

EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAAR

Oude algebranotaties en rollen van variabelen

Actualisatie examenprogramma's havo-vwo
Elk profiel krijgt zijn eigen wiskunde

Minimal art objecten met verborgen
afbeeldingen

Statistische diagrammen in het nieuws

NR.3

Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren



JAARGANG 100 DECEMBER 2024

INHOUDSOPGAVE

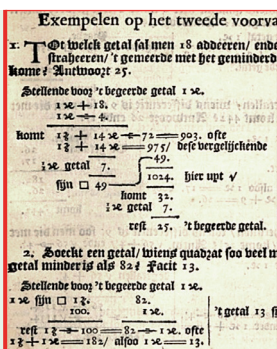
EUCLIDES JAARGANG 100 NR 3



IN DIT NUMMER

OUDE ALGEBRANOTATIES EN
ROLLEN VAN VARIABLEN
VERSLAG VAN EEN NWD2024
WORKSHOP
Jeanine Daems

4



ACTUALISATIE EXAMENPROGRAMMA'S HAVO-VWO
ELK PROFIEL KRIJGT ZIJN EIGEN WISKUNDE
Bea Ros

8

GEDENKWAARDIGE VERGADERINGEN
Harm Jan Smid

12

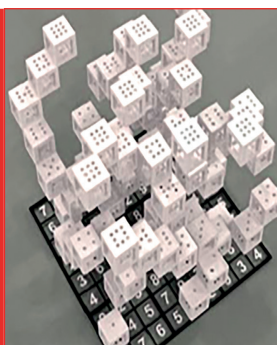


MEETKUNDE IN BATH
Ryan Staal

16

BOEKBESPREKING
ZEBRA 70: MINIMAL ART
OBJECTEN MET VERBORGEN
AFBEELDINGEN
Nico Alink

20



KLEINTJE DIDACTIEK
WHAT'S GOING ON IN THIS GRAPH? – STATISTISCHE
DIAGRAMMEN IN HET NIEUWS
Lonneke Boels

23

HERONISCHE DRIEHOEKEN
Martin Kindt

24

WITJE: PAUZES OP SCHOOL

29

HET FIZIER GERICHT OP ...
HET EXPERTISEPUNT REKENEN - WISKUNDE
Anne Heemskerk
Vincent Jonker

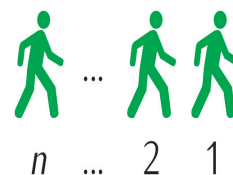
30

ROEST RUST (NIET)
KERKRAMEN
Ab van der Roest

33

SQUID GAME
Herman Bloem

34



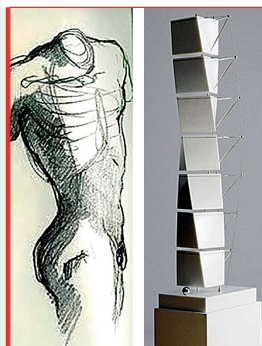
Afbeelding voorkant: Regenboog in de haven van het Duitse waddeneiland Norderney, 13 augustus 2023.

Foto: Heleen van der Ree

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

UITDAGENDE PROBLEMEN
TURNING TORSO
Jacques Jansen

38



VIJF VRAGEN AAN ...
LIEKE DE ROOIJ EN WOBIEEN DOYER

42



OLYMPIADEPUZZEL
Esther Bod

45

SERVICEPAGINA

46



Foto van de voorkant met de hele regenboog

Kort vooraf



Zit er wel genoeg meetkunde in? Het is de vraag die onze scheidende voorzitter Wim Caspers in het veld

hoorde over de nieuwe examenprogramma's voor havo en vwo (zie pag. 8). Deze vraag blijkt niet nieuw. Ook bij eerdere curriculum-aanpassingen werd deze vraag gesteld. Harm Jan Smid beschrijft drie onderwijs-bijeenkomsten die sporen hebben nagelaten in de diverse curricula. In 1955 werd er druk gelobbyd om differentiaalrekening in het hbs-programma te krijgen en om de beschrijvende meetkunde te vervangen door analytische meetkunde.

Speciale aandacht voor de liefhebbers van meetkunde: de jaarlijkse olympiade-bijdrage is 'Meetkunde in Bath'. Ryan Staal (Erasmiaans Lyceum Rotterdam en nu student wis- en natuurkunde) beschrijft zijn denkproces bij het oplossen van een ingewikkelde opgave. Op het moment van schrijven verheug ik me op morgen. Dan is de prijsuitreiking van de Nederlandse Olympiade en heb ik de eer om samen met Heleen van der Ree namens het bestuur van de NVvW een aantal prijzen uit te reiken.

Voor de liefhebbers van kansrekening is er ook een verslag van een denkproces: de reis die Herman Bloem aflegde om het verwachte aantal spelers dat de overkant haalt van de Glazen Stapstenen brug uit de Netflix serie Squid Game. Zo zie je maar weer: wiskunde is overal.

Namens de redactie: mooie feestdagen en een goed begin van 2025!

Tom Goris

Oude algebrannotaties en rollen van variabelen

Verslag van een NWD2024 workshop

Historische algebrannotaties bekijken met de blik van de rollen van variabelen, dat was de workshop die Jeanine Daems op de 30^e Nationale Wiskunde Dagen verzorgde. De aanmelding voor NWD31 is inmiddels geopend.

Symbolentaal

Een van de themalijnen van NWD 2024 was 'Wiskunde en taal'. Daarin kan een bijdrage over de symbolentaal van de wiskunde natuurlijk niet ontbreken! De andere commissieleden vonden het een goed idee als ik daar zelf een workshop over zou gaan maken, met zowel een historisch als een didactisch perspectief.

Achteraf blijkt namelijk vaak dat deelnemers aan de NWD juist de echte workshops erg waarderen: de onderdelen waarbij je lekker zelf aan de slag kunt. Dat is niet altijd makkelijk te realiseren, bij sommige onderwerpen is dat eenvoudiger dan bij andere. Vorig jaar gaf ik een lezing over kegelsneden waar ook wel een opdracht in zat, maar waarin ik vooral veel vertelde. Dat wilde ik dit jaar anders doen.

Wat ik zelf interessant vind is de vraag waar die wiskundige symbolen vandaan komen, en waarom nou juist deze symbolen 'het geworden' zijn. In de loop van de geschiedenis zijn er voor allerlei wiskundige concepten allerlei verschillende symbolen gebruikt. Dat we nu allemaal $=$, $+$ en $\sqrt{\quad}$ gebruiken, bijvoorbeeld, heeft geen inherente reden: zo'n symbool is niet per se beter dan de alternatieve symbolen die in gebruik waren, maar ze werden toevallig gebruikt door mensen die veel communiceerden met anderen, of een invloedrijke wiskundige waren, of ze stonden in een invloedrijk boek.

Bij de symbolen die we voor variabelen gebruiken ligt dat een beetje anders: onze huidige algebrannotatie heeft wel degelijk voordelen boven de meeste eerdere notaties. Dat wilde ik de deelnemers van de workshop graag laten ontdekken en ervaren.

Onze letternotatie voor variabelen hebben we te danken aan Descartes (in zijn beroemde *La Géométrie* uit 1637), en wat aan deze notatie zo handig is, is dat hij onderscheid kan maken tussen de verschillende rollen die zo'n

variabele kan hebben: Descartes gebruikte x , y , z (letters uit het eind van het alfabet) voor onbekenden of veranderlijken, terwijl de letters a , b , c , ... (uit het begin van het alfabet) voor bekende, maar algemeen opgeschreven grootheden stonden (parameters, dus).

Bovendien zorgt het kunnen gebruiken van verschillende letters ervoor dat je in je notatie *meerdere* variabelen kunt uitdrukken, wat bij de meeste eerdere notaties niet of moeilijk het geval was. Viète deed in 1591 overigens iets dergelijks ook al vóór Descartes, hij gebruikte hoofdletters en koos klinkers voor onbekende grootheden en medeklinkers voor gegeven grootheden.

Rollen van variabelen

Daarom leek het me leuk om eens naar oudere notaties voor variabelen te gaan kijken vanuit het perspectief van de rollen van variabelen zoals we die in de vakdidactiek onderscheiden. Welke rollen kun je met een bepaalde oude algebrannotatie goed uitdrukken, en welke eigenlijk niet of minder goed?

In mijn workshop ben ik dan ook begonnen met het ophalen van wat die rollen ook alweer zijn^[1]:

Plaathouder:

van deze rol is sprake als je de variabele beschouwt als een lege plek waar je een getal kunt invullen. Die rol komt bijvoorbeeld naar voren als je uitrekent dat $5a + 7$ gelijk aan 12 is als $a = 1$. Of als je een vraag stelt van het type: Bas verdient 5 euro per uur en er geldt dus: *verdiensten* = 5 x *aantal uren*. Hoeveel verdient Bas als hij 6 uur werkt? De variabele is een leeg bakje waar je een numerieke waarde in kunt stoppen.

Onbekende:

van deze rol is sprake als je een vergelijking hebt en je de waarden van de variabele wilt weten die de vergelijking kloppend maken, dus als je bijvoorbeeld $5a + 7 = 12$

oplost, of $x^2 - 2x - 8 = 0$, of als je weet hoeveel Bas verdiend heeft en je wilt uitrekenen hoeveel uur hij dus gewerkt moet hebben.

Generalisator:

deze rol kom je tegen als je variabelen gebruikt om een algemene geldigheid uit te drukken, bijvoorbeeld als je opschrijft: $ab = ba$. Of als je een uitdrukking herleidt: $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$. Dat is niet iets om op te lossen, je vult ook niet iets in, maar je drukt een algemene waarheid uit. Eigenlijk denk je erbij: 'Voor alle a en b geldt...' of: 'Voor alle x geldt...'

Veranderlijke:

als je bij een afhankelijkheidsrelatie geïnteresseerd bent in hoe de onafhankelijke variabele afhangt van de afhankelijke variabele, dan is er sprake van de rol van veranderlijke. Dit is een dynamisch proces. Je kijkt naar het hele verband, bijvoorbeeld als je met de grafiek van een verband uitdrukt hoe y verandert als x toeneemt, of als je je afvraagt: wat gebeurt er in een omgekeerd evenredig verband tussen x en y met y als x drie keer zo groot wordt?

Parameter:

de veranderlijke constante, dit zijn de grootheden die Descartes bekend veronderstelde maar toch algemeen wilde noteren. Denk aan de p in een functie als $y = x^4 + px + 1$, waarbij het veranderen van de p steeds een ander verband geeft, variatie van p geeft een hele bundel grafieken. Of denk aan de a , b , en c in de vergelijking $ax^2 + bx + c$, waarin x natuurlijk de rol van onbekende heeft, maar a , b en c die van parameter.



Oude algebranotaties

Ik ging op zoek naar goede bronnen om de algebranotaties in te bestuderen. Jan Hogendijk heeft op zijn onvolprezen website^[2] heel veel Nederlandstalige wiskundige bronnen uit de 16^e, 17^e en 18^e eeuw verzameld met links naar digitale versies. Ik heb wat zitten bladeren in allerlei oude algebraboeken, daar zat veel geschikt materiaal tussen.

Uiteindelijk koos ik voor vijf bronnen, waarvan ik er hieronder eentje zal bespreken. De oudste bron was de vertaling van een Babylonisch kleitablet waarop een vergelijking opgelost wordt, de andere bronnen kwamen allemaal uit de 16^e, 17^e en 18^e eeuw.

Bij elke bron had ik een aantal specifieke vragen geformuleerd, maar steeds kwamen die neer op overwegingen als:

- Welke rol(len) hebben de variabelen in dit fragment?
- Met welke rol(len) worstelt de auteur hier?
- Welke rol(len) van variabelen zou je met deze notatie wel of niet kunnen uitdrukken?
- Wat zijn andere kenmerken en voor- en nadelen van deze algebranotatie?

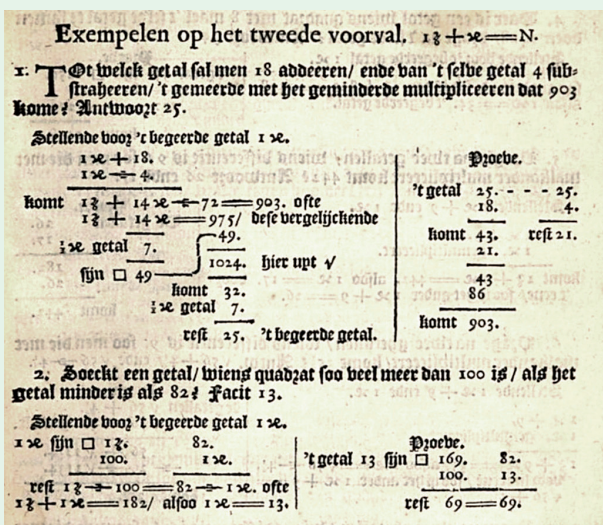
Hieronder staat een deel van het werkblad, met twee fragmenten uit een boek en mijn vragen daarbij. Het is leuk om eerst zelf te proberen die vragen te beantwoorden, daarna geef ik mijn eigen analyse van deze fragmenten.

Deel van het werkblad

Beteeckeninge der Characteren die wy in desen sullen gebruycken.

- ☞ Radix, wert gemeenelijck gefelt voor t'egene men is soeckende ende onbekent is.
- ☞ Zensus, komt van ☞ in sijn selver gemultipliceert.
- ☞ Cubus, komt van ☞ met ☞ gemultipliceert.
- ☞ Zensdezus ofte Zenszenfus, komt van ☞ met ☞ gemultipliceert.
- ☞ Surfolidum, ende soo voort als voor het uyttrecken der wortelen klaerder kan gesien worden.
- ☞ Gebeurt oock somtijds datmen meerder als eens ☞ moet stellen eermen tot de vergelijkinge kan komen, dan nemen wy voor den tweeden ☞ 1 a, voor ☞ 1 aa, voor ☞ 1 aaa, voor ☞ 1 aaaa, ende soo voort; ende soo daer noch meerder Radices van noode zijn soo steltmen 1 b, oock 1 c, 1 d, 1 e, &c.
- ✓ Beteeckt datmen uyt het getal daer dit teeken voor gevonden werdt, soodanigen Wortel sal trecken als 't selfde teeken ✓ by hem heeft, als ✓ ofte ✓☞ den ☞ Wortel, ✓ ☞ den ☞ Wortel, ✓☞ den ☞☞ Wortel, ende soo voort.
- ✓✓, Univerfael Radix, dat is dat den Wortel uyt de twee ofte meer (met het teeken + ofte -) aen een gestelde getallen moet getrocken wesen.
- + Beteeckt Plus ofte meer.
- Beteeckt Minus ofte min.
- = Beteeckt Gelijk.
- N° Beteeckt een gemeen getal.
- ☐ Vierkant ofte Quadrat.

Bron 1



Bron 2

Jacob R. Brasser, *Regula Cos, of Algebra*, zynde de alder-konstruycksten regel om het onbekende bekend te maken; Noch is hier by gevoeght de Geometria van Nicolaus Petri Daventriensis, ende andere Questien van de Algebrae; als mede eenige Exempelen van Gerrit Evertsz. Backer, Amsterdam: G. van Goedesberg, 1663.

Bron 3

De twee fragmenten (bron 1 en 2) komen uit het boek van Brasser. Bron 1 is de laatste pagina van de inleiding, bron 2 is een deel van blz 87. Dit boek is van na Descartes, maar zijn notatie voor variabelen wordt ook hier nog niet echt gebruikt, maar wel een klein beetje (waar?).

Vragen bij de bron:

- Wat is de rol van de variabele N ? Hoe beschrijft Brasser dit zelf?
- Wat zijn de rollen van de andere variabelen die je tegenkomt in dit fragment? (Er komen meerdere rollen voor!)
- Wat valt je nog meer op wat betreft algebranotatie in zijn inleiding?
- Wat gebeurt er in dit fragment? Wat gebeurt er in de 'Proeve'?

Mijn bevindingen over de bron

Brasser legt in de inleiding uit wat de symbolen die hij gebruikt betekenen. Hij gebruikt voor de variabelen meestal de cossische notatie, die in de vroege zestiende eeuw in Duitsland ontstond.^[3]

Bij het eerste symbool licht hij toe: 'Radix, wert gemeenlyck gestelt voor 't gene men is soeckende ende onbekent is'. Hier staat al expliciet wat de rol van deze variabele is: de onbekende. De symbolen die volgen zijn de tweede, derde, vierde en vijfde macht van de onbekende. Hier worden meteen twee kenmerken van de notatie duidelijk: symbolen voor verschillende machten kunnen worden gecombineerd tot een nieuwe macht, maar soms is er een nieuw symbool nodig.^[4]

We zien echter ook dat Brasser Descartes' notatie wel degelijk kende: hij zegt dat je ook a , aa , aaa , $aaaa$ etc. kunt gebruiken voor de machten van de onbekende, en als er meerdere variabelen nodig zijn kunnen we ook b , c , d , e et cetera. gebruiken! Toch gebruikt hij in de voorbeelden vooral de cossische notatie, zoals we ook in het tweede gekozen fragment zien.

Een ander interessant aspect is Brassers gebruik van de N , dat hij toelicht met: 'Beteekent een gemeen getal'. Wat dat precies betekent zien we beter in het tweede fragment. De titel is: 'Exempelen op het tweede voorval'. En dan staat er een vergelijking:

$$1x + x = N.$$

Blijkbaar wordt hier een bepaalde vorm van een vergelijking uitgedrukt, waarbij de N een algemeen getal aangeeft. Als we beter naar de rest van het tweede fragment kijken, dan zien we dat inderdaad twee vergelijkingen worden opgelost die na herschrijven van het probleem die vorm hebben, in het eerste voorbeeld $x^2 + 14x = 975$ en in het tweede voorbeeld $x^2 + x = 182$.

Wat ik wel opvallend vind is dat Brasser hier de N dus gebruikt om een parameter uit te drukken aan de rechterkant van het $=$ -teken. Maar eigenlijk staat aan de linkerkant ook een parameter: de coëfficiënt van x^2 is altijd 1 (daar staat ook echt een 1 voor in de algemene vorm en in de voorbeelden is die ook inderdaad steeds 1), maar de coëfficiënt van x varieert in de voorbeelden, en in de algemene uitdrukking is die coëfficiënt gewoon weggelaten! Brasser gebruikt dus in zijn notatie eigenlijk twee manieren om een parameter aan te geven: door

in de cossische notatie de coëfficiënt niet te noemen, én door het algemene getal rechts van het =-teken met een algemene letter N aan te geven. Laten we de rollen in dit fragment nog wat verder bekijken. We hadden in de inleiding al gezien dat de cossische notatie gebruikt wordt voor het uitdrukken van onbekenden, en dat is inderdaad wat hier gebeurt: in beide voorbeelden wordt een vergelijking opgelost. De rol van parameter hebben we zojuist al gezien bij het gebruik van de N en de 'lege plek' voor de onbekende in de algemene notatie van de vorm van de vergelijking. Bij het eerste voorbeeld is de vergelijking als we hem vertalen naar modern Nederlands: als we bij een getal 18 optellen en van datzelfde getal 4 aftrekken en we vermenigvuldigen die twee resultaten met elkaar, dan komt er 903 uit, welk getal is dit? In symbolen wordt dit nog wat duidelijker: $(x + 18)(x - 4) = 903$, wat is x ? In de uitwerking worden nu eerst de haakjes weggewerkt: $(x + 18)(x - 4) = x^2 + 14x - 72 = 903$. Vanwege de herleiding zou je kunnen zeggen dat de variabele hier ook even de rol van generalisator heeft. Daarna volgt een recept dat neerkomt op kwadraatafsplitsen, waar de oplossing 25 uit volgt. (Merk op dat de negatieve oplossing ontbreekt.)

En wat gebeurt er dan rechts van de verticale streep nog, in de 'Proeve'? Daar wordt het antwoord gecontroleerd! Kijk maar: bij 25 wordt 18 opgeteld (43) en er wordt ook 4 van afgetrokken (21), die uitkomsten worden vermenigvuldigd en dan komt er inderdaad 903 uit. Is hier ook nog sprake van een variabele en een rol? Ja, want in de oorspronkelijke vergelijking wordt nu 25 ingevuld, dus hier zien we de rol van plaatshouder. De enige rol die we in dit fragment nog niet gezien hebben, is de rol van veranderlijke. Die rol komt hier ook echt niet voor, want het gaat hier niet over een verband tussen variabelen. Probeer zelf de tweede vergelijking ook maar eens na te volgen in de uitwerking van Brasser.



Workshop

De deelnemers gingen enthousiast met de bronnen aan de slag, en het was leuk om te zien dat het inderdaad goed lukte om zonder heel veel voorkennis toch allerlei interessante aspecten van de notaties boven tafel te krijgen. De groep was klein genoeg om steeds iedereen gericht op weg te kunnen helpen met sturende vragen zonder alles meteen uit te leggen. De deelnemers waardeerden het 'puzzel'-gehalte in de opdrachten. Wat ik zelf goed vond werken was dat door te vragen naar de rollen die de variabelen aannemen in de verschillende bronnen, je op een preciezere manier kijkt naar wat er in zo'n tekst gebeurt, en daarmee kom je bepaalde voor- en nadelen van de verschillende oude notaties makkelijker op het spoor.

Noten

- [1] Drijvers, P., van Streun, A. en Zwaneveld, B. (2012). *Handboek wiskundendidactiek*. Epsilon
- [2] Hogendijk, J. (2022). Lijst met oude Nederlandse wiskundeboeken uit de 16^e, 17^e en 18^e eeuw. Zie <https://www.jphogendijk.nl/list.html>
- [3] Zie voor meer informatie daarover in Berlinghoff, W.P. en Gouvêa, F.Q. (2019). *Wortels van de wiskunde*. Epsilon, schets 8.
- [4] Wat aan deze bron niet goed te zien is, is dat de notatie multiplicatief gebruikt werd: de samenstelling van 'zensus' en 'cubus' betekent niet de vijfde maar de zesde macht van de onbekende, zodat er voor elke macht met een priemgetal in de exponent een nieuw symbool nodig was. Zie [3], blz. 99 en [5]
- [5] Krüger, J. (2015). *Algebra in Dutch education, 1600–2000*. In: Krainer, K., Vondrová, N. (2015). *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 1832–1838*.

