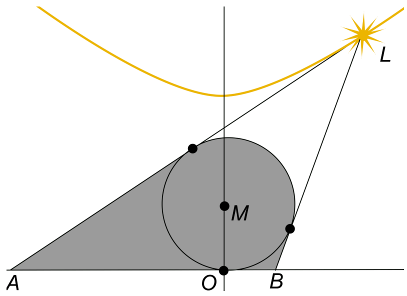
Puzzel 99-6 **Lieke de Rooij en Wobien Doyer**

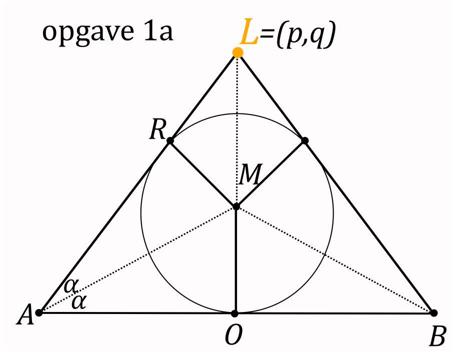
De schaduw blijft even groot.



Een cirkel met straal 1 raakt de *x*-as in de oorsprong *O*(0,0) van een assenstelsel.
Middelpunt = *M*(0, 1). Ergens in het *xy*-vlak boven de cirkel ($y > 2$) hangt een lampje *L(p,q)* dat een schaduw van de cirkel werpt op de *x*-as van lengte ***d=AB***.
Het lampje kan zich voortbewegen langs een baan boven de cirkel, zodanig dat *d=AB* altijd even lang blijft.
De vraag is wat de baan (meetkundige plaats) van dat lampje is.
Als $q \leq 2$, (de *y*-coordinaat van *L)* is er geen sprake van een schaduw.
Maar ook in dat geval bekijken we de afstand *d* tussen de snijpunten van de raaklijnen uit *L* aan de cirkel met de *x*-as. Dus ook *d=AB.* Deraaklijnen driehoek noemen we **Δ *BAL.***
We zouden in deze puzzel in tegenstelling tot wat we meestal doen meer punten geven naarmate je oplossing eenvoudiger is. Wat “eenvoudig “ is, bleek echter moeilijk te bepalen, dus dat hebben we niet gedaan. Dit heeft er wel toe geleid dat meerdere inzenders meerdere oplossings methoden hebben gebruikt. Bart Dopheide noemde dat **“replay value” en schreef dat dat het puzzelen leuker maakt.**
Het kan soms met “gewone” vlakke meetkunde, zoals gelijkvormigheid, berekening oppervlak en omtrek van een driehoek en de stelling van Pythagoras zodat de opgaven dan ook bruikbaar zijn in de onderbouw. Maar het kan ook met gebruik van goniometrie: de formule voor de tangens van een dubbele hoek. En/of met gebruik van analytische meetkunde: snijpunten berekenen en de afstands-formule van een punt tot een lijn. Ook met hulp van poollijnen.
We kozen voor de gewone vlakke meetkunde. (behalve in opgave 1a)
We zullen aantonen dat de baan van *L* in alle gevallen een kegelsnede is met vergelijking $(\frac{1}{4} d^2 - 1)y^2 - (d^2 - 2)y + d^2 = x^2$. De vorm hangt af van *d.*

Bij opgaven 1, 2 en 3 geldt: ***d=AB*=4.**

Opgave 1a: Het lampje staat op de *x*-as: *L*(0, *q*). Bepaal *q*= *y*-coördinaat van *L*.
We geven twee verschillende uitwerkingen:



1) Eigenlijk hebben we hiervoor geen assenstelsel nodig.
d=4, *AO*=*BO*=*b*=2, ∠*A*=2*α* en ∠*OAM*= *α* en *MO*=1.
We gebruiken de formule voor de tangens van een dubbelehoek:

