Uitwerkingen bij het artikel Squid game

Herman Bloem

Uitwerking uitdaging A: Herschrijven algemene uitdrukking (4)

Vanuit de algemene uitdrukking (4) voor het verwachte aantal overlevenden gaan we afleiden

$$E(n,t) = (n - \frac{t}{2}) + \frac{1}{2^t} \times \sum_{k=n+1}^{t} (k-n)\binom{t}{k}$$

We maken daarbij gebruik van de volgende twee identiteiten (i) en (ii).

$$(i) \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{k=0}^{n} k \times \binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}$$

Uitgaande van Newton's binomium

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

volgt (i) via $x = y = 1$ en krijgen we (ii) door te differentiëren naar x (of y) en daarna $x = y = 1$ te nemen.

Herschrijven van de algemene formule gaat dan als volgt:

$$E(n,t) = \frac{1}{2^t} \times \sum_{k=0}^{n} \binom{t}{k} \times (n-k)$$

$$= \frac{n}{2^t} \times \sum_{k=0}^{n} \binom{t}{k} - \frac{1}{2^t} \times \sum_{k=0}^{n} k\binom{t}{k}$$

$$= \frac{n}{2^t} \times \{\sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} - \sum_{k=n+1}^{t} \binom{t}{k}\} - \frac{1}{2^t} \times \{\sum_{k=0}^{t} k\binom{t}{k} - \sum_{k=n+1}^{t} k\binom{t}{k}\}$$

$$\underset{(i)(ii)}{=} \frac{n}{2^t} \times \{2^t - \sum_{k=n+1}^{t} \binom{t}{k}\} - \frac{1}{2^t} \times \{t2^{t-1} - \sum_{k=n+1}^{t} k\binom{t}{k}\}$$

$$= \frac{1}{2^t} \times \{n2^t - t2^{t-1}\} + \frac{1}{2^t} \times \sum_{k=n+1}^{t} (k-n)\binom{t}{k}$$

$$= (n - \frac{t}{2}) + \frac{1}{2^t} \times \sum_{k=n+1}^{t} (k-n)\binom{t}{k}$$

Uitwerking uitdaging B: Het geval $t = 2n$

We gaan bewijzen dat:

$$E(n,2n) = \frac{n}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n} \tag{8}$$

Om formule (8) af te leiden hebben we de volgende binomiaal-identiteiten nodig:

(i) $\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\qquad\qquad (ii)$ $\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

(iii) $\quad \sum_{k=0}^{n} k\times\binom{n}{k} = n\times 2^{n-1}$ $\qquad\qquad (iv)$ $\quad \sum_{k=1}^{n} k\times\binom{2n}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} k\times\binom{2n}{k}$

Identiteiten (ii) en (iii) zagen we bij uitdaging A. De laatste (iv) is verrassend en volgt uit het feit dat het LL en RL 'omgekeerd termgewijze' symmetrisch zijn omdat:

$$k\times\binom{2n}{k} = (2n-k+1)\times\binom{2n}{2n-k+1}$$

En dan volgt nu de afleiding van (8), uitgaande van (4):

$$\begin{aligned}
E(n,2n) \quad &= \frac{1}{2^{2n}}\times\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}\times(n-k)\\
&= \frac{1}{2^{2n}}\times\{n\times\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k} - \sum_{k=0}^{n} k\times\binom{2n}{k}\}\\
&\underset{(i)}{=} \frac{n}{2^{2n}}\{\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}\} - \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n} k\times\binom{2n}{k}\\
&\underset{(ii)}{=} \frac{n}{2^{2n+1}}\{2^{2n} + \binom{2n}{n}\} - \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n} k\times\binom{2n}{k}\\
&\underset{(iv)}{=} \frac{n}{2^{2n+1}}\{2^{2n} + \binom{2n}{n}\} - \frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{k=0}^{2n} k\times\binom{2n}{k}\\
&\underset{(iii)}{=} \frac{n}{2^{2n+1}}\{2^{2n} + \binom{2n}{n} - 2^{2n}\}\\
&= \frac{1}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

Overigens geven (iii) en (iv) nog de identiteit: $\sum_{k=1}^{n} k\times\binom{2n}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} k\times\binom{2n}{k} = n\times 2^{2n-1}$