weer figuur 1. Een voor de hand liggende vraag is nu: 'hoe is de werkelijke ligging van de drie snijpunten P , Q en R ten opzichte van elkaar?' Kijk, met GeoGebra kun jij, of je leerlingen, dat prachtig uitproberen en onderzoeken.

Transversalen

In het vervolg van dit artikel gebruik ik de namen *transversalen* van driehoeken en *dragers* van lijnstukken. Een drager van een lijnstuk is een lijn waarop het lijnstuk ligt, zie figuur 2. Lijn l is de drager van zijde AB van $\triangle ABC$. Een transversaal t van een driehoek is een lijn die *elke* zijde van een driehoek (of het verlengde ervan) snijdt in een niet-hoekpunt. Het kan dus zijn dat lijn t geen enkel punt gemeenschappelijk heeft met $\triangle ABC$. Maar nu de verhoudingen.

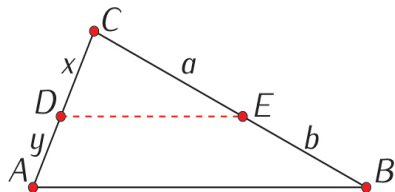


figuur 2

Verhoudingen

Verhoudingen komen we al tegen in een willekeurige driehoek waarbij uit één van de hoekpunten een hoogtelijn is getrokken, zie figuur 2. Je raadt het al. Sinus, cosinus en tangens van de overgebleven hoeken geven de te raden verhoudingen. Een hoogtelijn – neem een scherphoekige driehoek in gedachte – is een speciale lijn die de driehoek in twee verschillende punten snijdt. Een hoogtelijn behoort tot de *hoektransversalen*. We kijken nu naar transversalen

van een driehoek en laten de hoektransversalen buiten beschouwing.



figuur 3

In figuur 3 is punt D willekeurig gekozen op zijde AC . Punt E is op zijde BC zo gekozen dat lijnstuk DE evenwijdig is met zijde AB . Verder is $DC = x$, $DA = y$, $EC = a$ en $EB = b$. Over verhoudingen gesproken, er zijn er nu heel wat. Merk op dat $\triangle DEC$ gelijkvormig is met $\triangle ABC$. Dat betekent sowieso dat $\frac{x}{x+y} = \frac{a}{a+b}$.

Met kruislings vermenigvuldigen geldt $x(a+b) = a(x+y)$, dat geeft $bx = ay$ en dus $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.

Kijken we naar $\frac{y}{x+y}$ en delen we alle termen door y dan krijgen we $\frac{1}{\frac{x}{y}+1} = \frac{1}{\frac{a}{b}+1} = \frac{b}{a+b}$. Oogst: $\frac{y}{x+y} = \frac{b}{a+b}$

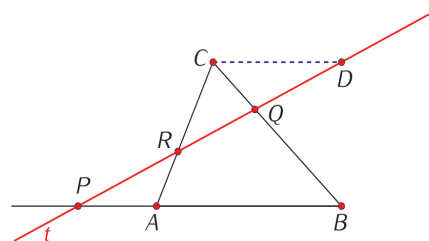
We zullen verderop bij 'Afleiding Variant 2' hiervan gebruik maken. Een belangrijke stelling die we nodig hebben om onze startopgave aan te pakken is de stelling van Menelaus en de omkering ervan. Die gaan we nu ook afleiden. Ik geef je drie varianten. Twee varianten met precies één hulplijn in een gegeven driehoek en een variant met drie hulplijnen.

Afleiding met één hulplijn

Variant 1: Transversaal in binnengebied van een driehoek

We gaan nu uit van een willekeurige lijn die door het binnengebied van $\triangle ABC$ gaat, zie figuur 4. Zijde AB wordt niet gesneden door transversaal t maar t snijdt wel de drager van zijde AB . Dat snijpunt noemen we punt P . Punt P noemen we een deelpunt dat lijnstuk AB uitwendig verdeelt. Zijde BC wordt gesneden door transversaal t in punt Q . Punt Q verdeelt het lijnstuk in de delen QB en QC . We kunnen kijken hoe die lijnstukken zich tot elkaar verhouden. Hetzelfde geldt voor zijde CA die door t gesneden wordt in punt R . Ook hier kunnen we kijken hoe de stukken RC en RA zich tot elkaar verhouden. Punten Q

en R worden deelpunten genoemd die de zijden inwendig verdelen. Nu weer even terug naar deelpunt P .



