

EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELEERAAR

Leerlingen op avontuur met een educatieve
escaperoom over combinatoriek

Normering examens 2004 toegelicht

Afgeleide als veranderingsfactor

Betekenisgericht wiskundeonderwijs

Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

NR.2

JAARGANG 100 OKTOBER 2024

100 jaar

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 100 NR 2



IN DIT NUMMER

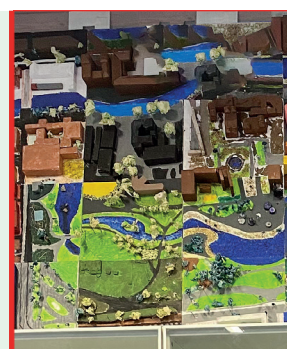
GEEN ONTSNAPPEN AAN ...
EDUCATIEVE ESCAPEROOM
OVER DE GESCHIEDENIS
VAN DE WISKUNDE
Desiree Agterberg

4



'MIJN MOOISTE LES IS
ALS LEERLINGEN ECHT
MET ELKAAR AAN
HET WERK ZIJN.'
INTERVIEW MET
JOANNE DE JAGER
Liesbeth Coffeng

26



NORMERING IS GEEN SINECURE
Jacqueline Wooning
Harco Weemink

8

PIJLENGRAFIEKEN EN DE AFGELEIDE ALS
VERANDERINGSFACTOR
Rogier Bos

14

PUZZEL

17

HONDERRRRD...
Martin Kindt

18

TWEEHONDERD JAAR OPLEIDEN VAN
LERAREN
Harm Jan Smid

21

WIS EN WAARACHTIG

25

ZO SNEL MOGELIJK NAAR DE FINISH
Gerard Koolstra

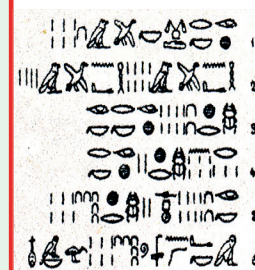
29

BOEKBESPREKING
ZEBRA 69: DE WISKUNDE VAN DE DAMBUSTERS
Jenneke Krüger

32

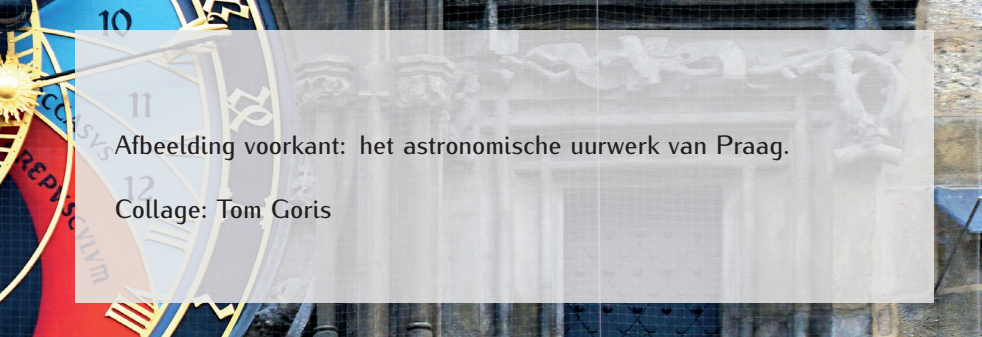
EEN PRAKTISCH-HISTORISCHE
BLIK OP WISKUNDE
DEEL 1 DAGERAAD
Roel van Asselt

34



DE ONDOORZICHTTIGE STAP
DIE GONIOMETRIE LOGISCH MAAKT
Joeri Moulen

38



Afbeelding voorkant: het astronomische uurwerk van Praag.

Collage: Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

BETEKENISGERICHT WISKUNDE- ONDERWIJS IN DE BOVENBOUW

Alexander Schüler-Meyer
Nathalie J. van der Wal

40

VERENIGINGSNIEUWS
NOTULEN NVVW
JAARVERGADERING 2023

44



SERVICEPAGINA

46



Kort vooraf

Deze *Euclides* begint eigenlijk met een cadeau: een educatieve *escaperoom* waar je leerlingen letterlijk en figuurlijk uit moeten zien te komen. Geschikt voor havo 4/5, maar na het lezen van het ontwerpproces zou je zomaar geïnspireerd kunnen raken om zelf aan de slag te gaan. Of om deze *escaperoom* aan te passen of om er zelf een te verzinnen. En als je er een hebt gemaakt waar je heel tevreden over bent: laat het weten, het zou mooi zijn als we in de special, die in de loop van het feestjaar verschijnt, een hele collectie kunnen aanbieden.

De feestartikelen in deze *Euclides* komen van Martin Kindt en Harm Jan Smid. Martin daagt ons uit om sommen te bedenken die als antwoord 100 hebben en Harm Jan gaat tweehonderd jaar terug in de tijd met zijn overzicht van het roerige verleden van de lerarenopleidingen.

Anne van Streun had destijds in 2001 bij het presenteren van zijn oratie *Het denken bevorderen* vast niet gedacht dat Heit en Kees zo'n lange tocht zouden gaan ondernemen. Elf jaar later doken ze weer op in het *Handboek wiskundendidactiek*, weer twaalf jaar later in het artikel van Kees van Bommel in *Euclides* 99-5 en nu, met een beduidend kortere tussentijd weliswaar, in een reactie op het artikel van Kees van Bommel van Gerard Koolstra: Zo snel mogelijk naar de finish, zie bladzijde 29. Wie volgt?

Tom Goris

Geen ontsnappen aan

Educatieve escaperoom over geschiedenis van de wiskunde

Met een educatieve escaperoom duiken leerlingen in een verhaal en lossen onderweg allerlei raadsels en problemen op. Desiree Agterberg ontwierp al meerdere escaperooms en beschrijft in dit artikel haar laatste escaperoom over combinatoriek die in een historische setting speelt. Ook zin om je leerlingen op avontuur te laten gaan? Desiree levert al het benodigde materiaal om haar escaperoom uit te voeren en geeft tips hoe je je eigen educatieve escaperoom maakt.

Inleiding

Een jaar of zeven geleden maakte ik mijn eerste educatieve escaperoom. Het onderwerp was combinatoriek, niveau havo 4/5. De opzet was relatief eenvoudig: enveloppen met combinatoriekopgaven, geprint op drie verschillende kleuren papier, die in drie rondes opgelost moesten worden. Elke ronde leverde een code op en als de leerlingen voor de derde keer de juiste code hadden gevonden, dan was het spel voorbij. Mijn tweede educatieve escaperoom was ook nog vrij rechttoe-rechtaan en ging over functieonderzoek. Daarna waagde ik me aan een complexere uitdaging: het ontwerpen van een escaperoom met een verhaallijn. De verhaallijn is een belangrijk element van een escaperoom. Dit biedt ook veel mogelijkheden voor historische settings: tijdreizen, schatkisten, beschrijvingen van andere culturen en periodes, het centraal stellen van een historisch personage als hoofdpersoon in het verhaal, enzovoort. Mijn derde educatieve escaperoom ging dus over de geschiedenis van de wiskunde. Die verschaft ons bovendien een grote voorraad puzzels en problemen: vraagstukken, recreatief of realistisch, die aanleiding geven tot het ontwikkelen van wiskundige concepten en methodes. Een nagetekend kleitablet of fragment van een stuk papyrus, een stukje handgeschreven wiskunde, een halve pagina uit een oud boek, wellicht in een onbekende taal of met nog onbekende symbolen, de mogelijkheden zijn eindeloos. Ik koos voor het onderwerp talstelsels en bedacht een personage dat losjes gebaseerd is op filmheldin Lara Croft. Het verhaal gaat over een erfenis van een tante die op wereldreis was geweest en zich daarbij tussen allerlei culturen had begeven, waarvan de handschriften ontcijferd moesten worden. De daaropvolgende educatieve escaperoom die ik maakte, ging over worteltrekken.

Daarbij liet ik de spelers via een teletijdmachine à la stripheld Professor Barabas suizen door tijd en ruimte. Mijn meest recente ontwerp ging wederom over iets historisch: de geschiedenis van de combinatoriek.

Een educatieve escaperoom is een voorbeeld van *gamification* van onderwijs: het inzetten van game-elementen en gamedesign in een 'niet-gameomgeving' om doelgedrag en engagement te bevorderen. Er zijn nog veel meer manieren om dat te doen, van eenvoudige kaartspelletjes tot complete bordspellen, simulatiespellen, serious games, enzovoort. Bij spel-elementen kun je denken aan een speldoel, uitdaging, punten, levels, voortgangsindicatie, een verhaallijn of thema, autonomie, feedback en nog veel meer.

Ontwerpproces

Hier neem ik jullie iets meer op detailniveau mee in het ontwerpproces van mijn meest recente educatieve escaperoom, zodat je de werkwijze misschien kunt kopiëren voor een eigen ontwerp van een educatieve escaperoom. Daarbij hoop ik dat je dit kunt toepassen op je eigen niveau. Het kan echt zo simpel zijn als enkele A5-enveloppen met opdrachten erin. Misschien gebruik je nog een paar huis-tuin-en-keukenbenodigdheden erbij (plakband, luciferdoosjes, plastic bekertjes). Als je de smaak te pakken krijgt, kun je altijd een volgende stap zetten door bijvoorbeeld spelelementen te gaan maken in een lasersnijder of 3D-printer of de inzet van andere ict. De eerste stap is de doelgroep vaststellen en bijhorende leerdoelen formuleren. Wat wil je met de educatieve

escaperoom bereiken? Leerdoelen kunnen zeer leerstofgericht zijn, maar ook algemene of vakoverstijgende vaardigheden bevatten. In mijn geval had ik drie leerdoelen op het oog: de spelers zouden iets leren over de geschiedenis van de combinatoriek, in het bijzonder de niet-westerse geschiedenis; daarnaast zouden ze iets leren over de herkomst van ons talstelsel en ten slotte zouden ze nog iets leren op het gebied van combinatoriek. Ik wilde de escaperoom het liefst door verschillende doelgroepen kunnen laten spelen, met wisselende voorkennis. Dat maakte dat ik de combinatoriekopdrachten zelf niet te moeilijk moest maken. Bij spelers die hier al veel van weten, geef ik tijdens het spelen dus heel weinig hulp/hints. Je kunt natuurlijk ook hints integreren in het spel, maar mijn ervaring is dat het nog best lastig is om goed te voorspellen welke hints leerlingen kunnen helpen en dat het beter werkt om ter plekke in te schatten welke groep welke hulp nodig heeft. Bij het spelen van een educatieve escaperoom in de klas, is het heel belangrijk om na het spel een vorm van de briefing te doen: zijn de leerdoelen behaald? Dat maakt het verschil tussen gewoon een leuk spel spelen en iets ervan leren.

“Het is belangrijk om na het spel een vorm van debriefing te doen: zijn de leerdoelen behaald?”

De tweede stap is de structuur van het spel. Ik koos voor een lineair spel in drie delen, waarbij er in elk deel informatie werd verzameld om een overkoepelende puzzel op te lossen. Je kunt ook kiezen voor minder of meer delen, of een groot spel dat geen lineaire structuur heeft, waarin kleine puzzels in willekeurige volgorde kunnen worden opgelost. Een overkoepelende puzzel is ook niet per se nodig; onderdelen (of levels) kunnen ook afgesloten worden, waarna je aan iets nieuws begint. Vervolgens wilde ik bij dit spel wel een thema, maar werd het uiteindelijk niet echt een verhaallijn. Aan het begin van het spel lezen de deelnemers een stuk tekst dat het geheel in een context plaatst en het doel duidelijk maakt, maar in het vervolg van het spel volgen alleen nog opdrachten en geen aanvullingen op het verhaal.

Inhoud en vormgeving

Als de doelgroep, leerdoelen en structuur bedacht zijn, dan pas komt de constructie van de opdrachten zelf. Hierbij is een belangrijke tip: maak gebruik van alle

mogelijke hulpbronnen. Het internet bevat kant-en-klare puzzels, maar ook puzzelgeneratoren voor rebussen, woordzoekers, kruiswoordraadsels, enzovoort. Het is ook ongelooflijk wat ChatGPT of vergelijkbare tools op dit gebied kunnen, maar dat vraagt dan ook weer wat vaardigheid met dit soort software. Denk vooral ook aan (delen van) opdrachten uit het lesboek en lesmaterialen die je eerder zelf hebt gemaakt. Hoe minder wielen je hoeft uit te vinden, hoe meer tijd je hebt om de rest van het voertuig mooi te maken. Ik vond mijn overkoepelende puzzel na een paar minuten zoeken op internet. Let wel: ik wist niet dat ik dit precies zocht, maar ik wilde iets met zeshoeken en het spelen met die zoekterm leverde al snel een geweldige vondst op. Daarna zocht ik in mijn archief van geschiedenis van de wiskunde naar drie authentieke bronnen over talstelsels en combinatoriek, waarbij ik opdrachten kon maken die de juiste getallen zouden opleveren die voor de grote puzzel nodig waren. Het uitwerken van de drie deelopdrachten, inclusief het toevoegen van extra elementen zoals symbolen en kleuren die de spelers zouden helpen om de grote puzzel op te lossen, kostte nog wel even wat denkwerk, maar daar geniet ik als wiskundige en puzzelaar erg van. Als laatste kwam het daadwerkelijk vormgeven en het maken van alles. Ook hier heb ik veel tijd aan besteed, maar ook veel plezier aan gehad. Ik had mezelf ten doel gesteld om iets met de lasersnijder te maken, zie figuur 1, maar dat was op zich niet noodzakelijk. Zoals hopelijk in het vervolg van dit artikel duidelijk wordt, kan het ook volledig met papier en een kleurenprinter.



figuur 1 Houten spelonderdelen, gemaakt met de lasersnijder

Help leerlingen op weg met programmeren

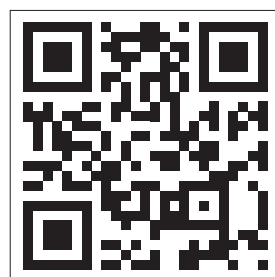
GRATIS

Speciaal hiervoor zijn de gratis lesactiviteiten van TI Coderen!
Leerlingen gebruiken hun eigen grafische rekenmachine voor deze lesjes en leren zo spelenderwijs programmeren.

Leg de basis voor informatica,
robotics en meer!



Start hier met
TI Coderen



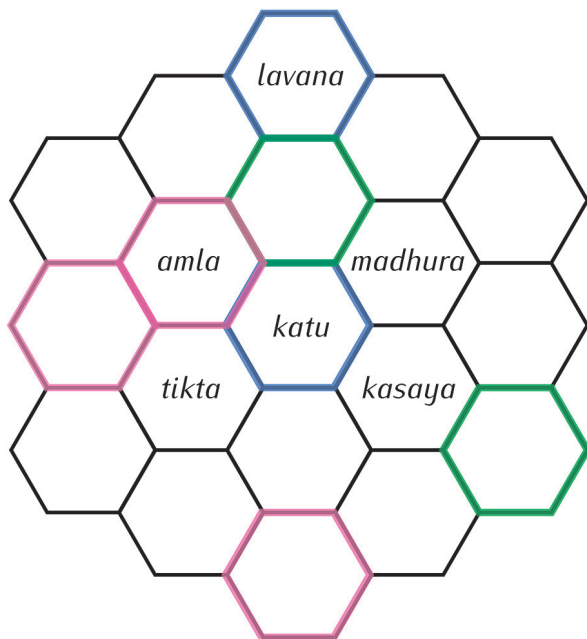
education.ti.com/nl

Het materiaal

Voor het spel heb je genoeg aan drie werkbladen, waar je de verschillende spelonderdelen uitknijpt. Het eerste werkblad bevat de introductietekst en het spelbord, zie figuur 2. Het tweede werkblad bevat 19 fiches, waarvan er zes dubbelzijdig zijn, dus die moet je na het knippen even netjes dubbelvouwen. Het derde werkblad bevat de drie combinatoriekopdrachten, zie figuur 3. De werkbladen zelf vind je op de website.

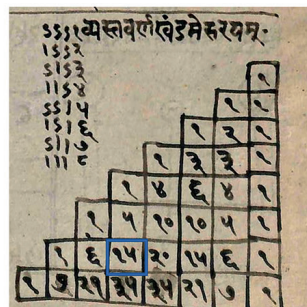
Ik ben niet aanwezig om je hints te geven, maar je mag me altijd mailen. Als je googlet, vind je de oplossing al snel. Ik hoop dat je jezelf het spelplezier gunt om dat pas te doen als je helemaal klaar bent.

Je had vast al wel eens van magische vierkanten gehoord, maar nu ben je op het spoor gekomen van een magische zeshoek. Daarbij is de som van alle rijen in alle richtingen 38. Er zijn verschillende factoren waar rekening mee gehouden moet worden, om de getallen 1 tot en met 19 op de juiste plaats in de magische zeshoek te zetten. De oplossingen van drie zeer oude Indiase telproblemen zullen je daarbij moeten helpen. Om te beginnen de getallen van de dichter, daarna het boek vol medicijnen en als laatste de oceaan van parfums.



figuur 2 Werkblad 1

De getallen van de dichter



Pingala was een Indiase dichter en wiskundige, die leefde bij benadering in de 3e/2e eeuw BCE. Hij schreef de *Chandahāstra*, ook wel bekend als de *Pingala-sutras*. Het plaatje hiernaast is op zijn werk gebaseerd.

Je ziet in de vierkante hokjes een voorloper van het getsysteem dat wij tot op de dag van vandaag nog steeds gebruiken. In de meest rechter kolom staan allemaal enen, en in het bovenste hokje van elke kolom staat ook een één. Vervolgens worden de andere getallen van boven naar beneden gevormd door steeds twee getallen uit de rij erboven bij elkaar op te tellen: het getal er precies boven en het getal daar direct rechts van.