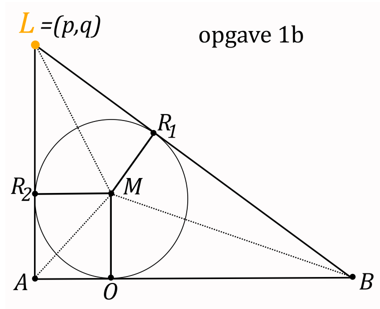
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)} = \frac{2/\tan(\alpha)}{1/\tan^2(\alpha)-1}$$

en $1/\tan(\alpha) = AO/MO = 2/1 = 2.$

Dan geldt: $\tan(2\alpha) = 2*2/(2^2-1) = 4/3$.
En met *AO*=2 geldt $q/AO = q/2 = 4/3$. Dus ***q=8/3*** en het lampje ligt in ***L*(0, 8/3).**

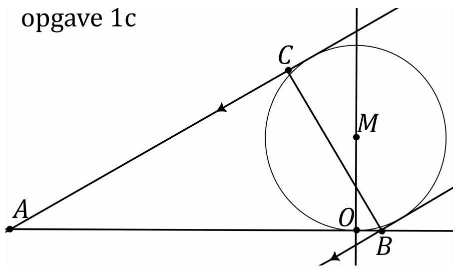
2) Met alleen gebruik van gelijkvormigheid en Pythagoras, maar iets meer rekenwerk:
$\Delta\, AOL \sim \Delta\, MRL$. Dan met $LM= q-OM=q-1$, $MR=1$, $AO=2$ en met Pythagoras in $\Delta\, BAL$:
$LA=\sqrt{(q^2+2^2)}$ geldt: $LM/MR=LA/AO \rightarrow (q-1)/1=\sqrt{(q^2+4)}\ /2$, dus $2(q-1)= \sqrt{(q^2+4)}$
Geeft $4(q-1)^2 = 4q^2 -8q+ 4 =\pm\, (q^2+4)$ dus $3q^2 - 8q=0$ en volgt $\boldsymbol{q=8/3}$ (ook $q=0$).

Opgave 1b: Idem als $L(-1, q)$.



Uitwerking met gonio: $A(-1,0)$ dus met $d=AB=4$: $B(3,0)$ en $\angle B=2\beta$ zodat $\tan(\beta)=1/3$. En dan $\tan(2\beta)=2*3/(3^2-1)=6/8=3/4=q/4$, dus $\boldsymbol{q=3}$.
Uitwerking zonder gonio: In $\Delta\, BAL$ geldt met Pythagoras:
$AL^2+AB^2=LB^2$ dus $q^2+4^2=(BR_1+LR_1)^2$.
En $BR_1=BO=3$ en $LR_1=LR_2 = q- AR_2=q-1$.
Dus $q^2+4^2=(3+q-1)^2$ geeft $q^2+16=(q+2)^2=q^2+4q+4$ geeft $4q=12$ dus $\boldsymbol{q=3}$.
De driehoek BAL is dus de bekende 3-4-5 driehoek.

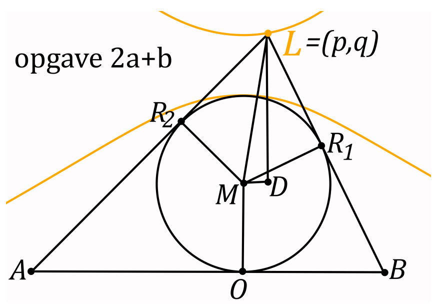
Opgave 1c: Het lampje kan in principe oneindig ver weg staan, zodat de schaduw $d=AB$ nog steeds lengte 4 heeft. De raaklijnen aan de cirkel door A en B zijn dan evenwijdig. Bereken de hoek van die raaklijnen met de x-as.



Uitwerking: Dit kan ook met gebruik van de tangens van een dubbele hoek, maar korter:
Trek twee evenwijdige raaklijnen aan de cirkel. Deze snijden de x-as in A en B.
Trek een lijn door B loodrecht op de raaklijnen. Snijpunt met de andere raaklijn is C.
Dan is BC even lang als de afstand tussen de raaklijnen. Dus $BC=2$.
Nu moet gelden $AB=4$. Dus geldt $\sin(\angle A)=BC/AB =2/4$ en dus $\angle \boldsymbol{A=30^{o}}$

In opgave 2 beweren we dat de baan van het lampje een kegelsnede is.
Dus een hyperbool, ellips, parabool of cirkel.