figuur 4

Kijken we nu naar de verhouding $\frac{PA}{PB}$ of naar de verhouding $\frac{PB}{PA}$? We hanteren de volgende conventie:

afstand deelpunt tot dichtstbijzijnde eindpunt van de zijde
afstand deelpunt tot het andere eindpunt van de zijde

Voor zijde AB kijken we naar de verhouding $\frac{PA}{PB}$.
Voor zijde BC naar de verhouding $\frac{QB}{QC}$.
Voor zijde CA kijken we naar de verhouding $\frac{RC}{RA}$.

In ons systeem spreken we af dat als de zijde inwendig wordt verdeeld, de verhouding wordt voorzien van een minteken. Dat doen we niet als de zijde uitwendig wordt verdeeld. Deze **deelpunten-afsprake** is nodig als we ook de omkeerbaarheid van de Stelling van Menelaus willen verkrijgen. We komen er later op terug. Merk op dat als we de drie verhoudingsgetallen met elkaar vermenigvuldigen de uitkomst positief zal zijn. Dat is ook in de situatie dat de transversaal de driehoek niet snijdt, zie figuur 6. Voorlopig kunnen we de mintekens negeren.

De drie verhoudingsgetallen $\frac{PA}{PB}$, $\frac{QB}{QC}$ en $\frac{RC}{RA}$ hebben een relatie met elkaar en dat laten we je zien.

Trek door punt C een (hulp)lijn evenwijdig met zijde AB . Punt D is een snijpunt van die lijn met transversaal t . Je kunt in de figuur twee verschillende zandlopers zien. In zandloper $PBQCD$ onderscheiden we twee gelijkvormige driehoeken waaruit af te leiden is dat

$$\frac{CD}{PB} = \frac{QC}{QB} \quad (1)$$

In zandloper $PARCD$ leiden we uit twee gelijkvormige driehoeken af dat

$$\frac{PA}{CD} = \frac{RA}{RC} \quad (2)$$

We vermenigvuldigen de linkerleden van vergelijkingen (1) en (2) met elkaar.

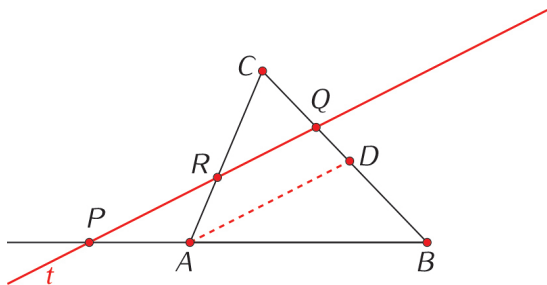
Dat doen we ook met de rechterleden:

$$\frac{CD}{PB} \cdot \frac{PA}{CD} = \frac{QC}{QB} \cdot \frac{RA}{RC}. \text{ Dat geeft } \frac{PA}{PB} = \frac{QC}{QB} \cdot \frac{RA}{RC}.$$

$$\text{Deel nu door het rechterlid: } \frac{PA}{PB} \cdot \frac{QB}{QC} \cdot \frac{RC}{RA} = 1.$$

De relatie is dat het product van de drie verhoudingsgetallen gelijk is aan 1. Merk ook op dat we niet op de tekens van de verhoudingsgetallen hoeven te letten.

Variant 2 hulplijn door een hoekpunt evenwijdig aan transversaal t .



figuur 5

In figuur 5 zien we weer transversaal t . We nemen nu een lijn in gedachte door hoekpunt A evenwijdig met transversaal t . Het snijpunt van deze lijn met zijde BC noemen we punt D . In figuur 5 hebben we voor de overzichtelijkheid van de tekening alleen lijnstuk AD gestippeld getekend.