Over de auteur

Jeanine Daems is als lerarenopleider wiskunde verbonden aan de Hogeschool Utrecht.
E-mailadres: jeanine.daems@hu.nl

Actualisatie examenprogramma's havo-vwo

Elk profiel krijgt zijn eigen wiskunde

In oktober zijn acht conceptexamenprogramma's voor wiskunde havo-vwo gepubliceerd. Voor elk profiel in de bovenbouw van havo en vwo ontwikkelde een vakvernieuwingscommissie van leraren, vak- en curriculumexperts een eigen passend wiskundeprogramma. Op dit moment ontwikkelt een syllabuscommissie voor de inhoud van de centrale examens conceptsyllabi, waarna SLO de programma's op scholen gaat beproeven.

Inleiding

'Zit er wel genoeg meetkunde in?' Het is bij curriculumherzieningen een terugkerende vraag. Dat merkte NVvW-voorzitter Wim Caspers toen hij ter voorbereiding op het 100-jarig bestaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren in 2025 vele jaargangen van *Euclides* doorbladerde. En dat is bij de huidige actualisatie van de examenprogramma's voor wiskunde havo-vwo niet anders, zo weet Caspers. Als voorzitter van de advieskring die meekeek en meedacht met de vakvernieuwingscommissie voor wiskunde, hoorde hij vanuit de geraadpleegde achterban die vraag over het aandeel meetkunde weer.



Wim Caspers

Eigen smoel

De vakvernieuwingscommissie wiskunde boog zich over de actualisatie van de examenprogramma's in havo en vwo (voor wiskunde vmbo loopt een eigen actualisatietraject, zie kader 1). Een belangrijke opgave daarbij was om te zorgen voor een betere aansluiting tussen de wiskundevakken en de profielen. Want de huidige indeling in wiskunde A, B, C en D wringt steeds meer. 'Wiskunde A dient bijvoorbeeld twee profielen, Natuur & Gezondheid

en Economie & Maatschappij', licht Caspers toe. 'En dat merk je, want het komt bij geen van beide optimaal uit de verf.' Bovendien, vult curriculumexpert Jos Tolboom van SLO aan, is er één havo-profiel zonder verplicht wiskundevak, namelijk Cultuur & Maatschappij. 'Dat is vreemd, want ook deze leerlingen hebben wiskundige vaardigheden nodig om zich te kunnen redden in het dagelijks leven en hun latere beroep. Zo wordt onze samenleving steeds data-intensiever en moet je dus weten hoe je om moet gaan met grote hoeveelheden data en hoe je deze kunt duiden.'

Om die reden heeft OCW aan SLO de opdracht gegeven om wiskundeprogramma's uit te werken voor alle bovenbouwleerlingen. De vakvernieuwingscommissie heeft vervolgens twee wiskundevakken ontwikkeld: wiskunde maatschappij en wiskunde natuur. Vanuit deze twee vakken zijn er examenprogramma's per profiel met een deel-geheel ontwerp: wiskunde maatschappij - C&M is een deel van wiskunde maatschappij - E&M, en wiskunde - N&G is een deel van wiskunde - N&T. Leidende vraag daarbij was: welke wiskundige vaardigheden hebben leerlingen in elk profiel nodig? Vwo-leerlingen met een C&M-profiel hoeven bijvoorbeeld niet complexe algebraïsche vergelijkingen te kunnen oplossen. Curriculumexpert Johan Brons van SLO geeft voorbeelden van wel relevante inhoud: 'E&M-leerlingen hebben bijvoorbeeld veel statistiek nodig bij economie en bij vervolgonderwijs. N&T-leerlingen krijgen een stevige dosis analytische meetkunde die bij kan dragen aan extra algebraïsche vaardigheden.' Hij kopt meteen de meetkundevraag in: 'In ons concept zit meetkunde alleen in wiskunde natuur - N&T. Als we meetkunde in de andere programma's hadden opgenomen, dan zouden deze te verbrokkeld en te overladen zijn geworden. Liever met enkele onderdelen de diepte in, dan van alles een beetje.' Tolboom vult aan:

‘Ook binnen onderdelen hebben we een profielspecifieke kleur aangebracht: zo bevatten alle programma’s statistiek, maar gaat het bij wiskunde maatschappij onder andere meer om een soort datascience en ligt bij wiskunde natuur het accent meer op kansrekening en kansverdeling. Zo hebben we de programma’s een eigen smoel proberen te geven.’

Actualisatie van het curriculum po en vo

De concept examenprogramma’s wiskunde zijn onderdeel van een actualisatie van de kerndoelen en eindtermen voor alle leergebieden en vakken, in opdracht van OCW en gecoördineerd door SLO. Per vak of cluster van vakken ontwikkelt een vakvernieuwingscommissie (tussen)producten die tussentijds verder worden uitgewerkt en bijgesteld. Een advieskring kijkt en denkt mee. In oktober van dit jaar zijn de conceptexamenprogramma’s wiskunde havo-vwo gepubliceerd.

Op <https://www.actualisatie-examenprogrammas.nl/wiskunde-havo-vwo> kun je deze conceptexamenprogramma’s downloaden en kun je je ook aanmelden voor automatische updates om op de hoogte te blijven van alle vorderingen.

Kader 1



Johan Brons (foto: Barbra Verbij)

Uniek proces

De actualisatie van de examenprogramma’s wiskunde is onderdeel van een grotere aanpak om de kerndoelen en examenprogramma’s van alle leergebieden en vakken weer bij de tijd te brengen, zie kader 2. ‘Sommige stammen nog letterlijk uit de vorige eeuw’, vertelt programmamanager Gerdineke van Silfhout. Dus groot onderhoud is nodig. Afgelopen oktober zijn de eerste concepten van 61 examenprogramma’s gepubliceerd, voor wiskunde

havo-vwo, Nederlands, Fries en de moderne vreemde talen, klassieke talen en maatschappijleer. De natuur-wetenschappelijke vakken volgen begin 2025. Van Silfhout spreekt van een unieke aanpak: ‘Niet eerder in de onderwijsgeschiedenis hebben we alles zo in samenhang opgepakt, van de kerndoelen po tot en met de examenprogramma’s vo, van vmbo-basis tot en met vwo. Dat is ontzettend complex, maar ook heel waardevol. Leraren en experts vanuit alle schoolsoorten en geledingen ontmoeten elkaar en bespreken samen: wat is basisstof voor alle leerlingen en waar moeten we gaan differentiëren? Zo kun je de doorlopende leerlijn beter in de gaten houden van onderbouw vo naar bovenbouw en de overgang vmbo-gl/tl naar havo bijvoorbeeld.’ Tolboom prijst de opzet van het actualisatieproces. ‘Dit is misschien wel een van de beste aanpakken voor onderwijsontwikkeling ooit. De opzet met een vakvernieuwingscommissie en een advieskring die meekeek, bleek heel vruchtbaar. De feedback vanuit de brede achterban van de advieskring heeft ons voortdurend scherp gehouden.’ Brons beaamt dit. ‘Het onder woorden brengen wat wiskunde precies behelst, is echt pittig. Het schakelen tussen commissie en advieskring was daarbij onmisbaar.’

Wiskunde in het vmbo

In het vmbo startte in 2019 al een actualisatie-traject om ervaren knelpunten op te lossen.

Zo worden vmbo-leerlingen met het huidige examenprogramma wiskunde onvoldoende toegerust voor de doorstroom naar de havo, sommige mbo-opleidingen of de arbeidsmarkt. Bovendien volgen niet alle leerlingen op het vmbo het vak wiskunde in de bovenbouw, terwijl ook zij in het dagelijks leven en werk steeds meer zullen moeten kunnen omgaan met grote hoeveelheden data.

In november 2022 zijn de conceptexamenprogramma’s wiskunde voor het vmbo opgeleverd:

- drie ter vervanging van de huidige wiskundeprogramma’s: wiskunde 1,2 voor vmbo-bb, -kb en gl/tl
- drie voor leerlingen die nu geen wiskunde volgen: wiskunde 1 voor vmbo-bb, -kb en gl/tl.

Dit schooljaar is een try-out met negen vmbo-scholen gestart die de nieuwe onderdelen van deze conceptprogramma’s gaan beproeven. Op www.actualisatie-examenprogrammas.nl/wiskunde-vmbo vind je meer informatie en kun je je aanmelden voor automatische updates om op de hoogte te blijven van alle vorderingen.

Kader 2

>

Doel van het vak

Dit nadenken over wat een vak precies inhoudt mag een overbodige exercitie lijken – elke wiskundige weet dat toch?! – maar Van Silfhout noemt het een essentieel onderdeel van het actualisatieproces. ‘Het gaat om nadenken over de vraag waarom dit vak relevant is voor leerlingen. Onze opdracht vanuit OCW was om daarbij rekening te houden met de drie doelen van onderwijs: niet alleen kwalificatie, dus wat hebben leerlingen voor vervolgonderwijs en beroep nodig, maar ook: wat kan mijn vak betekenen voor socialisatie en persoonsvorming?’ Bij socialisatie gaat het om de vraag welke wiskunde leerlingen nodig hebben om zich te redden in de samenleving. Om die reden zit er in alle programma’s statistiek, nodig om grote hoeveelheden data te kunnen duiden en verwerken. Maar ook het kunnen lezen en interpreteren van grafieken en eenvoudige wiskundige modellen of redeneringen op basis hiervan in de media kunnen valideren of weerleggen zijn van belang. Klopt het echt dat NAVO-militairen in Noorwegen 10.000 kilometer van de Russische grens verwijderd bleven (hoe groot is Noorwegen dan wel niet?) of staan er wellicht drie nullen te veel en ging het eigenlijk over meters in plaats van kilometers? Persoonsvorming heeft onder andere te maken met de houding van leerlingen tegenover wiskunde en het ontdekken waar hun kwaliteiten liggen.

Zogeheten ervaringsdoelen – een nieuw onderdeel in de examenprogramma’s – bieden naast beheersingsdoelen de mogelijkheid om de drie doelen van onderwijs goed in het curriculum te laten terugkomen. Het gaat bij ervaringsdoelen niet om beheersing van een vastgesteld minimumniveau, maar om een inspanning van leerlingen. ‘Bij wiskunde gaat het bijvoorbeeld om het ontdekken dat wiskunde nuttig kan zijn, dat je er plezier aan kunt beleven en dat je het tegenkomt in het dagelijks leven’, licht Caspers toe. Elke leraar besteedt daar nu ook al aandacht aan, maar het is voor het eerst dat dit in de concepteindtermen staat geformuleerd.



Jos Tolboom (foto: Barbra Verbij)

“Een andere kwestie die tot hoofdbreken leidde, was die over de rol van ict.”

Examinering

De acht voorliggende conceptexamenprogramma’s tellen, in aansluiting op de nieuwe kerndoelen, drie domeinen: A. wiskundige concepten, B. wiskundige activiteiten en C. wiskundige oriëntatie.

Vergeleken met de huidige programma’s krijgen wiskundige activiteiten een prominentere plek. ‘Als je kijkt naar de ontwikkeling van wiskundebeoefening zie je dat het enkel toepassen van wiskundige procedures uitbesteed wordt aan bijvoorbeeld software’, vertelt Tolboom. ‘Activiteiten als probleemoplossen, modelleren en abstraheren worden daarentegen steeds belangrijker. Het zijn geen nieuwe activiteiten, maar we hebben ze een explicietere plek in de eindtermen gegeven.’

Overigens, zo vult Brons aan, zullen in de klas de inhoud van drie domeinen door elkaar lopen en in samenhang onderwezen worden. ‘Het zijn geen gescheiden onderdelen, maar ze versterken elkaar juist. Je moet bijvoorbeeld de concepten begrijpen om ermee aan de slag te kunnen.’ Precies dat maakte het lastig om te komen tot een advies over de verdeling van de stof over school- en centraal examen. Hierover heeft de commissie dan ook vaak en veel ruggenspraak gehouden met de advieskring ‘Je kunt de stof niet zomaar in tweeën hakken’, aldus Tolboom. ‘Dat is strijdig met de aard van het vak wiskunde.’ Tegelijkertijd is een van de doelstellingen van de actualisatie van examenprogramma’s om het schoolexamen eigenstandig en complementair te plaatsen naast het centraal examen. Van Silfhout: ‘Schoolexamens hebben een gelijkwaardige plek in de diplomabeslissing. Dat is in de praktijk niet altijd het geval, maar het schoolexamen is niet bedoeld als oefening voor het centraal examen.’

Een andere kwestie die tot hoofdbreken leidde, was die over de rol van ict. ‘Vanuit de advieskring hebben we daar tot vervelens toe naar gevraagd’, vertelt Caspers. ‘Ons advies luidde telkens weer: zorg dat je daar duidelijke uitspraken over doet.’

‘De advieskring stimuleerde ons inderdaad om ons daarover te buigen’, zegt Brons. ‘Er is echter geen precieze grens aan te geven waar handmatig algebraïsche werken ophoudt en vanaf waar leerlingen zich kunnen

verlaten op computerprogramma's. Er is software waardoor leerlingen aan de slag kunnen met complexe vraagstukken, maar leerlingen moeten dan wel de onderliggende concepten begrijpen.' Verschillen tussen handmatig en met digitaal wiskundige gereedschap werken liggen ook nog eens per profiel anders. De vwo-leerlingen bij wiskunde maatschappij – E&M moeten zelf een standaarddeviatie kunnen uitrekenen, in andere examenprogramma's gebruiken de leerlingen hiervoor een rekenbladprogramma.

Dat ict niet meer weg te denken is bij wiskunde, daarover zijn commissie en advieskring het roerend eens. 'Dat zou wat de commissie betreft ook zichtbaar moeten worden in de centrale examinering', zegt Tolboom. 'Als daarin een rijke systeemomgeving wordt gebruikt, voelen leraren zich uitgedaagd om er in de eigen lessen ook mee en aan te werken.'

Overigens wil Brons graag de verwachtingen managen: 'Er staat in de conceptexamenprogramma's niets over het gebruik van de grafische rekenmachine. Het is niet aan ons om te bepalen welke apparaten en welke software er precies in de klas gebruikt worden.'



Gerdineke van Silfhout (foto: Barbra Verbij)

Uitproberen in je klas

Er zijn meer zaken die nog aandacht behoeven. Zo viel de positie van wiskunde D buiten de opdracht van de vakvernieuwingscommissie. 'Bepaalde inhouden van wiskunde D zijn wel in de conceptexamenprogramma's terechtgekomen, maar er zou een plek gevonden moeten worden voor de rest van wiskunde D, dat mag niet verloren gaan', stelt Caspers. Brons knikt: 'De wiskundewereld wil dat wiskunde D blijft bestaan. Het is goed als deze mogelijkheid blijft voor de leerlingen die zich verder willen verdiepen in wiskunde.' Van Silfhout meldt dat SLO na oplevering een analyse gaat maken welke inhouden van wiskunde D terugkomen in de conceptprogramma's en welke niet.

Een andere kwestie is of leerlingen per se de bij hun profiel behorende wiskunde moeten kiezen of dat een leerling met bijvoorbeeld E&M ook wiskunde natuur mag volgen. 'Als advieskring hebben we altijd gezegd: laat die mogelijkheid bestaan en richt de vakken zo in, dat de wiskunde goed aansluit bij een profiel en dat de verleiding om iets anders te kiezen, kleiner wordt. Maar die mogelijkheid verbieden is iets anders', zegt Caspers. Het is ook niet aan de vakvernieuwingscommissie maar aan het ministerie en de politiek, stelt Brons.

Nu de conceptexamenprogramma's er liggen, kunnen deze en andere kwesties bekeken worden. Daarin is ook een belangrijke rol weggelegd voor scholen. Zij gaan vanaf schooljaar 2025-2026 de programma's en bijbehorende syllabi beproeven en kijken wat wel en niet werkbaar is. 'Maar je hoeft als vaksectie en leraar wiskunde niet te wachten tot schooljaar 2025. Download de programma's en de toelichtingen nu al en kijk eens wat er nieuw is en wat je al doet in je onderwijs- en toetsprogramma', zegt Van Silfhout. 'Leg bijvoorbeeld je PTA ernaast en kijk waar je al stappen kunt zetten richting de nieuwe inhouden.' Begin vooral klein, luidt haar advies. Brons zegt hetzelfde: 'Kijk bijvoorbeeld eens wat je met statistiek kunt. Probeer eens wat dingen uit in je klassen.' Bij elke eindterm staat niet alleen een wettelijke, formele formulering, maar ook het onderdeel 'Te denken valt aan'. 'Daar staan allemaal voorbeelden die je in je lessen kunt beproeven', aldus Brons.

Caspers roept leraren op om dit te doen: 'In dit actualisatieproces heeft ieder een eigen rol. Grijp als leraar deze mooie kans aan om de vernieuwing goed en zorgvuldig vorm te geven.'

Over de auteur

Bea Ros is neerlandica en zelfstandig (onderwijs) journaliste. Ze is onder meer wetenschapsredacteur bij onderwijsvakblad *Didactief* en is auteur van *Leer ze rekenen* (TBU, 2022). Ze publiceert behalve over onderwijs over leesbevordering, (jeugd)literatuur en cultuureducatie.

Gedenkwaardige vergaderingen

In het kader van 100 jaar *Euclides* en 100 jaar NVvW duiken we in het verleden, op zoek naar gebeurtenissen en personen die nu nog relevant zijn, mede aan de hand van de publicaties daarover in *Euclides*. Harm Jan Smid bespreekt drie vergaderingen die hun schaduw vooruit wierpen. Johan Wansink versloeg de eerste vergadering in *Euclides*, speelde de hoofdrol in de tweede en keek naderhand in *Euclides* kritisch terug op de derde.



Inleiding

'We hebben alle moeite gedaan om in ons wiskunde-onderwijs veranderingen, vernieuwingen en verbeteringen aan te brengen, echter zonder veel resultaat. We hebben adressen gestuurd, zonder resultaat.' De voorzitter van Wimecos, P.G. Tiddens, maakte deze mistroostige opmerkingen op de jaarvergadering van 1933. Hij stelde daarom voor geen initiatieven meer te nemen en eventuele ontwikkelingen maar af te wachten. In de *Euclides* van dat jaar zul je die uitlatingen niet terug vinden. Wimecos had toen geen band met het tijdschrift, en de vereniging had ook geen eigen orgaan. Dat was geen bezwaar, zo had Tiddens al op de jaarvergadering van 1931 verklaard, want Wimecos was nu eenmaal geen strijdorganisatie en had ook niet veel mededelingen te doen.

Dat klinkt allemaal niet erg geïnspireerd en geen wonder misschien dat het aantal leden van Wimecos gestadig terugliep; van 110 in het eerste verenigingsjaar tot 81 in 1937. In 1938 kwamen er echter 49 leden bij. Dat was het resultaat van een bijeenkomst, georganiseerd door Wimecos maar toegankelijk voor alle wiskundelaren. Op die vergadering, op 23 oktober 1937, stond het nieuwe leerplan voor wiskunde voor de hbs-B centraal.

Het nieuwe leerplan centraal (1937)

Toen in 1919 een nieuw en relatief modern leerplan voor de gymnasia werd ingevoerd, stak het leerplan voor de hbs daar wel erg ouderwets bij af. De nadruk lag nog steeds op allerlei ingewikkelde technische vaardigheden. Aan functies en grafische voorstellingen werd geen enkele aandacht besteed. In 1925 verscheen het rapport van de commissie Beth-Dijksterhuis met een voorstel voor een nieuw leerplan. Terwijl het iedere vernieuwing in het meetkundeonderwijs afwees, stelde het wel voor drastisch te snoeien in technische vaardigheden en functies en grafische voorstellingen centraal te stellen. Zelfs differentiaal- en integraalrekening zouden moeten worden onderwezen. De nadruk daarbij lag op een strenge, formele en waar mogelijk axiomatische aanpak, veel minder op praktische toepassingen.

Het bestuur van het net opgerichte Wimecos steunde de voorstellen, maar verder uitte men vooral bezwaren. Veel leraren vreesden dat het voorstel te hoog gegrepen was en waren bang voor overlading. Hoogleraren wiskunde van de Technische Hoogeschool Delft maakten ernstig bezwaar tegen het snoeien in technische vaardigheden. Inspecteur Jensema zag er niets in. Zolang hij inspecteur was, traineerde hij iedere poging tot invoering.

Toen hij in 1934 met pensioen ging, werd hij als eerst verantwoordelijke voor het wiskundeonderwijs opgevolgd door Van Andel, een van de leden van de commissie Beth-Dijksterhuis. Hij formuleerde een leerplan dat wel gebaseerd was op de voorstellen van de commissie, maar de zaken niet op de spits dreef. Hij besepte ook dat het, gezien de omstrede voorgeschiedenis, van belang was draagvlak voor zijn voorstellen te verwerven. Hij stuurde ze daarom vertrouwelijk naar het bestuur van Wimecos met een verzoek om commentaar. Een en ander resul-

teerde in het nieuwe leerplan van 1937. Al werden de oorspronkelijke voorstellen van Beth-Dijksterhuis niet in volle omvang ingevoerd, het was toch een forse ingreep. Op die vergadering in oktober 1937 gaf Van Andel een toelichting op het leerplan en beantwoordde hij vragen van leraren. De bijeenkomst, met zo'n 150 aanwezigen, waaronder veel niet-leden, was een groot succes. Er waren van tevoren veel vragen ingezonden, die systematisch door Van Andel werden behandeld. Hij deed zijn best de aanwezige leraren zoveel mogelijk gerust te stellen en zwakte de scherpe kantjes van het leerplan verder af. Zo verzekerde hij zijn gehoor dat kegelsneden en differentiaal- en integraalrekening voorlopig niet, en wat hem betrof zelfs nooit, op het schriftelijk eindexamen gevraagd zouden worden. Docenten kregen voorlopig alle vrijheid om zelf te beslissen wat ze met de nieuwe onderwerpen aan moesten. Rustig aan, was zijn motto. De vergadering moet heel wat leraren het gevoel hebben gegeven dat een vereniging als Wimecos toch wel zijn nut had. Johan Wansink schreef uitgebreide verslagen van de vergadering in het *Weekblad* en *Euclides*, wat ongetwijfeld nog weer nieuwe leden opleverde. In 1941 telde Wimecos 239 leden, drie keer zo veel als vier jaar daarvoor. De vergadering was de redding van de zieltogende vereniging geweest.

In zijn slotwoord dankt de Voorzitter allereerst de beide heren inspecteurs voor hun aanwezigheid op deze vergadering en den heer van Andel in het bijzonder voor de wijze waarop en de woorden die hij heeft gesproken. Voorts wekte hij de aanwezige die nog géén lid der Vereniging waren, op om lid te worden.

In verband met het informatorisch karakter van de bijeenkomst zal het niemand verwonderen, dat de gelegenheid tot het „doorpraten” van problemen heeft ontbroken.