Opgave 2a: Kun je bewijzen dat met $d=4$ de baan van het lampje $L(p, q)$ (*L staat boven de cirkel*) een tak van een hyperbool is?
2b: Bepaal de vergelijking van die hyperbool.
We zullen de vergelijking uitdrukken in p, q en d *en* daarmee de baan van L bepalen.
Ook daarvoor zijn verschillende mogelijkheden, zoals:
Analytisch:Stel de vergelijkingen op van de raaklijnen door twee punten $A(a,0)$ en $B(a+4,0)$ en bepaal het snijpunt L als functie van *p, q* en *d.*

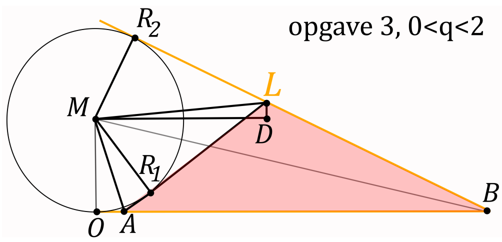


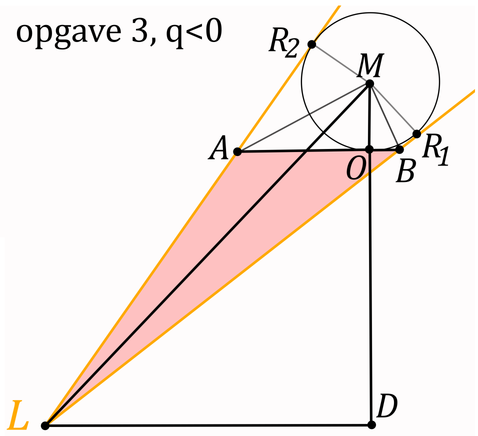
Maar makkelijker en met minder wiskunde kennis:
We gebruiken slechts oppervlak berekening en Pythagoras.
We voegen een punt D toe met $\boldsymbol{D=(p,q-1)}$ zodat je de rechthoekige driehoek LMD krijgt.

Om vast te stellen dat het om een hyperbool gaat heb je natuurlijk wel kennis van kegelsneden en hun functies nodig.

Uitwerking opgave 2a+b ($q>2$):
We berekenen oppervlak Δ *BAL* op twee manierenen: Weer met $L(p,q)$ en d=AB.
Berekend vanuit *L:* **Opp.Δ *BAL***$=\frac{1}{2}AB*q$ = **$\frac{1}{2}dq$.** Maar ook:
Berekend vanuit *M*: **Opp. Δ *BAL*= $s*MO=s$,** met s=halve omtrek en $MO=1$.
Dus **$\frac{1}{2}dq$ = s**$=AO+BO+LR=4+LR=AB+LR$, dus $LR=s-AB=s-d$ en $s=\frac{1}{2}dq$. $MD=p$ en $LD=q-1$.
Dan op twee manieren *ML* berekenen met Pythagoras in ΔLMR en ΔLMD met $D=(p,q\text{-}1)$.
Gelijkstellen geeft: $(\frac{1}{2}dq-d)^2+1=(q-1)^2+p^2 \rightarrow \frac{1}{4}d^2q^2-d^2q+d^2+1=q^2-2q+1+p^2$ dus
$(\frac{1}{4}d^2-1)q^2-(d^2-2)q+d^2=p^2$. In het *xy*-vlak: **$(\frac{1}{4}d^2-1)y^2-(d^2-2)y+d^2=x^2$**.
Met d=4 wordt dit: **$3y^2-14y+16=x^2$.**
Of: $3(y-7/3)^2-x^2=49/3-16=1/3$ of **$(y-7/3)^2-x^2/3=1/9$** of **$(3y-7)^2-3x^2=1$.**
En dat is inderdaad een hyperbool met horizontale as bij $y=7/3$ en verticale as $x=0$.
Asymptoten met helling $y/x=\pm/\sqrt{3}$. **Het centrum van die hyperbool ligt in (0,7/3), dus omdat we *L* boven de cirkel kiezen (y>2) krijgen we alleen de bovenste tak van de hyperbool.**