Kijk naar de volgende drie verhoudingsgetallen:

$$\frac{PA}{PB}, \frac{QB}{QC} \text{ en } \frac{RC}{RA}. \text{ Merk op dat}$$

$$\frac{PA}{PB} = \frac{QD}{QB} \text{ en } \frac{RC}{RA} = \frac{QC}{QD}.$$

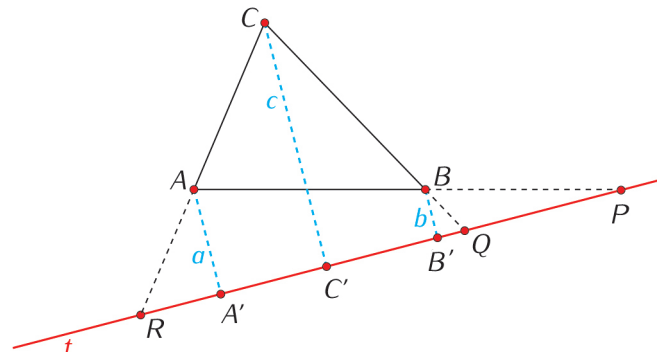
De verhouding $\frac{QB}{QC}$ op een kleurtje na, laten we even zo.

Want als we de drie verhoudingsgetallen met elkaar vermenigvuldigen krijgen we:

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{QB}{QC} \cdot \frac{RC}{RA} = \frac{QD}{QB} \cdot \frac{QB}{QC} \cdot \frac{QC}{QD} = 1$$

We gaan nu kijken naar het buitengebied van een driehoek.

Variant 3 Transversaal in het buitengebied van een driehoek



figuur 6

We pakken het nu anders aan. In figuur 4 en figuur 5 gebruikten we precies één hulplijn. Nu gaan we er drie gebruiken en wel de loodlijnen uit de hoekpunten van $\triangle ABC$ op de rode transversaal t . Dat levert de voetpunten A' , B' en C' op. De lengten van de bijbehorende loodlijnen noemen we achtereenvolgens a , b en c . Verder snijdt de drager van zijde AB de transversaal in punt P , de drager van zijde BC snijdt t in punt Q en drager van zijde CA snijdt t in punt R . Er zijn nu verschillende paren gelijkvormige driehoeken te zien. Bijvoorbeeld:

$$\triangle PAA' \text{ is gelijkvormig met } \triangle PBB' \text{ en dat geeft } \frac{PA}{PB} = \frac{a}{b}.$$

$$\triangle QBB' \text{ is gelijkvormig met } \triangle QCC' \text{ en dat geeft } \frac{QB}{QC} = \frac{b}{c}.$$

$$\triangle RAA' \text{ is gelijkvormig met } \triangle RCC' \text{ en dat geeft } \frac{RC}{RA} = \frac{c}{a}.$$

$$\text{Merk op dat } \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1 \cdot \frac{PA}{PB} \cdot \frac{QB}{QC} \cdot \frac{RC}{RA} = 1$$

Dus krijgen we de relatie.

We gaan na die varianten bekeken te hebben samenvatten.

Stelling van Menelaus

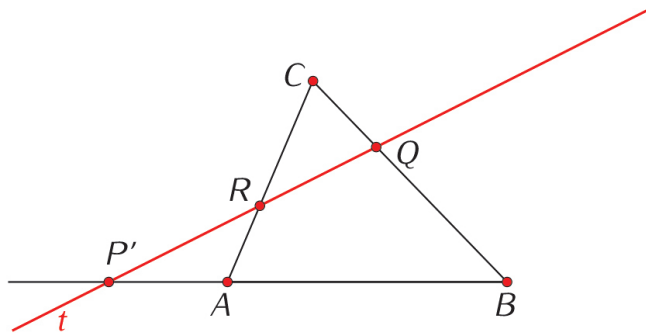
Snijdt een transversaal t van $\triangle ABC$ de dragers van de zijden AB , BC en CA opeenvolgend in de punten P , Q en

$$R \text{ dan geldt } \frac{PA}{PB} \cdot \frac{QB}{QC} \cdot \frac{RC}{RA} = 1.$$

Omkeerstelling van Menelaus

De omkering van de Stelling van Menelaus is ook waar. Als voor de punten P , Q en R van de dragers van de zijden AB , BC en CA van $\triangle ABC$ geldt dat

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{QB}{QC} \cdot \frac{RC}{RA} = 1 \text{ dan liggen de punten } P, Q \text{ en } R \text{ op één rechte lijn.}$$



figuur 7

Het bewijs gaat als volgt. Stel dat de lijn QR de lijn AB snijdt in P' , dan geldt volgens de stelling van Menelaus dat $\frac{P'A}{P'B} \cdot \frac{QB}{QC} \cdot \frac{RC}{RA} = 1$. Maar uit het gegeven blijkt