Welke getal staat er in het gekleurde hokje?

Een boek vol medicijnen

De *Suśrutasamhitā* van Susruta is een medische verhandeling. Dit werk dateert bij benadering uit de 6e eeuw BCE.

Bij het samenstellen van geneesmiddelen, wordt er gewerkt met zes verschillende smaken: madhura (zoet), amla (zuur), lavana (zout), tikta (bitter), katu (prikkelend) en kasaya (samentrekkend).

Een medicijn kan bestaan uit één smaak, twee smaken, enzovoorts tot en met alle zes smaken. Als we er van uit gaan dat de onderlinge verhoudingen er niet toe doen, maar het alleen gaat om de combinatie van een of meer smaken, hoeveel verschillende medicijnen zijn er dan in totaal mogelijk?

Een oceaan van parfums

In de *Brhat Samhitā* van Varāhamihira uit de 6e eeuw CE 'Over het mengen van parfum' lezen we dat een parfum gemaakt kan worden door vier substanties te mengen [...] in een verhouding 1 : 2 : 3 : 4. Varāhamihira geeft aan dat er zeer veel verschillende parfums mogelijk zijn en noemt dit *Gandhārnava*, de oceaan van parfums.

Hoeveel parfums zijn er mogelijk als het totaal aantal substanties zes is?

figuur 3 Werkblad 3

De werkbladen kun je downloaden van de site.



vakbladeuclides.nl/1002escaperoom

Over de auteur

Desiree Agterberg is docent/onderzoeker aan de lerarenopleiding wiskunde van de Hogeschool van Amsterdam. Zij werkt zowel aan de tweedegraads- als eerstegraadsopleiding. E-mailadres: d.a.agterberg@hva.nl

Normering is geen sinecure

In normale, rustige, stabiele tijden is normering al geen sinecure. Maar komend uit de roerige coronatijd is het dat zeker niet. Dat de normering nu meer vragen oproept, is dan ook niet vreemd. Met dit artikel willen we wat van die vragen wegnemen. Omdat de normeringsvragen die zijn gesteld betrekking hadden op de havo- en vwo-examens, richt dit stuk zich op deze examens.

Recente geschiedenis

Van 2015 tot en met 2018 was er sprake van een stabiele tijd in het voortgezet onderwijs. Er waren over het algemeen geen grote veranderingen en de vaardigheid van leerlingen was redelijk constant over de jaren.^[1] In 2019 hebben we een nieuwe normeringssystematiek ingevoerd waarin die stabiliteit het uitgangspunt was. In 2020 kregen we te maken met de coronapandemie die veel invloed had op het onderwijs. In 2021 tot en met 2023 hebben we om die reden een aangepaste normering moeten toepassen.^[2] Deze systematiek had tot gevolg dat we gemiddeld over alle vakken onbedoeld iets soepeler zijn gaan normeren. Dat werd zichtbaar in iets hogere N-termen. Omdat de vaardigheid van leerlingen

gemiddeld over alle vakken ook gedaald was,^[3] zag je dit niet terug in de gemiddelde cijfers. Die waren veelal lager dan voor corona. In tabel 1 zie je de getallen voor wiskunde. Je ziet dat de gemiddelde cijfers van 2021 tot en met 2023 behoorlijk fluctueren. Door de aangepaste normering kunnen we niet met zekerheid zeggen of de vaardigheid bij een vak in dezelfde mate fluctueerde.

Met de coronapandemie achter ons, vroeg 2024 om een andere normering. Een normeringssystematiek zoals in 2019 was niet mogelijk omdat er absoluut geen sprake is van stabiliteit zoals je kunt zien in tabel 1. Daarom is een nieuwe systematiek ontwikkeld die we zowel in stabiele als in minder stabiele tijden kunnen toepassen.

	wis A vwo		wis B vwo		wis C vwo		wis A havo		wis B havo	
	N-term	gem cijfer	N-term	gem cijfer	N-term	gem cijfer	N-term	gem cijfer	N-term	gem cijfer
2018	0,6	6,9	0,9	7,0	0,6	6,3	1,2	6,4	1,2	6,7
2019	1,2	6,9	1,8	7,0	0,9	6,3	1,0	6,4	1,5	6,7
2020	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2021 ^[4]	1,6	6,9	1,5	6,7	1,2	6,1	1,2	6,6	1,8	6,2
2022 ^[4]	1,4	6,7	1,8	6,5	0,9	6,3	1,2	6,5	1,7	6,0
2023	1,4	7,0	1,9	6,7	1,2	5,9	1,3	6,5	1,7	6,5

tabel 1 N-termen en gemiddelde cijfers ce's tijdvak 1 – van stabiliteit in 2018 en 2019 naar schommelingen in 2021 tot en met 2023

afkorting bron	bron van informatie	N-term op basis van bron	standaarddeviatie bron
D	docentenoordelen	1,32	0,26
E	schatting o.b.v. examendata	2,21 (gedempt 2,11)	0,07
H	historische N-termen	1,10	0,74
V	oordelen vaststellingscommissie	1,43	0,60

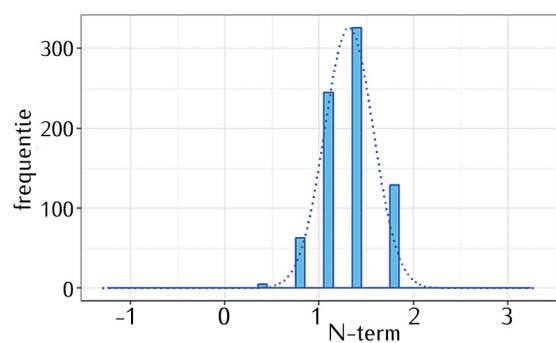
tabel 2 N-term per bron met bijbehorende weging vwo wiskunde A tijdvak 1

Kort gezegd komt de nieuwe systematiek erop neer dat we op verschillende manieren (hierna bronnen genoemd) de moeilijkheidsgraad van het examen schatten en de bijbehorende N-term bepalen. Het gewogen gemiddelde van die verschillende N-termen, waarbij de weging van elke N-term afhangt van de standaarddeviatie van die schatting, wordt de technische N-term genoemd.^[5] Het was ook niet mogelijk de lat zonder meer op dezelfde hoogte te leggen als voor corona.^[6] Daarom hebben we besloten de hoogte van de lat van 2023 als uitgangspunt te nemen voor de normering van 2024. Een peiling onder docenten over die hoogte van de lat gaf ons informatie over de mate waarin die als passend werd ervaren. Deze informatie hebben we meegenomen bij de normering. In het vervolg van dit artikel lichten we de normering van 2024 toe aan de hand van enkele voorbeelden. De voorbeelden zijn gekozen omdat we over de normering van deze examens vragen hebben gehad via de Examenlijn.

Normering wiskunde A vwo tijdvak 1

Opvallend is dat bron E een beduidend hogere N-term aangeeft dan de andere bronnen. Voor bron E is gebruikgemaakt van de afnamegegevens en de resultaten van een pretest.^[7] De pretest wees uit dat het examen van 2024 fors moeilijker is (1,1 cijferpunt) dan het examen van 2023. Daarnaast bleek de vaardigheid van de leerlingen flink hoger dan in 2023 (0,5 cijferpunt). In het verleden werden pretestresultaten gedempt omdat heel grote vaardigheidsveranderingen van jaar op jaar eigenlijk niet waarschijnlijk zijn. Dit jaar ligt dat mogelijk iets anders, omdat we verwachtten dat de vaardigheid toe zou nemen na de coronajaren. Deze vaardigheidstoename viel erg op ten opzichte van alle andere vakken en ook leverde de pretest een uitkomst op die sterk afweek van de andere bronnen bij dit examen. Daarom hebben we dit resultaat gedempt gevolgd. Bron E levert hierdoor een schatting van de N-term van 2,1. Ook uit het docentenoordeel (768 docenten – zie figuur 1) en het oordeel van de

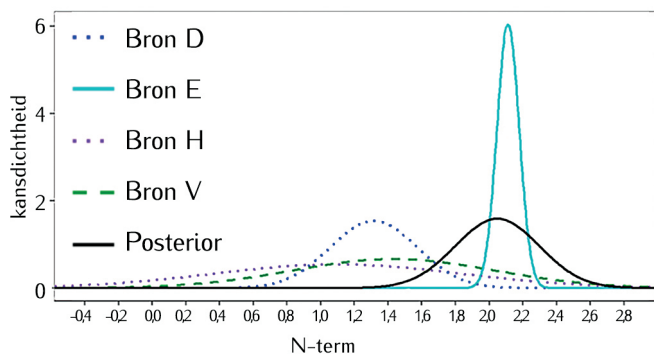
vaststellingscommissie over de moeilijkheidsgraad komt naar voren dat het examen moeilijker is dan het examen van 2023. Alleen niet zoveel moeilijker zoals volgt uit bron E. Hierbij moet worden opgemerkt dat docenten niet kunnen aangeven hoeveel moeilijker zij het examen vinden. Zij kunnen alleen aangeven of zij het examen ‘iets moeilijker’ of ‘veel moeilijker’ vinden. Dit wordt door ons gekwantificeerd als een 0,7 cijferpunt hogere N-term in geval van ‘veel moeilijker’ en een 0,3 cijferpunt hogere N-term in geval van ‘iets moeilijker’. Wanneer een examen veel moeilijker is, zoals hier het geval lijkt te zijn, zou dit kunnen leiden tot een onderschatting van de moeilijkheidsgraad van het examen.



figuur 1 Docentoordeelen over de moeilijkheid vwo wiskunde A tijdvak 1

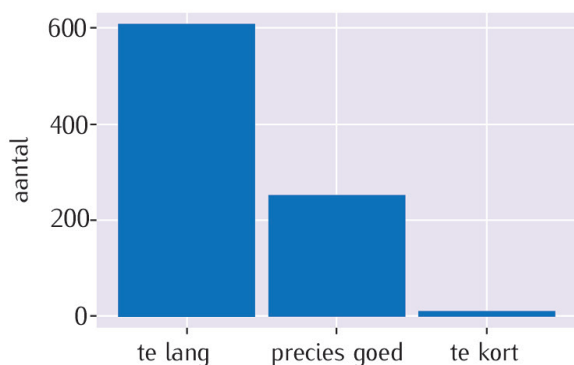
De historische N-term is, als gevolg van de korte historie na de coronapandemie, alleen gebaseerd op het examen in 2023. De standaarddeviatie van deze bron is dan ook het grootst van allemaal aangezien op basis van één N-term uit het verleden moeilijk te voorspellen valt hoe hoog toekomstige N-termen zullen zijn.

Van de verschillende schattingen van N-termen wordt een gewogen gemiddelde bepaald (de posterior) waarbij de weging omgekeerd evenredig is met de standaarddeviatie in het kwadraat. Gezien de kleine standaarddeviatie van bron E, gebaseerd op de afnamegegevens van 16.497 leerlingen, in combinatie met de pretest, weegt deze bron het zwaarst. De technische N-term komt hierdoor uit op 2,0.



figuur 2 Weergave N-termen bij gebruikte bronnen vwo wiskunde A tijdvak 1

Bij de inhoudelijke analyse kwam aan het licht dat dit examen mogelijk te lang is geweest. De docenten beoordeelden dit examen in meerderheid ook als 'te lang'.



figuur 3 Docentenoordeel examenlengte vwo wiskunde A tijdvak 1

Als een examen te lang is geweest, leidt dat tot een toename aan overgeslagen vragen (in Wolf gemarkeerd met een N). Dit leidt tot lagere p-waarden per vraag en dus lijkt het examen, op basis van deze getallen, moeilijker. Het effect dat een te lang examen heeft op de prestatie van een leerling wordt dus al deels automatisch gecompenseerd door een hogere technische N-term. De verwachting is echter dat een leerling die net een voldoende kan halen meer last heeft van de tijdnood en daarvoor niet volledig wordt gecompenseerd via de

technische N-term. Daarom voeren we een analyse uit op de overgeslagen vragen. Dit levert een zogenaamde tijdnoodcorrectiefactor op. Deze *tijdnoodcorrectiefactor* geeft aan hoeveel last van tijdnood een leerling die net een voldoende kan halen bovenop de compensatie via de technische N-term nog gehad zal hebben.

De tijdnoodcorrectiefactor voor dit examen was 0,09.

Dit leidt tot een definitieve N-term van $2,0 + 0,09 = 2,1$. De leerlingen in de steekproef halen daarbij een gemiddeld cijfer van 7,1.

Normering andere wiskunde-examens

Voor de andere wiskunde-examens geldt eenzelfde werkwijze. Alleen voor wiskunde C wordt geen pretest uitgevoerd vanwege het kleine aantal leerlingen bij dit examen. Voor vakken die geen pretest of andere vorm van equivalering hebben, wordt bepaald wat de vaardigheidsontwikkeling is op basis van de vaardigheidsontwikkeling bij vakken uit dezelfde schoolsoort die wel een vorm van equivalering hebben. Dit doen we onder de aanname dat als leerlingen bij die vakken een vaardigheidsontwikkeling laten zien, dit bij niet-geëquivalenteerde vakken waarschijnlijk ook het geval zal zijn. Deze gemiddelde vaardigheidsontwikkeling wordt meegenomen in bron E. Een uitbreiding van tabel 1 met de resultaten van 2024 is te vinden in tabel 3.

Normering wiskunde C tijdvak 1

Het examen wiskunde C, zie tabel 4, kende een referentie-N-term van 1,2 en een referentiegemiddeld-cijfer van 5,9.

De gemiddelde vaardigheidsontwikkeling voor vakken uit dezelfde schoolsoort was + 0,13. In combinatie met de afnamegegevens voor wiskunde C levert dat voor bron E een N-termschatting van 0,8. De docenten beoordelen dit examen als iets moeilijker dan het examen van 2023. Aangezien het aantal docentenoordelen bij een wat kleiner vak als wiskunde C niet zo groot is, is de standaarddeviatie wat groter waardoor dit oordeel minder zwaar meeweegt. Dit resulteert uiteindelijk in een technische N-term van 0,8. Bij de inhoudelijke analyse kwamen verder geen problemen aan het licht die

	wis A vwo		wis B vwo		wis C vwo		wis A havo		wis B havo	
2023	1,4	7,0	1,9	6,7	1,2	5,9	1,3	6,5	1,7	6,5
2024	2,1	7,1	2,1	6,7	0,8	6,0	1,1	6,3	1,4	6,7

tabel 3 N-termen en gemiddelde cijfers ce's tijdvak 1 2023 en 2024 – uitbreiding tabel 1

afkorting bron	bron van informatie	N-term op basis van bron	standaarddeviatie bron
D	docentoordelen	1,33	0,29
E	schatting o.b.v. examendata	0,83	0,04
H	historische N-termen	1,20	0,74
V	oordelen vaststellingscommissie	0,87	0,60

tabel 4 N-term per bron met bijbehorende weging vwo wiskunde C tijdvak 1

aanleiding gaven de N-term nog op te hogen, waardoor de N-term is vastgesteld op 0,8 wat leidt tot een gemiddeld cijfer van 6,0 op basis van de steekproef.

Het examen wiskunde C kent een overlap met het examen wiskunde A. In het verleden werd hiervan gebruikgemaakt bij de normering. Met de invoering van de nieuwe examenprogramma's is hiermee gestopt, omdat het de bedoeling was dat wiskunde C veel meer een eigen karakter kreeg. We hebben deze gegevens na de normering wel bekeken. Daarbij zien we dat de vragen in de overlap tussen beide examens door leerlingen met wiskunde C aanzienlijk slechter zijn gemaakt dan door leerlingen met wiskunde A, zie tabel 5. Daarnaast zien we dat leerlingen bij wiskunde C ongeveer gelijk presteren op het examen als geheel als leerlingen bij wiskunde A. Als we dat koppelen aan de lagere vaardigheid op de overlap, dan betekent dat dat het examen wiskunde C fors makkelijker is dan het examen wiskunde A. Deze analyse

ondersteunt de uitkomsten van de normeringstechniek voor het examen wiskunde C in vergelijking met wiskunde A.

Normering tijdvak 2

De normeringssystematiek in tijdvak 2 is gelijk aan die in tijdvak 1, alleen wordt bron E vervangen door bron T. Bron T levert een schatting van de N-term gebaseerd op de prestatieverbetering van de herkansende leerlingen die in tijdvak 1 een onvoldoende hebben gehaald.^[5] Een ander verschil met tijdvak 1 is dat voor tijdvak 2 het examen van 2023 niet direct het referentiepunt vormt, maar indirect via het examen van tijdvak 1. We vergelijken daarom ook de moeilijkheidsgraad van het examen in tijdvak 2 met het examen in tijdvak 1.