Opgave 3: Wat is de baan van het lampje als het onder de *x*-as staat?
Uitwerking opgave 3 als $q<2$:





We zullen laten zien dat je dan dezelfde vergelijking krijgt als bij opgave 2 met $q>2$.
Nu geldt dat de cirkel geen ingeschreven cirkel is van Δ *BAL* , maar een aangeschreven cirkel.
Daarom is het niet vanzelfsprekend dat we met dezelfde techniek weer dezelfde vergelijking krijgen.
Dat blijkt wel zo te zijn: Het kan door de poollijnen van *A* en *B* te bepalen, maar ook met gewone vlakke meetkunde. Maar nu geldt niet dat opp. Δ $BAL=s$ zoals bij $q>2$.
Onderstaand bewijs is wellicht bekend: Oppervlak van een driehoek met aangeschreven cirkel = $s-$ lengte van de rakende driehoekszijde.
Hier dus **$s-AL$ ($0<q<2$)** en **$s-d$ ($q<0$)**.

Bewijs als $0<q<2$: Opp. $\Delta BAL=s-AL$. En als $q<0$: opp. $\Delta BAL=s-AB=s-d$.
$0<q<2$: We berekenen opp.Δ *BAL*=opp.(*MABL*– *MAL*).
Opp. $MABL=\frac{1}{2}(MO*AB+MR_2*BL)=\frac{1}{2}(d+BL)$. (*immers* $MO=MR_2=1$ *en* $AB=d$).
Opp.Δ $MAL=\frac{1}{2}MR_1*AL=\frac{1}{2}AL$. (*Ook* $MR_1=1$).
Verschil=**opp. Δ *BAL***$=\frac{1}{2}(d+BL)-\frac{1}{2}AL)=\frac{1}{2}(d+BL+AL)-AL$ = **$s-AL$.** (q.e.d.)
Als $q<0$: Analoog: **Opp.Δ *BAL***=opp. *MALB*– opp.$\Delta BAM=\frac{1}{2}(AL+BL)-\frac{1}{2}AB$ =**$s-d$.**

We gaan nu in beide gevallen de vergelijking opstellen door ML op twee manieren te berekenen en aan elkaar gelijk stellen. We krijgen dan weer dezelfde vergelijing.

$0<q<2$: *(linker plaatje)* Daar geldt : Opp.opp.$\Delta BAL=s-AL$, $AR_1=OA$, $LR_2=LR_1$ en $BO=BR_2$.
$BO+BR_2=(AB+AR_1)+(BL+LR_1)=d+BL+AL=2s$, en $BO=BR_2$ dus $s=BO$ → $\mathbf{OA=s-d}$.
Dan dus opp.$\Delta BAL=s-AL$, dus $AL=s-$opp.$\Delta BAL=s-\frac{1}{2}dq$ → $\mathbf{AL=s-\frac{1}{2}dq}$
Met Pythagoras in ΔMLR: $ML^2=RL^2+MR^2=RL^2+1$.
Bepaal RL: Met hulp van $\mathbf{AL=s-\frac{1}{2}dq}$ **en** $\mathbf{OA=s-d}$**:**
$R_2L=R_1L=AL-AR_1=AL-OA=(s-\frac{1}{2}dq)-(s-d)=d-\frac{1}{2}dq$ → $\mathbf{RL=d-\frac{1}{2}dq}$
Invullen: $ML^2=RL^2+1=(d-\frac{1}{2}dq)^2+1=\mathbf{d^2-qd^2+q^2(\frac{1}{2}d)^2+1}$
Met Pythagoras in ΔMLD: $ML^2=LD^2+MS^2=(q-1)^2+p^2=\mathbf{q^2-2q+1+p^2}$.
Gelijkstellen geeft $d^2-qd^2+q^2(\frac{1}{2}d)^2+1=q^2-2q+1+p^2$ →
$\mathbf{(\frac{1}{4}d^2-1)q^2-q(d^2-2)+d^2=p^2}$. Dus $\mathbf{(\frac{1}{4}d^2-1)y^2-(d^2-2)y+d^2=x^2}$.
Met $d=4$: $3y^2-14y+16=x^2$. Dit is inderdaad hetzelfde als bij opgave 2 met $q>2$.