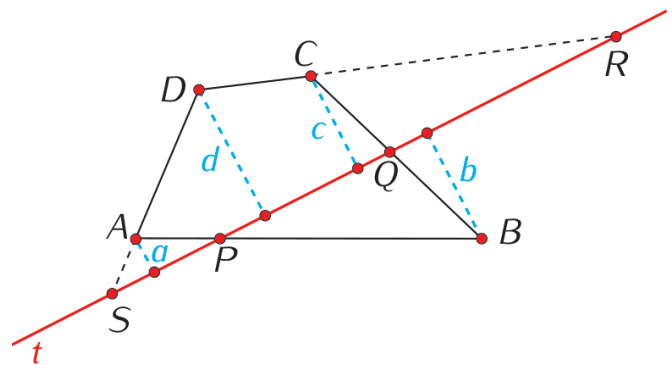
$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{QB}{QC} \cdot \frac{RC}{RA} = 1.$$

$$\text{Dus } \frac{PA}{PB} = \frac{PA'}{PB'}.$$

Maar door het werken met onze deelpunten-afspraken geldt nu dat de punten P en P' samenvallen: $P = P'$. Dus de punten P , Q en R liggen op een rechte lijn. Met onze afspraak is er een eenduidige correspondentie tussen deelpunt van een lijnstuk en verhoudingsgetal van dat lijnstuk.

Generalisatie van de stelling van Menelaus

Wat we niet achterwege willen laten is de generalisatie van de stelling van Menelaus voor veelhoeken. Voor de lezer een uitdaging om dat te doen voor een willekeurige vierhoek $ABCD$ met transversaal t , zie figuur 8. Opeenvolgend zijn de snijpunten van de zijden AB , BC , CD en DA met transversaal t de punten P , Q , R en S . Vanuit de hoekpunten van de vierhoek $ABCD$ zijn de loodlijnen neergelaten op transversaal t . De lengtes van de loodlijnen zijn achtereenvolgens a , b , c en d . Je mag aantonen dat $\frac{PA}{PB} \cdot \frac{QB}{QC} \cdot \frac{RC}{RD} \cdot \frac{SD}{SA} = 1$.

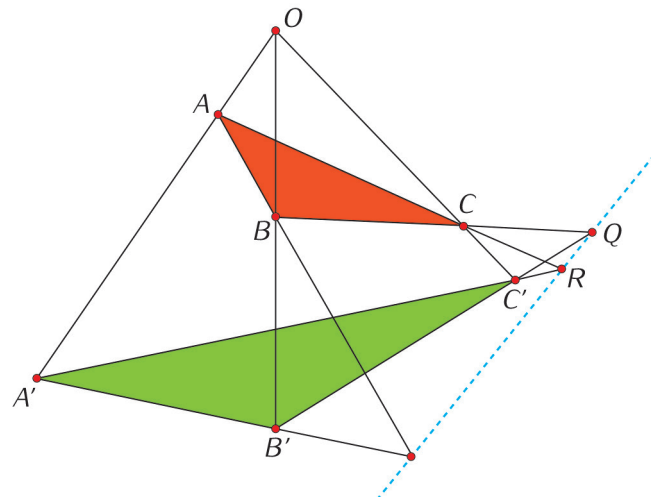


figuur 8

Terug naar het startprobleem

We keren terug naar ons startprobleem van de twee driehoeken en drie concurrente lijnen.

In figuur 9 hebben we een tekening gemaakt met behulp van GeoGebra. Het lijkt er sterk op dat de drie punten P , Q en R op één lijn liggen. We moeten het nog wel bewijzen.



figuur 9

$\triangle O \dots$	snijden met transversaal	snijpunt	product van verhoudingen door de stelling van Menelaus toe te passen
$\triangle OAB$	$A'B'$	P	$\frac{A'O}{A'A} \cdot \frac{PA}{PB} \cdot \frac{B'B}{B'O} = 1$
$\triangle OBC$	$B'C'$	Q	$\frac{B'O}{B'B} \cdot \frac{QB}{QC} \cdot \frac{C'C}{C'O} = 1$
$\triangle OAC$	$A'C'$	R	$\frac{A'O}{A'A} \cdot \frac{RA}{RC} \cdot \frac{C'C}{C'O} = 1$

tabel 1

Kunnen we nu iets met de stelling van Menelaus? Jazeker. We passen die toe op de volgende drie driehoeken die punt O gemeenschappelijk hebben, met passende transversalen, zie de tabel 1.