Wiskunde A havo in tijdvak 2

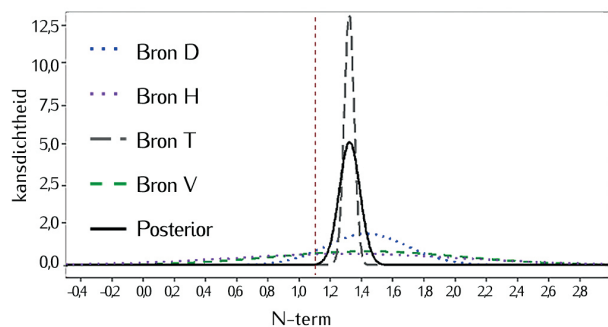
Voor het examen wiskunde A havo is in tijdvak 1 een N-term van 1,1 vastgesteld. Het examen in tijdvak 2 werd moeilijker gevonden dan het examen in tijdvak 1. Dit bleek

		wiskunde A		wiskunde C	
opgave	max score	vraag	p-waarde	vraag	p-waarde
Veldleeuweriken	2	13	0,69	4	0,59
	4	14	0,50	5	0,40
	4	15	0,38	6	0,31
Meerlingen	4	9	0,62	21	0,55
	3	10	0,69	22	0,44
hele examen			0,45		0,45

tabel 5 Overlap wiskunde A vwo en wiskunde C vwo tijdvak 1

>

uit alle bronnen. Gezien de betrouwbaarheid van bron T en het feit dat de andere bronnen daar dichtbij lagen, is het gewogen gemiddelde van de bronnen gelijk aan de geschatte N-term op basis van bron T, namelijk 1,3.



figuur 4 Weergave N-termen bij gebruikte bronnen havo wiskunde A tijdvak 2

Kan dat zomaar: N-termen hoger dan 2,0?

Via de Examenlijn en op sociale media vroegen mensen zich af of N-termen boven de 2,0 wel toegestaan zijn. In de *Regeling omzetting scores in cijfers VO*^[8] staat inderdaad dat de N-term waarden tussen 0,0 en 2,0 kan aannemen. Waar we 0,0 als harde ondergrens hanteren, kan het College voor Toetsen en Examens naar boven afwijken als een N-term van 2,0 of hoger gerechtvaardigd is op grond van de verzamelde informatie over de moeilijkheidsgraad. Zouden we in een dergelijk geval strak vasthouden aan de grenzen in de regeling, dan zouden we daarmee de leerlingen benadelen. N-termen van 2,0 en hoger zijn wel altijd aanleiding om nog eens kritisch te kijken wat er met het examen en/of de normering ervan aan de hand is om dit in de toekomst te voorkomen. In 2024 zijn in tijdvak 1 voor drie examens N-termen hoger dan 2,0 vastgesteld, namelijk voor wiskunde A vwo, wiskunde B vwo en geschiedenis vmbo bb.

Prestatie-eisen

Een reden waarom sommige mensen ontevreden zijn over de hoge N-termen kan zijn dat de hoogte van de N-term niet past bij de ervaren moeilijkheidsgraad van het examen. Men vindt dan eigenlijk de prestatie-eis niet passend. De prestatie-eis is het aantal punten dat een leerling moet halen om een voldoende te halen in relatie tot de moeilijkheidsgraad van het examen en dat wat een leerling heeft moeten leren voor het examen. Aan deze onvrede kunnen verschillende dingen ten grondslag liggen. Al voor corona kregen we signalen dat de lat wel wat hoger mocht bij enkele wiskundevakken. Nu is de lat mogelijk nog wat lager dan voor die tijd. Behalve dat een prestatie-eis haalbaar moet zijn – er moeten immers voldoende leerlingen over de lat kunnen springen – moet

deze ook uitdagen om te leren. Ook in 2024 is docenten de vraag voorgelegd of de N-term voor het examen 2024, en daarmee de prestatie-eis, als passend werd ervaren. De opbrengst van deze vragenlijst wordt, in combinatie met andere verzamelde informatie, meegenomen bij het vaststellen van de normering van 2025. We zullen deze vraag de komende jaren herhalen om zo toe te werken naar prestatie-eisen die passen bij de examens en de leerlingen van dat moment. Jouw bijdrage daaraan is zeer welkom!

Noten

- [1] Uitzondering waren de exacte vakken waar nieuwe examenprogramma's voor werden ingevoerd in deze tijd.
- [2] Zie ook: Molen, P. van der (2021). Normering 2021: Anders dan anders, *Euclides*, 97(2), 14-17.
- [3] Zie *Vaardigheid Examenkandidaten 2023* <https://www.examenblad.nl/system/files/2023-12/Rapport%20Vaardigheid%20Examenkandidaten%202023.pdf>
- [4] In 2021 en 2022 was er een extra tijdvak op de scholen en bestond de mogelijkheid de examens te spreiden over tijdvak 1 en tijdvak 2. De N-termen en gemiddelde cijfers in de tabel zijn die van tijdvak 1. De gemiddelde cijfers veranderen niet als we de leerlingen toevoegen die in tijdvak 2 het examen voor het eerst maakten. De reden hiervoor is dat deze groep naar verhouding zeer klein is.
- [5] Zie *Toelichting op de normering 2024* <https://www.examenblad.nl/system/files/2024-03/toelichting-op-de-normering-2024.pdf>
- [6] Zie *Prestatie-eisen normering centrale examens vo* <https://www.youtube.com/watch?v=eUC9VLZyGVk>
- [7] Zie *De N-term maken we samen* <https://www.youtube.com/watch?v=EZxx6BdzXmw&t=25s>
- [8] zie: <https://wetten.overheid.nl/BWBR0037590/2024-03-09>

Over de auteurs

Jacqueline Wooning is programmamanager normering bij het College voor Toetsen en Examens. E-mailadres: info@cvte.nl. Harco Weemink is manager Normering & Digitalisering bij Stichting Cito. E-mailadres: harco.weemink@cito.nl.

Pijlengrafieken en de afgeleide als veranderingsfactor

In het Engels worden bij differentiaalrekening de woorden ‘instantaneous rate of change’ gebruikt, waar wij Nederlandstaligen praten over het differentiaalquotiënt. In ‘rate of change’, letterlijk vertaald ‘veranderingsverhouding’, zit echter een betekenis die in het Nederlandse onderwijs wellicht meer aan de orde zou moeten komen. In dit artikel gaan we in op die betekenis en laten we zien hoe die mooi geïllustreerd kan worden met pijlengrafieken.

Inleiding

Voor een ideaal gas in een vat met een zuiger is het volume V omgekeerd evenredig met de druk p op de zuiger: $V = \frac{c}{p}$.

Wat is de betekenis van de afgeleide $\frac{dV}{dp} = -\frac{c}{p^2}$?

De betekenis die vaak wordt benadrukt, bijvoorbeeld in *Getal & Ruimte* en *Moderne wiskunde*, is dat het de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van V als functie van p is. Maar dat zegt ons slechts in een omweg iets over veranderingen in druk en volume. Een andere betekenis die je vaak terugziet is: de groeisnelheid van het volume V . Maar het woord snelheid suggereert een rol voor de tijd, maar die zit niet in $V = \frac{c}{p}$. Hoe snel het volume verandert hangt af van hoe snel je de druk verandert. Al is $\frac{dV}{dp}$ heel groot: als je p heel langzaam laat toenemen, dan neemt V alsnog langzaam toe en heeft dus een lage groeisnelheid. De gebruikelijke beelden schieten dus soms tekort.

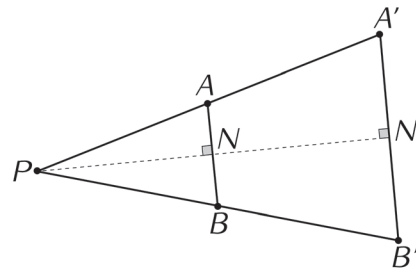
Afgeleide als veranderingsfactor

De betekenis die mij voor ogen staat is dat $\frac{dV}{dp}$

de *gevoeligheid* van V voor veranderingen in p uitdrukt. Het is een *veranderingsfactor*, een factor die de verhouding geeft^[1] tussen een verandering in p en een

verandering in V . De uitdrukking $\frac{dV}{dp} = -\frac{c}{p^2}$ laat zien

dat de impact van een drukverandering groot is als de druk nog klein is (en het volume groot), maar een stuk kleiner als de druk groot is (en het volume klein). Dit is de betekenis, als veranderingsfactor, die volgens mij meer aandacht verdient.



figuur 1 Het lijnstuk $A'B'$ is de vergroting van lijnstuk AB met een factor 2 ten opzicht van punt P .

Er is natuurlijk niets mis met de meetkundige raaklijninterpretatie: wat ik voorstel moet als een verrijking worden gezien van het begrip. Sterker nog, ik wil een tweede meetkundige interpretatie introduceren, ter ondersteuning van het begrip van differentiaalquotiënt als veranderingsfactor: meetkundige vergrotingen ten opzichte van een punt. Als je een lijnstuk AB met een factor 2 vergroot ten opzichte van een punt P , dan krijg je een lijnstuk $A'B'$ waarvan de lengte twee keer zo groot is als die van lijnstuk AB . Die factor komt dan op veel manieren terug:

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|PN'|}{|PN|} = \frac{|PA'|}{|PA|} = 2.$$

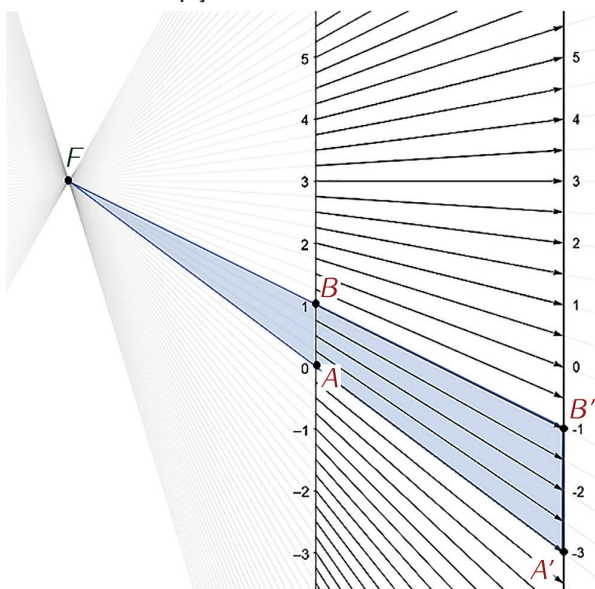
Vergrotingen vormen de basis van gelijkvormigheid (twee figuren zijn per definitie gelijkvormig als de ene een vergroting van de andere is), en worden in de onderbouw onderzocht met behulp van verhoudingstabellen, en dus de vergrotingsfactor. Hierbij kun je aansluiting zoeken als je het differentiaalquotiënt introduceert als veranderingsfactor.

>

Groeigetal lineaire functie als vergrotingsfactor

Die aansluiting kan verlopen via pijlengrafieken, die eerder in de *Euclides* langskwamen, toen nog onder de naam *nomogram*.^[2] Een pijlengrafiek van een functie bestaat uit twee evenwijdige assen, en pijlen tussen waarden in het domein en bijbehorende beelden. In deze GeoGebra-app^[3] kun je experimenteren met pijlengrafieken voor verschillende functies. Pijlengrafieken vinden langzamerhand hun weg naar het klaslokaal via praktijkonderzoek door Hang Wei, promovenda aan het Freudenthal Instituut, en ook de ideeën in dit artikel zijn in de klas getest door Laura Brinks, studente aan de master Science Education and Communication van de Universiteit Utrecht.

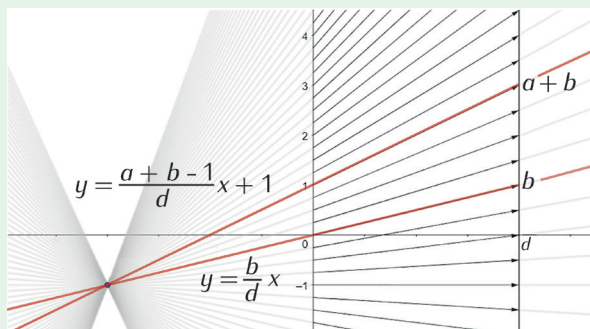
Laten we eens kijken naar een lineaire functie, $f(x) = 2x - 3$, zie figuur 2. Voor lineaire functies heeft de pijlengrafiek een focus: wanneer je alle pijlen verlengt, dan snijden ze in één punt (behalve als de groeifactor 1 is, dan lopen de pijlen evenwijdig). De lineaire functie f kan in de pijlengrafiek meetkundig geïnterpreteerd worden als een vermenigvuldiging met factor 2 ten opzichte van de focus F . Ieder interval op de invoer-as wordt vergroot met een factor 2 ten opzichte van F (zodat het beeld op de uitvoer-as ligt). Voor een lineaire functie $f(x) = ax + b$ kan het groeigetal $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ dus betekenis krijgen als een vergrotingsfactor in de pijlengrafiek: een interval als lijnstuk op de invoer-as wordt afgebeeld als een vergroting vanuit F op een a keer zo groot interval als lijnstuk op de uitvoer-as. Het startgetal b is simpelweg het beeld van de pijl vanuit 0.



figuur 2 Een pijlengrafiek voor $f(x) = 2x - 3$ met focus F . Het groeigetal 2 is de vergrotingsfactor voor de vergroting van AB vanuit F naar $A'B'$.

Coördinaten van de focus

Je kunt je de pijlengrafiek voorstellen in een assenstelsel met de invoer-as als verticale as en de uitvoer-as als de lijn met vergelijking $x = d$, waar d dus de afstand tussen de verticale assen is. In deze GeoGebra-app^[4] kun je de focus bij een lineaire functie verslepen en zien hoe het bijbehorende voorschrift verandert. De coördinaten van de focus bij een functie met voorschrift $f(x) = ax + b$ kunnen worden uitgedrukt in a , b en d . Dat is een mooie opgave om zelf te doen, maar hieronder volgen de belangrijkste stappen.



figuur 3 Plaats het nomogram in een assenstelsel en bereken de coördinaten van de focus als snijpunt van de twee rode lijnen.

We berekenen de focus als snijpunt van twee van de lijnen, zie de rode lijnen in figuur 3: de lijn door de focus, de 0 op de invoer-as, en $f(0) = b$ op de uitvoer-as heeft de bijbehorende vergelijking $y = \frac{b}{d}x$; en de lijn door de focus, de 1 op de invoer-as, en $f(1) = a + b$ op de uitvoer-as

heeft bijbehorende vergelijking $y = \frac{a+b-1}{d}x + 1$.

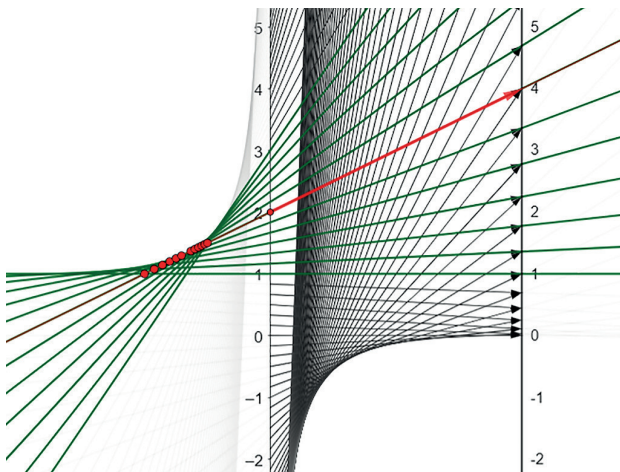
Het snijpunt berekenen geeft $F\left(\frac{d}{1-a}, \frac{b}{1-a}\right)$.

Je ziet hieraan dat de beginwaarde b de horizontale positie van de focus niet beïnvloedt. Je ziet ook dat bij $a = 1$ de focus in oneindig ligt. Als de focus midden tussen de assen ligt, dan geldt $a = -1$.

Afgeleide als vergrotingsfactor ten opzichte van een lokale focus

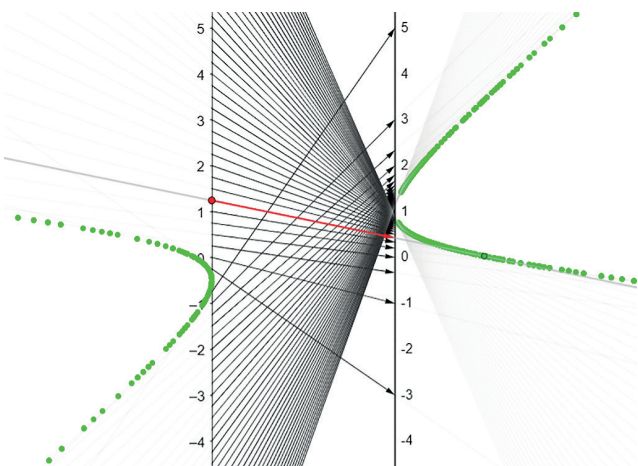
En dan nu terug naar het differentiaalquotiënt. Als een functie niet lineair is, dan kan deze nog wel lokaal lineair benaderd worden (oftewel differentieerbaar zijn). In de

pijlengrafiek uit zich dat als volgt: bekijk je de pijlen op een klein interval rond een waarde x_0 , dan gaan deze (of de lijnen in het verlengde) bij benadering door één punt. Hoe kleiner het interval, hoe scherper het punt zich aftekent. In de limiet vind je een punt en we noemen dat de lokale focus bij $x_0 \rightarrow f(x_0)$, zie figuur 4.



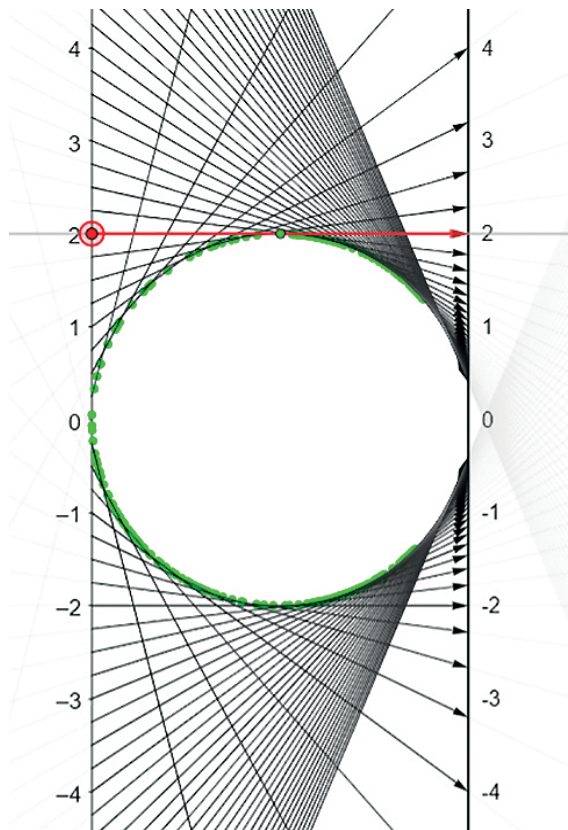
figuur 4 De pijlengrafiek van de functie gegeven door $f(x) = x^2$. We zoomen in op het gedrag rond de rode pijl $2 \rightarrow 4$. Voor alle groene pijlen op het interval $[1, 3]$ tekenen we het snijpunt met de lijn door de rode pijl. De rij snijpunten verdicht rond de lokale focus.