Wie de lange lijst van ingekomen vragen, die in deze bijeenkomst, die nog géén twee en een half uur in beslag nam, doorziet, zal er nog menig punt ontdekken, dat in toekomstige afleveringen van *Euclides* waard is besproken te worden. Ondertussen mogen wij het Bestuur der Vereniging van Wiskundeleraren er dankbaar voor zijn, dat het deze bijeenkomst heeft georganiseerd.

figuur 1 Slotakkoord van het artikel *Het nieuwe wiskundeleerplan*, Joh. H. Wansink, *Euclides* 14-2, 1937

Een hoogtepunt (1955)

Met het leerplan liep het minder goed af. Een Rijksleerplan gold alleen voor Rijksscholen, voor andere scholen moest het bestuur een leerplan vaststellen. Nu beschikte de overheid over een probaat middel om af te dwingen dat alle scholen zich aan het Rijksleerplan hielden, namelijk door een examenprogramma vast te

stellen dat nauw bij dat leerplan aansloot. Toen in 1940 de oorlog uitbrak, was het daar nog niet van gekomen. In de oorlogstijd had men wel andere dingen aan het hoofd. Zodoende bleef het examenprogramma van 1929, dat maar heel weinig rekening hield met het rapport Beth-Dijksterhuis, van kracht, en natuurlijk richtten de docenten zich in hun onderwijs vooral op dat programma. Door de discrepantie tussen het examenprogramma en het leerplan van 1937 bleven de nieuwe elementen uit dat laatste grotendeels een dode letter.

In 1947 vroeg de inspectie Wimecos een voorstel te doen voor een aangepast examenprogramma, maar de vereniging kwam met een voorstel waarin bijna alles bij het oude bleef. Het verdween in een diepe la. Liwenagel, de club van de gymnasiumleraren, en de Wiskunde Werkgroep, een los verband van leraren en anderen die geïnteresseerd waren in vernieuwing, produceerden daarentegen wel voorstellen voor nieuwe gymnasium- en hbs-programma's. Wimecos dreigde zichzelf irrelevant te maken.

“Het belangrijkste probleem met de invoering van statistiek was toch wel dat heel wat leraren bekenden niets van dat vak af te weten”

In 1953 slaagde Wansink er echter in het Wimecos-bestuur te bewegen eindelijk zelf het initiatief te nemen. Het bestuur benoemde een commissie met Wansink als voorzitter met de opdracht een nieuw leerplan voor de hbs te ontwerpen. De commissie ging voortvarend te werk en presenteerde een jaar later een programma dat zowel voor het gymnasium als voor de hbs zou kunnen gelden. Differentiaal- en integraalrekening moesten volwaardige onderdelen van het programma en het examen worden, en beschrijvende meetkunde zou op de hbs vervangen worden door analytische meetkunde. Verder werd voorgesteld om kansrekening en statistiek in het programma op te nemen. Wimecos schreef een buitengewone ledenvergadering uit op 26 februari 1955 waarop door de leden over de voorstellen kon worden gediscussieerd. Ook nu werd weer vooraf een flink aantal vragen en opmerkingen ingediend, soms door individuele leden, soms door complete wiskundesecties. De ingezonden brieven waren voor de commissie aanleiding om al voor de vergadering enkele

>

kleine wijzigingen en verduidelijkingen voor te stellen. De vergadering van 1955 had een ander karakter dan die van 1937. In dat jaar stond het al vastgestelde leerplan zelf niet ter discussie, nu ging het om een voorstel dat door de leden gewijzigd, goedgekeurd of zelfs verworpen kon worden. Over het algemeen werd het voorstel van de commissie door de 119 aanwezigen welwillend benaderd. Natuurlijk was er, zoals bij iedere wijziging, angst voor het nieuwe en vrees voor overlading. Sommige sprekers waren enthousiast over de voorstellen, maar stelden vervolgens voor invoering uit te stellen tot de hbs 6-jarig was gemaakt, iets waarop geen enkel uitzicht bestond. Je zou kunnen verwachten dat het schrappen van het onderdeel beschrijvende meetkunde de nodige weerstand zou oproepen, maar dat bleek mee te vallen. Belangrijker waren de bezwaren die tegen de invoering van het onderdeel statistiek werden ingebracht. Geen wiskunde, volgens sommigen, alleen maar van praktisch nut en dus geen leerstof voor de hbs volgens anderen. Het belangrijkste probleem was toch wel dat heel wat leraren bekenden niets van dat vak af te weten en zich niet in staat voelden te beoordelen of het nu wel zo'n goed idee was dit in het programma op te nemen. Vooralsnog echter kreeg statistiek het voordeel van de twijfel.

Er werd door de leden ook geïnformeerd of er met de hoogleraren wiskunde overleg over het voorgestelde programma was geweest. Dat was niet het geval geweest, aldus Wansink, die daar een opmerkelijke verklaring voor gaf. Volgens hem was de 'divergentie van meningen op didactisch gebied' tussen professoren nog groter dan onder leraren, zodat het vragen van advies alleen maar sterk vertragend zou hebben gewerkt. 'Zo nodig' kon altijd nog achteraf om advies worden gevraagd. De boodschap was duidelijk: leraren konden het zelf wel af. Hij zal niet hebben vermoed dat de rollen tien jaar later volledig waren omgedraaid.

Wansink moet zeer tevreden zijn geweest met het resultaat van de vergadering. De voorstellen van zijn commissie werden ongewijzigd, met niet meer dan zes stemmen tegen, aangenomen. Toch zou het Wimecos-voorstel de eindstreep niet ongeschonden halen. Toen duidelijk werd dat de inspectie bevreesd was voor overlading en met name tegen het onderdeel statistiek aanhikte, nam de commissie zelf het besluit om complexe getallen en statistiek uit het voorstel te schrappen. Daardoor werden de voorstellen voor de inspectie en daarmee de overheid acceptabel. Het nieuwe leerplan voor hbs en gymnasium werd in 1958 ingevoerd, en in 1963 waren de schriftelijke eindexamens wiskunde voor hbs-B en gymnasium- β voor het eerst identiek.



figuur 2 Johan Wansink (1894 – 1985)

De inspraak voorbij (1967)

Johan Wansink was een van de weinigen die al bij de invoering van het Wimecos-programma in 1958 waarschuwde dat dit maar een eerste stap naar verdere modernisering van het leerplan was. Maar ook hij zal verrast geweest zijn door de snelheid van de ontwikkelingen in de jaren zestig. Toen immers brak de New Math door, een internationale beweging die ook voor Nederland de nodige gevolgen zou hebben.

Eén van die gevolgen was de instelling in 1961 van een 'Staatscommissie', de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, de CMLW. De commissie telde achttien leden, in meerderheid hoogleraren wiskunde. De CMLW telde wel enkele leraren, maar de traditionele lerarenorganisaties, Wimecos en Liwenagel, waren buiten spel gezet. De commissie moest aan de hand van experimenten nieuwe leerplannen ontwikkelen, een programma voor getalenteerde leerlingen ontwerpen en oudere leraren bijscholen in de 'moderne wiskunde'. Wimecos produceerde in 1964 op verzoek van de inspectie nog wel een leerplan voor de havo, maar dat werd door de CMLW als te conservatief terzijde gelegd.

Over de onderwijsexperimenten die de CMLW organiseerde werd maar weinig gepubliceerd. De commissie nam een strikt formeel standpunt in; ze was alleen aan de minister verantwoording schuldig, niet aan 'het veld'. Ook na afloop werden de bij de experimenten gebruikte syllabi niet openbaar gemaakt, dat zou maar leiden tot 'staatspedagogiek'. Wel publiceerde de CMLW enkele interim- en discussienota's, die leraren en schoolboekenschrijvers ten minste enig idee konden geven in welke richting de commissie dacht. Dat was inmiddels ook wel hard nodig;

door de komst van de mammoetwet moesten de nieuwe leerplannen en schoolboeken al in 1968 ingevoerd worden.

Wimecos en Liwenagel organiseerden op 30 oktober 1967 een gecombineerde ledenvergadering waarop afgevaardigden van de CMLW een toelichting op die voorlopige nota's zouden geven. Net als in 1937 en 1955 werden vooraf door individuele leraren en wiskundesecties vragen en opmerkingen ingediend. Hun vragen werden uitvoerig beantwoord, 'soms wat autoritair', aldus Wansink, maar 'het was geen 'inspraak'-bijeenkomst, het ging louter om het op efficiënte wijze doorgeven van informatie'. Dat was zeker nuttig, maar heel wat antwoorden bleven vaag of ontwijkend. Leraren die gedacht hadden dat 'discussie-nota' betekende dat zij ook mee mochten praten kwamen bedrogen uit.

Wel leverde ook de vergadering van 1967 een flink aantal nieuwe leden op. Veel leraren tastten in het duister over de nieuwe plannen, ieder brokje informatie was welkom. Lidmaatschap van een vereniging kon misschien helpen.

Driemaal anders

De drie vergaderingen waren hoogtepunten voor Wimecos. Ze trokken veel aanwezigen, brachten nieuwe leden aan, leverden belangrijke informatie op, en er werd zeer uitvoerig in *Euclides* over bericht. Maar er zijn ook belangrijke verschillen. De bijeenkomsten van 1937 en 1967 waren zuiver informatief, van echte invloed was geen sprake. Dat was in 1937 misschien niet zo'n punt. Het nieuwe leerplan was gebaseerd op een rapport opgesteld door vier leraren, er was langdurig over dat rapport gediscussieerd en er was door Van Andel overleg gepleegd met het bestuur van Wimecos. In 1967 speelden de lerarenorganisaties echter geen rol meer bij de ontwikkeling van de nieuwe plannen en voltrok de leerplanontwikkeling zich grotendeels in het verborgene. Er werd pas in een laat stadium toelichting gegeven op nog lang niet voldragen plannen. Het definitieve leerplan kwam kort voor de start van de nieuwe schooltypes klaar. Alle resulterende problemen werden in feite op het bordje van de leraren en schoolboekenschrijvers geschoven. Het contrast met de manier waarop het Wimecos-leerplan ruim tien jaar geleden tot stand was gekomen, kon niet groter zijn. Je zou verwachten dat die gang van zaken bij de leraren en hun organisaties verzet moest oproepen, maar dat was niet het geval. Wansink, in 1961 afgetreden als voorzitter, heeft zich er later over verbaasd hoe gelaten de fundamentele wijzigingen van de jaren zestig werden aanvaard, terwijl daarvoor over veel minder ingrijpende wijzigingen heftig werd gediscussieerd. Er werd in de jaren 1970 met

de oprichting van een didactiekcommissie van de NVvW nog éénmaal een poging gedaan zelf aan leerplanontwikkeling te doen, maar dat bleek niet meer haalbaar. Het Wimecos-programma en de vergadering van 1955 bleven eenmalige hoogtepunten in de 100-jarige geschiedenis van de NVvW. Die oude tijden keren niet weerom.

Op 30 oktober is Johan Wansink overleden. Hij werd 91 jaar.

De wiskundige onderwijswereld heeft veel aan hem te danken. Hij was een intelligent wiskundige, maar hij stelde zijn gaven in eerste instantie in dienst van het onderwijs. Tot aan de vernieuwing in 1968 werd het wiskunde-onderwijs op beslissende manier beïnvloed door zijn denkbeelden, en we mogen hem daar dankbaar voor zijn. Lange tijd, van 1948 tot 1961, was hij voorzitter van Wimecos, de voorloper van de huidige Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Bij zijn afscheid werd hem het erelidmaatschap van de vereniging aangeboden. Hij leidde tijdens zijn voorzitterschap de Wimecos-commissie. Deze commissie was belast met het ontwerpen van een nieuw leerplan voor de hbs. Ze is daarin geslaagd en wist tevens daardoor de zo hinderlijke kloof tussen hbs en gymnasium te overbruggen. In 1958 werd het nieuwe programma voor beide schooltypen ingevoerd.

Euclides heeft veel aan hem te danken. Van 1956 tot 1968 leidde hij de redactie. Veel artikelen van zijn hand zijn in ons tijdschrift verschenen.

figuur 3 fragment uit het In memoriam van Johan Wansink dat Piet Vredenduin schreef in Euclides 61-4 (1985). Wansink werd pas in 1954 voorzitter van Wimecos. Daarvoor was hij tweede secretaris van het bestuur

Op de website vind je een uitgebreide literatuurlijst en de bronvermelding van de figuren.



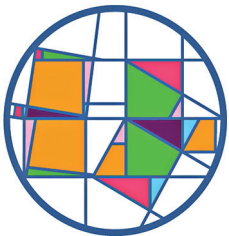
vakbladeuclides.nl/1003vergaderingen

Over de auteur

Harm Jan Smid was leraar wiskunde en lerarenopleider aan de TU Delft. Hij is auteur van een aantal boeken en artikelen over de geschiedenis van het Nederlandse wiskundeonderwijs. E-mailadres: harmjansmid45@gmail.com

Meetkunde in Bath

Afgelopen zomer vond de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) plaats in Bath, Verenigd Koninkrijk. Net als in 2019, maar ditmaal als vervanging voor Kyiv, Oekraïne, waar het evenement oorspronkelijk zou plaatsvinden. In dit artikel neemt toenmalig zesdeklasser Ryan Staal de lezer mee in zijn zoektocht naar de oplossing van de eerste opgave van dag 2. Na twee jaar bij het belofteprogramma en daarna twee jaar in de trainingsgroep, was dit zijn eerste IMO-deelname, waarbij hij meteen een zilveren medaille in de wacht sleepte.



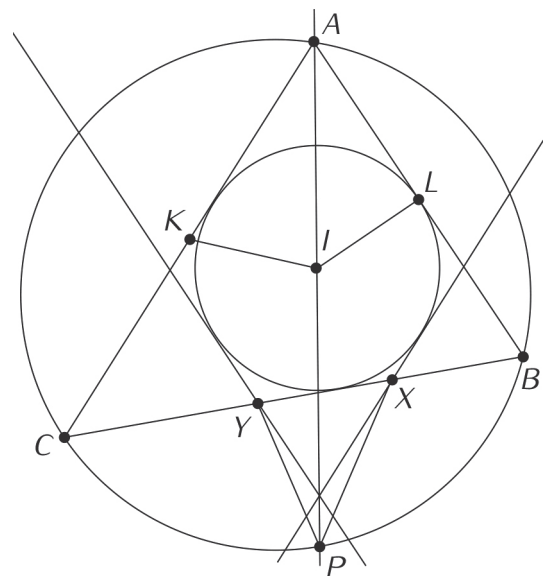
IMO2024
65th International
Mathematical Olympiad

Opgave 4

Zij $\triangle ABC$ een driehoek met $|AB| < |AC| < |BC|$. Zij ω de ingeschreven cirkel van driehoek $\triangle ABC$, en zij I het middelpunt van ω . Zij X het punt, verschillend van C , op de lijn BC zodat de lijn door X die evenwijdig is met AC , raakt aan ω . Analoog, zij Y het punt, verschillend van B , op de lijn BC zodat de lijn door Y die evenwijdig is met AB , raakt aan ω . De lijn AI snijdt de omgeschreven cirkel van driehoek $\triangle ABC$ nogmaals in $P \neq A$. De middens van de lijnstukken AC en AB noemen we respectievelijk K en L . Bewijs dat $\angle KIL + \angle XPY = 180^\circ$.

Toen ik de opgave las, vond ik het een beetje een rare opgave. Tot en met punt P is alles redelijk normaal, maar dan worden ineens de middens van AC en AB geïntroduceerd en moet ik iets zeggen over hoeken $\angle KIL$ en $\angle XPY$ die niets met elkaar te maken lijken te hebben...

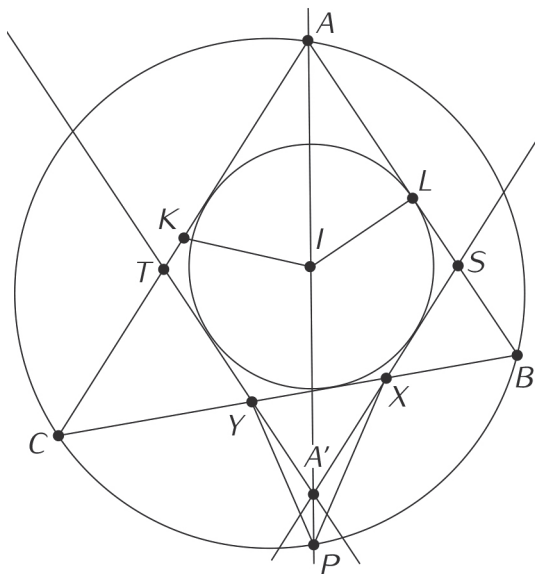
Een meetkundeopgave begint natuurlijk met een plaatje tekenen, zie figuur 1.



figuur 1

Mijn eerste gedachte was om de raaklijnen vanuit X en Y te laten snijden met zijden AB en AC . Noem die snijpunten respectievelijk S en T . Ook leek het een goed idee om lijnen XS en YT te laten snijden in een punt A' omdat ik dan wegens de evenwijdige lijnen ($AS \parallel A'T$ en $AT \parallel A'S$) een parallellogram krijg en dat is vaak iets leuks. Het plaatje komt er dan zo uit te zien, zie figuur 2.

In dit plaatje valt nu op dat A' op lijn AI ligt. Tijdens de IMO viel mij dit ook op in mijn eigen tekening. De vraag is nu of dit altijd zo is of dat het toeval is. Daarom ging ik proberen te bewijzen dat dit altijd zo is. Ik wist nog niet precies waarom het nuttig zou zijn, maar als drie punten op een lijn liggen, dan is dat vaak wel nuttig. Ook raakt



figuur 2

die ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$ wegens de definitie van X en Y aan alle zijden van dit parallellogram. Het is een bekend feit dat een vierhoek $EFGH$ een ingeschreven cirkel heeft precies dan als $|EF| + |GH| = |EH| + |FG|$. Dat is te bewijzen met gelijke raaklijnstukjes. Nu geldt dus dat $|AS| + |A'T| = |AT| + |A'S|$. Van een parallellogram zijn de overstaande zijden even lang, dus hieruit volgt $2|AS| = 2|AT|$ en dus $|AS| = |AT|$. Dat betekent dat dit parallellogram zelfs een ruit is. Uit mijn plaatje kreeg ik nu het vermoeden dat I het middelpunt van deze ruit is, dus dat ging ik proberen te bewijzen. Ook nu weet ik nog niet precies wat ik daaraan heb, maar het is wel iets bijzonders dus het zal vast leuk zijn. Als ik dit zou kunnen bewijzen dan weet ik dus ook gelijk dat A' op AI ligt.



figuur 3 IMO24 Team NL.

V.l.n.r.: Felix Hamoen, Naïm Hofstede, Yanniek Nitescu, Bas Capel, Ryan Staal en Tobias Kristiansen

Dat I het middelpunt van de ruit is, volgt snel uit het feit dat I het middelpunt van de ingeschreven cirkel is. Een eigenschap van een ruit is dat de diagonalen elkaar middendoor delen en loodrecht op elkaar staan. De diagonalen van een ruit zijn dus symmetrieassen van de ruit. Daaruit volgt wegens spiegelsymmetrie dat het middelpunt van de ruit even ver van alle zijden ligt. Nu is I precies het punt dat gelijke afstand heeft tot alle zijden van de ruit, want I is het middelpunt van de ingeschreven cirkel. Daaruit volgt dat I het middelpunt van de ruit is en daarmee dus ook het midden van AA' .

Nu zag ik ook waarom dit iets leuks is. Ik kreeg nu namelijk drie middens van lijnstukken vanuit A en dus kon ik iets met middenparallellellen gaan doen en dan wordt $\angle KIL$ minder raar. Er volgt namelijk dat $\angle KIL = \angle KIA + \angle LIA = \angle CAA' + \angle BAA' = \angle CA'B$ wegens middenparallellellen en F-hoeken. Anders gezegd: als je driehoek $\triangle KIL$ met een factor 2 vergroot vanuit punt A , dan krijg je driehoek $\triangle CA'B$, dus de overeenkomstige hoeken zijn even groot.

Nu moet ik nog iets met $\angle XPY$ doen, maar daarvoor heb ik nog meer nodig, dus ik besloot maar te gaan hoeken-jagen in de hoop iets leuks te vinden. Dat had ik gelukkig snel gevonden. Ik ga nu bewijzen dat vierhoek $A'XBP$ een koordenvierhoek is.

$$\begin{aligned}\angle A'XB &= 180^\circ - \angle BXS \text{ (gestrekte hoek)} \\ &= 180^\circ - \angle BCA \text{ (F-hoeken)} \\ &= 180^\circ - \angle BPA \text{ (omtrekshoek)} \\ &= 180^\circ - \angle BPA' \\ &\quad \text{(zelfde hoek wegens collineariteit)}\end{aligned}$$

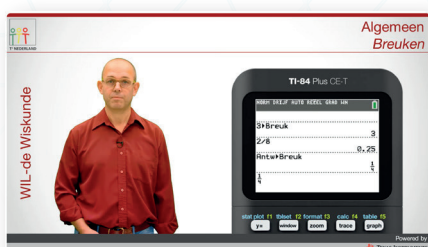
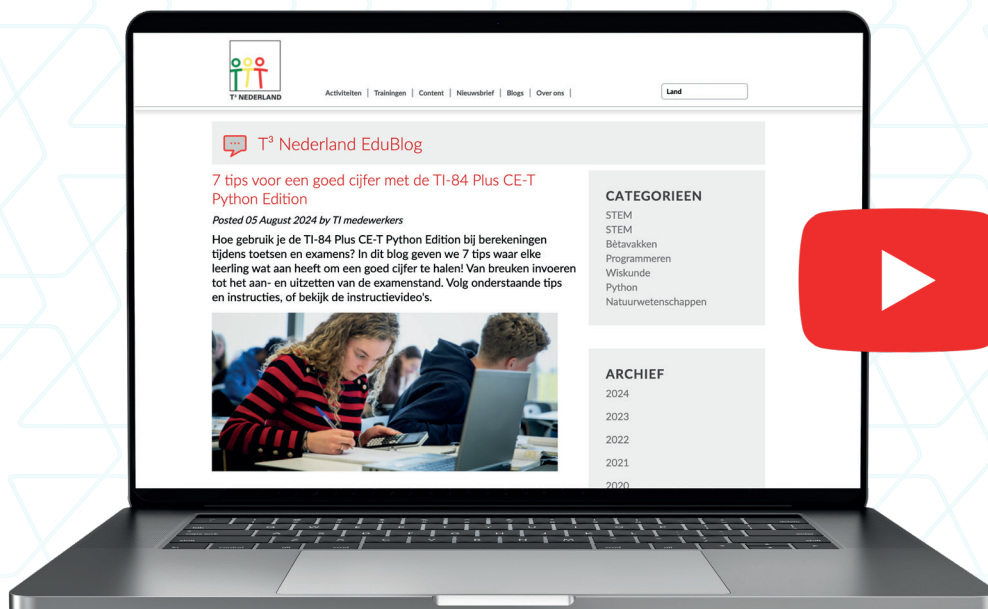
Uit de koordenvierhoekstelling volgt nu dat vierhoek $A'XBP$ een koordenvierhoek is. Geheel analoog (met B vervangen door C , en X door Y) geldt dat vierhoek $A'YCP$ een koordenvierhoek is.