Vermenigvuldigen we de linkerleden (of een omgekeerde) van de vergelijkingen in de vierde kolom met elkaar, dan kunnen we ervoor zorgen dat alleen de drie rode verhoudingsgetallen overblijven waarvan het product natuurlijk

gelijk is aan 1: $\frac{PA}{PB} \cdot \frac{QB}{QC} \cdot \frac{RC}{RA} = 1$.

Met de omkering van de stelling van Menelaus volgt dan dat de punten P , Q en R op één rechte lijn liggen.

Tot slot

Datgene wat we gevonden hebben, wordt de stelling van Desargues genoemd. We formuleren de stelling nog even:

Van twee driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$ liggen de drie snijpunten van de overeenkomstige zijden op één rechte lijn, dan en slechts dan als de drie verbindingslijnen van de overeenkomstige hoekpunten door één punt gaan.

Girard Desargues (1591–1661) was een Franse wiskundige en ingenieur. Paul Levrie van de universiteit Antwerpen kennen we o.a. van het tijdschrift *Pythagoras*. In nummer 61–2 (november 2021) gaf hij van de stelling een grafisch bewijs in het artikel ‘Een dimensie meer helpt: de stelling van Desargues’, zie weer figuur 9. En inderdaad kunnen we de tekening in figuur 9 ook zien als de doorsnijding van het vlak dat bepaald wordt door de rode $\triangle ABC$ met de piramide $O.A'B'C'$ met de groene $\triangle A'B'C'$ als grondvlak. De doorsnijding levert de lijn PQR op.

Toepassingen van de stelling vinden we o.a. in de projectieve meetkunde waarbij ook de dubbelverhoudingen^[1] terug te vinden zijn. Voor de lezer is er nog de uitdaging

om de generalisatie van de stelling van Menelaus voor veelhoeken te bewijzen. Voor de leerling kan het een idee zijn voor een profielwerkstuk.

Tijdschrift *Pythagoras*? Ik kan het je van harte aanbevelen!

Noten

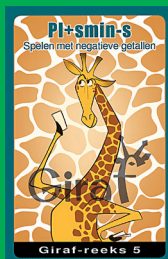
- [1] zie: <https://pyth.eu/pythagoras-62-6>
- [2] zie: <https://pyth.eu/dubbelverhouding>
- [3] zie: <https://pyth.eu/een-dimensie-meer-helpt-de-stelling-van-desargues>

Bronnen

- Bottema, O. (2016). *Hoofdstukken uit de elementaire meetkunde*. Epsilon uitgaven.
- Kindt, M. (2021). *Lessen in projectieve meetkunde*. Epsilon uitgaven.
- Molenbroek, P. (1925). *Leerboek der Vlakke Meetkunde*. Noordhoff.
- IJzeren, J. van (1997). *Moderne planimetrie*. Epsilon uitgaven.
- Website van Dick Klingens: <https://www.pandd.nl/>

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde. Hij is sinds 2014 met pensioen.
E-mailadres: jacques.jansen@wxs.nl.



Giraf 5: Pl+smín-s Spelen met negatieve getallen

Jasper Peemen

Titel: Plusminus Spelen met negatieve getallen

Auteur: Paul Durenkamp en Sibren Stienstra

Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam, 2023

Giraf-reeks, deel 5, 48 kaarten

ISBN: 6011432650682

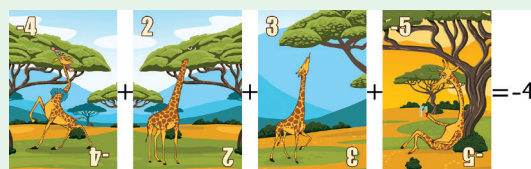
Prijs: € 7,00

Inleiding

Getallen zijn overal in de wereld aanwezig, zelfs in de dierenwereld. Ook de dieren in de Afrikaanse savanne moeten kunnen rekenen om hun aantallen in de gaten te houden. Het spelletje plusminus is een kaart- en rekenspel waarin je je op de Afrikaanse savanne waant, terwijl je aan het rekenen bent. Het spel is bedoeld voor leerlingen van het vmbo en de onderbouw havo/vwo, maar je merkt wel dat de gemiddelde vmbo-leerling meer moeite zal hebben met dit spel. Dat heeft verschillende redenen. Het werken met (negatieve) getallen vinden deze leerlingen toch vaak lastiger dan een gemiddelde leerling van het havo/vwo. En natuurlijk: het combineren van strategisch denken en rekenen maakt het ook een stapje lastiger voor vmbo-leerlingen. Bij het spel krijg je verschillende geïllustreerde getallenkaarten variërend van -5 tot en met 5, speciale kaarten en spelregels.