Je kunt dit ook zelf ervaren in deze GeoGebra-app^[5]. Bij zo'n lokale focus hoort een lineaire functie, en dat is precies de beste lineaire benadering van de functie rond $(x_0, f(x_0))$. Er hoort ook een vergrotingsfactor bij, en dat is precies het bijbehorende differentiaalquotient. In de pijlengrafiek tekent de verzameling van lokale focussen zich af als een omhullende kromme, zie figuren 5 en 6.^[6]



figuur 5 De pijlengrafiek bij de functie f met $f(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$. De lokale focussen (groene punten) vormen een omhullende kromme, in dit geval een hyperbool.

Het is de moeite waard te onderzoeken wat voor omhullende kromme je krijgt bij verschillende functies. Voor lineaire functies is er uiteraard geen kromme, maar alleen een punt. Terzijde: een resultaat uit de projectieve meetkunde garandeert dat voor lineaire rationale functies (dus van de vorm $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$), de omhullende kromme een kegelsnede is.^[7]



figuur 6 De pijlengrafiek bij de functie f met $f(x) = \frac{4}{x}$. De lokale focussen (groene punten) vormen een cirkel.

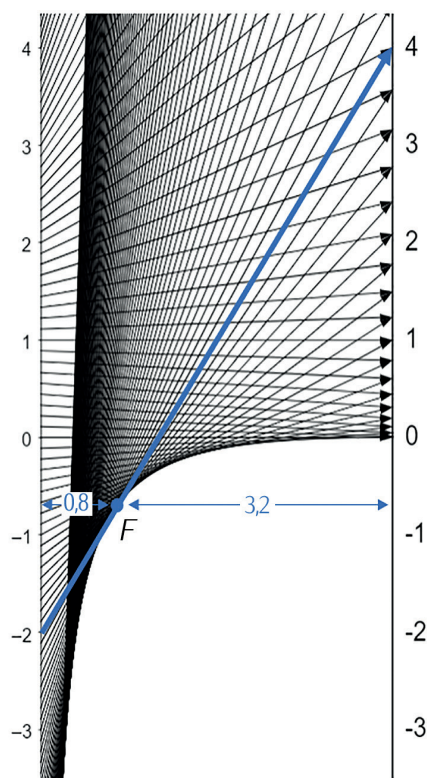
Afgeleide en omhullende kromme

Je kunt die omhullende kromme gebruiken om de verandingsfactor (de afgeleide) te benaderen. In figuur 7 zie je de pijlengrafiek bij $g(x) = x^2$. We hebben de lokale focus bij $x_0 = -2$ gevonden als snijpunt van de pijl $-2 \rightarrow 4$ en de omhullende kromme. De bijbehorende vergrotingsfactor vind je door de afstanden (met teken) van F tot de invoer- en uitvoer-as op elkaar te delen: $f'(-2) = \frac{3,2}{-0,8} = -4$.

Op dezelfde manier: in figuur 6 komt de lokale focus voor $f(x) = \frac{4}{x}$ bij $x_0 = 2$ precies midden tussen de assen te liggen. De 'afstanden' tot de assen zijn dus -2 en 2 , waaruit we direct concluderen dat $f'(2) = \frac{2}{-2} = -1$.

>

Op deze manier representeert de omhullende kromme de afgeleide functie in de pijlengrafiek.



figuur 7 Pijlengrafiek bij $g(x) = x^2$. Het punt F is de lokale focus bij $x = -2$. De bijbehorende vergrotingsfactor vind je door de afstanden tot de assen op elkaar te delen. De afstand tussen de assen is hier $d = 4$.

Het idee is dus dat de vergrotingsfactor ten opzichte van een lokale focus, naast helling van de raaklijn, een meetkundige interpretatie biedt van het differentiaal-quotiënt. De vergrotingsfactor is een uit de onderbouw bekend verhoudingsgetal, alhoewel dat van de richtings-coëfficiënt als tangens van de hellingshoek ook gezegd kan worden. De pijlengrafiek laat daarbij duidelijk zien dat deze vergroting een *veranderingsverhouding* tussen de variabelen – met bijbehorende veranderingsfactor – uitdrukken, een mooi woord dat ik hoop ooit nog eens in de Nederlandse wiskundemethodes tegen te mogen komen.

Vergelijking voor de verdichtingskromme

De omhullende kromme in de pijlengrafiek bij de functie $f(x) = \frac{4}{x}$ lijkt wel een cirkel als $d = 4$, zie figuur 6.

Dat kunnen we narekenen.

De beste lineaire benadering van f in x_0 is $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Met $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$ geeft dit $y - \frac{4}{x_0} = -\frac{4}{x_0^2}(x - x_0)$.

Dus $a = -\frac{4}{x_0^2}$ en $b = \frac{8}{x_0}$. Met de formules voor de

coördinaten van de focus van een lineaire functie uit het vorige kader vinden we voor de lokale focussen

$x = \frac{4}{1 + 4/x_0^2}$ en $y = \frac{8/x_0}{1 + 4/x_0^2}$. De cirkel lijkt straal 2

en middelpunt $(2, 0)$ te hebben, dus een bijpassende vergelijking is $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Substitueren we de formules voor x en y in het linkerlid, dan vinden we:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4}{1 + \frac{4}{x_0^2}} \right)^2 + \left(\frac{8/x_0}{1 + \frac{4}{x_0^2}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{4x_0^2}{x_0^2 + 4} - \frac{2x_0^2 + 8}{x_0^2 + 4} \right)^2 + \left(\frac{8x_0}{x_0^2 + 4} \right)^2 \\ &= 4 \cdot \frac{x_0^4 + 8x_0^2 + 16}{(x_0^2 + 4)^2} = 4 \end{aligned}$$

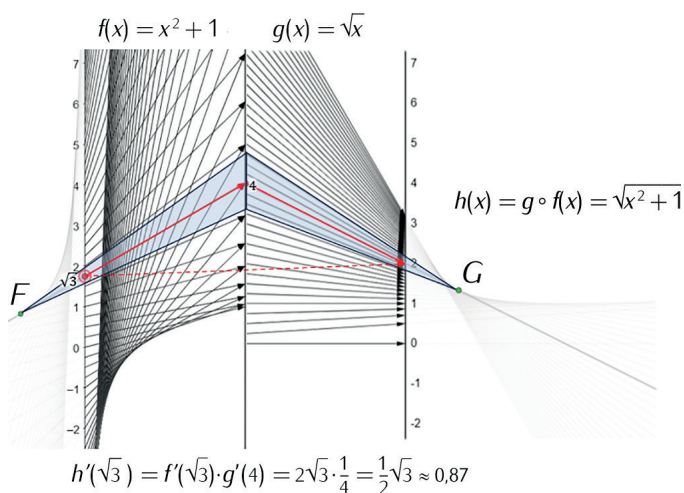
wat gelijk is aan het rechterlid. Je kunt op eenzelfde wijze narekenen dat de omhullende kromme voor $g(x) = x^2$ hoort

bij de vergelijking $y = -\frac{(x-4)^2}{16x}$, zie figuur 7.

Kettingregel

Als kers op de taart bekijken we de kettingregel voor afgeleide functies. De samenstelling van functies laat zich mooi illustreren door pijlengrafieken: je zet de pijlengrafieken van de betreffende functies simpelweg achter elkaar, zie figuur 8. De afgeleide $f'(a)$ in a is een vergro-

tingsfactor ten opzichte van een lokaal focuspunt F , terwijl de afgeleide $g'(b)$ een vergrotingsfactor is ten opzichte van een lokaal focuspunt G . De afgeleide van de samenstelling, $(g \circ f)'(a)$, wordt in het nomogram beschreven door eerst de vergroting met factor $f'(a)$ en dan de vergroting met factor $g'(f(a))$. Als je twee vergrotingen na elkaar uitvoert, dan is het effect evident multiplicatief. Bijvoorbeeld, vergroot je iets eerst met een factor 3 en dan met een factor een $\frac{1}{2}$, dan is het eindresultaat vergroot met factor $\frac{3}{2}$. Op die manier helpt het pijlengrafiek-perspectief in te zien dat $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.



figuur 8 De samenstelling van twee functies verbeeld in pijlengrafieken.

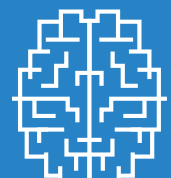
Noten

- [1] Iedere verhouding komt met een factor. Zo hoort bij 2 : 1 de factor $\frac{1}{2}$ en bij 3 : 5 de factor $\frac{5}{3}$. Als je van links naar rechts denkt, zoals ik, dan correspondeert de factor helaas niet met de ' : ' als delingsteken.
- [2] Bos, R., Wei, H., van der Hoek, G., & Drijvers, P. (2023). Nomogrammen: een nieuwe kijk op functies. *Euclides*, 98(7). pp. 8-11.
- [3] zie: <https://www.geogebra.org/m/gh7zwcw93>
- [4] zie: <https://www.geogebra.org/m/gq5m8dsd>
- [5] zie: <https://www.geogebra.org/m/hap8j44e>
- [6] Je ziet ook verdichtingen rond twee rechten. Dat heeft een andere oorzaak: grote getallen worden alle dicht rond de nul afgebeeld.
- [7] Kindt, M. (1993). *Lessen in projectieve meetkunde*. Epsilon.

Over de auteur

Rogier Bos werkt als universitair docent wiskundeonderwijs aan het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en is redactielid van *Euclides*. E-mailadres: r.d.bos@uu.nl

Puzzel



Lieke de Rooij
Wobien Doyer

In *Euclides* 99-6 verscheen de laatste puzzel van de hand van Lieke de Rooij en Wobien Doyer. De uitwerking van puzzel 99-6 en de volledige ladderstand kun je vinden op de site. <https://nvvw.nl/euclides/puzzel>

We feliciteren Harm Bakker met de laatste ladderprijs.

Voor de uitwerking van puzzel 99-6:



vakbladeuclides.nl/1002puzzel

Top 10 ladderstand t/m puzzel 99-6

1	H. Bakker	136
2	M. Schukking	132
3	H. Huisman	117
4	S. Zondervan	115
5	B. Dopheide	103
6	H. Linders	97
7	G. Groenewegen	96
8	R. Stolwijk	95
9	M. Woldinga	90
10	B. Bosma	80

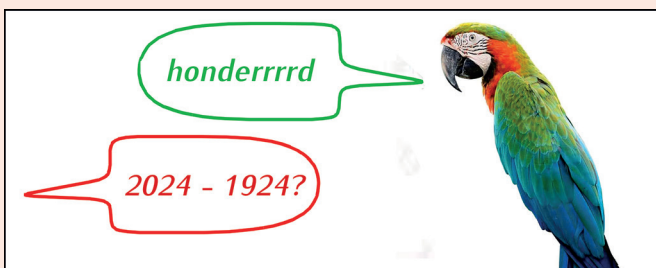
Honderrrrd...

Sommen voor een papegaai en nog een paar andere ideetjes om op productieve wijze algebra te (be)oefenen.



Inleiding

Het is een oud idee uit de keuken van het Freudenthal Instituut: *papegaai Euclides heeft geleerd 'honderrrrd' te zeggen en als je hem een rekensom opgeeft, krijg je dat dan steevast als antwoord.* Aan een klas wordt gevraagd om sommen op te geven waarop Euclides met zekerheid goed zal scoren ...



figuur 1

Je kunt daarbij beperkingen opleggen, zoals: *de opgave moet een optelsom van twee hele getallen zijn, maar dat hoeft natuurlijk niet.* Het hangt er natuurlijk van af met wat voor leerlingen je te maken hebt.

Er is heel veel variatie mogelijk waarbij de leerlingen zo worden uitgedaagd om rekencreatief te zijn. Dit is typisch een voorbeeld van wat bedoeld wordt met *productief oefenen* (in contrast met *reproductief* of *mechanistisch oefenen*).^[1]

Vanaf het prille begin van mijn leraarschap had ik de overtuiging dat vaardigheidstraining in de wiskunde meer moet zijn dan rijtjes opgaven die slechts verschillen in de gekozen getallen. Het idee om leerlingen zelf sommen te laten ontwerpen is later bij mij ontstaan. Ik herinner me – het moet rond 1970 zijn geweest – dat mijn collega Wim Kremers voorstelde om bij een proefwerk over lineair programmeren in vwo 4 aan de leerlingen van onze parallelgroepen te vragen om vraagstukken (met context!) te ontwerpen. De beste inzendingen zouden dan op het proefwerk worden gevraagd.

Dat laatste werkte natuurlijk motiverend en er werden mooie opgaven ingediend, waarvan er een paar in het boek, dat we toen aan het schrijven waren, zijn opgenomen. In het algemeen kun je wel zeggen dat 'eigen producties' – zoals dat later werd genoemd – dwingen tot reflectie en een flink beroep doen op rekenkundige en algebraïsche lenigheid.

Samen honderd (1)

Kies een getal tussen 1 en 50.

Tel dit op bij 50 en noteer je antwoord.

Trek nu het eerste getal af van 50 en noteer ook dit antwoord.

Tel de beide antwoorden op.

Wat is het resultaat?

Herhaal dit voor een paar andere startgetallen.

Als je geen fouten hebt gemaakt komt er steeds hetzelfde uit.

Hoe kun je dit verklaren?

Deze opgave kun je aan een brugklas geven als er al wat 'vroege algebra' aan de orde is geweest. Ik heb het sterke vermoeden dat er niet al te veel leerlingen zijn die op het idee komen om het ene getal $50 + x$ en het andere $50 - x$ te noemen.

Van een antwoord als 'je ziet wel dat het steeds klopt', zou ik niet opkijken ... ^[2]

Eén fingerwijzing zal voor de meeste leerlingen wellicht voldoende zijn, maar je zou toch wensen dat ze spontaan op het idee komen om algebrataal te gebruiken. Maar als we bedenken dat het heel lang heeft geduurd (tot zeg maar het jaar 1600) voor de wiskunde zich ging bedienen van de taal van de algebra, is dit ook weer niet zó gek.

Het bevorderen van autonoom gebruik van algebra-taal, hoe doe je dat? In vroeger tijden, toen er (naast de meetkundeboeken) aparte algebraboeken op school werden gebruikt werd er vaak gestart met het vertalen van zogeheten 'redeneersommen' van de 'lagere school' naar algebra, hetgeen dan moest leiden naar wat 'ingeklede vergelijkingen' werden genoemd.

Ook verderop in die methoden kwamen hoofdstukjes met ingeklede vergelijkingen voor, vaak in een gekunstelde rekenkundige context, zo van *zoek een getal welks $\frac{6}{7}$ de deel 4 meer is dan zijn $\frac{4}{5}$ de deel*.

De praktijk was wel dat leraren zo'n hoofdstuk nogal eens oversloegen. Mijn leraar was er zo een. Maar dat algebra een adequaat bewijsmiddel is bij onverwachte eigenschappen van natuurlijke getallen, moge toch duidelijk zijn. ^[3]

Samen honderd (2)

*Kies twee natuurlijke getallen waarvan de som 100 is, en waarvan het kleinste groter is dan 3.
Bereken dan het kwadraat van beide getallen.
Wat valt je op?
Herhaal dit nog een paar keer.
Formuleer een vermoeden en probeer dit te bewijzen.*

Een drietal voorbeelden:

$$4^2 = 16 \text{ en } 96^2 = 9216$$

$$13^2 = 169 \text{ en } 87^2 = 7569$$

$$38^2 = 1444 \text{ en } 62^2 = 3844$$

Het valt al gauw op dat de beide uitkomsten steeds dezelfde laatste twee cijfers bevatten.

Dit vraagt toch om een bewijs!

Wel, wat weet je van twee getallen die op hetzelfde cijfer-paar eindigen? Het verschil zal op 00 eindigen en moet derhalve deelbaar door honderrrd... zijn!

Als je het ene getal x noemt en het andere dan $100 - x$ is het een kwestie van kijken of $(100 - x)^2 - x^2$ door 100 deelbaar is. Na het vorige *Samen honderd* landt misschien het idee om de getallen te benoemen als $50 - x$ en $50 + x$. Het rekenwerk is dan wat leuker. Maar het mooiste is toch om de twee getallen gewoon maar voor te stellen door x en y .

Het verschil $x^2 - y^2$ is gelijk aan $(x + y)(x - y)$ en dus $100(x - y)$, klaar! In een les zou ik alle drie de oplossingen bespreken.

Samen honderd (3)

Vraag aan de klas:

Kies twee verschillende positieve, niet per se gehele, getallen die samen 100 zijn en vermenigvuldig die dan met elkaar.

Inventarisatie van de resultaten leert dat alle (correcte) uitkomsten kleiner dan 2500 zijn. Het lijkt erop dat hoe dichter de gekozen getallen bij elkaar liggen, hoe dichter hun product bij 2500 ligt.