Nu hebben we twee koordenvierhoeken gevonden waarin de punten X , Y en P een rol spelen. Hoek $\angle XPY$ komt hier nog niet in voor, maar die hoek is wel op te delen in hoeken die hier wel in voorkomen. Als we dat doen, dan krijgen we het volgende. Er geldt:

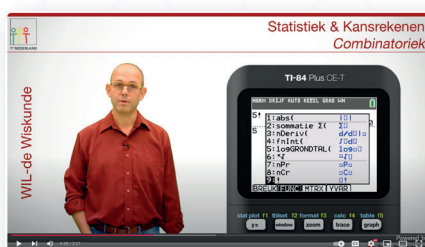
$$\begin{aligned}\angle XPY &= \angle XPA' + \angle YPA' \\ &= \angle XBA' + \angle YCA' \text{ (omtrekshoeken in de gevonden koordenvierhoeken)} \\ &= \angle CBA' + \angle BCA' \\ &\quad \text{(zelfde hoeken wegens collineariteit)} \\ &= 180^\circ - \angle BA'C \text{ (hoekensom driehoek)} \\ &= 180^\circ - \angle KIL \text{ (hierboven gevonden dat } \angle KIL = \angle BA'C\text{)}\end{aligned}$$

>

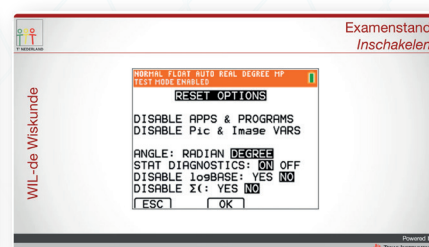
Filmpjes voor een goed cijfer met de TI-84 Plus CE-T Python Edition



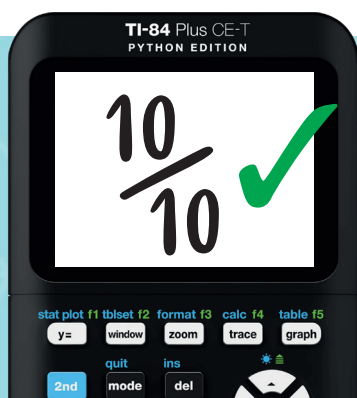
 Breuken invoeren



 Combinatoriek



 Aan- en uitzetten
examenstand



Haal met deze top 7 instructievideo's
een goede score bij toetsen!



education.ti.com/nl

Dus $\angle KIL + \angle XPY = 180^\circ$ en dat is precies wat we moesten bewijzen. Hiermee is de opgave opgelost!

Tijdens de wedstrijd had ik deze opgave na ongeveer dertig minuten opgelost. Nadat ik mijn netversie had geschreven had ik nog ca. 3,5 uur over voor opgave 5 en 6. In die tijd heb ik veel afgewisseld tussen beide opgaven. Uiteindelijk zag ik in de laatste vijftien minuten ineens het juiste idee voor opgave 5. Dit kon ik gelukkig nog net snel genoeg opschrijven waardoor ik precies in de laatste minuut klaar was. Voor opgave 6 had ik nog iets gevonden dat me 1 puntje opleverde en achteraf hoorde ik dat ik heel dicht bij een tweede punt was. Op wedstrijd dag 1 had ik (dacht ik toen) opgave 1 en opgave 2 opgelost. Achteraf bleek dat ik een fout had in mijn oplossing voor opgave 2, maar dat bleek een kleine fout en ik kreeg toch nog 6 van de 7 punten. Ik had dus in totaal 28 punten. Dat was helaas 1 puntje te weinig voor goud, maar ik ben superblij met een zilveren medaille.

Naast de wedstrijd hebben we als team ook een hele leuke tijd gehad in Engeland. Zo zijn we met veel andere deelnemers uit andere landen op de foto geweest en nog op excursie gegaan naar Oxford.

Over de auteur

Ryan Staal (18) is oud-leerling van het Erasmiaans Gymnasium Rotterdam. Afgelopen jaar vertegenwoordigde hij Nederland bij de Internationale Wiskunde Olympiade en behaalde daar een zilveren medaille. Inmiddels studeert hij wiskunde en natuurkunde aan de Universiteit Leiden.
E-mailadres: rtstaal@gmail.com

NWD31

4 en 5 april 2025
Noordwijkerhout

aanmelden van 9-12 tot 6-1

Freudenthal Instituut
Universiteit Utrecht



Zebra 70: Minimal Art Objecten met verborgen afbeeldingen



Titel: Minimal Art Objecten met verborgen afbeeldingen

Auteur: Klaas Lakeman

Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam, 2023

Zebra-reeks, deel 70, 68 pagina's

ISBN: 978-90-5041-201-8

Prijs: € 10,00

Inleiding

Een tijdje geleden heb ik Zebraboekje 62: *Vormen en Verhoudingen in de Architectuur* gelezen. Daarin laten de auteurs aan de hand van een groot aantal voorbeelden zien hoe je wiskunde kunt tegenkomen in diverse uitingen van de architectuur. En in veel gevallen heeft deze architectuur ook raakvlakken met de kunst.

Een mooi vervolg hierop is het Zebraboekje 70: *Minimal Art Objecten met verborgen afbeeldingen*. Daarin gaat het niet om bestaande bouwwerken of, iets breder, om objecten die op de een of andere manier in het dagelijks leven worden gebruikt. In dit boekje handelt het om nieuwe kunstwerken. De auteur schetst het proces dat de beide kunstenaars, Walt van Ballegooijen en Hans Kuiper, hebben doorlopen om tot deze op wiskunde gebaseerde kunst te komen. Beide ingenieurs hebben hier veel succes mee geboekt, zo heeft het museum Momath in New York een van deze kunstwerken aangekocht.

Beide kunstenaars zijn bestuurslid van de stichting Ars et Mathesis. Deze stichting heeft tot doel de belangstelling te bevorderen voor kunst die zijn inspiratie vindt in de wiskunde. Ik raad iedereen aan de website^[1] te bezoeken.

De inhoud in het kort

De schrijver geeft in een negental hoofdstukken een heldere opbouw van het genoemde proces. Het begint

met *Optical Minimal Art*: een fotobestand wordt omgezet in een afbeelding waarbij van de kleuren rood, groen en blauw elk slechts twee nuances overblijven: 'alles' of 'niets'. En daar wordt op meerdere manieren mee gevarieerd.

In de volgende hoofdstukken wordt aandacht besteed aan *Minimal Art Objecten*. Hoe kun je met een minimaal aantal kubusjes een object maken dat één geheel vormt en er vanuit elk van de drie kijkrichtingen uit ziet als een (grotere) kubus? Welke kennis en inzichten kun je daarbij gebruiken?

In de laatste drie hoofdstukken worden beide kunstvormen bij elkaar gebracht: *Minimal Art Objecten met verborgen afbeeldingen*. Dat levert dan, zo is het uiteindelijke doel, een object op met drie of vier (verborgen) afbeeldingen. Met als uitsmijter een met zes (verborgen) afbeeldingen. Elke afbeelding is zichtbaar vanuit een bepaalde kijk-richting.

Optical Minimal Art

Voor het maken van zo'n kunstwerk bewerken de kunstenaars een bmp-bestand. Zij verdelen het in (verticale) stroken. Elke strook wordt op zijn beurt verdeeld in (horizontale) pixelrijen. Bij elke rij wordt een soort 'kleur-zwaartepunt' vastgesteld voor de kleuren rood, groen en blauw. Een aantal pixels krijgt dan de maximale kleurwaarde (255) toegekend, de andere pixels kleurwaarde 0. Op die manier wordt het aantal verschillende kleuren in het kunstwerk teruggebracht tot acht. Dat verklaart de benaming 'minimal', zie figuur 1.

Door te variëren met het maken en gebruiken van verschillende soorten stroken kun je een groot aantal mogelijkheden aan 'bewerkte' foto's krijgen. Het 'optical'-effect betekent hier dat je van dichtbij iets anders ziet dan van veraf.

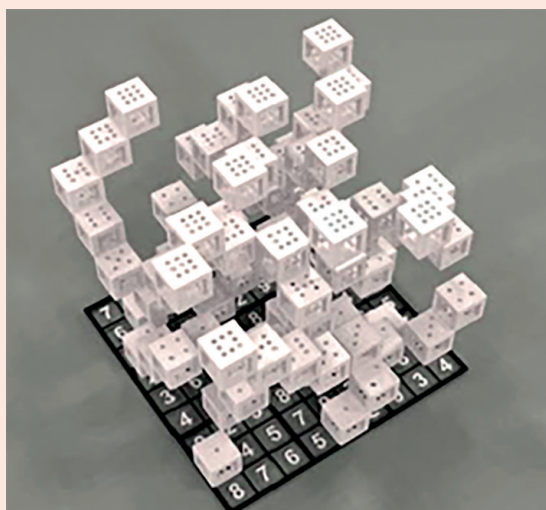


figuur 1

Minimal Art Objecten

In de volgende hoofdstukken komt het tweede 'ingrediënt' dat nodig is om de uiteindelijke kunstwerken te maken, ter sprake. Daarbij gaat het om de vraag hoe je met een minimaal aantal kubusjes een grotere kubus kunt maken

(bijvoorbeeld $4 \times 4 \times 4$) waarbij die kleine kubusjes zo met elkaar verbonden zijn dat ze één geheel vormen en waarbij tevens alle drie aanzichten een 'gevulde' kubus te zien geven. Met deze formulering is meteen het woord 'minimal' verklaard, zie figuur 2.



figuur 2

Verrassend is dat hierbij Latijnse vierkanten en sudoku's goed van pas komen. De auteur laat zien wanneer een Latijns vierkant of een opgeloste sudoku wel/niet geschikt is om als basis te dienen voor een Minimal Art Object. Gaandeweg vonden de kunstenaars meer oplossingen van 'verbonden sudoku's'. Op dat punt maakt de schrijver een uitstapje door aandacht te besteden aan de vraag: kun je deze verbonden sudoku's ordenen en krijg je daarmee zicht op het totale aantal verbonden sudoku's?

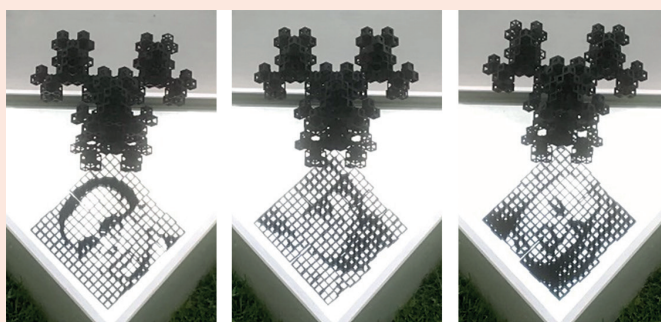
Het antwoord is: ja. Ik ga het hier niet verklappen, lees het zelf vooral. Een aardige, maar tevens lastige combinatorische puzzel.

Van enkele verbonden objecten hebben de kunstenaars een uitvoering gemaakt via een 3d-print. Zo'n 3d-print is nodig voor de uiteindelijke vervaardiging van de kunstwerken.

Minimal Art Objecten met (verborgen) afbeeldingen

De kunstenaars lieten zich o.a. inspireren door de voorkant van het boek *Gödel, Escher, Bach, an Eternal Golden Braid* van Douglas R. Hofstadter. Die afbeelding heeft de auteur ook gebruikt als voorkant van dit zebra-boekje. In de volgende hoofdstukken worden de twee hiervoor genoemde methoden van minimale kunsttechniek gecombineerd in een $16 \times 16 \times 16$ kubus. Daarvoor waren,

in het minimale geval, 256 kleine kubusjes nodig. In elk van de drie kijkrichtingen verwerkten de kunstenaars een 'minimal art afbeelding'. Geen gemakkelijke opdracht, want ieder kubusje moest zo gemaakt worden dat drie zijvlakken passen bij een tot 'minimal art' bewerkte afbeelding. In het boekje wordt dit uitvoerig toegelicht. Het resultaat is verbluffend. Ik had het al eens eerder gezien bij een bijeenkomst van Ars et Mathesis. Met deze uitleg erbij heb ik zeker meer inzicht gekregen in het ontstaan van dit object, zie figuur 3.



figuur 3

Het was te verwachten dat de kunstenaars het hier niet bij zouden laten. In hun zoektocht vonden ze een methode om het kunstwerk zo te maken dat de drie aanzichten tegelijk zichtbaar worden. Ze ontwierpen ook een Minimal Art Object met vier portretten (de Beatles), waar de gulden snede nog even langskomt. Het boekje eindigt met de uitleg over de constructie van een Minimal Art Object waarin zes afbeeldingen zichtbaar worden: zes paarden in een carroussel.

Conclusie

Het boekje is een zeer goed verzorgde uitgave geworden, waarin ik slechts een heel enkele kleine oneffenheid kon vinden. Ik heb het boekje met groot genoegen gelezen. Het proces om te komen tot een kunstwerk – en hoe je daar wiskunde bij nodig hebt en ook welke wiskunde – wordt helder beschreven en daarom is dit boekje een prima aanwinst. Het kostte mij wel enige moeite om echt te doorgronden hoe een en ander in elkaar zit. Dat betreft dan met name het laatste stuk waar de Minimal Art Objecten met vier respectievelijk zes verborgen afbeeldingen worden besproken.

Ik heb ook geprobeerd om het boekje te lezen door de bril van de leerling met (vermoedelijk) wiskunde C in de bagage. Immers, de inhoud sluit aan bij het domein G: *Vorm en Ruimte* van dit vak. En dan heb ik wel twijfels. Er staan slechts dertien opdrachten in het boekje, waarvan

>

een aantal mijns inziens voor zo'n leerling wel tamelijk pittig is. En erg jammer: er ontbreekt een document waarin de uitwerkingen van deze opgaven zijn opgenomen. Daarnaast kreeg ik gaandeweg de indruk dat een deel van de inhoud een verhalend karakter heeft. Dat kan ook niet anders, want vooral de laatste twee hoofdstukken zijn voor leerlingen behoorlijk ingewikkeld. Het ruimtelijk inzicht wordt er flink op de proef gesteld. Hoe bied je nu als docent een geïnteresseerde leerling de mogelijkheid aan om zich te verdiepen in dit onderwerp? Ik weet het niet zo gauw. Voor leerlingen met duidelijke interesse in kunst kan dit boekje een mooie eyeopener zijn vanwege de combinatie met wiskunde. En misschien het startpunt om zelf een Minimal Art Object te ontwerpen. Rest mij nog één opmerking: ik doe met deze boekbespreking de auteur en de kunstenaars niet voldoende recht, want deze kunst gaat pas leven wanneer je het 'in levenden lijve' ziet. Maar geldt dat niet voor alle kunst?

Noot

[1] Zie: <https://www.arsetmathesis.nl/>

Over de auteur

Nico Alink is veertig jaar docent wiskunde geweest aan het huidige Bonhoeffer College in Enschede. Tijdens deze loopbaan heeft hij – naast het lesgeven – gewerkt bij de eerstegraadslerarenopleiding aan de Universiteit Twente, bij SLO als leerplanontwikkelaar en bij Cito als constructiegroepmedewerker eindexamens vwo wiskunde A en wiskunde C. Hij is inmiddels geruime tijd met pensioen. E-mailadres: n.alink@ziggo.nl

Maak de sprong! Van vakdocent naar vakexpert.



Droom jij ervan om expert én gevorderd didacticus én onderzoeker te worden? Ontdek onze masteropleiding tot eerstegraadsleraar wiskunde en maak nog meer impact in onderwijs. Onze docenten helpen je bij iedere stap in je ontwikkeling met:

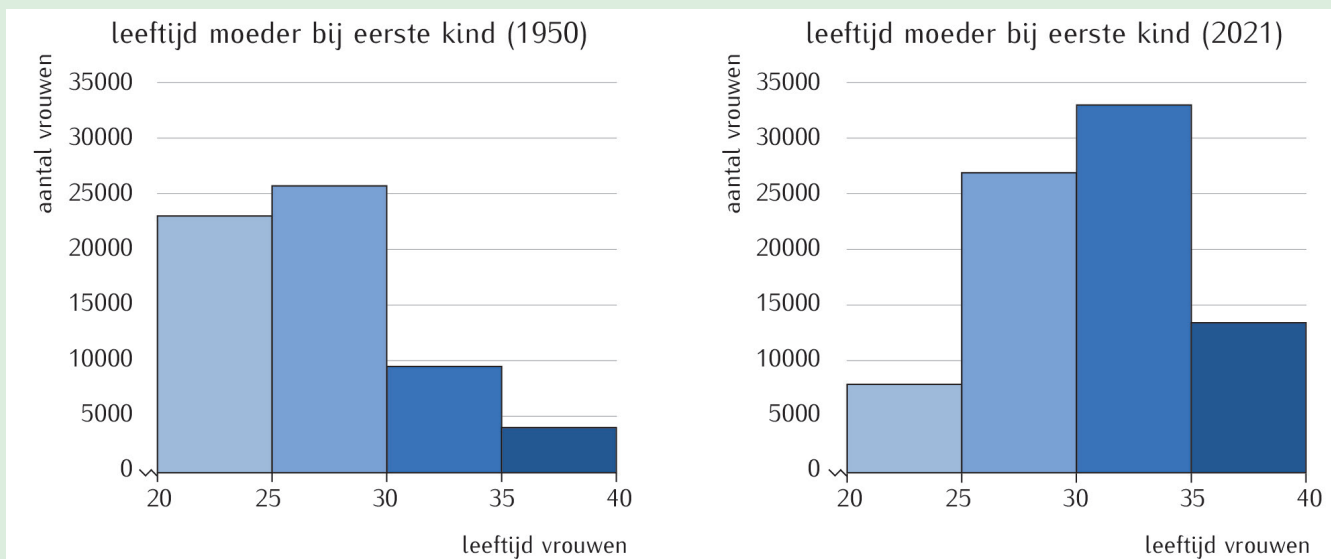
- vakkennis op academisch niveau toepassen in je lespraktijk.
- vakdidactisch onderzoek opzetten en uitvoeren.
- boeiende en effectieve lessen ontwerpen.
- je leiderschapstijl en -kwaliteiten verder ontdekken.

Meld je nu aan voor de informatiebijeenkomst en maak je ambities waar. Ga naar hva.nl/mlrwk.



Creating Tomorrow

What's going on in this graph? – Statistische diagrammen in het nieuws



figuur 1 Leeftijden van moeders bij hun eerste kind in 1950 en in 2021^[5]

Wekelijks publiceert de American Statistical Association (ASA) lesmateriaal bij diagrammen van statistische gegevens.^[1] De doelgroep zijn leerlingen van de middelbare school. Vragen die daar worden gesteld, zijn bijvoorbeeld: wat valt je op? Wat vraag je je af? Welk effect heeft dit op jou en jouw gemeenschap? Wat is een pakkende krantenkop bij dit diagram? Elke donderdagmiddag verschijnt een nieuw diagram. Elke woensdag tussen 9:00 uur en 14:00 uur EST wordt commentaar van leerlingen live van feedback voorzien. Een week na het verschijnen is er een update waarin meer informatie wordt onthuld, zoals het artikel waarin het diagram voorkwam, extra vragen, statistische hints en tips met definities van statistische termen en waar je deze in het diagram kunt terugvinden. De website van de ASA biedt ook een index per diagramtype – ideaal als je bij een specifieke les uit het boek een voorbeeld zoekt. Er zijn ook video's over gebruik in de klas.^[2]

Naast specifieke leerdoelen voor statistiek, is een belangrijk leerdoel van dit lesmateriaal ook dat leerlingen leren om kritisch naar diagrammen te kijken en zich af te vragen wat er in staat en waar dit op gebaseerd is. Kritisch omgaan met informatie uit het nieuws is een belangrijk onderdeel van statistische geletterdheid. Eén van mijn favoriete diagrammen is de leeftijden waarop vrouwen voor het eerst moeder worden.^[3] Het gebruik ervan is alleen toegestaan voor in een les; afdrukken in mijn proefschrift^[4] zou volgens de New York Times meer dan 1000 euro kosten. In plaats daarvan heb ik de (minder gedetailleerde) Nederlandse gegevens gebruikt, zie figuur 1.

Noten

- [1] zie: <https://www.amstat.org/whats-going-on-in-this-graph>
- [2] zie bijvoorbeeld: <https://www.nytimes.com/2019/08/27/learning/on-demand-webinar-teach-with-graphs-from-the-new-york-times.html>
- [3] zie: <https://www.nytimes.com/2018/11/22/learning/whats-going-on-in-this-graph-nov-28-2018.html>
- [4] Boels, L. (2023). Histograms. An educational eye [Dissertatie]. Universiteit Utrecht. https://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/20230822_proefschrift_boels.pdf
- [5] CBS (2022). Levend geboren kinderen; leeftijd moeder, volgorde geboorte uit de moeder. <https://www.cbs.nl/nl-nl/cijfers/detail/37744ned?q=leeftijd%20moeder%20geboorte%20eerste%20kind>

Over de auteur

Lonneke Boels stond ruim twintig jaar voor de klas, voornamelijk als wiskundeleraar in het vo en promoveerde in 2023 op een onderwerp in de didactiek van statistiek. Ze werkt nu als onderzoeker bij Hogeschool Utrecht. E-mailadres: lonneke.boels@hu.nl

Heronische driehoeken

Op mijn werkplek op het Freudenthal Instituut prijkt een mooie rij ingebonden tijdschriften: jaargang 1 tot en met 84 van *Euclides*. Nu de honderdste jaargang een feit is, wil ik mij wel laten inspireren door artikelen in oude jaargangen. Een van mijn helden uit andere tijden die af en toe mooie stukken schreef in *Euclides* is D.J. Kruijtbosch (1883-1954). Het begrip 'Heronische driehoeken' kwam ik tegen in jaargang 4 van *Euclides* in een artikel van zijn hand.^[1]

Derk Jan Kruijtbosch, bevlogen docent

Kruijtbosch stierf in het jaar, waarin ik als leerling zijn naam voor het eerst hoorde, want de bundel *Schriftelijke eindexamopgaven HBS B* werd door mijn wiskunde-leraar 'de Kruijtbosch' genoemd. Enige jaren later, toen ik op het punt stond leraar wiskunde te worden, kreeg ik het boek met de titel 'Avontuurlijk wiskundeonderwijs' (1936), geschreven door diezelfde Kruijtbosch, in handen. Dit originele en boeiende werk zou je een van de eerste Nederlandse didactiekboeken voor wiskunde kunnen noemen. Een citaat (lang leve de aanvoegende wijs!) hieruit:

Men blijve fris en ontvankelijk en bedenke dat in de eenvoudigste leerstof interessante problemen zijn te vinden voor wie maar zoeken wil. Men roepe de intuïtie wakker, men bevordere de belangstelling, men make het denken werkzaam, men ontwijk de moeilijkheden niet, men schenke de kinderen het zelfvertrouwen, dat nodig is in den omgang met getallen en getallenbewerkingen.

