

Olympiadepuzzel

Euclides 100 nummer 1



Wedstrijd

Opgave

Op de school van Lars hebben 28 leerlingen meegedaan aan een wiskundewedstrijd, onder wie Lars zelf. De wedstrijd bestaat uit twaalf opgaven. Ieder goed antwoord is vijf punten waard; voor een fout antwoord krijg je geen punten. Als je geen antwoord invult, krijg je één punt.

Het blijkt dat alle leerlingen een verschillende score hebben gehaald. Iedereen heeft bij minstens de helft van de opgaven een antwoord ingevuld en niemand heeft meer dan zes opgaven fout beantwoord. Bij iedere leerling zijn hooguit 80% van de door hem of haar gegeven antwoorden goed.

Lars is als 5^e van zijn school geëindigd. Bij hoeveel opgaven heeft hij het goede antwoord ingevuld?

Uitwerking

Bekijk een willekeurige deelnemer van Lars' school. Laat a het aantal goede antwoorden zijn dat deze leerling gegeven heeft, b het aantal foute antwoorden en c het aantal opgaven dat de leerling niet beantwoord heeft. De leerling heeft dan $5a + c$ punten gehaald.

Er geldt dat $c \leq 6$ en $b \leq 6$. Daarnaast is $a \leq \frac{4}{5} \cdot (a + b)$.

Omdat $a + b + c = 12$, kunnen we deze ongelijkheden ook schrijven als

$$c \leq 6 \quad \text{en} \quad a + c \geq 6 \quad \text{en} \quad a \leq \frac{4}{5} \cdot (12 - c).$$

Dit impliceert dat $a \leq \frac{4}{5} \cdot 12 < 10$, dus $a \leq 9$.

We maken nu een tabel met alle mogelijke scores.

$c \backslash a$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-	-	-	-	-	-	30	35	40	45
1	-	-	-	-	-	26	31	36	41	-
2	-	-	-	-	22	27	32	37	42	-
3	-	-	-	18	23	28	33	38	-	-
4	-	-	14	19	24	29	34	-	-	-
5	-	10	15	20	25	30	-	-	-	-
6	6	11	16	21	26	-	-	-	-	-

De combinaties linksboven in de tabel zijn niet mogelijk vanwege de eis dat $a + c \geq 6$; de combinaties rechtsonder vallen af vanwege $a \leq \frac{4}{5} \cdot (12 - c)$.

We zien dat er 33 mogelijke combinaties (a, c) zijn, die 31 verschillende scores geven (de scores 26 en 30 komen dubbel voor). Van deze 31 verschillende scores zijn er 28 behaald en dus 3 niet. Omdat Lars als 5^e van zijn school is geëindigd, heeft hij de 5^e, 6^e, 7^e of 8^e score van boven gehaald, dus 38, 37, 36 of 35 punten. In alle gevallen heeft hij 7 opgaven goed beantwoord.

Inzenders met de juiste oplossing

Richard Both, Els Franken, Gé Groenewegen, Sharon Groot Zwaaftink, Mitchel van Heesch, Hans Linders, Matthijs Schukking, Piet Smal, Auke Smid, Bert Smid, Monica Woldinga en Sjoerd Zondervan

Winnaar van de cadeaubon

Auke Smid