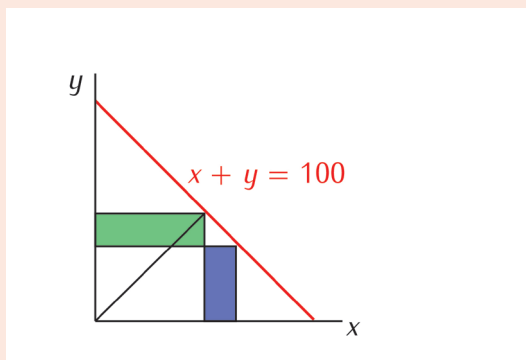
Zo geldt bijvoorbeeld: $49,9 \times 50,1 = 2499,99$. Ook al voel je op je klompen aan dat 2500 de kleinste bovengrens zal zijn, een klomp geeft geen bewijs. En ja, er bestaan ook irrationale getallen, misschien valt er nog wat twijfel te zaaien?

Maar gelukkig is er algebra! Als je de getallen voorstelt door x en $100 - x$ komt het er hier op neer dat je moet aantonen dat het product $x(100 - x)$ ofwel $100x - x^2$ maximaal 2500 is voor $x = 50$.

Het hangt dan af van welke wiskunde je al paraat hebt - kwadraat afsplitsen of differentiëren - om dit aan tonen. Duidelijk mooier is hier de strategie om de twee getallen aan te duiden met $50 + x$ en $50 - x$.

Er is ook een aanschouwelijke oplossing!

De relatie $x + y = 100$ kan worden voorgesteld als een rechte lijn in het Oxy -vlak.



figuur 2

Het product xy is nu de oppervlakte van een rechthoek met zijden langs de assen en met één hoekpunt op de lijn $x + y = 100$.

Van al zulke rechthoeken heeft het vierkant de grootste oppervlakte ... kijk en zie!

100!

Dit kopje had ik eventjes als titel boven dit artikel in gedachte. Maar voor de geschoolde *Euclides*lezers zou dit tot een misverstand kunnen leiden. Dit zal hier niet gebeuren, want ik besluit met de volgende 'jubileum-som':

Op hoeveel nullen eindigt honderd faculteit in het decimale stelsel?

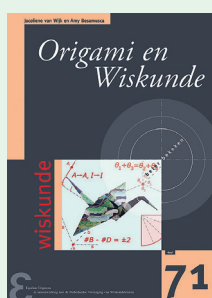
Noten

- [1] In het proefschrift *Met sprongen vooruit* (2001) van J.J.M. Menne – over een *productief oefenprogramma voor slechte rekenaars* – geeft de papegaai Waku-waku steeds het antwoord *tien*.
- [2] Bij een onderzoek in Nottingham van A.W. Bell (jaren '70) waren er geen leerlingen die de algebra die ze hadden geleerd, spontaan gebruikten als bewijsmiddel bij een dergelijke opgave.
- [3] Zie Kindt, M. Algebra om te bewijzen. *Euclides*, 93(2). Daarin komt de opgave van *Samen honderd (2)* voor als één van de voorbeelden.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

Verschenen: Origami en wiskunde



Titel: Origami en wiskunde
Zebra-reeks 71 |
Auteurs: Jacoliene van Wijk,
 Amy Besamusca
Uitgeverij: Epsilon
ISBN: 9789050412032
Prijs: € 10,-

Van de uitgever:

Wist je dat als je een kraanvogel vouwt, je tegelijkertijd ook diverse wiskundige regels volgt? Deze gaan over de

vorm van de kop, staart en vleugels, of je een berg- of dalvouw moet vouwen en welke hoeken de vouwen ten opzichte van elkaar maken. Samen zorgen deze regels ervoor dat de kraanvogel uit één stuk papier wordt gemaakt én kan worden opgevouwen tot een plat pakketje. In dit Zebra-boekje onderzoeken we deze wiskunde, door te vouwen, te rekenen en te tekenen. In de tweede helft van het boekje verkennen we toepassingen van wiskunde in origami. De Miura-vouw, die wordt gebruikt in de medische wereld en de ruimtevaart en het Fold-and-one-cut-Theorem, dat je in staat stelt trucs van goochelaars te begrijpen en te evenaren. Veel plezier!

Tweehonderd jaar opleiden van leraren

In het kader van 100 jaar *Euclides* en 100 jaar NVvW duiken we in het verleden, op zoek naar gebeurtenissen en personen die nu nog relevant zijn, mede aan de hand van de publicaties daarover in *Euclides*. In dit artikel onderzoekt Harm Jan Smid het roerige verleden van de lerarenopleidingen.



Inleiding

In de honderd jaargangen van *Euclides* zitten een paar bijzondere nummers, de *Specials*. Eén daarvan, nummer 9 van de 61^e jaargang, gaat over het opleiden van wiskundelaren. Er was alle reden om daaraan speciale aandacht te besteden, aldus de redactie van *Euclides* uit die tijd, want 'op de lange duur wordt het gezicht van het wiskundeonderwijs voor een groot deel bepaald door hoe de leraren hun opleiding kregen'.

blz: 285 Het opleiden van wiskundelaren, <i>Bram Lagerwerf</i>	298 De wiskundekant van de opleiding, <i>Martinus Riemersma</i>
286 Leraar worden, een situatieschets, <i>Bram Lagerwerf</i>	301 Ter leringhe ende vermaeck, <i>Marjolein Kool</i>
289 Reflecteren, <i>Herman Beks</i>	302 Integratie, <i>Herman Beks</i>
290 Uit een brief die we van een oud-studente ontvingen, <i>Marjolein Kool</i>	303 Rekendidaktiek, <i>Arie Timmermans</i>
291 Ervaringen van een student, <i>Rinus Marinissen</i>	306 Schoolwiskunde, <i>Bram Lagerwerf</i>
293 Het schoolpracticum, <i>Bram Lagerwerf</i>	309 (Beginnen) ² , <i>Stephan de Valk</i>
296 Een schoolpracticumdocent aan het woord, <i>Jan Stel</i>	311 Worden onze studenten wel uw collega?, <i>Herman Beks</i>
	313 Informatica, <i>Bram Lagerwerf</i>
	314 Literatuur

figuur 1 Inhoudsopgave *Special Lerarenopleiding*

De samenstellers van de *Special* uit 1986 pretendeerden niet een compleet overzicht aan te bieden. De opzet was te laten zien hoe toekomstige leraren door de vakgroep wiskunde van de Stichting Opleiding Leraren, de SOL, op hun beroep werden voorbereid. Het is interessant om dat allemaal na te lezen, al was het alleen maar omdat het een mooi beeld geeft van de idealen en de verwach-

tingen uit die tijd. Maar wat er nu buiten de SOL op het gebied van het opleiden van wiskundelaren gebeurde kom je uit deze *Special* niet te weten.

De SOL was een van de 'Nieuwe LerarenOpleidingen', afgekort tot NLO's. Wat waren dat eigenlijk? Waar zijn ze gebleven? En waren er dan ook Oude LerarenOpleidingen? Hoe werd je vroeger leraar?

Een mislukt begin

De titel licht al een tipje van de sluier op. De eerste 'lerarenopleiding' wiskunde werd al bijna 200 jaar geleden in het leven geroepen, voor leraren op de Latijnse scholen. Daar was sinds 1815 onderwijs in de 'beginselen van de wiskunde' verplicht. Op die scholen kreeg een klas les van één leraar, die alle vakken, in hoofdzaak Latijn, onderwees. Zo'n leraar, meestal doctor in de letteren, moest ook wiskunde geven, maar wist daar vaak weinig of niets van.

In 1826 besloot de regering daar wat aan te doen. Wie letteren studeerde moest voortaan ook een eenvoudig tentamen wiskunde doen – vóór die tijd was 'volgen' van dat college voldoende –, zodat toekomstige docenten tenminste iets van het vak wisten. Als de leraar Latijn echt geen wiskunde kon of wilde geven, kon een aparte leraar voor wiskunde worden aangesteld. De overheid begon ook eisen te stellen aan hun vakkennis.

Een jaar later probeerde de regering ook een beroeps-component te creëren. Dat was nodig omdat het docenten nog vaak ontbrak aan *de vereischte kennis van het kinderlijk hart, de noodige bedrevenheid om het karakter der jeugd te vormen, om eenvoudig bevattelijk hunne kundigheden aan kinderen mede te delen, derzelver leerlust op te wekken en gaande te houden*.

Het is ouderwets geformuleerd, maar eigenlijk is er met

de ambities die hieruit spreken niets mis. Een leraar die dat allemaal kan en weet, is vast wel een goede leraar. Universiteiten werden verplicht om een college algemene onderwijskunde (in moderne bewoordingen), colleges vakdidactiek (voor letteren en wiskunde) en een schoolpracticum te organiseren. In de praktijk kwam daar maar weinig van terecht. In Leiden werd wel wat aan vakdidactiek wiskunde gedaan, in Groningen werd iets van een schoolpracticum georganiseerd. In Utrecht gebeurde vrijwel niets. Fataal was vooral dat de regering deze beroepscomponent voor leraren alleen maar aanbeval, maar niet verplicht stelde. Dat hadden zowel de bestuurders van de Latijnse scholen als de studenten op de universiteit al gauw in de gaten, met als gevolg dat de hele zaak spoedig dood bloedde. De eerste poging om een beroepscomponent in de opleiding van toekomstige leraren wiskunde in het leven te roepen, mislukte jammerlijk.

Vakkennis was genoeg

De overheid ging wel serieuze eisen aan de vakkennis van (wiskunde)leraren stellen. Voor de hbs werd in 1863 een academische graad op het vakgebied verplicht, net als in 1876 voor de moderne gymnasia. Een graad in de wis- en natuurkunde is natuurlijk niet direct toegesneden op het beroep van leraar. Er werden daarom commissies ingesteld, rapporten geschreven en aanbevelingen gedaan om wat aan een lerarenopleiding te doen, steeds gebaseerd op het model dat al in 1827 was geïntroduceerd. In de vroege jaargangen van *Euclides* kunnen we daar het een en ander over terug vinden. Er kwam niets van, vooral door een gebrek aan enthousiasme op de universiteiten.

Ten derde echter kan het standpunt verdedigd worden, dat de universiteit in het algemeen, zonder schade voor haar wetenschappelijk karakter, aan hare leerlingen, naast de wetenschappelijke vorming, een voorbereiding tot een maatschappelijken werkkring kan geven en dat ze hiertoe zelfs verplicht is in die gevallen, waarin de goede vervulling van dien werkkring een wetenschappelijk belang mag heeten.

figuur 2 Fragment uit 'Beschouwing over de universitaire opleiding tot leeraar in wis en natuurkunde' van EJ Dijksterhuis, Euclides 2-3 (1925), waarin de stelling verdedigd wordt dat beroepsvoorbereiding moet plaatsvinden.

Bij de oprichting van de hbs werden de MO-aktes geïntroduceerd, die ook een lesbevoegdheid gaven. Om bevoegd te zijn was het bezit van zo'n akte echter niet

voldoende, je moest ook een zogeheten akte-Q behalen. De vereisten voor die akte waren *duidelijke begrippen van klassikaal onderwijs, van de onderscheidene leerwijzen, hare voor- en nadelen en hare geschiedenis, geschiktheid om verkregene kennis mede te delen, blijkbaar door mondelingen voordracht.*

Even leek het erop dat althans voor een deel van de toekomstige wiskundeleraren, die met een MO-akte, iets van een beroepsvoorbereiding vereist zou worden, vooral vakdidactisch van aard. Dat dit vooral een theoretische scholing zou zijn was misschien niet zo heel erg, de meeste aktebezitters waren onderwijzer geweest en hadden al ruime onderwijservaring. Er verscheen zelfs een echt leerboek voor de didactiek van de wiskunde, geschreven door de grote man van het wiskunde-onderwijs van destijds, Jan Versluys.

Ook hier kwam niets van terecht. De MO-examencommissies, bestaande uit hoogleraren wiskunde, namen de vereisten in het geheel niet serieus. Wie op het mondeling deel van het wiskunde-examen een beetje behoorlijk uit zijn woorden kwam, kreeg de akte-Q zonder problemen uitgereikt.

Er kwamen ook aktes voor andere schoolsoorten; LO-aktes voor de mulo (Meer Uitgebreid Lager Onderwijs) en later ook N-aktes voor het nijverheids-onderwijs. Didactische eisen werden bij deze aktes niet gesteld. Ook al bleef de vakinhoud voor al die aktes vaak decennia lang min of meer hetzelfde, je kunt toch stellen dat ook aktebezitters een behoorlijke, zij het soms gedateerde kennis van hun vak hadden. Met de vakkennis van de leraren was het wel in orde. Pedagogische en didactische kennis moest je maar in de praktijk op doen.

Een nieuw begin: universitaire lerarenopleidingen

Pas in de jaren vijftig van de vorige eeuw begon dat te veranderen. De eerste doorbraak vond plaats in Utrecht, waar door de faculteiten vakdidactici werden aangesteld om iets van een lerarenopleiding van de grond te krijgen. Verplicht was die opleiding voor het verkrijgen van een bevoegdheid niet, maar dat veranderde in 1955. De regering greep terug op het model van 1827 (!) en stelde als eis voor het verkrijgen van een onderwijsbevoegdheid, behalve het doctoraal, het volgen van een (ook weer in hedendaagse termen) college algemene onderwijskunde, een college vakdidactiek, en het deelnemen aan een schoolpracticum. Een cruciaal verschil met 1827 was dat het nu geen aanbeveling maar een vereiste was. Toch was de hele regeling nog doortrokken van

vrijblijvendheid. De colleges hoefden alleen 'gevolgd' te worden, tentamens waren er niet aan verbonden. Het schoolpracticum bestond op papier alleen uit 'hospiteren', dat wil zeggen het bijwonen van lessen. Wel was het zo dat de vakdidactici, die verantwoordelijk waren voor het schoolpracticum, op den duur eisen stelden aan het aantal zelf te geven lessen en aan het maken van een behoorlijk verslag.

Belangrijk was ook dat aan alle universiteiten vakdidactici voor wiskunde werden benoemd. Dat waren eerst nog kleine baantjes voor docenten die hun sporen in het onderwijs hadden verdiend, maar die functies kregen op den duur meer omvang en inhoud. Het leidde ook tot de eerste serieuze vakdidactische publicaties, zo'n honderd jaar na het boek van Jan Versluys: *Didactische Oriëntatie voor Wiskundeleraren* door Johan Wansink, en wat later *Didactiek van de Wiskunde* van Joop van Dormolen.

Wat zo'n universitaire lerarenopleiding precies in hield, hoe die was georganiseerd, hoe de samenwerking tussen algemeen onderwijskundigen en vakdidactici was geregeld en welke eisen werden gesteld hing sterk af van de omstandigheden aan de betreffende universiteit en faculteit. Het vrijblijvende karakter van de eerste jaren verdween langzamerhand, maar er bleven grote onderlinge verschillen.

Een echte stap vooruit werd pas weer gezet begin jaren tachtig, toen de omvang van de lerarenopleiding werd bepaald op vier maanden. Dat leidde tot het ontstaan van geïntegreerde blokcursussen, waarin algemene onderwijskunde, vakdidactiek en schoolpracticum veel meer één geheel vormden dan daarvoor meestal het geval was. In 1987 volgde een laatste stap: de invoering van de tweede fase lerarenopleiding, met de duur van één jaar, te volgen na het behalen van het doctoraal diploma.

Op papier was nu alles goed voor elkaar. Toch waren er ook wel zorgen. Gedurende een reeks van jaren was de instroom van eerstejaars wiskundestudenten zorgwekkend laag. Veel van die toch al weinige studenten waren niet van plan het onderwijs in te gaan, zeker niet als dat nog een heel jaar studie na hun doctoraal vereiste.

Wat ook niet hielp was dat veel wiskundefaculteiten weinig belangstelling hadden getoond voor hun lerarenopleidingen en die hadden afgeschoven naar de sociale faculteit. Voor wiskundestudenten was de lerarenopleiding in de jaren van hun vakstudie vaak onbekend, en dus ook nogal eens onbemind. Het gevolg was dat de universitaire lerarenopleidingen wiskunde vaak een moeizaam bestaan leidden.

Begin jaren zestig werd de wiskundige inhoud van de staatsexamens voor de MO-aktes grondig gemoderniseerd. Ook werd de didactische component van de MO-opleidingen steviger opgepakt. Voor de 'akte-Q' moest nu een serieus examen worden afgelegd, afgenomen door vakdidactici in plaats van nauwelijks geïnteresseerde wiskundigen. In de jaren zestig en zeventig kon een MO-akte ook op de universiteiten, door het afleggen van een aantal wiskundetentamens, worden behaald. Door het deelnemen aan de universitaire lerarenopleiding werd voldaan aan de eisen voor de akte-Q.

Door de overheid georganiseerde MO-examens, waarvoor een ratjetoe van opleidingen bestond, werden op den duur niet meer bij de tijd gevonden. In 1990 werden die afgeschaft. Ook de universitaire MO-route verdween. In plaats daarvan kwamen er eerstegraads deeltijdsopleidingen, ondergebracht bij hbo-instellingen waar ook al vol- en deeltijds tweedegraads opleidingen bestonden. Die komen hierna aan de orde.

Een revolutie: De NLO's

Bevoegdheden voor de mulo (de voorloper van de mavo) en het beroepsonderwijs konden heel lang alleen door het behalen van een LO- of N-akte worden verkregen. Dat veranderde radicaal, begin jaren zeventig, door de oprichting van heel nieuwe instituten: de Nieuwe LerarenOpleidingen. Dat waren instellingen die opleidden tot het beroep van leraar voor het lager en middelbaar beroepsonderwijs, de mavo en onderbouw havo-vwo. Er kwamen uiteindelijk tien van dit soort instellingen.