Het boek staat vol met concrete voorbeelden, voornamelijk uit de rekenkunde en algebra. Ik herinner me dat ik destijds getroffen werd door de aanpak om de benadering in vier decimalen van $\log(2)$, zoals die in de logaritmentafel te vinden was, met een klas te kunnen berekenen. Hierbij past Kruijtbosch al majorerend en minorerend eigenlijk een benadering met kettingbreuken toe, zonder dit uitdrukkelijk te benoemen. Hij komt dan na een paar reken-en-denken-stappen uit op:

$$\frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{10}}} < \log(2) < \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{9}}}$$

en via het gemiddelde van de decimale benaderingen van de twee kettingbreuken komt er in vijf decimalen afgerond: $\log(2) \approx 0,30103\dots$

Dit proces beschrijft hij als een avontuur met de leraar als leidsman. De lezer kan proberen zich een voorstelling te maken hoe zo'n zoektocht zich zou kunnen ontwikkelen. Ik moet bekennen dat ikzelf in mijn lessen op school meestal niet verder gegaan ben dan:

2^{10} is relatief gezien niet veel groter dan 10^3 , zeg maar $2 \approx 10^{0,3}$, dus de eerste decimaal uit de tafel zie je al wel aankomen ...

Kruijtbosch in Euclides

In de allereerste jaargang van *Euclides* (pp 101-108) staat al een artikel van Kruijtbosch. Hij was destijds directeur van de Rijks hbs in Wageningen, toevallig ook de school waar ik een aantal jaren met veel plezier les heb mogen geven.

In zijn artikel vergelijkt Kruijtbosch diverse bewijzen van wat wel de hoofdstelling van de stereometrie werd genoemd, te weten:

een lijn die loodrecht staat op twee snijdende lijnen van het vlak, snijdt of kruist alle lijnen van dat vlak loodrecht. Ik ga daar hier niet verder op in, de lezer kan dit artikel online nalezen.

In jaargang 4 (pp 127-133) laat Kruijtbosch zijn licht schijnen op de formule van Heron, die wel bekend staat onder de naam 's-formule'. Wellicht ter herinnering: de oppervlakte van een driehoek met zijden a , b , c is gelijk aan:

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

waarin s staat voor de halve omtrek van de driehoek en a , b , c de zijdelengtes zijn.

In de schoolboeken werd deze formule afgeleid met behulp van stevige algebra, maar Kruijtbosch behandelt het

oorspronkelijke (meetkundige!) bewijs van Heron, maar dan wel in een 'modern' jasje.

Heron geeft als inleiding op zijn formule de driehoek met $a = 7$, $b = 8$, $c = 9$, dat levert een irrationale oppervlakte op, $\sqrt{720}$, een uitkomst die hij benadert met $26\frac{2}{3}$.

Een natuurlijke vraag die Kruijtbosch in zijn artikel stelt, is: hoe vind ik driehoeken waarbij a , b en c rationale getallen zijn en waarbij de uitkomst van de s -formule ook rationaal is?

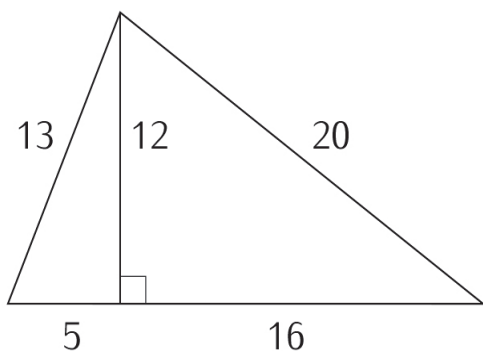
Zulke driehoeken noemt hij dan Heronisch.

Een bijna triviaal deel van een antwoord is: alle 'Pythagorische driehoeken', te beginnen met de 3, 4, 5-driehoek zijn Heronisch.

Bij zulke driehoeken past een mooie formule:

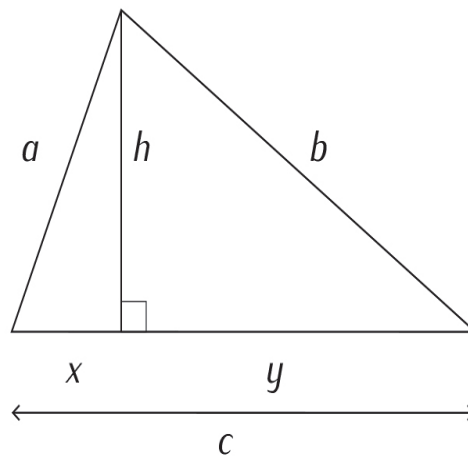
$a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$, $c = p^2 + q^2$, waarin p en q staan voor natuurlijke getallen en a , b en c voor de lengten van de driehoeks zijden. Door voor p en q natuurlijke getallen te kiezen (met $p > q$), kun je alle geheelzijdige rechthoekige driehoeken genereren.

Maar er is meer. Als je twee congruente Pythagorische driehoeken zo aan elkaar plakt dat er een gelijkbenige driehoek ontstaat, krijg je een Heronische driehoek. Met niet-congruente Pythagorische driehoeken kan het ook lukken. Voorbeeld: 5, 12, 13 en 12, 16, 20, aan elkaar geplakt als in figuur 1, leveren de driehoek 13, 20, 21 op.



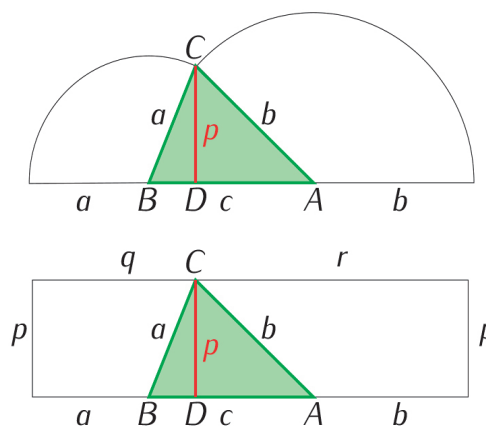
figuur 1

Zo kun je in principe *elke* niet-rechthoekige Heronische driehoek maken. De twee stukken waarin de hoogtelijn de basis van zo'n driehoek verdeelt, kunnen namelijk geen irrationale lengte hebben.



figuur 2

Stel, zie figuur 2, dat a , b , h en c rationale getallen voorstellen. Dat x en y ook rationaal zijn, volgt aldus. Twee keer Pythagoras toegepast levert op $y^2 - x^2 = b^2 - a^2$. Uit $y^2 - x^2 = c(y - x)$ volgt dat $y - x$ rationaal moet zijn en omdat $y + x = c$ dat ook is, zijn x en y elk rationaal! Iedere Heronische driehoek kan dus worden opgebouwd uit twee rechthoekige driehoeken met rationale zijden. Bij Heronische driehoeken, horen Heronische getaltripels en het zou mooi zijn als, net als bij Pythagorische drietallen, die tripels te vangen zijn in algebraïsche formules. Kruijtbosch laat zien hoe dat kan en gebruikt daartoe het onderste plaatje van figuur 3.



figuur 3

Om te beginnen geldt: $2s = a + b + c = q + r$. Driehoek (a, b, c) , met a, b, c als rationale lengtes, is alleen dan Heronisch als de hoogte p een rationaal getal is.

In driehoek CBD geldt nu:

$$p^2 + (q - a)^2 = a^2 \text{ en dus: } a = \frac{p^2 + q^2}{2q}.$$

>

Net zo: $b = \frac{p^2 + r^2}{2r}$.

En ook: $BD = q - a = q - \frac{p^2 + q^2}{2q} = \frac{q^2 - p^2}{2q}$

$$AD = r - a = r - \frac{p^2 + r^2}{2r} = \frac{r^2 - p^2}{2r}$$

Bij elkaar opgeteld:

$$BA = \frac{(qr - p^2)(q + r)}{2qr}$$

Feitelijk gaat het om de *verhouding* van de drie zijden van Heronische driehoeken en ik kan me beperken tot geheel-zijdige exemplaren. Voor de zijden van zo'n driehoek neem je gemakkelijker dus $a = r(p^2 + q^2)$, $b = q(p^2 + r^2)$, $c = (qr - p^2)(q + r)$ met daarbij als voorwaarde: $qr > p^2$. In tabel 1 zie je een lijstje van een paar Heronische driehoeken:

p	q	r	a	b	c
1	1	2	4	5	3
1	2	2	10	10	12
1	2	3	15	20	25
1	4	1	17	8	15
1	3	4	40	51	77
2	3	4	52	60	56
2	3	5	65	87	88

tabel 1

Als je dit lijstje wat nader bekijkt, dan zie je dat er drie rechthoekige driehoeken bij zitten, één gelijkbenige driehoek en drie exemplaren die niet rechthoekig of gelijkbenig zijn. De voorlaatste driehoek is gelijkvormig met de Heronische driehoek (13, 14, 15). Daarvan herinner ik mij nog dat die 'mooi uitkwam' en geschikt was als inleidend voorbeeld bij de afleiding van de s -formule.

Superheronische driehoeken

Driehoeken waarvan de zijden opvolgende natuurlijke getallen zijn en die bovendien een natuurlijk getal als oppervlakte hebben, noem ik hier *superheronisch*.

Daarvan zijn er inmiddels twee gepasseerd, namelijk (3, 4, 5) en (13, 14, 15). Natuurlijke vragen: zijn er nog meer en hoe kun je die vinden?

De formules van Kruijtbosch zijn niet zo geschikt om die vraag te beantwoorden, maar de s -formule is dat wel. Laat ik naïef zijn en eerst eens (23, 24, 25) proberen. Helaas: in dit geval is de halve omtrek s gelijk aan 36, dus de oppervlakte is $\sqrt{36 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}$ en dat geeft duidelijk geen natuurlijk getal als uitkomst.

Ik verklap dat (51, 52, 53) de eerstvolgende superheronische driehoek is. Even checken:

$s = 78$ en het product $78 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25$ is gelijk aan $2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 3^3 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 5^2$, en ja, dit is het kwadraat van een natuurlijk getal.

Twee volgende superheronische driehoeken zijn (193, 194, 195) en (723, 724, 725). Geloof het of reken het na. Maar hoe vind je zulke grote getallentripels? En zijn er nog meer?

Een vergelijking van Pell

Bij alle hier genoemde superheronische driehoeken heeft de middelste zijde een even getal als lengte en het is al gauw duidelijk dat dit een noodzakelijke voorwaarde is. Immers: bij een tripel (even, oneven, even), is $2s$ oneven, en zijn dan s , $s - a$, $s - b$ en $s - c$ stuk voor stuk gelijk aan een breuk met een natuurlijke teller en met noemer 2. De wortel uit het product van dit viertal kan dan onmogelijk gelijk zijn aan een natuurlijk getal.

Een superheronisch drietal moet dus van de vorm $(2n - 1, 2n, 2n + 1)$ zijn, waarbij n staat voor een natuurlijk getal. Er volgt dan:

$s = 3n$, $s - a = n + 1$, $s - b = n$ en $s - c = n - 1$, met als product $3n^2(n^2 - 1)$.

Dit product is alleen dan een kwadraat als $3(n^2 - 1) = k^2$, waarbij k een natuurlijk getal is. Omdat k^2 en dus ook k dan een 3-voud moet zijn, stel ik $k = 3m$.

Uit $3(n^2 - 1) = 9m^2$ volgt dan $n^2 - 3m^2 = 1$.

Hiermee beland ik in bekend wiskundig vaarwater, want deze *diophantische vergelijking* staat bekend onder de naam *vergelijking van Pell*. Als zo'n vergelijking van Pell één oplossing heeft, zijn er meteen oneindig veel.

Een simpele oplossing is hier: $(n, m) = (2, 1)$ en die leidt tot de driehoek (3, 4, 5). De naast hogere oplossing is (7, 4) die dan de driehoek (13, 14, 15) genereert.

De andere genoemde superheronische driehoeken corres-

ponderen met de oplossingen $(n, m) = (26, 15), (97, 56)$ en $(362, 209)$. Maar hoe vind je zulke oplossingsparen? Het sleutelwoord hierbij is *kettingbreuk*. Als ik de Pell-vergelijking herschrijf tot

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 - 3 = \frac{1}{m^2}$$

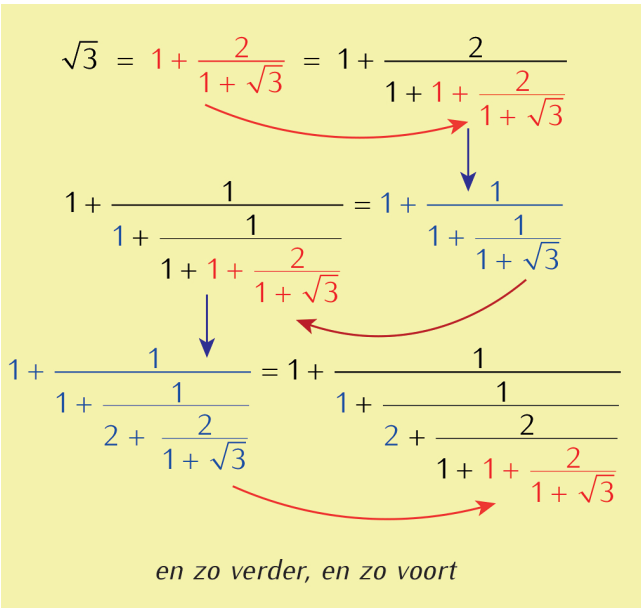
is te zien dat een oplossingspaar (n, m) correspondeert met een breukbenadering van het getal $\sqrt{3}$ en dat die benadering des te beter is, naarmate m (en dus ook n) groter is.

Ik zoek daarom naar de kettingbreuk die $\sqrt{3}$ representeert. Bedenk dat $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = 2$.

Hieruit volgt

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{1 + \sqrt{3}}$$

De $\sqrt{3}$ in de noemer vervang ik door de rode vorm waardoor die naar een lagere verdieping verhuist en dit kan dan eindeloos worden herhaald, zie figuur 4:



figuur 4

Zo ontstaat dan de oneindige en *repeterende* (ook wel *periodieke*) kettingbreuk:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

Als je deze kettingbreuk tussentijds afbreekt door de breuk in de onderste verdieping weg te laten (waardoor

een *eindige* kettingbreuk ontstaat), vind je een breuk die $\sqrt{3}$ benadert. Zo'n benadering heet dan een convergent. De convergenten van $\sqrt{3}$ staan van boven naar beneden in tabel 2.

convergent $\frac{n}{m}$	$n^2 - 3m^2$
$1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$	$2^2 - 3 \cdot 1^2 = 1$
$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{3}$	$5^2 - 3 \cdot 3^2 = -2$
$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} = \frac{7}{4}$	$7^2 - 3 \cdot 4^2 = 1$
$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \frac{19}{11}$	$19^2 - 3 \cdot 11^2 = -2$
$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}}} = \frac{26}{15}$	$26^2 - 3 \cdot 15^2 = 1$

tabel 2

Blijkbaar zijn de paren (n, m) alternerend oplossingen van de twee vergelijkingen $n^2 - 3m^2 = 1$ en $n^2 - 3m^2 = -2$. Merk op dat de rode convergenten groter zijn dan $\sqrt{3}$ terwijl de blauwe convergenten juist onderbenaderingen van $\sqrt{3}$ zijn.

Voor de superheronische driehoeken zijn de tellers van de rode convergenten bepalend. Een kwestie van verdubbelen van die teller en je hebt de lengte van de middelste zijde. De volgende drie rode convergenten zijn

$$\frac{97}{56}, \frac{362}{209}, \frac{1351}{780}.$$

Je kunt controleren dat zij corresponderen met oplossingen van $n^2 - 3m^2 = 1$. De derde breuk levert de superheronische driehoek (2701, 2702, 2703) op met een oppervlakte van 3161340.

>

De tellers van de rode convergenten van $\sqrt{3}$, dus 2, 7, 26, 97, 362, 1351, ... vertonen een groei die je quasi-exponentieel zou kunnen noemen. De eerste groeifactor is 3,5 en de daaropvolgende laten zich in vier decimalen benaderen door achtereenvolgens 3, 7143; 3,7308; 3,7320; 3,7320; ...

Dat ruikt naar $2 + \sqrt{3}$!

En er is nog iets aardigs: als je de termen in de rij machten van $2 + \sqrt{3}$ berekent, dan komen de tellers en noemers van de rode convergenten van de $\sqrt{3}$ -kettingbreuk te voorschijn!

Kijk maar:

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{3})^2 &= 7 + 4\sqrt{3} \\ (2 + \sqrt{3})^3 &= 26 + 15\sqrt{3} \\ (2 + \sqrt{3})^4 &= 97 + 56\sqrt{3} \\ &\text{enzovoort}\end{aligned}$$

Dit nu is een veel prettiger manier om de rij oplossingen van de vergelijking $n^2 - 3m^2 = 1$ te genereren...

Het bewijs hiervan is inductief!

Stap 1: stel (n, m) voldoet aan $n^2 - 3m^2 = 1$.

Stap 2: vermenigvuldiging van $n + m\sqrt{3}$ met $2 + \sqrt{3}$ levert op: $(2n + 3m) + (n + 2m)\sqrt{3}$.

Stap 3: het paar $(2n + 3m, n + 2m)$ voldoet aan onze Pell-vergelijking, want:

$$\begin{aligned}(2n + 3m)^2 - 3(n + 2m)^2 &= \\ 4n^2 + 12nm + 9m^2 - 3n^2 - 12nm - 12m^2 &= \\ n^2 - 3m^2 &= 1 \text{ (stap 1).}\end{aligned}$$

“Kruijtbosch was niet alleen een inspirerende wiskundedocent, maar hij regisseerde ook toneelstukken op school en schreef literaire essays.”

Nog even terug naar Kruijtbosch...

Je kunt nog een korte biografie op internet vinden van Kruijtbosch en je daarbij verbazen over zijn grote veelzijdigheid.

Behalve dat hij een inspirerende docent wiskunde was, regisseerde hij ook toneelstukken op zijn school en schreef hij literaire essays, bijvoorbeeld over Dostojewski. En om mijn bewondering voor Kruijtbosch te benadrukken citeer ik andermaal uit zijn boek *Avontuurlijk Wiskundeonderwijs*:

De docent die de gespannen verwachting naar het nieuwe weet te bevredigen, die de gelegenheid gebruikt om weer opnieuw in praktijk te brengen het gebod om voor alles de kinderen zelfstandig te leren denken, ze zelf de waarheden te leren vinden en ze te laten experimenteren met de nieuw gewonnen begrippen, zal niet alleen later de vruchten plukken van zijn werk, maar zich ook de dankbare genegenheid van zijn discipelen verwerven.

Noot

- [1] Zie: Kruijtbosch, D.J. (1927). De formule van Heron. *Euclides*, 4(3), 127-133. (https://archief.vakbladeuclides.nl/bestanden/004_1927-28_03.pdf)

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl



Pauzes op school

WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoekopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Olympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

Je weet wel uit eigen ervaring dat je niet zonder pauze altijd maar door kunt blijven werken en opletten. Je moet af en toe ook wat eten en drinken, je wordt moe en na verloop van tijd gaat je concentratie achteruit. Je krijgt dan minder werk af, en je zogeheten 'leerrendement', of 'werkrendement' – dat is het percentage van de tijd dat je effectief werkt of leert – is lager.

In figuur 1 zie je een (lineair benaderde) grafiek van het leerrendement (in %) na een aantal klokuren.



figuur 1

Je kunt uit de grafiek aflezen dat je leerrendement na 4 uur achterelkaar werken nog 80% is, en na 8 uur werken 60%.

Als je nu even pauze neemt, dan gaat je leerrendement daarna weer omhoog! Vlak ná een pauze is het leerrendement hoger dan vlak daarvoor. Anders gezegd: het leerrendement is weer terug op een eerder, hoger niveau. Onderzoek heeft hiervoor de volgende vuistregel opgeleverd:

Na een pauze binnen de eerste vier klokuren studietijd is het leerrendement terug op het niveau zoals dat was op het tijdstip dat op drie maal de lengte van de pauze vóór het begin van die pauze ligt.

Voorbeeld

Als iemand om 08:00 uur begint met studeren en doorstudeert tot 10:00 uur, dan is zijn leerrendement gedaald tot 90% van zijn maximum. Neemt die persoon dan 30 minuten pauze, dan zal hij aan eind van die pauze verder gaan met studeren met een leerrendement dat hoort bij $3 \times 30 = 90$ minuten vóór 10 uur, dan is het dus weer op 97,5%.

normaal rooster	begin	einde
1e lesuur	8:25 uur	9:15 uur
2e lesuur	9:15 uur	10:05 uur
3e lesuur	10:05 uur	10:55 uur
kleine pauze	10:55 uur	11:15 uur
4e lesuur	11:15 uur	12:05 uur
5e lesuur	12:05 uur	12:55 uur
grote pauze	12:55 uur	13:25 uur
6e lesuur	13:25 uur	14:15 uur
7e lesuur	14:15 uur	15:05 uur
8e lesuur	15:05 uur	15:55 uur
9e lesuur	15:55 uur	16:45 uur

figuur 2

Opdracht 1

In figuur 2 zie je het lesrooster van Robin. Geef het verloop van Robins leerrendement weer in een grafiek.

Opdracht 2

Je mag nu de totale pauzetime anders verdelen, over een aantal kortere pauzes (die wel allemaal even lang zijn), zodat het leerrendement hoger wordt.

Maak het nieuwe, verbeterde rooster en leg uit waarom het leerrendement met dit rooster hoger is.