Het spel

De werkwijze van het spel is dat je speelt met gesloten kaarten en dat je door middel van de speciale kaarten achter de informatie komt over je kaarten. Zodra je die informatie hebt ga je proberen om met jouw vier kaarten uit te komen op een uitkomst van 0. Je moet daarvoor de getallen op jouw vier kaarten optellen, zie figuur 2.



figuur 2

Je kunt hiervoor een kaart van jezelf ruilen met een van de stapels in het midden, waar een gesloten stapel en een open stapel liggen.

Mocht een speler dichtbij of op de 0 zijn uitgekomen, dan laat hij dit aan zijn medespelers weten door op de tafel te kloppen. De ronde wordt nog uitgespeeld en

daarna worden de kaarten van alle spelers bekeken. De speler die het dichtst bij de 0 zit is de winnaar. Mocht een speler nog speciale kaarten hebben, dan moet hij deze ruilen voor hetzelfde aantal getallenkaarten van de gesloten stapel.

Negatieve getallen leren

Tijdens het spelen merk je dat het spel best lastig kan zijn voor een leerling. Een speler moet namelijk strategisch nadenken, maar ondertussen ook rekenen met (negatieve) getallen. Als je dit spel aan het begin van het hoofdstuk over (negatieve) getallen zou spelen met de leerlingen, dan zullen ze waarschijnlijk al snel vastlopen. Je kunt daarom beter beginnen met de leerlingen de bijbehorende speelbladen te laten maken. Die bladen zijn te downloaden van de site van Epsilon. Er wordt dan stap voor stap gewerkt aan het rekenen met negatieve getallen. Mijn ervaring is dat sommige leerlingen dit onderwerp snel door hebben. Die sterkere leerlingen kun je uitdagen door middel van lastigere opgaven, of door ze de eerste werkbladen niet te geven. Dit geldt voor alle niveaus waarvoor het spel bedoeld is. Voor de leerlingen die het lastig vinden, raad ik aan om met de eerste drie werkbladen te beginnen. Zo wennen ze rustig aan de verschillen tussen optellen en aftrekken van positieve en negatieve getallen. Je zult ook merken dat de vmbo-leerlingen het prettig vinden hiermee te beginnen en later in de lessencyclus het spel te spelen. Voor leerlingen met rekenproblemen kun je deze kaartjes en werkbladen ook zeker inzetten. De kaartjes en werkbladen kunnen deze leerlingen stapsgewijs helpen inzicht te geven in wat er gebeurt als je bijvoorbeeld een getal weghaalt of optelt.

Conclusie

Al met al kun je het spel op verschillende momenten inzetten. Tijdens de lessen over (negatieve) getallen, maar ook bijvoorbeeld als break tussen andere onderwerpen. Zo kunnen de leerlingen tijdens zo'n break toch nog oefenen en ondertussen de strijd aangaan met elkaar. Ik raad het spel zeker aan voor de brugklas. Voor de tweede klassen kan het ingezet worden als een leuke afwisseling of voor een opfrismomentje.

Over de auteur

Jasper Peemen is werkzaam als wiskundeleraar vmbo en havo aan het Beatrix College te Tilburg.

E-mailadres: peemenj@gmail.com

Een nieuw *Mathematics Resource Center* op de Koreda Mixed Secondary School in Kenia

Geen jarenlange procedures bij het WereldwiskundeFonds, maar gewoon kortdaat te hulp schieten daar waar dat nodig is. Dédé de Haan beschrijft hoe in zes weken tijd het Mathematics Resource Center op een school in Kenia gerealiseerd is.