Het geheel nieuwe was vooral dat die opleidingen vanaf het begin de twee componenten, vakstudie en beroepsvoorbereiding, in één geheel aanboden. Zo'n geïntegreerde beroepsopleiding bestond natuurlijk al heel lang voor het basisonderwijs, de 'kweekschool', maar voor het voortgezet onderwijs was het iets heel nieuws. Een ander nieuw aspect was dat studenten een bevoegdheid voor twee vakken verwierven.

De oprichting van de NLO's was een onderdeel van de revolutie die eind jaren zestig, begin jaren zeventig het Nederlandse voortgezet onderwijs totaal veranderde. De mammoet-wet bracht een heel nieuwe onderwijsstructuur, en vanuit de politiek en de maatschappij werd veel van het onderwijs verwacht. Voor wiskunde kwam daar nog iets bij: de opkomst van wat later het realistisch reken-wiskundeonderwijs zou gaan heten. De NLO's zouden, door het anders opleiden van nieuwe leraren, een sleutelrol moeten gaan vervullen bij het nastreven van

>

de nieuwe onderwijsidealen. Dat idealisme, sommigen noemden het pretenties, van die tijd spat nog van de bladzijden van de special uit 1986 af. Niet alle NLO's waren even revolutionair als de SOL, maar dat *Euclides* al voor de tweede keer (de eerste keer in 1977) nu juist aan de meest progressieve opleiding uitvoerig aandacht besteedde, was karakteristiek voor het klimaat dat toen de NVvW en *Euclides* domineerde.

I Wie zijn de studenten?

De meeste studenten hebben een havo-, sommige een vwo-diploma. De mannen zijn in de meerderheid, ongeveer 85 %. In totaal zijn er nu 250 studenten die de opleiding tot wiskundeleraar volgen, op een totaal van 11 docenten.

Interessanter dan dergelijke feiten is de houding die studenten hebben ten opzichte van de opleiding en de opleiders. Zonder wetenschappelijke pretenties geven we hieronder een aantal typen. De meeste studenten hebben iets van meerdere typen in zich verenigd.

De Wiskundige. Wiskunde-leraar worden betekent voor hem allereerst wiskunde bestuderen. Hij ontkent niet dat er nog wat meer bij komt kijken, maar dat is bijzaak.

De Onderwijshervormer. In het onderwijs ging tot nu toe alles fout, dat moet nu maar eens grondig worden aangepakt.

De Kindervriend. Voor hem is het leraarschap: omgaan met kinderen, dat bracht hem er toe dit beroep te kiezen. „Waarom wiskunde? Je moet nu eenmaal kiezen, en wiskunde was ik wel goed in”.

De Lesgever. Niets is fijner dan anderen iets uit te leggen, te helpen moeilijke dingen gemakkelijk te maken.

Het Natuurtalent. „Je bent als leraar in de wieg gelegd (zoals ik) of je leert het nooit”.

De Afhankelijke. Zit vol vertrouwen in de docenten: „Zeggen jullie maar wat ik moet doen”. Hij wil alles doen waarvan de docent zegt dat het bijdraagt voor zijn leraarschap.

figuur 3 fragment van het SOL artikel uit *Euclides* 52-10 (1977)

Maar die NLO's van toen bestaan allang niet meer als aparte instellingen. In de jaren negentig woedde een enorme fusiegolf in het hoger beroepsonderwijs, en de NLO's werden onderdeel van zeer grote hbo-instellingen, en vormden daar met de ook opgeslokte pabo's een educatieve faculteit. Zo'n faculteit biedt een heel scala van opleidingen aan: voltijdopleidingen voor de basisschool en tweedegraads voor het voortgezet onderwijs, en deeltijdopleidingen voor de basisschool en tweedee- en eerstegraads voor het voortgezet onderwijs. De aloude aktes zijn verdwenen. Alleen de universitaire lerarenopleidingen zijn de fusiedans ontsprongen. Wat er nu precies in al die opleidingen gedaan wordt – wie het weet mag het zeggen. De tweedegraadsopleidingen hanteren zowel een vakdidactische als een vakinhoudelijke kennisbasis en een landelijke kennistoets. De universitaire lerarenopleidingen werken samen in de Interuniversitaire Commissie Leraren. Er is dus wel onderlinge afstemming, maar er zullen ook nog wel heel wat verschillen zijn. Voor veel leraren zal het allicht niet zo duidelijk zijn wat er nu precies in al die diverse opleidingen aan vak- en beroepscomponent gedaan wordt. Misschien weer eens tijd voor een *Special*?

Nederland liep internationaal heel lang achter op het terrein van lerarenopleidingen, met zijn eenzijdige nadruk op vakkennis en verwaarlozing van de beroepscomponent. Dat laatste is helemaal voorbij. Het merkwaardige is echter dat we ook nu weer uit de pas lijken te lopen. In nogal wat landen om ons heen is het tweetraps-model weer in de mode: eerst een aantal jaren vakstudie, gevolgd door een of twee jaren beroepsvoorbereiding. Ik zie dat hier nog niet zó snel gebeuren, maar wie weet!

Over de auteur

Harm Jan Smid was leraar wiskunde en lerarenopleider aan de TU Delft. Hij is auteur van een aantal boeken en artikelen over de geschiedenis van het Nederlandse wiskundeonderwijs. E-mailadres: harmjansmid45@gmail.com

Vlieger

Een ruit die tot een vlieger zei:

'Ik ben een vlieger, net als jij',

*bracht hem daarmee in zielenstrijd
inzake zijn identiteit.*

De arme vlieger dacht en dacht,

Maar kreeg de stelling niet ontkracht,

Waarop hij riep vol kwade zin:

'Ik gooi die vent zijn ruiten in.'

Helaas een ruit is louter lijn,

Heeft vensterbank nog raamkozijn.

Zodat er bij gebrek aan glas

Geen represaille moog'lijk was.

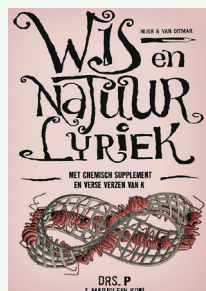
De vlieger bracht nog hoopvol uit:

'Ben ik misschien dan ook een ruit?'

Maar nee, helaas, alweer een strop,

Ook deze vlieger ging niet op.

Marjolein Kool



De dichtbundel Wis- en natuurlyriek van Drs. P. en Marjolein Kool is herzien en uitgebreid.

Eredoctoraat voor Ionica Smeets



Ionica Smeets

De Open Universiteit heeft een eredoctoraat toegekend aan Ionica Smeets, hoogleraar Wetenschapscommunicatie aan de Universiteit Leiden en hoofd van de Leidse afdeling Science Communication and Society. Zij ontving het eredoctoraat vanwege de wijze waarop zij een voorbeeld is voor hoe met wetenschapscommunicatie de kloof tussen experts en het algemeen publiek kan worden overbrugd. Ionica Smeets is een groot pleitbezorger van het belang van het onderzoek naar wetenschapscommunicatie en het opleiden van wetenschappers hierin.

Bron: <https://www.ou.nl/-/eredoctoraat-voor-ionica-smeets-tijdens-dies-natalis-open-universiteit>

Eersteklasser wint Junior Wiskunde Olympiade 2024

Op zaterdag 22 juni vond de zestiende editie van de Junior Wiskunde Olympiade plaats. Hiervoor worden de 100 + 100 beste deelnemers bij de Kangoeroewedstrijd voor klas 1 en 2 uitgenodigd. In totaal zijn er 40 punten te behalen. De uitslag:

Klas 2

- 1 Nishaaz Haque – 30 punten
- 2 Zixiang Weng – 24 punten
- 3 Amos 't Hart en Willem van Drunen – beiden 23 pnt.

Klas 1

- 1 Justys van der Beek – 31 punten (hoogste score van alle deelnemers)
- 2 Lennox de Kok-Somviengxay – 27 punten
- 3 Pepijn Olthof – 25 punten.

De opgaven zijn te vinden via onderstaande bron.

Bron: wiskundeolympiade.nl

W4Kangoeroe SMART-finale weer een succes

Dit jaar werd voor de negende keer de SMART-finale georganiseerd. De beste twintig deelnemers van groep 7, van groep 8 en van het vmbo (smart-niveau) werden uitge-

nodigd om op dinsdag 4 juni deel te nemen aan deze finale. De maximale score was 56 punten. De uitslag:

Groep 7:

- 1 Jason Zwart – 37 punten
- 2 Rens Banken – 35 punten
- 3 (ex aequo) Pomme Jaspers en Stefan Li – 28 punten

Groep 8:

- 1 Melle van der Harst – 43 punten
- 2 Jacob Pronk – 42 punten
- 3 (ex aequo) Marja Dijkstra en Vincent Jonasse – 37 pnt.

vmbo:

- 1 Alex Wang – 36 punten
- 2 Bas Sterke – 30 punten
- 3 Kejin Hu – 29 punten

Bron: www.w4kangoeroe.nl

13-jarige wint eerste prijs op wereldkampioenschap rekenen



George Nakad

Hij maakt daarbij gebruik van een speciaal soort telraam, een zogeheten soroban.

Bron: <https://groot-waterland.nl>

De 13-jarige George Nakad uit Monnickendam heeft de eerste prijs behaald bij de internationale hoofd-rekenwedstrijd Alberto Coto Mental Maths Olympiad. 'Voor wedstrijden oefen ik elke dag twee tot drie uur,' aldus George. Hij leerde een paar jaar geleden rekensommen te maken met behulp van een Japanse techniek.

App voor toeristen in Amsterdam

Onderzoekers van het CWI hebben een algoritme ontwikkeld dat toeristen helpt hun bezoek aan Amsterdam te coördineren op basis van persoonlijke voorkeuren en beschikbaarheid. Met behulp van een smartphone-app vullen gebruikers de tijd in dat ze in Amsterdam zijn en een lijst met voorkeurslocaties die ze willen bezoeken, hoeveel pauzes ze willen, welke vervoersmiddelen ze kiezen (lopen, openbaar vervoer, taxi, enz.) en binnen enkele seconden hebben ze een dagplanning met een tijdschema en een route. De app kan ook suggesties geven over welke andere locaties in de dagplanning kunnen worden opgenomen.

Het interview met onderzoeker Rob van der Mei is te zien via onderstaande bron.

Bron: <https://www.cwi.nl/nl/nieuws/waiting/>

'Mijn mooiste les is als leerlingen echt met elkaar aan het werk zijn.'

Interview met Joanne de Jager

Joanne de Jager werkt bij het Metis Montessori Lyceum in Amsterdam, een school met een eigen onderwijsvisie. Wereldburgerschap, Montessori en innovatief leren zijn speerpunten in die visie. Metis heeft drie profielen: coderclass, technasium en Kunst&Co. Op het Metis zitten leerlingen met autisme in de eerste en tweede klas bij elkaar om te wennen aan de schoolcultuur om daarna door te stromen naar de reguliere klassen.

Wat motiveerde jou om wiskundeleraar te worden?

'Ik werkte in de bouw als architect. In 2010 was er een crisis in de bouw en was er weinig werk. Ik hield altijd al heel erg van wiskunde en ben toen de tweedegraads opleiding gaan doen. Ik heb die in twee jaar afgerond en heb daarna de eerstegraads gedaan. Ik werk nu zo'n elf jaar in het onderwijs.'



Joanne met leerlingen aan het werk

Hoe komt wereldburgerschap in jouw wiskundelessen terug?

'Elk jaar moeten we als wiskundesectie aangeven wat we gaan doen aan wereldburgerschap. In de eerste plaats vinden wij van de sectie dat wiskunde een wereldtaal is. Verder besteden we geregeld aandacht aan geschiedenis van de wiskunde, omdat je daarbij kunt laten zien dat wiskunde op verschillende plekken in de wereld is ontwikkeld. Je kunt laten zien welke fantastische inbreng de islamitische wereld heeft gehad. Voor veel leerlingen is dat nieuw.'



Maquette van het park bij de school, gemaakt voor een vakoverstijgend project

Over Montessori staat op de site dat samenwerkend leren een belangrijk uitgangspunt is van het onderwijs, net als binnen- en buitenschools leren. Kun je hier voorbeelden van geven in jouw eigen lespraktijk?

'In alle klassen werken de leerlingen in groepjes van vier. Ik geef een korte instructie en dan gaan leerlingen aan het werk. De bedoeling is dat als ze vastlopen, ze eerst elkaar helpen. Pas daarna vragen ze hulp aan de docent. Op het gebied van binnen- en buitenschools leren hebben we hele mooie projecten gedaan, bijvoorbeeld

met aardrijkskunde en biologie. Leerlingen kregen een klein kaartje van het park bij de school. Dat kaartje moesten ze eerst vergroten naar de schaal waar we mee gingen werken. Vervolgens gingen ze het park in en onderzochten ze of alles op de kaart, die in 1988 was gemaakt, nog wel klopte. Dat deden ze door te meten. Ze kregen een stok van één meter met een geodriehoek erop. Daarmee konden ze ook de hoogte van gebouwen meten. Uiteindelijk hebben ze een maquette van het park gemaakt die nu nog in het lokaal hangt. Ik vond het een heel mooi project.'

Innovatief leren is een van de speerpunten op het Metis. Onderdeel daarvan is dat jullie een digitale school zijn en alle leerlingen op een laptop werken. Hoe bevalt jou dat?

'Het digitaal werken bevalt ons bij wiskunde niet heel goed. Ook omdat het systeem niet altijd helemaal lekker werkt. Wat wij wel heel veel doen, is dat ze de voorkennis digitaal oefenen en de oefentoets digitaal maken, zodat we in ieder geval een beetje kunnen kijken hoe de voortgang is.

Bij de sectie wiskunde proberen we innovatie meer in de didactiek. We gebruiken *Moderne Wiskunde* waar ik een fan van ben, omdat dat meer onderzoekend leren is. Ik vind het heel leuk dat bijvoorbeeld de cosinusregel zelf ontdekt wordt. Voor sommige leerlingen is dat een openbaring.

Verder proberen we met de sectie geregeld nieuwe didactische werkvormen uit. Onlangs heb ik met collega's een paar lessen gegeven volgens het principe van Building Thinking Classrooms. Dat beviel heel goed. Op school is er een nieuwsbrief waar we dit soort ervaringen delen, zodat andere secties er ook wat aan hebben.'

Wat spreekt jou aan in de manier van werken op het Metis?

'Ik heb echt het gevoel dat we de leerlingen leren verantwoordelijk te zijn voor hun eigen leerproces. Dat hoort echt bij de Montessori-filosofie. We zijn meer begeleider, dan instructeur. Verder hebben we een geweldig team en krijgen we veel vrijheid van het management. Zolang alles lekker draait en je een beetje experimenteert, kun je heel veel doen. Dat vind ik heel fijn.'

Hoeveel uur wiskunde krijgen leerlingen op jullie school?

'Ze krijgen drie uur per week, met uitzondering van wiskunde B in 5 havo en 5 en 6 vwo. In 5 havo en 5/6 vwo is het vier uur in de week. Daarnaast hebben

leerlingen vijf keuze-uren. Dat kan van alles zijn, van yoga tot ondersteuning van de reguliere vakken. Ik had dit jaar een lesje voor 3 vwo-leerlingen die veel moeite met de stof hadden. Die kregen dus eigenlijk vier uur wiskunde. Maar ik had ook een uur voor bijzondere wiskunde voor leerlingen die wiskunde leuk vinden. Daar deden we wedstrijden en bereidde ik ze voor op de Olympiade en Kangoeroe.'



Leerplein. Aan de grote tafels kunnen leerlingen werken.

Hoe ziet een wiskundeles eruit op het Metis?

Er is niet een vast stramien. Gemeenschappelijk is dat de hele sectie met *Moderne Wiskunde* werkt. En we geven allemaal dezelfde toetsen. Onze scores waren altijd in orde, maar we vonden dat we het wel heel druk hadden. Toen zijn we gestopt met het afnemen van vaardigheden-toetsen, maar gingen de resultaten achteruit. Sinds een jaar of drie zijn we weer begonnen met de vaardigheden-toetsen en ik heb het idee dat dat weer veel betere resultaten oplevert.

Het Metis heeft leerpleinen, waar leerlingen zelfstandig kunnen werken. Daar zijn mooie, grote werkplekken en leerlingen zijn er ook echt aan het werk, want ze zitten voor de ontspanning in de kantine. De mobiele telefoon is er niet toegestaan. Je kunt dus instructie in de klas geven en leerlingen op een leerplein laten werken. Het hoeft dus niet allemaal in je klas te gebeuren.

Werken jullie ook vakoverstijgend? Zo ja, kun je daar voorbeelden van geven?

'Nou, wij willen dat graag wel veel meer doen. We zijn nu al een jaar met de natuurkundesectie in overleg om af te stemmen over welke stof we wanneer behandelen en hoe we dat uitleggen. We wijzen leerlingen erop als een onderwerp bij beide vakken terugkomt.

>

Voor komend jaar gaan we een project met biologie in de tweede klas doen. Leerlingen hebben zich in de eerste klas voor biologie een aantal keren gemeten. Met die data gaan we voor statistiek aan de slag. Ze gaan diagrammen maken en statistische maten berekenen.

Bij het vak Onderzoek en Ontwerpen moeten ze vaak maquettes maken en op schaal tekenen. Wij sloten daar bij wiskunde op aan met een project over schaal en verhoudingen.

Mijn ervaring is wel dat je alles goed moet vastleggen, want als er een andere docent komt, zakt zo'n project gauw weg. Een ander knelpunt is de tijd die je hebt om een project op te zetten. Vaak moet het tussendoor, maar we krijgen steeds meer tijd voor projecten op school.'