Dit WiTje is gebaseerd op de OnderbouwWiskundeDag 2013

(www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/00782/) en archief. vakbladeuclides.nl/bestanden/089_2013-14_03.pdf)

en op de voorronde van de Wiskunde A-lympiade uit 2007 (www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/00635/)



Het Flzier gericht op...

Het Expertisepunt Rekenen - Wiskunde

Het reken-wiskundeonderwijs in Nederland staat nooit stil en krijgt veel aandacht. Het Expertisepunt Rekenen-Wiskunde (ExpRW) zet zich in om de kwaliteit van het reken-wiskundeonderwijs in Nederland te bevorderen en ondersteunt scholen bij het implementeren van nieuwe ontwikkelingen en het verbeteren van reken-wiskundige vaardigheden in alle vakken.



Expertisepunt Rekenen – Wiskunde

Inleiding

Het Expertisepunt Rekenen-Wiskunde is ingesteld door het ministerie van OCW, in lijn met andere expertisepunten voor taal, burgerschap en digitale geletterdheid. De aanleiding hiervoor was het Masterplan Basisvaardigheden. Het expertisepunt richt zich op de drie onderwijssectoren: primair onderwijs, voortgezet onderwijs en middelbaar beroepsonderwijs. Binnen deze sectoren zijn er vier speerpunten die het werk van het expertisepunt definiëren: kennismakelen, landelijke onderzoeksinfrastructuur, ondersteuning van professionals en ontwerponderzoek. We lichten deze speerpunten hieronder toe, maar kijk voor meer informatie ook op de website van het expertisepunt.^[1]

Vragen koppelen aan experts

Als kennismakelaar werkt het expertisepunt als schakel tussen scholen en partijen met expertise op het gebied van reken-wiskundeonderwijs in Nederland. Door advies- en kennisvragen uit het onderwijsveld te koppelen aan experts wordt een brug geslagen tussen theorie en praktijk. Kader 1 geeft een voorbeeld van een vraag uit het vo. Vanuit het basisonderwijs komen er bijvoorbeeld veel vragen binnen over het behalen van referentieniveau 1S.

Een eenduidige benadering van procentrekenen

Het expertisepunt ondersteunt scholen in het kader van rekenen-wiskunde in andere vakken ook in de rol van kennismakelaar. Scholen stellen bijvoorbeeld de vraag hoe zij het hele team zich verantwoordelijk kunnen laten voelen voor basisvaardigheden in rekenen en wiskunde. Als reactie hierop verwijst het ExpRW vaak naar de conferentie 'Werken aan basisvaardigheden rekenen-wiskunde in alle vakken'. Wat daar bijna altijd terugkomt, is een discussie tussen docenten economie en wiskunde over het gebruik van formules versus verhoudingstabellen bij procentrekenen.

Een mooi voorbeeld van een succesvolle aanpak hierin is die van een vmbo-school, in samenwerking met het expertisepunt. Het team van deze school heeft afgesproken om in de onderbouw procentrekenen met verhoudingstabellen aan te bieden, ook bij economie. In de bovenbouw zullen de docenten economie dan naar formules overstappen, maar accepteren het ook als leerlingen verhoudingstabellen gebruiken. Voor de leerlingen betekent dit een consistente benadering van procentrekenen in alle rekenrijke vakken, wat hun leerervaring vereenvoudigt en verbetert. Ze ervaren: er is geen verschil tussen economie-procenten en wiskunde-procenten!

Kader 1 Voorbeeld van een adviesvraag

Netwerken verbinden en versterken

Een andere taak van het expertisepunt is het verbinden en versterken van netwerken om het reken-wiskunde-onderwijs te verbeteren. Dit omvat ook het opstellen van een onderzoeksagenda, waardoor meer gericht en effectief onderzoek gecoördineerd kan plaatsvinden. Dankzij deze infrastructuur kunnen nieuwe inzichten en methoden systematisch worden ontwikkeld en verspreid.

Onderwijsprofessionals ondersteunen

Daarnaast richt het ExpRW zich op de ontwikkeling en uitvoering van professionaliseringstrajecten voor diverse betrokkenen zoals opleiders, aanbieders van nascholingen, methodeschrijvers, inspecteurs en andere betrokkenen. Het doel is hen te ondersteunen bij de basisvaardigheden rekenen-wiskunde en andere curriculumontwikkelingen, zodat deze kennis en vaardigheden vervolgens weer kunnen worden onderwezen aan leerlingen.

Onderzoek

Het ontwerponderzoek richt zich op het ontwerpen en testen van leeractiviteiten in samenwerking met de praktijk. Leraren, onderzoekers en methodeauteurs werken samen om onderwijsvernieuwingen – denk aan de nieuwe kerndoelen en examenprogramma's – kleinschalig te concretiseren en te vertalen naar de onderwijspraktijk. Deze gezamenlijke inspanningen zorgen ervoor dat de beoogde vernieuwingen effectief en toepasbaar zijn in het klaslokaal.

Netwerk en kernteam

Het Expertisepunt Rekenen-Wiskunde werkt samen met een breed netwerk van partners en organisaties, waaronder de kernpartners NVvW en NVORWO, de Universiteit Utrecht en het Freudenthal Instituut. Daarnaast zijn ook lerarenopleidingen, het SLO, het Nationaal Regieorgaan Onderwijsonderzoek (NRO) en diverse vakverenigingen betrokken. Het onderhouden van dit netwerk van experts en organisaties is een belangrijk onderdeel van het werk van het expertisepunt.

Rekenbewust vakonderwijs

In het vervolg van dit artikel gaan we in op één van de onderwerpen waarop het expertisepunt zich richt: rekenbewust vakonderwijs, oftewel het versterken van reken-wiskundige vaardigheden in andere vakken. Dit verbetert niet alleen de rekenvaardigheden van leerlingen, maar laat hen ook zien hoe ze deze vaardigheden in het dagelijks leven en bij andere schoolvakken toe kunnen passen. Het ExpRW ondersteunt en stimuleert reken-

bewust vakonderwijs, bijvoorbeeld door middel van conferenties waarin docenten van verschillende vakken samenwerken, zie kader 2.

Op een middelbare school in Noord-Brabant werden in het kader van wiskunde in andere vakken werkmiddagen georganiseerd met sectieleden van rekenrijke vakken. Tijdens deze bijeenkomsten werd gezamenlijk naar de rekenkaart gekeken en afgestemd welke rekenvaardigheden in de verschillende vakken wanneer worden behandeld.

Op een mbo-opleiding in Groningen werd aan het begin van vorig schooljaar een workshop vakoverstijgend rekenen gegeven voor alle collega's. In deze workshop werd de verhoudingstabel uitgelegd en de nieuwe rekenkaart werd toegelicht. Deze rekenkaart krijgen alle studenten en ze mogen deze in periode 1 en 2 bij de toets gebruiken

Kader 2 Activiteiten rond vakoverstijgend rekenen op scholen

Uitgangspunt bij vakoverstijgend rekenen is dat rekenen-wiskunde geen op zichzelf staand vak is, maar ook een belangrijke rol speelt in andere schoolvakken. De Onderwijsraad^[2] gaf een belangrijke aanbeveling op dit vlak:

Veranker taal en rekenen in andere vakken en leergebieden:

De taal- en rekenontwikkeling van leerlingen krijgt nog onvoldoende aandacht bij andere vakken, waardoor veel kansen onbenut blijven. Onderwijs in andere vakken biedt betekenisvolle en effectieve contexten voor het taal- en rekenonderwijs. En andersom is een goede taal- en rekenvaardigheid van leerlingen en studenten voorwaardelijk voor het ontwikkelen van kennis in alle andere schoolvakken. Het oefenen van taal en rekenen moet daarom niet geïsoleerd plaatsvinden, maar betekenisvol ingebed worden in de vakken en leergebieden, waarmee het onderwijs in taal en rekenen de verantwoordelijkheid is van alle leraren.

>

De Onderwijsraad benadrukt hiermee dat de verantwoordelijkheid voor basisvaardigheden rekenen-wiskunde gedragen moet worden door meer docenten dan alleen de wiskunde-rekendocent. Dit advies voor het veld onderstreept het belang van een geïntegreerde aanpak waarbij rekenen-wiskunde een plek krijgt in de context van rekenrijke vakken zoals natuurkunde, scheikunde, economie, biologie en informatica.

Activiteiten en ondersteuning

Veel scholen werken al aan het versterken van rekenvaardigheden in verschillende vakken en wensen daarbij ondersteuning. Daarvoor werden vorig schooljaar twee conferenties rond het thema 'wiskunde in andere vakken' georganiseerd. Ook dit schooljaar staan dergelijke conferenties op de agenda.^[3] Daarnaast heeft de NVvW onlangs een denkdiner georganiseerd waarin diverse vakverenigingen samenkwamen om de samenwerking op dit gebied te versterken.^[4]

Concreet zijn enkele gebieden van vaardigheden aan te wijzen die extra aandacht vragen:

- getallen/getalbegrip
- werken met formules
- representaties: grafieken en tabellen
- verhoudingen en procenten
- meten en maten

In de werkconferenties denken docenten van de rekenrijke vakken gezamenlijk na over deze gebieden en over hoe ze hierin gezamenlijk kunnen optrekken. Het resultaat hiervan wordt vervolgens per school vastgelegd op posters, die de gezamenlijke afspraken en aanpakken visueel in kaart brengen, zie figuur 1.^[5]



figuur 1 De poster waarop gezamenlijke afspraken gebundeld worden per aandachtsgebied (getallen/getalbegrip, procenten en verhoudingen, werken met formules, representaties: grafieken en tabellen, meten & maten).

Conclusie

Rekenbewust vakonderwijs is een voorbeeld van een van de inhoudelijke thema's waarop het Expertisepunt Rekenen-Wiskunde zich richt. Met deze en andere activiteiten wil het ExpRW samen met en voor het veld impulsen geven voor betere basisvaardigheden in rekenen-wiskunde. Heb je suggesties of vragen? Aarzel dan niet contact met ons op te nemen!

Noten

- [1] zie: <https://exprw.nl/>
- [2] zie: Onderwijsraad (2022). *Taal en rekenen in het vizier*. Onderwijsraad. https://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/2022_onderwijsraad_taal_en_rekenen_in_het_vizier.pdf
- [3] 26-9-2024 was de eerste: nvvw.nl/agenda/werken-aan-basisvaardigheden-rekenen-wiskunde-in-alle-vakken/
- [4] zie: elwier.nl/denk-diner-reken-wiskundige-vaardigheden-een-gezamenlijke-verantwoordelijkheid/
- [5] Kijk voor meer informatie op <https://exprw.nl/rekenbewust-vakonderwijs>.

Over de auteurs

Vincent Jonker is verbonden aan de Universiteit Utrecht en het Freudenthal Instituut. Hij richt zich op onderzoek, nascholing en de ontwikkeling van wiskunde- en scienceonderwijs, vooral voor het basisonderwijs, vmbo, mbo en volwasseneneducatie. Vanuit het Expertisepunt Rekenen-Wiskunde ondersteunt hij scholen en docenten bij het verbeteren van hun reken-wiskundeonderwijs.
E-mailadres: V.Jonker@uu.nl

Anne Heemskerk werkt eveneens bij het Expertisepunt Rekenen-Wiskunde. Samen met Paul Drijvers heeft zij een literatuurstudie uitgevoerd in samenwerking met slo en de Universiteit Leiden, waarvan onlangs het rapport verscheen op exprw.nl. Daarnaast is zij verantwoordelijk voor de communicatie van het Expertisepunt en richt zij zich op het beantwoorden van vragen uit het veld.
E-mailadres: a.g.a.heemskerk@uu.nl

Kerkramen

Tijdens een fietstocht langs de Maas in Limburg, viel mijn oog op het raam bovenin een kerk, zie figuur 2. Het was in Kessel. Net met de pont overgevaren, rechtsaf de dijk op en dan kom je meteen langs die mooie kerk, de Onze-Lieve-Vrouwe-Geboortekerk een van de vele kerken van architect Pierre Cuypers, zie figuur 1.

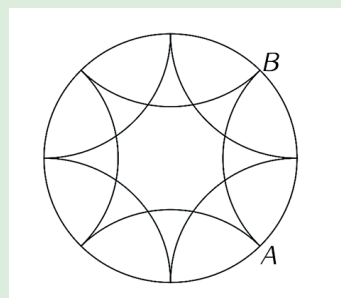


figuur 1 OLV-Geboortekerk te Kessel (bron: Wikipedia)



figuur 2

Het inspireerde me om zo'n raam eens na te tekenen met GeoGebra en daar kwam toch echt wel denkwerk bij te pas. Brugklasleerlingen kunnen dit misschien wel natekenen op papier als ze een beetje passervardig moeten worden en voor hogerejaars een goede oefening met GeoGebra, zie figuur 3.



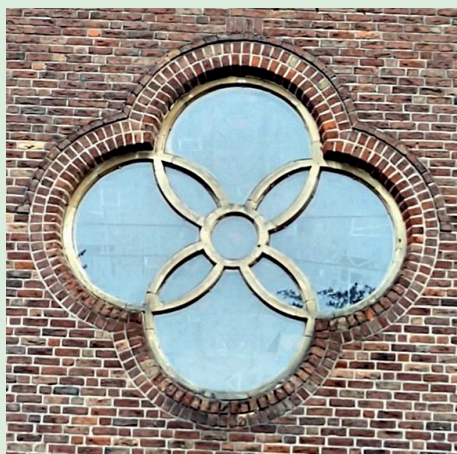
figuur 3

Voor hogere klassen kun je er natuurlijk andere vragen bij bedenken. Je kunt denken aan een vraag als: welke straal heeft de cirkel waarvan je de bogen ziet, of als je dit in een assenstelsel tekent, waar ligt dan het middelpunt van de cirkel van boog AB ?

Een ander raam is van de Petrus en Pauluskerk in Arcen, zie figuur 4. Nog steeds langs de Maas. Weer cirkels, maar een totaal ander raam zie figuur 5. Ook hier zijn weer vragen bij te bedenken. Wat me een mooi project lijkt in een onderbouwklas: laat de leerlingen een raam ontwerpen met alleen cirkels en rechte lijnen.



figuur 4 Petrus en Pauluskerk te Arcen (bron: Wikipedia)



figuur 5

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde in ruste.

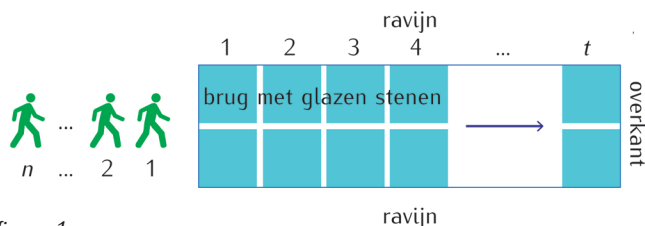
E-mailadres: a.b.vanderroest@ziggo.nl

Squid Game

In de populaire Netflix-serie Squid Game komt een gruwelijk spel voor: Glazen stapelstenen. Spelers moeten over een brug van glazen stenen naar de overkant lopen. De helft van de stenen zijn van gehard glas, de andere helft niet. Stapt een speler op een gewone glazen steen, dan stort hij in het ravijn. Herman Bloem onderzoekt hoeveel spelers je verwacht dat de overkant halen. Dit artikel is geen (achteraf samengestelde) kant-en-klare uitwerking maar een chronologisch verslag van een denkproces, een kronkelend pad dat met vallen en opstaan is bewandeld...

Inleiding

Bij het spel 'Glazen Stapstenen' in de serie Squid Game moet een groep van zestien spelers één voor één over een brug naar de overkant. De brug bestaat uit een dubbele rij van achttien tegels (padlengte is 18) waarbij er van elk paar steeds één van gehard glas is en de ander van gewoon glas. Een speler doet telkens één stap voorwaarts, recht of schuin. Stapt hij op gewoon glas dan breekt het, valt hij in het ravijn en overleeft het niet. Stapt hij op gehard glas dan blijft hij staan en kan verder. Elke speler ziet (en onthoudt) wat er bij zijn voorgangers gebeurt. Bij het zien van de serie rees bij mij de vraag 'Hoeveel spelers verwacht je bij n spelers en een padlengte van t tegels de overkant te halen?', zie figuur 1.



figuur 1

Verwachtingswaarde

Het probleem is het bepalen van een verwachtingswaarde. Zij $E(n, t)$ het verwachte aantal overlevenden bij n spelers en een padlengte van t tegels. We willen een uitdrukking afleiden voor $E(n, t)$. De verwachtingswaarde is per definitie de sommatie over de uitkomsten van kans maal uitkomst. De uitkomst k (het aantal overlevenden) varieert van $k = 0$ (niemand overleeft) tot $k = n$ (iedereen haalt de overkant), dus

$$E(n, t) = \sum_{k=0}^n k \times (\text{kans op } k \text{ overlevenden})$$

Maar wat is de kans op k overlevenden bij n spelers en padlengte t tegels? Oef, dat zijn wel veel parameters.

Ik zie nog niet direct hoe ik een uitdrukking kan vinden voor de kansverdeling van het aantal overlevenden...

Het probleem 'klein' maken

Dan eerst maar eens één van beide parameters n , t vast nemen en de ander klein houden, wellicht zie ik een patroon. Uit de definitie van verwachtingswaarde is snel af te leiden: (S1 is speler 1, S2 is speler 2, etc., T1 is tegel 1, T2 is tegel 2, etc..)

n spelers (t klein...)

$$t = 1$$

$$E(n, 1) = \frac{1}{2} \times n + \frac{1}{2} \times (n-1) = n - \frac{1}{2} \quad \forall n \geq 1$$

Er is slechts één tegel dus het aantal overlevenden is ofwel n (als de eerste persoon goed kiest, dan de rest natuurlijk ook) ofwel $n - 1$ (als de eerste persoon fout kiest, daarna kiest de tweede persoon en elke volgende natuurlijk goed). Kort genoteerd:

- 1^e term: S1 overleeft en dus overleeft elke speler
- 2^e term: S1 valt op T1, daarna overleeft natuurlijk elke speler

$$t = 2$$

$$E(n, 2) = \frac{1}{4} \times n + \frac{1}{4} \times (n-1) + \frac{1}{4} \times (n-1) + \frac{1}{4} \times (n-2) = n - 1 \quad \forall n \geq 2$$

- 1^e term: S1 overleeft en dus overleeft elke speler
- 2^e term: S1 valt op T2 en daarna overleeft natuurlijk elke speler
- 3^e term: S1 valt op T1, S2 overleeft en daarna overleeft natuurlijk elke speler
- 4^e term: S1 valt op T1, S2 valt op T2 en daarna overleeft natuurlijk elke speler

Padlengte t (n klein ...)

$$n = 1 \quad E(1, t) = \frac{1}{2^t} \times 1 = \frac{1}{2^t} \quad \forall t \geq 1$$

Er is slechts één persoon dus het aantal overlevenden is maximaal 1 (als die ene persoon bij alle t tegels goed kiest). Kort genoteerd:

— S1 kiest t keer goed en overleeft

$$n = 2 \quad E(2, t) = \frac{1}{2^t} \times 2 + t \times \frac{1}{2^t} \times 1 = \frac{t+2}{2^t} \quad \forall t \geq 1$$

— 1^e term: S1 overleeft (kiest t keer goed) en dus overleeft ook S2

— 2^e term: S1 valt (dat kan op t posities) en S2 overleeft

Hm... Zal dit voor grotere n , t niet lastig worden? Kan ik het anders aanpakken? Hé, ik bedenk me nu dat als S1 klaar is (ongeacht de afloop), het probleem niet wezenlijk is veranderd, alleen het aantal spelers en/of aantal tegels is anders geworden. Daar kan ik vast iets mee...

Recurrente betrekking

Als S1 valt op T1, dan is het probleem voor de volgende $n - 1$ spelers hetzelfde gebleven maar met een tegel minder. Als S1 op T1 overleeft, dan is het probleem voor de groep van n spelers gelijk gebleven maar met een tegel minder. Hieruit volgt:

$$E(n, t) = \frac{1}{2} \times E(n-1, t-1) + \frac{1}{2} \times E(n, t-1) \quad \forall n, t \geq 1 \quad (1)$$

We hebben hiermee een recurrente betrekking voor $E(n, t)$ gevonden, zonder de kansverdeling van het aantal overlevenden te kennen. Samen met de ad hoc eerder afgeleide $E(n, t)$ voor $n, t \leq 2$ kun je met deze recurrente betrekking uitdrukkingen afleiden voor $E(n, t)$ voor $t = 3, 4, 5, \dots$, mits $n \geq t$.

$$E(n, 3) = \frac{1}{2} \times E(n-1, 2) + \frac{1}{2} \times E(n, 2) =$$

$$\frac{1}{2} \times (n-2) + \frac{1}{2} \times (n-1) = n - \frac{3}{2} \quad \forall n \geq 3$$

$$E(n, 4) = \frac{1}{2} \times E(n-1, 3) + \frac{1}{2} \times E(n, 3) =$$

$$\frac{1}{2} \times (n-1-\frac{3}{2}) + \frac{1}{2} \times (n-\frac{3}{2}) = n-2 \quad \forall n \geq 4$$

Hieruit volgt snel met volledige inductie naar t dat:

$$E(n, t) = n - \frac{t}{2} \quad \forall n \geq t \quad (2)$$

Speciaal geval

Als de padlengte gelijk is aan het aantal spelers ($t = n$), dan krijg je: $E(n, n) = \frac{n}{2} \quad \forall n \quad (3)$

Intuïtie

Formule (3) geeft me het gevoel dat je dit ook intuïtief moet kunnen inzien. We concentreren ons even op de eerste helft van het aantal spelers. Als iedereen uit deze groep op het eerste beslismoment fout kiest, ben je precies halverwege de brug. Maar gemiddeld zal van die groep de helft (dus een kwart van alle spelers) de eerste keer goed hebben gekozen! Als elke speler van dat kwart de tweede keer fout kiest, ben je weer een kwart brug verder, dus precies op driekwart van de brug. Gemiddeld zal van dat kwart echter wederom de helft (dus een achtste van alle spelers) de tweede keer goed kiezen! Op deze manier verder redenerend zien we in dat je (gemiddeld genomen) aan het einde van de brug bent beland als de helft van het aantal spelers aan de beurt is geweest, want

$$n \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots) = n \times 1 = n.$$

Kortom, gemiddeld zal de helft overleven.

De zelfde argumentatie kunnen we ook gebruiken voor een 'praatjes-bewijs' voor formule (2) bij het geval $n \geq t$. We beredeneren op dezelfde wijze als boven dat gemiddeld een eerste groep ter grootte van de helft van de padlengte t zich opoffert voor de 'overbrugging'. Het restant overleeft en zo zien we formule (2) ontstaan.