Wat vooraf ging

Een aantal jaren geleden heeft het WwF een Mathematics Resource Center van een school in West-Kenia gefinancierd. Het verzoek daarvoor kwam van Alie Eleveld, een Nederlandse die permanent in West-Kenia woont en actief is vanuit een NGO. Deze school ligt in een gebied dat voortdurend wordt getroffen door overstromingen. De komst van het Mathematics Resource Center, waarin boeken en materialen staan, maakte veel mogelijk: er was een grote verbetering in de prestaties van de school, waar momenteel ook meer meisjes wiskunde volgen. Bovendien nam het aantal leerlingen toe, en meer leerlingen kwamen in aanmerking om naar national schools en andere instellingen te gaan. De nationale televisie kwam langs, en de school kreeg bezoek van de minister van onderwijs.



figuur 1 De locatie van Koreda Mixed Secondary School in West-Kenia

Nieuwe aanvraag

Dit succesvolle verhaal was reden voor Alie Eleveld om, deze keer samen met prof. dr. Shem Otoi, opnieuw een aanvraag te doen bij het WwF – nu voor een Mathematics Resource Center op de Koreda Mixed Secondary School. De school ligt in een afgelegen gebied van Homa Bay County, relatief niet ver van het Victoriameer, zie figuur 1. Het is een dagschool die in 2005 is gestart, met 21 leerlingen: kinderen van wie de ouders/voogden de tarieven van de kostscholen niet konden betalen, en voor

wie goedkopere dagscholen te ver weg waren. Momenteel heeft de school 267 leerlingen, zeven bevoegde en zes onbevoegde leraren. Ondanks het ontbreken van een kantine, practicumlokalen en een bibliotheek is het de school gelukt om de afgelopen twee jaar negen leerlingen te laten doorstromen naar openbare universiteiten in Kenia – maar het zou mooi zijn als die aantallen omhoog gaan, en een eerste stap zou het starten van een Mathematics Resource Center kunnen zijn. Als bestuurslid van de school selecteerde prof. Otoi in samenspraak met de schoolleiding de leveranciers die boeken, rekenmachines en leermiddelen zouden kunnen leveren. Begin juni 2024 stuurden ze de aanvraag naar het WwF.



figuur 2 Tentoongestelde boeken en leermiddelen

Opening van het Mathematics Resource Center

...en dan kan het snel gaan! In de vergadering van het WwF van 11 juni 2024 werd de aanvraag goedgekeurd, en na bevestigende mailtjes werd het geld gestort. Er is toen ontzettend snel gehandeld, en op 22 juli jl. was al de opening van het Mathematics Resource Center!



figuur 3 Prof. Shem Otoi en Alie Eleveld met schoolleiding, bestuur en leerlingen



figuur 4 zelf werken aan vraagstukken bij het wiskunde symposium in september jl.

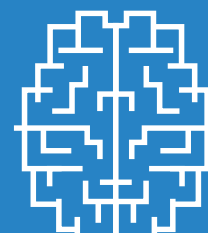
Alle lokale bestuurders (van de gemeenschap, van de school, van een basisschool) waren aanwezig, het personeel van de school en een aantal leerlingen,

zie figuur 2 en 3. Er waren toespraken en er waren dankwoorden door de leerlingen (en cadeaus). Als laatste onderdeel van het project is er een wiskundesymposium georganiseerd, waarbij twee jaarlagen van leerlingen van een andere school (Oriwo Boys) samen met de leerlingen van Koreda Mixed wiskundevraagstukken oplosten, zie figuur 4, en ervaringen uitwisselden.

Over de auteur

Dédé de Haan is lerarenopleider wiskunde aan NHLStenden Hogeschool, medewerker van het Freudenthal Instituut en bestuurslid van het Wereldwiskunde Fonds. E-mailadres: d.dehaan@uu.nl
Website WwF: www.wereldwiskundefonds.nl

Puzzelen met het getal 100



Lieke de Rooij

Voor een rijtje van n opvolgende gehele positieve getallen ≥ 1 noteren we alle permutaties.

Dus voor $n = 3$ hebben we 6 rijtjes (1,2,3); (1,3,2); (2,1,3); (2,3,1); (3,1,2) en (3,2,1).

Elk rijtje vermenigvuldigen we met het rijtje (1,2,3) in die volgorde en tellen ze op, dus:

$$1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 = 14$$

$$1 \times 1 + 3 \times 2 + 2 \times 3 = 13$$

$$2 \times 1 + 1 \times 2 + 3 \times 3 = 13$$

$$2 \times 1 + 3 \times 2 + 1 \times 3 = 11$$

$$3 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 3 = 11$$

$$3 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 3 = 10$$

Zo krijgen we de getallen 10, 11, 13 en 14, waarbij 11 en 13 elk twee keer voorkomen. We missen 12.