Hoe wordt rekenen bij jullie op school gegeven?

Er is pas geleden een werkgroep rekenen opgericht, waar alle bètavakken en economie in zitten. Die groep gaat rekenbeleid opstellen. Tussen natuurkunde en wiskunde is er al afstemming over hoe we met formules omgaan. Dat willen we eigenlijk ook met de rekenvaardigheden doen.

"Je bereikt meer als je hoge verwachtingen hebt, dan wanneer je hoge eisen stelt."

Welke leerling is jou echt bijgebleven?

'Ik doe ze allemaal tekort als ik er maar eentje noem, maar ik moet nu denken aan een leerling die toevallig aan die maquette heeft gewerkt en heeft geholpen met hem op te hangen en me ook gevraagd heeft om daar heel goed op te passen. Bij ons kun je ook versnellen en dit meisje kon een heel jaar overslaan, maar moest voor wiskunde nog wel stof inhalen. Dat deed ze bij mij in de les. Voor mij was het heel leuk dat ze overal voor in was. Ik kon een herleiding van de abc-formule laten zien en andere dingen met haar doen die niet in de lesboeken staan. Toen ze van school ging, kreeg ik een briefje van haar dat ze zo van wiskunde hield en dat ze zo blij was geweest met mij als docent. Ik was een beetje verbaasd, want ik gaf haar al een tijd niet meer les.'

Wat doe je nu anders dan aan het begin van je carrière?

'Oh, ik ben veel relaxter. Na vijf jaar krijg je een zekere rust en van grote invloed is geweest dat ik een cursus

didactisch coachen heb gehad. Die cursus doen alle docenten bij ons op school. Ik heb geleerd dat je meer bereikt als je hoge verwachtingen hebt, dan wanneer je hoge eisen stelt. In het begin stelde ik hele hoge eisen en dan werd ik ongeduldig als ze niet aan het werk gingen. Nu lok ik ze meer uit de tent en als het echt niet gaat, dan denk ik: "het komt wel op een ander moment".'

Wat vind jij belangrijk om je leerlingen mee te geven?

'Dat als je een probleem moet oplossen, je dingen gaat proberen en dat je helemaal de verkeerde weg in kan slaan, maar dat dat helemaal niet erg is. Het is belangrijk om te weten dat er heel veel paden zijn die je kunt bewandelen en dat je uiteindelijk wel ergens terecht komt. Dat geldt voor wiskunde en misschien ook wel in het leven. Ik hoor van collega's dat ze vroeger echt blokkeerden bij wiskunde en het idee hadden dat ze geen wiskunde konden. Daar wil ik mijn leerlingen voor behoeden. Dat is wel een uitdaging.'

Kun je een voorbeeld geven van een les waar je trots op bent?

'Ik vond de Building Thinking Classroom les met 5 havo wel echt heel geweldig, want ze deden allemaal actief mee, terwijl er anders altijd wel een paar zijn die afhaken. Ik had een eindexamenopgave wiskunde A opgeknipt over het toepassen van formules. De voorbereiding van de les viel dus reuze mee. Ik heb het ook een keertje in de derde klas gedaan. Die leerlingen zeiden: "we hebben nog nooit zo hard gewerkt." Dat zijn eigenlijk mijn mooiste lessen als ze echt met elkaar aan het werk zijn.

Wat ik trouwens ook heel leuk vind om te vertellen, is dat ik na eindexamens opgaven selecteer die ze in de onderbouw al kunnen maken. Afgelopen jaar was er in vwo wiskunde B een opgave met een cirkel, waar ze met pythagoras en gelijkvormigheid dingen konden oplossen. Die heb ik in de derde klas laten maken. Ze waren heel trots dat ze dat al konden.

Over de interviewer en geïnterviewde

Liesbeth Coffeng is eindredacteur van *Euclides* en ze geeft wiskunde op het mbo (Laboratoriumtechniek) en hbo (Biomedische research). E-mailadres: l.coffeng@nvw.nl

Joanne de Jager is wiskundeleraar op het Metis Montessori Lyceum in Amsterdam en is sinds 2019 bestuurslid van de NVvW. E-mailadres: j.dejager@nvw.nl

Zo snel mogelijk naar de finish

In *Euclides* 99-5 stond een zeer inspirerend artikel van Hans van Bommel over een paar verwante problemen die te maken hebben met een tekort aan snelle transportmiddelen (en een overvloed aan langzame). Achtereenvolgens komen aan de orde het probleem van twee mensen met een zak aardappelen en een fiets, drie meisjes met één fiets, en de veralgemenisering van het laatste probleem. Gerard Koolstra vond een alternatieve werkwijze.

Inleiding

Het artikel vond ik om diverse redenen zeer interessant:

- Het gaat om problemen waarbij het opstellen van een wiskundig model van belang is, en door het kleine aantal variabelen ook haalbaar lijkt op het voortgezet onderwijs.
- De gekozen aanpak leidt tot vrij pittige vergelijkingen (vooral als men probeert de zaak zo algemeen mogelijk aan te pakken). Dit leidt tot vragen als:
 - In hoeverre is dit een argument om meer aandacht te besteden aan (dit type) algebraïsche vaardigheden?
 - In hoeverre is het een argument om meer te doen met computeralgebra e.d.?
 - Is er geen eenvoudiger aanpak mogelijk?

Na wat nadenken, en mede met behulp van een paar belangrijke aanwijzingen in het genoemde artikel, denk ik dat er op de laatste vraag een positief antwoord te geven is. Het probleem dat ik wil behandelen is zo goed als gelijkwaardig^[1] met het probleem van n meisjes en één fiets dat Henk van Bommel in het genoemde artikel behandelt.

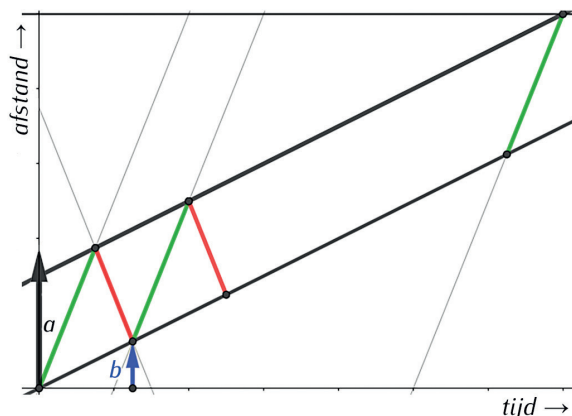
N personen en één auto

Ik ga uit van een groep leerlingen van N personen die op werkweek is onder leiding van een groep docenten. De groep is lopend op weg naar de thuisbasis en zal nog een poosje onderweg zijn. Om een of andere reden is het zaak de groep zo snel mogelijk op de bestemming te krijgen. Er is echter slechts één auto beschikbaar met plaats voor m leerlingen. Hoe zet je die zo efficiënt mogelijk in?

Naar boven afronden van N/m geeft het aantal 'vrachttjes' dat met de auto vervoerd wordt, ik noem dit aantal k . Om iedereen zo snel mogelijk op de plaats van bestemming te krijgen is het essentieel dat er niet wordt stilgestaan.

De auto wordt alleen gebruikt om een groepje een stukje verder te brengen. Voor en na het autoritje wordt er 'gewoon' gewandeld.

De grafiekschets in figuur 1 (in het artikel van Hans van Bommel staat een soortgelijke grafiek) illustreert dat:



figuur 1

De wandelaars lopen voordat ze zijn opgehaald via de onderste stijgende lijn, en nadat ze zijn afgezet via de bovenste. De groene lijnstukken stellen de autoritjes met passagiers voor; de rode de terugritten om weer nieuwe op te halen. Bij de laatste rit worden de laatste leerlingen direct naar het eindpunt gebracht.

De vraag is hoe ver moeten de leerlingen weggebracht worden om ervoor te zorgen dat iedereen zo snel mogelijk bij het eindpunt is?

Na een ritje heen over afstand a en een ritje terug is de auto een afstand b dicht bij het eindpunt gekomen. De kunst is het zo uit te mikken dat de laatste groep precies op afstand a van het eindpunt kan worden opgepikt.

>

Alle leerlingen arriveren (als ze precies even hard wandelen) dan precies gelijk, ze hebben allemaal dezelfde afstand gewandeld (en ook dezelfde afstand in de auto gezeten).

Er is een vrij eenvoudig verband tussen a en b , maar het vraagt enige berekening en/of redenering om dat in te zien. Vaak wordt bij dit soort vragen gewerkt met absolute getallen voor de diverse snelheden en de af te leggen afstanden. Dat wordt als je overgaat op variabelen al snel wat onoverzichtelijk. In het stuk van Hans van Bommel wordt gewerkt met de factor α , de verhouding tussen de snelheden van de auto (of fiets) en de wandelaars. Dat is een stap vooruit, maar het wordt nog wat makkelijker wanneer je de wandelsnelheid gewoon op 1 stelt.^[2] Voor het gemak stellen we de af te leggen afstand ook op 1. Het zal duidelijk zijn dat deze afspraken niet van wezenlijk belang zijn voor het probleem.^[3] De snelheid^[4] van de auto noem ik v .

“Het is een goede gewoonte om een gevonden formule te controleren met een paar eenvoudige getallen.”

Verband tussen a en b

Het verband tussen a en b kan op diverse manieren bepaald worden. Zelf vind ik de volgende wel charmant: ten opzichte van de groep leerlingen die wandelt en nog geen autoritje heeft gemaakt heeft de auto bij het wegbrengen een snelheid van $v - 1$ en bij de terugrit zonder passagiers een snelheid van $v + 1$. De terugrit duurt dus korter, en de benodigde tijd is $\frac{v-1}{v+1}$ keer die van de heenrit.^[5]

De afstand die de auto (t.o.v. een vast punt) aflegt tijdens het wegbrengen hadden we al a genoemd. De afgelegde afstand tijdens het terugrijden naar de groep wandelaars

is dus $\frac{v-1}{v+1}a$. Dit betekent voor het resultaat van heen en

terugrijden:

$$b = a - \frac{v-1}{v+1}a = \left(\frac{v+1}{v+1} - \frac{v-1}{v+1}\right)a = \frac{2}{v+1}a \quad [1]$$

Het gaat om k autoritten. Na $k - 1$ ritten moet de afstand tot het eindpunt gelijk zijn aan a .

Dat geeft: $(k - 1)b + a = 1$

Invullen van [1] geeft:

$$\frac{2(k-1)}{v+1}a + a = 1.$$

Als k en v gegeven zijn is dit ook voor leerlingen een makkelijk op te lossen vergelijking.

De ‘algemene oplossing’ is wat lastiger, maar wellicht toch goed te doen, bijvoorbeeld op onderstaande manier:^[6]

$$\frac{2(k-1)}{v+1}a + \frac{v+1}{v+1}a = 1$$

$$\frac{2(k-1) + v+1}{v+1}a = 1$$

$$\frac{2k + v - 1}{v+1}a = 1$$

En dus:

$$a = \frac{v+1}{v+2k-1} \quad [2]$$

Het is een goede gewoonte om een gevonden formule te controleren met een paar eenvoudige getallen. We doen dat ‘stapsgewijs’.

Als $v = 10$ betekent dat $a = \frac{11}{2k+9}$.

Bij één groep geldt (uiteraard) $a = 1$. Dat betekent dat iedereen meteen naar het eindpunt wordt gebracht. De afstand wordt nu 10 keer zo snel overbrugd, en dat betekent een tijdswinst van 90%.

Meer algemeen is de benodigde tijd nu $\frac{1}{v}$ en de

tijdswinst $\frac{v-1}{v}$.

Bij twee groepen krijgen we $a = \frac{11}{13}$, dat betekent dat de leerlingen nog maar $\frac{2}{13}$ van de afstand hoeven te wandelen en $\frac{11}{13}$ in de auto zitten. De benodigde tijd is

nu $\frac{11}{13} \cdot \frac{1}{v} + \frac{2}{13}$ (ook te schrijven als $\frac{2v+11}{13v}$) en de

tijdswinst is $\frac{11(v-1)}{13v}$.

Een algemene formule voor de benodigde tijd is:

$$T = \frac{a}{v} + (1-a) = \frac{a + (1-a)v}{v} =$$

$$\frac{a + v - av}{v} = \frac{a(1-v) + v}{v} = a \frac{1-v}{v} + 1$$

Met behulp van [2] is dit te schrijven als :

$$\frac{v+1}{v+2k-1} \cdot \frac{1-v}{v} + 1 =$$

$$1 - \frac{v-1}{v} \cdot \frac{v+1}{v+2k-1} = 1 - \frac{v^2-1}{v(v+2k-1)} \quad [3]$$

Bij de laatste vorm van [3] is de tijdswinst meteen duidelijk.

Als er maar één groep mee hoeft is de tijdswinst $\frac{v^2-1}{v(v+1)}$

wat te herleiden is tot $\frac{v-1}{v}$.

Bij twee groepen is de winst $\frac{v^2-1}{v(v+3)}$ en bij zeven groepen $\frac{v^2-1}{v(v+13)}$.

Voor $v = 3$ levert dit een bescheiden winst op van

$$\frac{8}{3 \times 16} = \frac{1}{6}.$$

Maar bij $v = 20$ is de winst echter aanzienlijk:

$$\frac{399}{20 \times 33} \approx 0,60.$$

Wanneer we v naar oneindig laten naderen (dat hoeft niet te betekenen dat we de lichtsnelheid overschrijden, het kan ook zijn dat de wandelaars niet meer vooruit te branden zijn) nadert de tijdswinst – onafhankelijk van het aantal groepen – naar 1. Dat klopt aardig met wat je mag verwachten.

Tot slot

Nog een paar opmerkingen over de eerste twee vragen die ik stelde. Ik hoop dat het werken met dit soort problemen motiverend kan werken t.a.v. een vlotte beheersing van herleidingen/herschrijven van expressies met variabelen. Het heen en weer pendelen tussen het algemene geval en getallenvoorbeelden kan naar mijn overtuiging goed werken bij het 'meekrijgen' van leerlingen. Het werken met computeralgebra biedt zeker mogelijkheden, maar ook een zeer reëel gevaar van verslaving, zoals geldt voor veel andere 'gemaksproducten'.

Noten

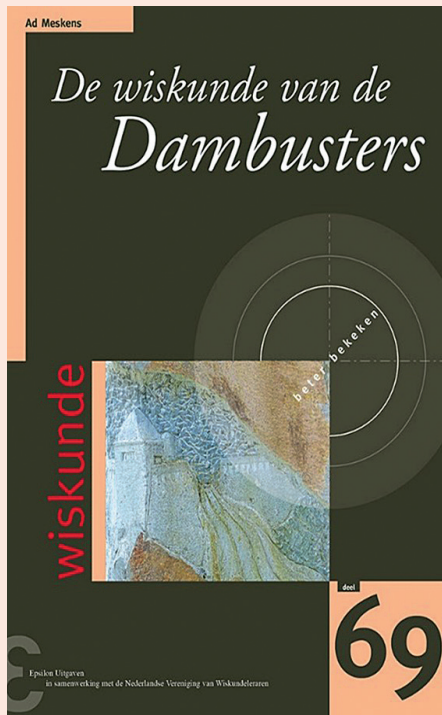
- [1] Bij Hans van Bommel is de 'chauffeur' geen aparte functie, maar deel van de groep.
- [2] Afstanden werden traditioneel, en in een recreatieve setting ook nog wel, gemeten in uren (of kwartieren of minuten) gaans.
- [3] Deze formulering wordt ook wel 'bewijs door directe intimidatie' genoemd. Vaak is het echte bewijs nog niet eens zo eenvoudig, en een enkele keer klopt de stelling gewoon niet. Ik laat dit hier even zitten.
- [4] Eigenlijk de snelheidsverhouding tussen de auto en de wandelaars.
- [5] In dit model rijdt de auto altijd even hard, en is de tijd nodig voor 'in- en uitladen' te verwaarlozen.
- [6] Er zijn uiteraard allerlei varianten. Te overwegen is bijvoorbeeld om eerst links en rechts met $v + 1$ te vermenigvuldigen. Dat geeft $(2(k-1) + v + 1)a = 1$.

Over de auteur

Gerard Koolstra houdt zich na een dienstverband van veertig jaar als docent, bezig met allerlei zaken binnen en rond het wiskundeonderwijs, onder meer als redacteur van de WiskundeE-brief. E-mailadres: gerardk@xs4all.nl



Zebra 69: De wiskunde van de Dambusters



Titel: De wiskunde van de Dambusters

Auteur: Ad Meskens

Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam, 2023

Zebra-reeks, deel 69, 64 pagina's

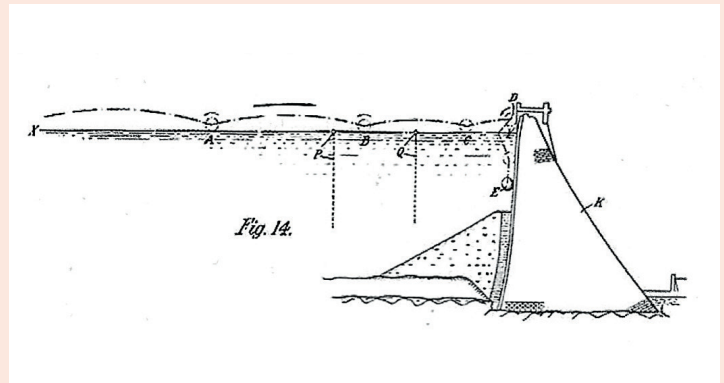
ISBN: 978-90-5041-200-1

Prijs: € 10,00

Inleiding

Dit deel van de Zebra-reeks behandelt een historisch onderwerp, bekend onder verschillende namen 'the Dambuster raid' of 'die Möhnekatastrophe'. Het gaat om de vernietiging door de Britse luchtmacht van twee, voor de Duitse elektriciteitsvoorziening belangrijke dammen, de Möhnedam (Noordrijn-Westfalen) en de Ederdam (Hessen), in mei 1943. Met de toenmalige beperkte technologie moesten piloten een geslaagde aanval uitvoeren op een relatief smal doelwit midden in vijandig oorlogsgebied. Ad Meskens behandelt de wiskundige en natuurkundige problemen die opgelost moesten worden in de voorbereiding op dit precisiebombardement. Er werd gebruik gemaakt van een nieuw type bom, een stuiterbom, die een precies aantal keren over een vooraf te bepalen afstand over het water moest stuiteren om te eindigen tegen de dam, op een vooraf te bepalen hoogte, zie figuur 1.