Een oneindige reeks

We kunnen formule (3) ook nog op de volgende wijze afleiden. Stel je voor dat we het brugprobleem uitvoeren met slechts één speler (en onbeperkte padlengte), hoe ver verwacht je dat hij gemiddeld komt? Anders gezegd, hoeveel stappen verwacht je voor hij valt? Wel, hij haalt k stappen (k keer goed kiezen) met kans $(\frac{1}{2})^k$, dus het verwachte aantal stappen is:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \times (\frac{1}{2})^k = 1 \times (\frac{1}{2})^1 + 2 \times (\frac{1}{2})^2 + 3 \times (\frac{1}{2})^3 + 4 \times (\frac{1}{2})^4 + \dots$$

De som van deze reeks is 2 (zie kader 1). Dat betekent dus dat je per speler gemiddeld twee tegels ver komt. Bij padlengte $t = n$ zal dus gemiddeld de $(\frac{n}{2})^{\text{de}}$ persoon de eerste zijn die op de laatste tegel valt en daarna overleeft de rest. Hiermee is formule (3) bewezen.

>

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \times \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$$

Ga uit van de somformule voor de oneindige meetkundige reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall |x| < 1$$

Differentieer links en rechts en vermenigvuldig met x .
Substitueer tenslotte $x = \frac{1}{2}$.

Kader 1

Even reflecteren

Hé, uit formules (2) en (3) volgt dat voor $n \geq t$ geldt:

$$E(n, t) = E(t, t) + (n - t) \quad \forall n \geq t$$

Maar dat is ook logisch! Immers, voor de eerste t van totaal n spelers is het een spel met evenveel spelers als padlengte t en alle overige $n - t$ spelers overleven daarna sowieso.

Wat als $n < t$?

Formule (2) voor $E(n, t)$: $E(n, t) = n - \frac{t}{2}$

geldt alleen voor $n \geq t$. Ik wil natuurlijk ook voor het geval $n < t$ een uitdrukking vinden voor $E(n, t)$. Ik zal toch nog iets anders moeten...

Een spelverloop modelleren met nullen en enen

We kiezen een andere aanpak en modelleren een spelverloop als een rijtje van t nullen en enen. De nullen in zo'n rijtje geven een val aan (in volgorde van spelers). Zie het voorbeeld in tabel 1.

Elk spelverloop laat zich beschrijven als zo'n rijtje van t nullen en enen, ongeacht of $n \geq t$ of $n < t$. Het aantal spelverlopen bij padlengte t waarbij k van de n deelnemers uitvallen, dus $(n - k)$ spelers overleven, is gelijk aan het aantal manieren om k nullen te plaatsen in het rijtje van lengte t en dat is

$$\binom{t}{k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

Omdat de kans op elk spelverloop gelijk is aan $\left(\frac{1}{2}\right)^t$, vinden we zo de volgende algemeen geldende uitdrukking voor het verwachte aantal overlevenden $E(n, t)$:

$$E(n, t) = \frac{1}{2^t} \times \sum_{k=0}^n \binom{t}{k} \times (n - k) = \frac{1}{2^t} \times \sum_{k=0}^n \binom{t}{n-k} \times k \quad (4)$$

In formule (4) zie ik ook de kansverdeling terug van het aantal overlevenden bij n spelers en padlengte t (Die ik in het begin niet direct zag!), namelijk...:

$$\text{kans op } k \text{ overlevenden} = \frac{1}{2^t} \times \binom{t}{n-k}.$$

Ah, dat is ook logisch want de kans op k overlevenden is:

$$\frac{\text{aantal gunstige spelverlopen}}{\text{totaal aantal spelverlopen}} = \frac{\binom{t}{n-k}}{2^t} \quad (5)$$

Immers, het totaal aantal spelverlopen is 2^t want dat is een rijtje van t nullen en enen. Bij een gunstig spelverloop zijn er k overlevenden, dus staat op $(n - k)$ posities van ons rijtje een 0. Tja ... achteraf is 'alles' simpel.

Symmetrie! Nogmaals $E(n, t)$

Het model om een spelverloop op te vatten als een rijtje van nullen en enen geeft ons nog een verrassend argument voor de waarde van $E(n, n)$. We kijken naar formule (5) voor het geval dat $t = n$ en zien dan dat de kans dat exact k van de n personen de overkant halen,

spelverloop	betekenis
1101001101 $\longleftrightarrow$ $t=10, n=6$	Bij een spel met 6 spelers en padlengte 10 valt speler 1 op de derde tegel, speler 2 op de vijfde tegel, speler 3 op de zesde tegel en speler 4 op de negende tegel. Spelers 5 en 6 overleven.
0001100 $\longleftrightarrow$ $t=7, n=6$	Bij een spel met 6 spelers en padlengte 7 valt speler 1 op de eerste tegel, speler 2 op de tweede tegel, speler 3 op de derde tegel, speler 4 op de zesde tegel en speler 5 op de laatste tegel. Alleen speler 6 overleeft.
010110... $\longleftrightarrow$ $t=8, n=3$	Bij een spel met 3 spelers en padlengte 8 valt speler 1 op de eerste tegel, speler 2 op de derde tegel en speler 3 op de zesde tegel. Niemand overleeft.
01101001 $\longleftrightarrow$ $t=8, n=11$	Bij een spel met 11 spelers en padlengte 8 valt speler 1 op de eerste tegel, speler 2 op de vierde tegel, speler 3 op de zesde tegel en speler 4 op de zevende tegel. Spelers 5, 6, 7, 8, 9, 10 en 11 overleven.

tabel 1

gelijk is aan;

$$\frac{\binom{n}{n-k}}{2^n} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Aan de symmetrie van de binomiaal-coëfficiënt zien we dat de kans dat exact k personen de overkant halen, gelijk is aan de kans dat exact $(n - k)$ personen de overkant halen. Maar daarmee is de verdeling van het aantal personen dat de overkant haalt symmetrisch en dus ligt $E(n, n)$ precies in tussen $k = 0$ en $k = n$ ofwel:

$$E(n, n) = \frac{n}{2}$$

Enkele uitdrukkingen voor $E(n, t)$

Uit (4) leiden we snel enkele uitdrukkingen af voor $E(n, t)$ bij vaste padlengte t :

$$E(1, t) = \frac{1}{2^t}$$

$$E(2, t) = \frac{t+2}{2^t}$$

$$E(3, t) = \frac{t^2 + 3t + 6}{2^{t+1}}$$

$$E(4, t) = \frac{t^3 + 3t^2 + 14t + 24}{3 \times 2^{t+1}}$$

$$E(5, t) = \frac{t^4 + 2t^3 + 23t^2 + 70t + 120}{3 \times 2^{t+3}}$$

Een identiteit

Formule (4) voor $E(n, t)$ geldt voor alle n, t maar formule (2) alleen voor $n \geq t$. Dat betekent dat beide uitdrukkingen gelijk zijn voor $n \geq t$, dus:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times (n-k) = (2n-t) \times 2^{t-1} \quad \forall n \geq t$$

Dus in het bijzonder geldt voor $n = t$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times (n-k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k = n \times 2^{n-1} \quad (6)$$

Deze laatste identiteit (6) is een 'bekende' sommatie, ook af te leiden door het binomium van Newton:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

te differentiëren naar x (of y) en daarna $x = y = 1$ te nemen.

CAS-berekeningen

Enkele (afgekapte) waarden voor $E(n, t)$ voor $n < t$, berekend met het ComputerAlgebraSysteem Maple:

$$\begin{aligned} E(10, 11) &= 4,5004\dots, E(16, 18) = 7,00007\dots, \\ E(23, 24) &= 11,000000005\dots, E(23, 40) = 3,28\dots, \\ E(41, 43) &= 19,5000000000005\dots, E(16, 37) = 0,34\dots, \\ E(134, 188) &= 40,000000001\dots \end{aligned}$$

Hé, het valt op dat als $t (> n)$ relatief niet veel afwijkt van n , dat dan $E(n, t)$ erg dicht ligt bij ofwel een geheel getal of halverwege twee opeenvolgende gehele getallen *. Dat verschijnsel kunnen we verklaren door (4) te herschrijven tot (zie uitdaging aan het einde):

$$E(n, t) = \left(n - \frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2^t} \times \sum_{k=n+1}^t (k-n) \binom{t}{k} \quad (7)$$

Aan dit resultaat (7) kunnen we verschillende zaken aflezen:

Als $t \leq n$ valt het deel met de reeks weg en krijgen we

$$\text{weer } E(n, t) = n - \frac{t}{2}.$$

$$t = n + 1 \text{ geeft } E(n, n + 1) = \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

$$t = n + 2 \text{ geeft } E(n, n + 2) = \frac{n-2}{2} + \frac{n+4}{2^{n+2}}.$$

$$t = n + d \text{ geeft } E(n, n + d) = \frac{n-d}{2} + \frac{\text{polynoom in } n \text{ van de graad } (d-1)}{2^{n+d}}$$

De laatste uitdrukking verklaart verschijnsel * (het polynoom wordt 'plat' geslagen door de noemer).

Terug naar Netflix

In de Netflix-serie is $n = 16$ en $t = 18$. Uiteindelijk

$$\text{overleven drie spelers, terwijl je er } E(16, 18) = \frac{458757}{65536} \approx 7,000076$$

zou verwachten. Niet erg realistisch... maar dat is het 'spel' gelukkig ook niet!

Uitdagingen

A) Herschrijf (4) tot $E(n, t) = \left(n - \frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2^t} \times \sum_{k=n+1}^t (k-n) \binom{t}{k}$

B) Leid de volgende mooie uitdrukking af voor de verwachting van het aantal overlevenden in het geval dat de padlengte tweemaal het aantal spelers is: $E(n, 2n) = \frac{n}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n}$

De uitwerkingen staan op de website.

 vakbladeuclides.nl/1002squidgame

Met dank aan Igor Hoveijn (feedback) en Willem van de Vis (simulaties)

Over de auteur

Herman Bloem is lerarenopleider wiskunde bij de masteropleiding van NHLStenden.

E-mailadres: herman.bloem@nhlstenden.com

Uitdagende problemen

Turning torso

Hoe bijzonder is de woontoren in Malmö in Zweden van de Spaanse architect Santiago Calatrava (1951)? En wat kunnen wij ermee? Ideeën voor de leerlingen om zelf een woontoren te gaan ontwerpen? Ofwel: hoe één gebouw aanleiding geeft tot een heel bouwwerk van leeractiviteiten.

Inleiding

De woontoren van 191 meter hoog, zie figuur 1, staat dichtbij de zeestraat Sont, ten noorden van de bekende Sontbrug. De torenflat werd ontworpen en gebouwd tussen 1999 en 2004. Het bevat 54 bouwlagen en vijf liften. De totale vloeroppervlakte is 270.000 m².

Was Calatrava geïnspireerd door de Roemeense kunstenaar Constantin Brâncuși, zie het beeld in figuur 2, of door het menselijk lichaam? Was er in zijn architectuur sprake van meer dan een stapeling van gelijke vormen? Hoe bereidde Calatrava zich voor? Wat is en wat was zijn speelmateriaal?



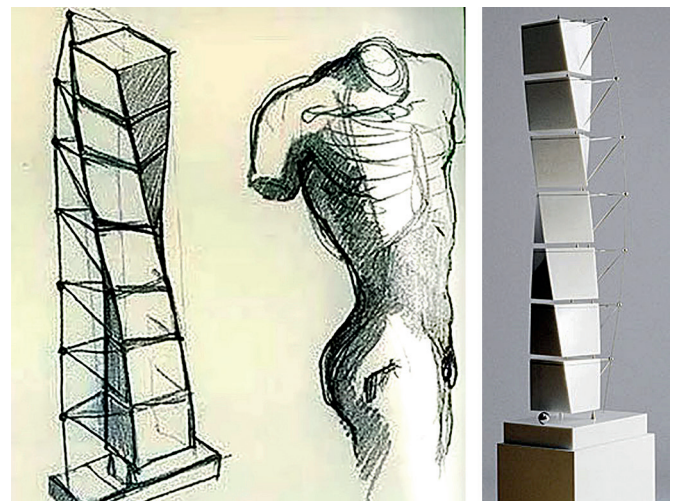
figuur 1 Turning Torso (foto: David Castor)

Calatrava was geïnteresseerd in sculpturen die hij gebruikte voor zijn ontwerpen.^[1] Hij schetste, zie figuur 3 links, een mannelijke torso met een draaiing. Hij schetste daarna zeven kubussen, gerangschikt om een stalen steun, die doen denken aan een menselijke ruggengraat: je ziet al duidelijk een spiraalconstructie. In figuur 3 rechts zie je de sculptuur *Twisting Torso* uit 1991 gemaakt van marmer en verchroomd staal. Uiteindelijk wordt deze *Twisting Torso* omgezet in de wolkenkrabber met de naam *Turning*



figuur 2 Colonne sans fin – Constantin Brâncuși

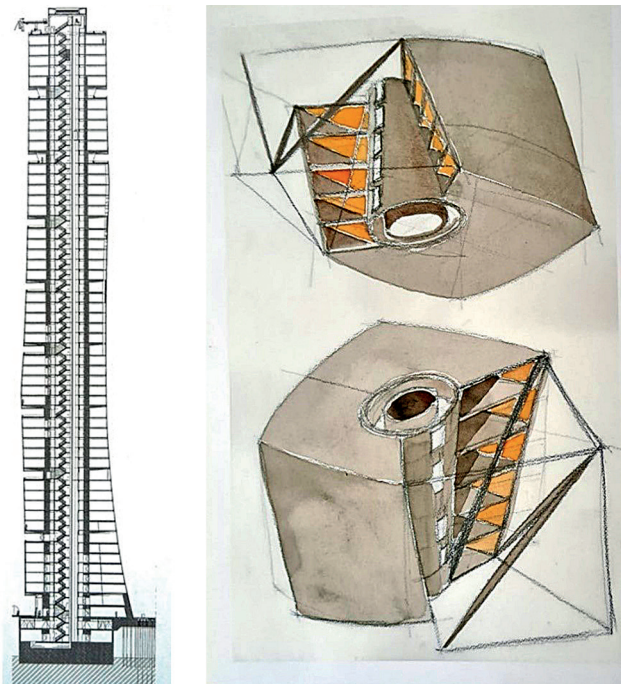
Torso. De Turning Torso krijgt het uiterlijk van het menselijk bovenlichaam in beweging.



figuur 3

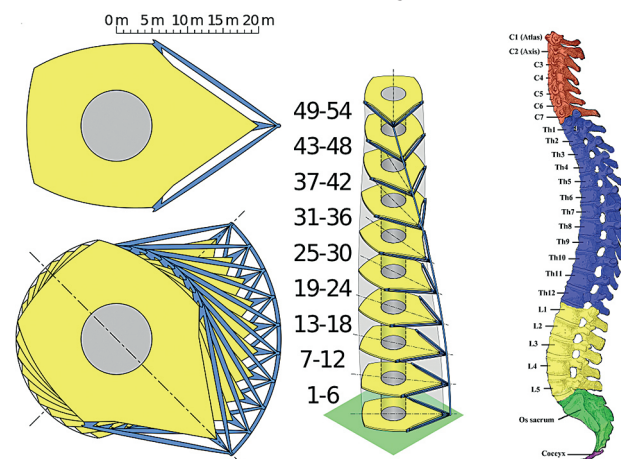
Details

We gaan het gebouw wat gedetailleerder bekijken. De kubussen van de sculptuur zijn vervangen door negen blokken die elk vijf verdiepingen omvatten, zie figuur 4 rechts. De oplettende lezer telt nu 45 verdiepingen. Er waren toch 54 verdiepingen? Zie figuur 4 links, let op de negen overgangen: die worden ook beschouwd als bouwlagen.



figuur 4

De negen blokken hebben ieder de vorm van een nagenoeg vijfzijdig prisma. Het bovenste blok is ten opzichte van de begane grond 90° gedraaid, met de klok mee. Elke vloer heeft een onregelmatige vijfhoekige vorm en draait rond de verticale kern die ondersteund wordt door een stalen buitenframe, zie figuur 5.



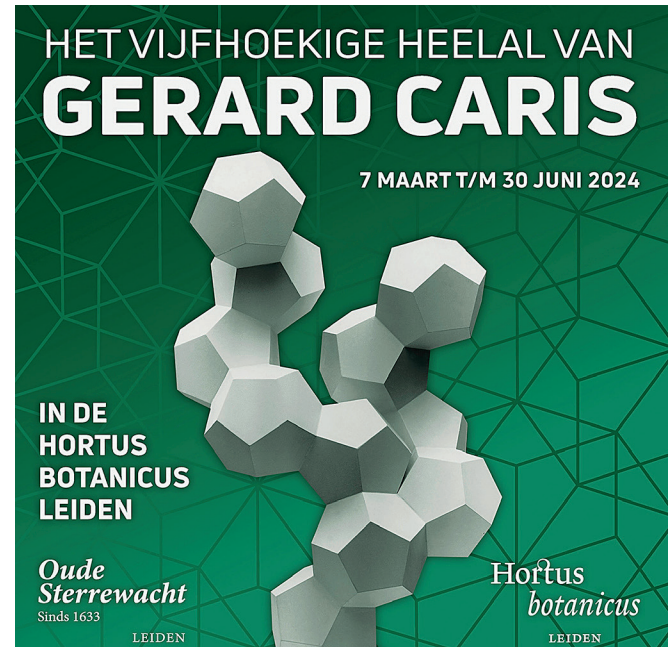
figuur 5

Wat kunnen de C-leerlingen en andere geïnteresseerden zich afvragen? Dat gaan we bekijken. Vergelijk bijvoorbeeld de spiraal van de toren eens met de thoracale wervelkolom (het blauwe gedeelte van de wervelkolom in figuur 5). Of de vraag: 'wat wil je over de vloeren weten?' Zo onregelmatig is zo'n vloer nu ook weer niet. Met de gegeven schaal, zie figuur 5, moet het mogelijk zijn om de oppervlakte van zo'n vloer uit te rekenen. We kunnen het dan vergelijken met de totale vloeroppervlakte van 270.000 m².

De lengte van de driedimensionale spiraal is ook te berekenen. Denk maar aan een verticaal opengeknapt wc-rolletje. De spiraal vind je terug als een diagonaal op de rechthoekige uitslag. Zou de lengte van de spiraal veel schelen met de hoogte van het gebouw?

Stapelen met tetraëders en dodecaëders

Dat stapelen en roteren van vijfzijdige prisma's kan natuurlijk ook met dodecaëders en tetraëders. Gerard Caris bijvoorbeeld, maakte veel stapelingen van dodecaëders, zie figuur 6. Je kunt zijn werk op dit moment bewonderen in de Hortus Botanicus te Leiden.



figuur 6

De Japanse architect Arata Isozaki stapelde even grote tetraëders op elkaar. Dit leidde tot de *Art Tower* in Mito, een voorstad van Tokio. De spiraalvormige toren is onderdeel van een groot complex dat onder andere een museum, een concertzaal en een theater herbergt, zie figuur 7.

>



figuur 7

Gaf dat stapelen een verrassend effect? Jazeker. Er zijn drie verschillende spiralen te zien. Een opmerkelijke eigenschap van de toren is dat alle tetraëders een verschillende positie hebben. Dat blijft ook zo, ook al zou je met het stapelen doorgaan. De blokken met de vorm van een vijfzijdig prisma kunnen we ook vervangen door dodecaëders. De niet geheel onregelmatige vijfhoek wordt door een pentagon vervangen. Maar hoe maak je een model van een dodecaëder? Hoe ga je stapelen? Kunnen we een spiraal ontwerpen?

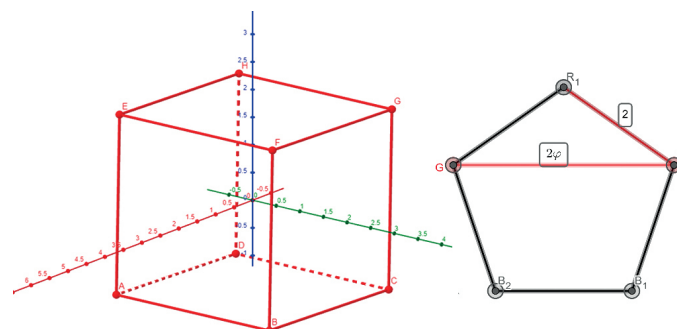


figuur 8

Van kubus naar dodecaëder

Architect Calatrava begon met kubussen. Dat kunnen wij ook doen.

De oude Grieken wisten al hoe je van een kubus een dodecaëder kon maken. Waarschijnlijk beseften zij dat een dodecaëder een veelvlak is met veel symmetrie, daar maken we gebruik van. We richten ons ook op de definitie van de gulden snede van de Italiaanse franciscaner monnik Luca Pacioli (1447 – 1517): de verhouding, zie figuur 9 rechts, van de lengte van een diagonaal en de



figuur 9

lengte van een zijde van een pentagon. Dat verhoudingsgetal duiden we met φ :

$\varphi = 0,5 + 0,5\sqrt{5}$ (afgerond 1,62). Het zal handig blijken te zijn om voor de lengte van een ribbe van de kubus 2φ te kiezen en de kubus zo in een coördinatenstelsel te plaatsen dat het zwaartepunt van de kubus in de oorsprong valt, zie figuur 9 links. Met hoekpunten $A(\varphi, -\varphi, -\varphi)$ en $B(\varphi, \varphi, -\varphi)$ hebben we de kubus vastgelegd. De coördinaten van de andere hoekpunten van de kubus, zoals hoekpunt $F(\varphi, \varphi, \varphi)$ kun je nu gemakkelijk noteren. De acht hoekpunten van de kubus worden nu ook hoekpunten van de dodecaëder. Een dodecaëder heeft twintig hoekpunten; we moeten die andere twaalf hoekpunten dus nog zien te vinden.