Analoog voor $n = 4$ krijgen we alle getallen vanaf de

kleinste tot en met de grootste: 20 t/m 30.

Opgave 1: Wat is de kleinste n waarbij je het getal 100 krijgt? Geef ook een permutatie waarbij dat het geval is.

Opgave 2: Voor $n = 100$: Wat is het kleinste getal en wat is het grootste getal dat je kunt krijgen?

Opgave 3: Het moge duidelijk zijn dat getallen voor een bepaalde n meer dan één keer kunnen voorkomen. Is er ook een n waarbij er een bepaald getal k precies 100 keer voorkomt? Zo ja, geef een voorbeeld van n en k .

Oplossingen kun je sturen naar
Lieke_de_rooij@hotmail.com.

Onder inzenders met de juiste of beste oplossingen wordt een boekenbon van 20 euro verloot.

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Hugo Duivesteijn, voorzitter
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck
Constantijn Tilanus

Inzenden bijdragen

Tom Goris,
Molenbochtplein 38, 5014 EJ Tilburg
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailing-services.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvww.nl

Voorzitter

Margot Rijnierse
E-mail: m.rijnierse@nvvw.nl

Secretaris

Els Franken
E-mail: e.franken@nvvw.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06 21 50 96 79 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Juridisch Centrum
E-mail: nvww@juridischcentrum.com
Vermeld bij je contact je lidnummer en telefoonnummer.

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt met ingang van 1 augustus 2023

- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 72,50
- leden, maar dan zonder Euclides: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 75,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen Euclides niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 90,00
Instituten en scholen: € 160,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal,
Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2025

LANDELIJK

Ma
03/02
Vr
21/02

Scholen kiezen zelf een dag

Op de scholen: Onderbouw Wiskundedag (3hv) en vmbo Wiskundedag (3 vmbo-gt)

Organisatie: Freudenthalinstituut

UTRECHT

Do
13/03

Conferentie Werken aan de basisvaardigheid rekenen/wiskunde in alle vakken.

Organisatie: NvVW, Platform Rekenbewust vakonderwijs, Expertisepunt Rekenen-wiskunde, KNAG, Vecon en NVON

Vr
14/03

WISKUNDEOLYMPIADE

Tweede ronde op de universiteiten

LANDELIJK

Do
20/03
Ma
31/03

De scholen kiezen zelf een dag.

Op de scholen: W4Kangoeroewedstrijd, wereldwijde wiskundewedstrijd Organisatie: Stichting Wiskunde Kangoeroe

Vr
04/04
Za
05/04

NOORDWIJKERHOUT

Nationale Wiskundedagen

Organisatie: Freudenthalinstituut

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook vakbladeuclides.nl

JAARGANG 100

Nr.	Verwachte verschijningsdatum	deadline
5	12 maart 2025	30 december 2024
6	30 april 2024	24 februari 2025
7	18 juni 2025	20 april 2025

CASIO



Opvolger van:
fx-82MS
fx-82EX

**Voor Nederlands
curriculum gemaakt**

Nieuw vanaf schooljaar 2025/2026: de 13e editie van Getal & Ruimte havo/vwo bovenbouw!

Maak kennis met de vertrouwde kwaliteit van Getal & Ruimte, nu vernieuwd voor havo/vwo bovenbouw. Wat goed was, hebben we behouden en verder verbeterd. Ontdek de belangrijkste vernieuwingen:

- **Bewezen didactiek:**
Voorkennis activeren, formatief evalueren en een doorlopende leerlijn van onderbouw naar bovenbouw.
- **Leerdoelen:**
Duidelijke leerdoelen per paragraaf met leerdoelchecks.
- **Differentiëren:**
Volop oefenen met uitgebreide differentiatie-mogelijkheden.
- **Compleet:**
Keuze uit LiFo/FLEX of Hardcover leerboek voor Wiskunde A, B, en C. Wiskunde D nu ook herzien in LIFO/FLEX.



Vraag je gratis beoordelingspakket aan op
getalenruimte.noordhoff.nl