$q<0$: (*rechter plaatje*) Analoog met opgave met $0<q<2$: $s=LR_1=LR_2$.
En Opp.Δ $BAL=s-AB=\mathbf{s}-d$ en Opp.Δ $BAL=-\mathbf{\frac{1}{2}dq}$ *(hier q negatief).*
Dan $s-d=-\mathbf{\frac{1}{2}dq}$, of $\mathbf{s=d-\frac{1}{2}dq}$.
Met Pythagoras in Δ MLR: $ML^2=1+LR^2=1+s^2=\mathbf{1+(d-\frac{1}{2}dq)^2}$.
Met Pythagoras in Δ MLD: $\mathbf{ML^2=p^2+(-q+1)^2}$. Hier $D=(0,q)$ met q negatief. $DM=-q+1$.
Gelijk stellen en haakjes wegwerken: $1+d^2-d^2q+\frac{1}{4}d^2q^2=p^2+q^2-2q+1$ →
$\mathbf{(\frac{1}{4}d^2-1)q^2-(d^2-2)q+d^2=p^2}$ en in xy-vlak: $\mathbf{(\frac{1}{4}d^2-1)y^2-(d^2-2)y+d^2=x^2}$.
Dit is inderdaad weer dezelfde vergelijking.

Opgaven 4 a, b en c: Bepaal de lengte van *d* waarbij de kegelsnede een hyperbool, een parabool of een ellips is.

Uitwerking opgaven 4: Hiervoor gebruiken we de eigenschappen van een kegelsnede en de bijbehorende formules van de kegelsneden:

We vonden in alle gevallen de vergelijking $\mathbf{(\frac{1}{4}d^2-1)y^2-(d^2-2)y+d^2=x^2}$.

Mits $d\neq 2$ kunnen we dit herleiden tot: $$(y-\frac{2d^2-4}{d^2-4})^2-\frac{4x^2}{d^2-4}=\frac{16}{(d^2-4)^2}$$

4a: Als $\mathbf{d>2}$ is zie je in de herleidde vergelijking **een hyperbool.**

4b: Als $d=2$ gebruiken we de eerste vergelijking en vullen in $d=2$.
De coefficient van y^2 is 0.
Dat geeft: $-2y+4=x^2$, of $\mathbf{y=2-\frac{1}{2}x^2}$. Een parabool met maximum in (0,2).

4c: Als 0<*d*<2: Dan geldt: $\frac{4}{d^2-4}<0$ en dus $\frac{4}{4-d^2}>0$

We krijgen dan $$(y-\frac{2d^2-4}{d^2-4})^2+\frac{4}{4-d^2}x^2=\frac{16}{(d^2-4)^2}$$

En alle drie de delen zijn positief, dus dit is een ellips met top in (0,2).

Opmerking: De grafieken van de kegelsneden gaan altijd door het punt (0,2) en (±*d,* 0). Maar voldoen dan niet aan de eisen voor de raaklijnen. Daar zitten dus perforaties in de grafieken.

Extra opmerkingen: De methode die we gebruikten om de formules te bepalen is misschien niet altijd zo kort, maar wel met gewone vlakke meetkunde. Alleen om de conclusie te trekken dat het om kegelsneden gaat is kennis van kegelsneden en hun formules nodig.
En als we zouden beginnen met opgave 2a met *d*=4 en *y*>2 hadden we in opgave 1 *p* gewoon kunnen invullen in de formule.
Dat kan ook bij opgave 1c: dan is de limiet y/x, met *x* en *y* nadert tot oneindig te bepalen door in $\mathbf{3y^2-14y+16=x^2}$ alles door x^2 te delen:
Dat geeft $3(y/x)^2-14y/x^2+16/x^2=1$. En met limiet *x* nadert tot oneindig is dat: $3(y/x)^2-0+0=1$, ofwel $3(y/x)^2=1$, dus $y/x=1/\sqrt{3}$, zodat de hoek van de raaklijnen met de *x*-as is 30^o.

En dan tot slot nog wat plaatjes. Merk op dat als $d=\sqrt{2}$ de ellips symmetrisch is in de oorsprong.