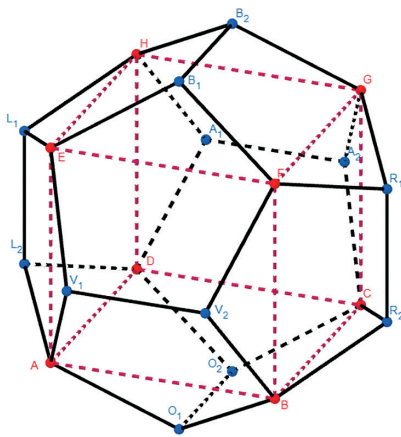
Een kubus heeft twaalf ribben en een dodecaëder twaalf congruente grensvlakken met de pentagonvorm. Op elke kubusribbe, zoals bijvoorbeeld FG , plaatsen we een pentagon met zijdelengte 2, zie figuur 9. Als we dat ook doen bij ribbe EH dan ontstaat er een schilddak $EFGH \cdot B_1B_2$ op het bovenste grensvlak van de kubus, waarvan B_1B_2 de noklijn is. De noklengte is 2. Vanwege o.a. de symmetrie is bij punt B_1 alleen de z -coördinaat onbekend. We kunnen dus noteren $B_1 = (1, 0, z)$ en opmerken dat $B_1F = 2$. Vervolgens gebruiken we de driedimensionale stelling van Pythagoras:

$$B_1F^2 = (\varphi - 1)^2 + \varphi^2 + (\varphi - z)^2 = 2^2$$

$$3\varphi^2 - 2\varphi + 1 - 2\varphi z + z^2 - 4 = 0$$

Merk op dat $\varphi^2 = \varphi + 1$. We vullen dat in en dat geeft $3(\varphi + 1) - 2\varphi - 3 - 2\varphi z + z^2 = 0 \rightarrow z^2 - 2\varphi z + \varphi = 0$.

Met de abc -formule of kwadraat afsplitsen vinden we $z_{1,2} = \varphi \pm 1$, $z_{B_1} = 1 + \varphi$ en $B_1 = (1, 0, 1 + \varphi)$. Op elk ander grensvlak van de kubus kunnen we zo te werk gaan. Door de symmetrische constructie kun je snel alle elf andere punten coördinaten geven en invoeren in GeoGebra. Bijvoorbeeld $R_1 = (0, \varphi + 1, 1)$ en $V_1 = (\varphi + 1, -1, 0)$. Dat levert de tekening van figuur 10 op.



figuur 10

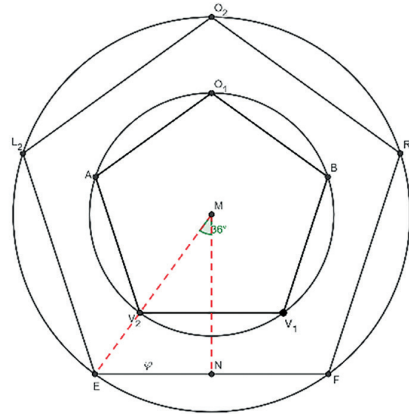
We kunnen nu de afstand uitrekenen van de tegenover elkaar liggende ribben B_1B_2 en O_1O_2 . Dat geeft $2 + 2\varphi = 3 + \sqrt{5}$. Ga maar na. Maar ook de afstand van twee tegenover elkaar liggende grensvlakken is te berekenen. Je hebt dan meteen de diameter van de ingeschreven bol van de dodecaëder. Bereken bijvoorbeeld de lengte van de steunvector van het zwaartepunt van pentagon $V_1V_2FB_1E$. Ga na dat die steunvector

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4\varphi+3 \\ 0 \\ 3\varphi+1 \end{pmatrix} \text{ is met een lengte van } \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}.$$

(Zie voor een gedetailleerde uitwerking de appendix op de website). De afstand van twee tegenover elkaar liggende grensvlakken en de diameter van de ingeschreven bol is afgerond 4,454. Nu kun je met behulp van twaalf even grote vijfzijdige piramiden met een gemeenschappelijke top in de oorsprong de inhoud uitrekenen.^[2]

Cilinderspiralen

Als we de dodecaëders op elkaar stapelen via de grensvlakken, zie figuur 8, dan kun je gemakkelijk nagaan hoeveel dodecaëders je nodig hebt om aan de hoogte van 191 meter te komen van de vergelijkbare Turning Torso. Voor het gemak kiezen we even een meter als eenheid. Later zul je een vergroting moeten maken om tot een woontoren te komen bestaande uit negen of tien dodecaëders. Zo'n stapel dodecaëders past ook mooi in een cilinder. Elke dodecaëder heeft tien hoekpunten op die cilinder liggen. Je kunt nu allerlei spiralen verzinnen en de lengte ervan uitrekenen. Je moet hierbij wel de diameter van zo'n cilinder uitrekenen. Maar hoe doe je dat? Merk op dat de vijf hoekpunten E, F, R_2, O_2 en L_2 op dezelfde cirkel (nu niet in een horizontaal vlak) liggen, zie figuur 11. We weten, zelf gekozen, dat $EF = 2\varphi$. Laten we het middelpunt van deze cirkel M noemen en het midden van EF punt N .



figuur 11

Dan weten we van de rechthoekige driehoek ENM dat EM een straal is, $EN = \varphi$ en $\angle EMN = 36^\circ$.

Voor de straal vinden we dan $\frac{\varphi}{\sin(36^\circ)} \approx 2,75$.

Een uitdaging voor jou om een geschikte spiraal te vinden met bijbehorende lengte. Het is aan jou of de leerlingen om uit te zoeken waar je de verticale kern van de woontoren gaat plaatsen.

Tot slot

Het is wel aan te bevelen om met een model van een dodecaëder te werken, op internet vind je de bouwplaten. Met behulp van etalagekarton krijg je een redelijk stevige constructie. Het is handig om de letters van de hoekpunten op het model te noteren. Nog even dit, het werken met vectoren is natuurlijk een activiteit voor B-leerlingen. Ik eindig met een citaat van Philip Jodidio, auteur van het Taschenboek *Calatrava*: 'Ongeacht de rol die wis- en bouwkunde spelen in het werk van Santiago Calatrava, zijn het toch vooral kunst en emotie die hem ertoe aanzetten bouwwerken te creëren die de doodgewone berekening van krachten ver te boven gaan.'

Voor de appendix bij dit artikel:

 vakbladeuclides.nl/1003turningtorso

Noten

- [1] Philip Jodidio, *Calatrava* (2016). Uitgeverij Taschen
- [2] Jansen, J. (2021). Om -en ingeschreven bollen. *Euclides*, 96(6), 19-22.

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde. Hij is sinds 2014 met pensioen.
E-mailadres: jacques.jansen@wxs.nl.

Vijf vragen aan....

Lieke de Rooij en Wobien Doyer

In *Euclides* 99-6 stond de puzzel 'De schaduw blijft even groot' van Lieke de Rooij en Wobien Doyer. Dat blijkt nu hun allerlaatste puzzel geweest te zijn. Twaalf jaar hebben Lieke en Wobien de puzzelrubriek verzorgd. Samen componeerden ze de puzzels, keken de ingestuurde oplossingen na en schreven daar een kort verslag over. Namens de redactie en alle puzzelaars: Lieke en Wobien, dank jullie wel!



Wobien en Lieke



1 Hoe ben je in de wondere wereld van de wiskundepuzzels terecht gekomen?

Wobien

Toen ik afgestudeerd was en begon aan mijn eerste leraarsbaan werd ik lid van de NVvW en kreeg ik ook *Euclides*. Daarin stond de rubriek recreatie van dr P.G.J. Vredenduin. Ik vond dat hele leuke puzzels, en vaak loste ik ze op. Het was niet de bedoeling dat je je uitwerking instuurde. Later werd de rubriek gemaakt door Jan de Geus. Die vroeg wel om inzendingen, die hij gebruikte in zijn uitwerkingen. Ik vond dat leuk omdat het soms tot discussies leidde. Vanaf het eerste nummer van jaargang 78 nam Frits Göbel het over. Nu werden punten uitgedeeld aan inzenders met een ladderstand. Ik werd regelmatige inzender, met vaak discussies over het probleem, en over daaraan rakende problemen.

Lieke

Eigenlijk al op de middelbare school waar mijn wiskunde docent LePoeter stimuleerde om lid te worden van

Pythagoras. En dat was vanaf de 2^e jaargang. Ik heb ze nog steeds. En veel later toen ik les ging geven door de puzzels van Frits Göbel. Dat leidde vaak tot het bedenken van extra vragen.



2 Welke puzzel die je gemaakt hebt vond je de allermooiste?

Wobien

Dat is lastig kiezen, maar ik kies een vrij recente puzzel: de haakse-hoeken methode, een heel bijzondere grafische methode om de nulpunten te vinden van n -de graads polynomen. Lieke stuurde me een opzetje, gebaseerd op een website die ze ergens had gevonden, en ze stelde voor daar een puzzel van te maken. Het gaat te ver om het hier precies te beschrijven, zie daarvoor de inleiding van de uitwerking van puzzel 99-4 haakse-hoeken methode op de website. Daar wordt beschreven hoe een n -de graads polynoom een haakse-hoeken voorstelling definieert en hoe je daarmee (met behulp van b.v. GeoGebra) nulpunten van de polynoom kunt vinden.

De manier waarop dat gaat was voor mij volkomen nieuw, en ik probeerde er grip op te krijgen. Omdat de methode voorschrijft steeds een kwartslag te draaien dacht ik aan het complexe vlak, maar dat maakte het niet duidelijker (ik zag later dat ook sommige inzenders dit probeerden). De vragen die we stelden culmineerden natuurlijk naar een bewijs dat de methode juist is. We gaven daarvoor wat inleidende vragen, die leidden naar een oplossing met een flinke dosis algebra. Later, toen we al bezig waren de inzendingen na te kijken, vonden we alsnog een heel ander bewijs, bijna zonder algebra en veel dichter bij de haakse-hoeken methode. Niemand had dat gevonden, dus in de uitwerking gaven we eerst de versie met algebra, en daarna de (in mijn ogen veel elegantere) oplossing als toegift. Een puzzel vol verrassingen dus!

Lieke

Geen idee. Ik kies de laatste: De schaduw blijft even groot. Dit idee was zoals wel vaker een variatie op iets wat ik op internet vond en voldeed aan al onze doelstellingen:

- Er zijn vragen van verschillende moeilijkheidsgraad: geschikt voor scholieren en ook met meer uitdaging voor de diehards.
- Liefst zijn er meerdere mogelijkheden om het op te lossen.
- Het mag niet makkelijk op internet of in boeken te vinden zijn, dus liefst origineel.
- En het moet een beetje recreatief zijn.



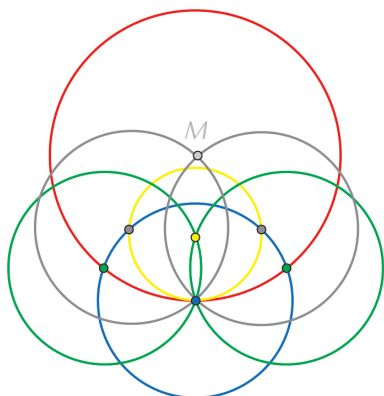
3 Welke wiskundige stelling spreekt je het meeste aan?

Wobien

Weer moeilijk kiezen. Maar ik moet naar aanleiding van de vraag steeds denken aan mijn vroege ervaringen met meetkunde. In de eerste klas hbs kwam ik in aanraking met bewijzen in de meetkunde, en ik vond het prachtig, bijvoorbeeld de bijzondere lijnen in een driehoek! Het bewijs dat de hoogtelijnen, bissectrices en de zwaartelijnen in een driehoek steeds alle drie door hetzelfde punt gaan sprak me enorm aan! (dit met excuses aan alle prachtige stellingen die ik later nog ben tegengekomen).

Lieke

Verschillende 'stellingen' van Ramanujan (hij had ze aanvankelijk niet bewezen omdat het door zijn God aan hem werd openbaard). Het zijn vaak verrassende stellingen, maar met ingewikkelde bewijzen. Maar ook mooi en wat eenvoudiger: Constructies met alleen een passer. Een mooi voorbeeld, zie figuur 1. Gegeven de rode cirkel (zonder het middelpunt M). Stelling: met zes cirkels kun je het middelpunt construeren met alleen een



figuur 1

passer. En dan nog een puzzeltje (hoewel dit op internet is te vinden): Hoe en waarom? En welke afmetingen mag de blauwe cirkel hebben? Het bewijs kan op meerdere manieren, zoals analytisch of met inversie in een cirkel.



4 Welk kunstwerk moet volgens jou door elke wiskundeleraar gezien worden?

Wobien

Dan denk ik meteen aan het werk van Escher. Misschien wat overbekend, maar de manier waarop hij in talloze werken ons steeds weer op het verkeerde been zet vind ik geweldig!

Lieke

Het schilderij van Rafael *De school van Athene* uit de renaissance, zie figuur 2. Hierin is naast perspectief van zowel rechte als kromme lijnen veel geschiedenis van de oude wiskunde te zien. We zien een samenkomst van beroemde Griekse filosofen en geleerden uit de oudheid die debatteren en onderwijs geven. We zien o.a. Pythagoras, Euclides en Archimedes. Er is een tweedeling links en rechts die de verschillende wereldbeelden uitdrukken: links de wereld van Plato en het idealisme en rechts die van Aristoteles en het empirisme. Meer informatie is op internet (b.v. Wikipedia: The school of Athens) te vinden.



figuur 2

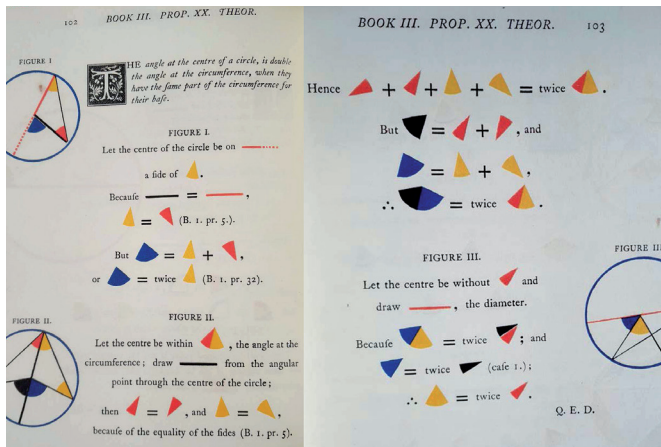


5 Keuzevraag: verzin zelf de vraag en het antwoord :)

Lieke

Welk wiskundeboek zou elke wiskundeleraar moeten hebben? *The Elements of Euclid* van O. Byrne.

Een prachtig 'Taschenbuch' met definities en stellingen uit >



figuur 3

de eerste zes boeken van 'De Elementen' van Euclides. In kleurige plaatjes worden stellingen uit de meetkunde en getaltheorie bewezen. In het voorbeeld (middelpuntshoek = 2 x omtrekhoeks), zie figuur 3, is al eerder de stelling van de buitenhoek van een driehoek bewezen.

Wobien

De vraag aan mijzelf is: Hoe was dat, twaalf jaar puzzels maken met je zus? Geweldig leuk, ik heb er enorm van genoten! Onze samenwerking was altijd prima, en we



Wobien en Lieke met hun laatste Euclides-puzzel

vulden elkaar goed aan. En ook belangrijk: de samenwerking met de redactie was prima. En dan waren er onze trouwe inzenders en ook de af-en-toe inzenders: wat heerlijk dat die enthousiast hun oplossingen met ons deelden. Het gaf ons veel feedback om te weten of we op de goede weg waren. Veel dank aan jullie allemaal!

Een overgeleverd fragment

Parmenides had in zijn jeugd een bal, een blauwe bal met sterren, een heelal. Die bal verklaart in retrospect misschien dat hij zijn wereld als een 'metric space' (volledig, isotroop en homogeen), lees: als een bal, een bolvorm, is gaan zien. De wereld is een bol, een ruimte-tijd als eenheid opgevat. Alles is één, en wat er is, dat is. Niks raakt er kwijt,

Paul Bezembinder



Het gedicht Een overgeleverd fragment is afkomstig uit de bundel *Duizelingen* van Paul Bezembinder. Paul studeerde theoretische natuurkunde in Nijmegen. In zijn poëzie zoekt hij in vooral klassieke versvormen en thema's naar de balans tussen serieuze poëzie, pastiche en smartlap.

Kabouters

Vijf kabouters zitten in een kring. Ze hebben allemaal een rode, blauwe of groene muts op. De kabouters kunnen hun eigen muts niet zien, maar die van de andere kabouters wel. Ze weten dat iedere kleur minimaal één keer voorkomt. De kabouters spreken altijd de waarheid en kunnen perfect logisch redeneren.

Kabouter A zegt: 'C kan niet afleiden welke kleur haar muts heeft.' Vervolgens zegt kabouter B: 'Dat wist ik niet, maar ik wist wel dat D niet kan afleiden welke kleur haar muts heeft.' Ten slotte zegt kabouter C: 'Nu weet ik dat mijn muts rood is.'

Hoeveel kabouters hebben een rode muts op?

Inzenden oplossingen

Stuur je oplossing uiterlijk 11 januari naar euclides@wiskundeolympiade.nl. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een cadeaubon van € 20,-.

Terugblik puzzel nr. 1

De opgave van vorige keer was om te bepalen hoeveel vragen Lars goed beantwoord heeft bij een wiskunde-wedstrijd. Zoals door sommige inzenders werd opgemerkt, is het opvallend dat er niet gevraagd werd naar de score die Lars gehaald heeft, maar slechts naar het aantal goed beantwoorde vragen. Als met de gegeven voorwaarden zorgvuldig alle mogelijke scores zijn verzameld, wordt echter duidelijk waarom. Er zijn namelijk 31 unieke scores om te verdelen over 28 leerlingen. Omdat we weten dat Lars als vijfde is geëindigd, heeft hij de 5^e, 6^e, 7^e of 8^e van deze scores gehaald. Uit de samenstelling van deze scores blijkt dan dat in alle vier de mogelijkheden Lars zeven vragen goed had, maar een verschillend aantal vragen fout. We kunnen dus wel bepalen hoeveel vragen Lars goed heeft beantwoord, maar niet zijn exacte score.

Met dank aan oud-olympiadedeelnemers Aimée Jacobs en Kati Overbeeke voor het nakijken van de inzendingen.

De juiste oplossing (inclusief toelichting) is te vinden op de website, samen met de namen van de twaalf inzenders die deze oplossing gevonden hadden. De cadeaubon van deze editie gaat naar Auke Smid.

 vakbladeuclides.nl/1003olympiadepuzzel

Nederlandse Wiskunde Olympiade



De nieuwe jaargang van de Nederlandse Wiskunde Olympiade start in januari met de eerste ronde op alle deelnemende scholen. Elke school kan zelf een geschikte dag en tijd kiezen in de periode van 20 t/m 31 januari 2025. Aanmelden kan tot 9 januari 2025.

Zie www.wiskundeolympiade.nl voor meer informatie.

Winnaars Nederlandse Wiskunde Olympiade 2024

4^e klas en lager

- | | |
|--------------------|--------------------------------------|
| 1 Naïm Hofstede, | thuisonderwijs, Makkum |
| 2 Sofie Steenberg, | Praedinius Gymnasium,
Groningen |
| 3 Dennis Zhang, | Lorentz Casimir Lyceum,
Eindhoven |
| 4 Alina Ju, | Stedelijk Gymnasium Leiden |
| 5 Boaz Brouwer, | Sint Michaelcollege Zaandam |

5^e klas

- | | |
|--------------------|--|
| 1 Josiah 't Hart, | Willem Lodewijk Gymnasium,
Groningen |
| 2 Leonard Jonasse, | Utrechts Stedelijk Gymnasium |
| 3 Lisa Meij, | Christiaan Huygens College,
Eindhoven |
| 4 William Yang, | Porta Mosana College,
Maastricht |
| 5 Roel Alkemade, | Stedelijk Gymnasium Breda |

6^e klas

- | | |
|-----------------------|--|
| 1 Lucas van de Sande, | Driestar Gouda |
| 2 Wendy Huang, | Christiaan Huygens College,
Eindhoven |
| 3 Chenyu Lin, | Rijnlands Lyceum, Oegstgeest |
| 4 Nick Mcpherson, | Coornhert Gymnasium, Gouda |
| 5 Robert Stepanyan, | Trevianium, Sittard |

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Hugo Duivesteijn, voorzitter
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck
Constantijn Tilanus

Inzenden bijdragen

Tom Goris,
Molenbochtplein 38, 5014 EJ Tilburg
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailing-services.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvww.nl

Voorzitter

Wim Caspers
E-mail: w.caspers@nvvw.nl

Secretaris

Els Franken
E-mail: e.franken@nvvw.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06 21 50 96 79 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau, Tel. 0345 531 324
E-mail: evers.rechtspositie@gmail.com
Vermeld bij je contact je lidnummer en telefoonnummer.

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt met ingang van 1 augustus 2023

- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 72,50
- leden, maar dan zonder Euclides: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 75,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen Euclides niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 90,00
Instituten en scholen: € 160,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal,
Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2025

Ma
20/02
31/01
Vr

LANDELIJK

Wiskundeolympiade: eerste ronde op de scholen

03/02
21/02

LANDELIJK

Scholen kiezen zelf een dag
Op de scholen: Onderbouw Wiskundedag (3hv) en
vmbo Wiskundedag (3 vmbo-gt)
Organisatie: Freudenthalinstituut

Vr
14/03

LANDELIJK

Wiskundeolympiade:
tweede ronde op de universiteiten

Do
20/03

LANDELIJK

Op de scholen: W4Kangoeroewedstrijd, wereldwijde
wiskundewedstrijd
Organisatie: Stichting Wiskunde Kangoeroe

Vr
04/04
Za
05/04

NOORDWIJKERHOUT

Nationale Wiskundedagen
Organisatie: Freudenthalinstituut

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook vakbladeuclides.nl

JAARGANG 100

Nr.	Verwachte verschijningsdatum	deadline
4	29 januari 2025	11 november 2024
5	12 maart 2025	30 december 2024
6	30 april 2024	24 februari 2025
7	18 juni 2025	20 april 2025

CASIO®



Opvolger van:
fx-82MS
fx-82EX

**Voor Nederlands
curriculum gemaakt**

Nieuw vanaf schooljaar 2025/2026: de 13e editie van Getal & Ruimte havo/vwo bovenbouw!

Maak kennis met de vertrouwde kwaliteit van Getal & Ruimte, nu vernieuwd voor havo/vwo bovenbouw. Wat goed was, hebben we behouden en verder verbeterd. Ontdek de belangrijkste vernieuwingen:

- **Doorlopende leerlijn:**
Je leerlingen ervaren een naadloze aansluiting op de 13e editie van de onderbouw. Zo blijft de leerervaring consistent.
- **Bewezen didactiek, nog beter:**
Leerlingen activeren hun voorkennis waar nodig en met extra formatief evalueren.
- **Flexibel in tempo en niveau:**
Uitgebreide differentiatiemogelijkheden om in te spelen op de behoeften van elke leerling.
- **Compleet:**
Geschikt voor havo en vwo, met wiskunde C, A, B én D.
- **Jij kiest!**
Verkrijgbaar als LiFo/FLEX of als losse hardcoverboeken.



Vraag je gratis beoordelingspakket aan op
getalenruimte.noordhoff.nl