Vergelijkbaar met een steentje over het water laten scheren, maar met een veel grotere precisie. Op internet is veel te vinden over deze raid, maar tot nu toe niet over de gebruikte wiskundige kennis.



figuur 1 Tekening van het principe van de stuiterbom (National Archives, Kew, Richmond, 53/627)

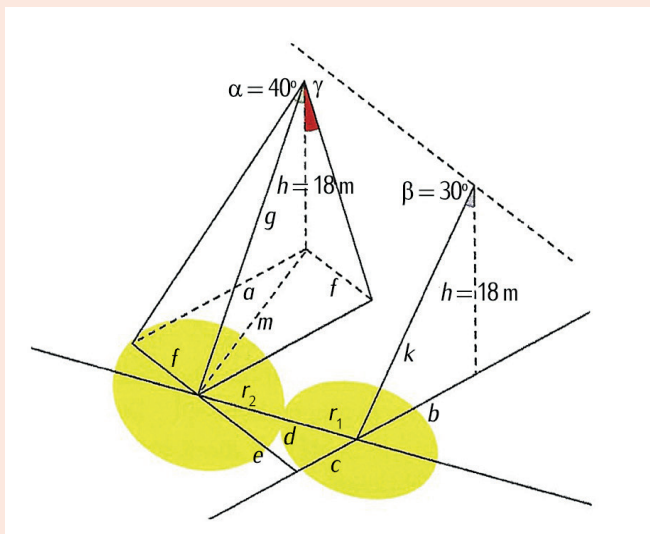
Negen hoofdstukken

Als inleiding en ter voorbereiding bevat hoofdstuk 1 een stukje oorlogsgeschiedenis, een vergelijking van Britse maten met het metrieke stelsel, een korte bespreking van typen dammen en een paragraaf over GeoGebra 3D. In de hoofdstukken 2 tot en met 5 verdiepen de leerlingen zich steeds verder in het onderwerp aan de hand van korte stukjes theorie en veel korte opdrachten, opbouwend in moeilijkheid, soms met GeoGebra. De antwoorden staan achterin. Hoofdstuk 2 herhaalt wat natuurkundige begrippen en toepassingen: druk van een waterkolom, potentiële en kinetische energie, vectoren. De hoofdstukken 3 en 4 behandelen wiskundige onderwerpen ter voorbereiding op het echte probleem. Ballistische banen, in de context van afgevuurde projectielen, bommen werpen, dropping van postzakken, steentjes die over het wateroppervlak scheren en loodrechte projectie met uitleg aan de hand van tekeningen van een kubus, met de drie projectievlakken en twee tekenopdrachten. Voor het vervolg is het overigens voldoende als leerlingen afbeeldingen van projecties kunnen lezen en interpreteren, zelf tekenen is niet strikt noodzakelijk.

Hoofdstuk 5 vormt de kern, het behandelt gedetailleerd de voorbereidingen die in de jaren voor mei 1943 plaatsvonden, een mengeling van trial-and-error, gebruik van fysieke modellen, wiskundige berekeningen en schattingen en de gevonden oplossingen. Ter sprake komen onder meer een schaalmodel van een vergelijkbare dam

“Dit boekje combineert algemene geschiedenis, geschiedenis van wiskunde, natuurkunde, wiskunde en ethiek.”

in Wales voor proefnemingen, het bepalen van hoogte, snelheid en de hoek waaronder stuiterbommen gedropt moesten worden om na drie keer stuiteren tegen de damwand op de juiste hoogte terecht te komen, het bepalen van de juiste afstand voor de dropping, binnen een marge van 15 meter.



figuur 2 Met behulp van schijnwerpers werd de exacte afwerphoogte van 18 m bepaald.

Hoofdstuk 6 gaat over de raid zelf, tijdens de nacht van 16 op 17 mei 1943, inclusief de gevolgen voor de burgerpopulatie en krijgsgevangenen in het getroffen gebied, de kosten en baten voor de Britten en het snelle herstel van de dammen voor de elektriciteitsvoorziening. Hoofdstuk 7 geeft het onderwerp een nieuwe en actuele dimensie door het stellen van morele vragen die samenhangen met het gebruik van wiskunde voor oorlogshandelingen, als discussieonderwerp voor en met leerlingen. Als een soort wiskundig toetje volgt nog een hoofdstuk over ellipsen. Hoofdstuk 9 bevat antwoorden op de meeste vraagstukken, met toelichting.

Brede interdisciplinariteit

Dit is een helder geschreven boekje in een activerende stijl, met veel illustraties, zowel tekeningen als foto's. Het combineert algemene geschiedenis, geschiedenis van wiskunde, natuurkunde, wiskunde en ethiek en is een mooi voorbeeld van brede interdisciplinariteit. Een paar kleine puntjes van kritiek. Een enkele keer staat er een fout in de berekening, wees daar op verdacht. De volgorde van enkele paren vragen, bijvoorbeeld in hoofdstuk 3, kan wellicht beter omgedraaid worden. Soms is de formulering wat onduidelijk, bijvoorbeeld in 5.1. Dat neemt niet weg dat het boek als geheel goed geschreven is en er verzorgd uitziet.

Deze Zebra is wat betreft wiskundige technieken en natuurkundige kennis in de eerste plaats geschikt voor vwo-leerlingen met wiskunde B en uiteraard ook voor leerlingen met wiskunde D. Al lezend vroeg ik mij af of het ook voor leerlingen met profiel EM of CM, dus met geschiedenis als eindexamenvak, en met wiskunde A, geschikt zou zijn. Het lijkt mij het proberen waard. De casus is ook voor hen interessant, ze zullen wat minder vaak zelf de oplossingen van de wiskundige problemen vinden, maar ze kunnen de gegeven oplossingen begrijpen en gebruiken en het biedt inzicht in wiskundige en morele aspecten achter de oorlogsverhalen.

Over de auteur

Jenneke Krüger heeft gewerkt als docent natuurwetenschappen en wiskunde, in onder meer havo en vwo en als onderwijsontwikkelaar in diezelfde vakken. Ze houdt zich nu bezig met de geschiedenis van de verspreiding en het gebruik van wiskundige kennis en met interdisciplinair onderwijs.

E-mailadres: jenneke.kruger@gmail.com

Deel 1 Dageraad

Een praktisch-historische blik op wiskunde

Welk praktisch nut heeft de wiskunde in de landen rond de Middellandse zee en in Europa in de loop der eeuwen gehad? Wat vinden we daarvan terug in het huidige onderwijs? In een reeks artikelen, waarvan dit de eerste is, gaat Roel van Asselt op zoek naar voorbeelden van historische toepassingen van wiskundige kennis. Roel legt hierbij de nadruk op de bruikbaarheid van de kennis in het beroepsonderwijs.

Inleiding

Voor zover bekend waren wiskundige activiteiten in oorsprong, rond 2000 vC, vooral gericht op praktische alledaagse toepassingen. Er zijn ons uit de vroegste wiskunde van de Soemeriërs, Babyloniërs en Egyptenaren geen theoretische verhandelingen of bewijsvoeringen bekend over hun formules en berekeningen. Dat gebeurt pas bij de Grieken, rond 600 vC. We zouden het eerste gebruik van wiskunde wel kunnen classificeren als 'ingenieurswiskunde': het navolgen van complexe rekenalgoritmen die (correcte) oplossingen boden voor praktische vraagstukken.^[1] Het gaat dan om vraagstukken uit de landmeetkunde, ruilhandel, financiële transacties, bouw(kunst), belastingheffingen, astronomie en annex de kalenderrekening.^[2]

Niettemin getuigen de vroegste berekeningswijzen en toepassingen van een diepgaand begrip en vindingrijkheid in meetkunde, getaltheorie en complexe wiskundige relaties.

Wiskunde in klei

Er zijn de laatste 150 jaar honderdduizenden kleitabletten met inscripties in het gebied rond Mesopotamië teruggevonden, waarvan ongeveer 300 met rekenkundige en wiskundige inhoud.^[3] Helaas veelal zonder contexten die verwijzen naar de praktisch toepassing ervan. Uit de Oud-Babylonische tijd rond 1700 vC weten we daardoor dat men al omvangrijke stelsels van lineaire en kwadratische vergelijkingen oploste. Vermoedelijk ten behoeve van lengte-, oppervlakte- en volumebepalingen in de bouw, de architectuur en de astronomie. Kwadratische vergelijkingen loste men veelal op met een vorm van kwadraatafsplitsing binnen een meetkundige context, met vierkanten en rechthoeken.^[4] Ook beheersten de Babyloniërs al de samengestelde interestberekeningen. Zo konden zij

antwoord geven op vragen als: hoeveel jaar duurt het voordat een kapitaal zich verdubbelt als het wordt uitgezet tegen 15% jaarrente?^[5] In veel van hun berekeningen pasten zij – 40 eeuwen geleden al – de techniek van elimineren, substitueren en approximeren toe.

De Soemerische en Babylonische cultuur zijn een van de eerst bekende culturen die werkten met een positioneel getalsysteem, op basis van het grondtal 60, dus met 59 symbolen voor 1, 2, 3, ..., 58 en 59, en verder machten van 60. Het getal 0 kenden, of gebruikten ze niet.^[6]

Waarom 60? Het meest gehoorde vermoeden is dat 60 tien echte delers heeft, wat handig is voor een reken- en maateenheid. In onze huidige tijd- en hoekmeting vinden we het grondtal 60 nog terug.

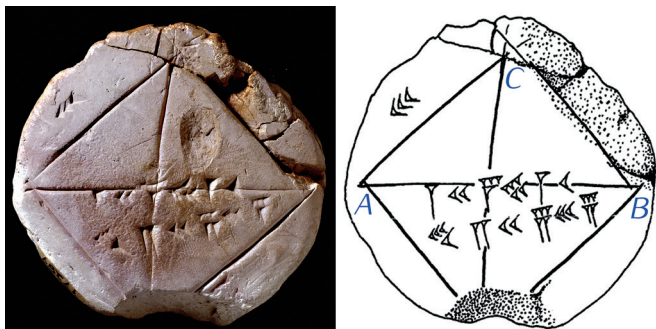
Babyloniërs hadden rond 1800 vC al een benadering gevonden voor wat wij tegenwoordig π noemen. Aanvankelijk werd daarvoor de waarde 3 aangehouden; met drie keer de diameter van een cirkel werd dan de omtrek van een cirkel ingeschat. Later vinden we op kleitabletten een waarde van 3,125, genoteerd als:

 (3; 7; 30), wat hier betekent: $3 + 7 \times 60^{-1} + 30 \times 60^{-2}$, dat gelijk is aan $3\frac{1}{8}$. Deze benadering van π heeft een relatieve fout van 0,5%.

Een vroege Pythagoras

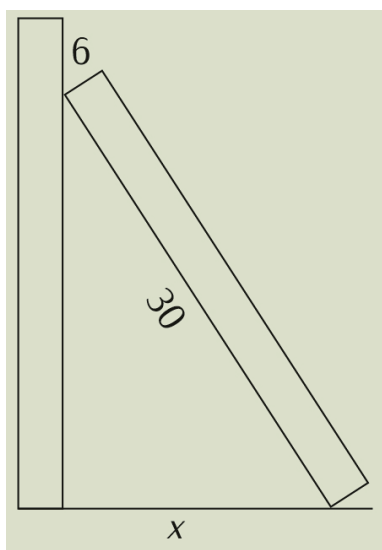
Opmerkelijk is dat de Babyloniërs 1200 jaar voordat Pythagoras zijn stelling bewees, deze al toepasten, zoals blijkt uit een kleitablet uit $\pm$ 1700 vC, zie figuur 1.

Dat tablet is hier nagetekend en van de hoekpuntletters A, B en C voorzien. Het gaat om de gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC, waarin $AC = BC = 30$. AB moet dan $30\sqrt{2}$ zijn volgens Pythagoras. We kunnen het schuin gezette getal ontcijferen: er staat 42; 25; 35



figuur 1 De stelling van Pythagoras, 1700 vC

wat in dit geval overeen komt met $42 + 25 \times 60^{-1} + 35 \times 60^{-2}$, wat gelijk is aan $42,4263888... \cdot 30\sqrt{2}$ is gelijk aan $42,42640687....$. De Babyloniërs vonden dus een ongelooflijk goede benadering van de lengte van AB. Het betreft een relatieve fout van ongeveer 0,00005%, die nooit door metingen zou kunnen zijn bereikt, maar alleen met de stelling van Pythagoras.^[7]



figuur 2 bepaling van x

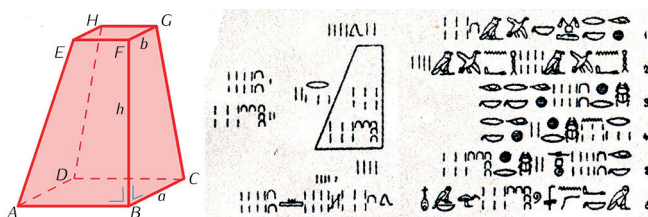
In figuur 2 zie je nog een in klei gevonden toepassing die niet zonder Pythagoras is op te lossen. De vraag is hier: hoe groot is x als de balk van 30 el, 6 el is weggegleeden? Er zijn ook kleitabletten gevonden met lijsten met kwadraten van vele getallen. Vermoedelijk gebruikten zij die onder meer om snel vermenigvuldigingen uit te voeren. Immers het product van x en y is gelijk aan $\frac{1}{4}((x + y)^2 - (x - y)^2)$; met de kwadratentabel is de uitkomst dan snel bepaald.

Maar hoe bepaalden zij destijds de waarde van, bijvoorbeeld, $\sqrt{2}$? Vermoedelijk meetkundig, op de volgende manier. Een rechthoek met zijde 1,5 en $\frac{2}{1,5}$ heeft eenzelfde

oppervlakte als een vierkant met zijden $\sqrt{2}$. Het gemiddelde g_1 van 1,5 en $\frac{2}{1,5}$ (1,41666...) kunnen we weer als zijde van een rechthoek nemen met als andere zijde $\frac{2}{g_1}$, en van beide zijden weer het gemiddelde g_2 nemen enzovoort.^[8] Deze recursie convergeert snel naar een vierkant met een zijde van $\sqrt{2}$. Zie verder punt 1 in Praktische toepassingen in de les aan het eind van het artikel.

Papyrusrollen

De Egyptenaren gebruikten hun wiskunde uitsluitend als gereedschapskist voor praktische zaken. In tegenstelling tot de talloze kleitabletten uit het oude Babylon met wiskundige berekeningen zijn er van de Egyptische primaire bronnen met wiskundige berekeningen slechts enkele papyrusrollen bewaard gebleven van rond 2000 en 1600 vC., maar die bevatten wel meer aanwijzingen dan de kleitabletten over het praktische gebruik van wiskunde. We komen daar vraagstukken tegen van het type: gegeven een rechthoekige driehoek met een oppervlakte van 20 en een rechthoekzijde die 2,5 keer zo groot is als de andere rechthoekzijde. Wat zijn de afmetingen van de driehoek?^[9] Ook vinden we veel berekeningen aan oppervlakten en inhouden van geometrische figuren zoals afgeknotten piramides. Bij de berekening van het volume V van een afgeknotten piramide, nagetekend in figuur 3 (links), wordt de (correcte) formule $V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$ gebruikt, genoteerd in het eenvoudig hiëratisch schrift. Zie ook figuur 3 (rechts).



figuur 3

Tevens vinden we eenvoudige toepassingen van, en vraagstukjes over getalrijen (meetkundige en rekenkundige rijen), het werken met gemiddelden en eenvoudige goniometrie; onderwerpen die we ook nu nog in onze schoolwiskunde tegenkomen.

De getalsystemen die de Egyptenaren gebruikten waren niet *positioneel*; getallen werden opgebouwd door stapeling van eenheden, tientallen, honderdtallen enzovoort. De Egyptenaren hadden evenals de Babyloniërs geen (gedocumenteerd) begrip van negatieve getallen en het getal 0.

>

We zien op een van de papyrusrollen een eerste schatting van de verhouding tussen de oppervlakte van een cirkel en het kwadraat van de straal van die cirkel (onze π dus). Ze gingen daarbij uit van de schatting dat een vierkant met zijde 8 dezelfde oppervlakte heeft als een cirkel met straal $4\frac{1}{2}$. Als je zo'n vierkant en cirkel op elkaar legt, klopt dat aardig. Onder die aanname geldt dan dat de bedoelde verhouding $\frac{64}{4,5^2}$ gelijk is aan ' π '. Dat levert voor π een waarde van 3,1604938...., een relatieve fout van 0,6%.^[10]

Breukrekenen

Egyptenaren waren meesters in het breukrekenen. Dat deden ze met breuken waarvan de teller altijd 1 was.

Historici denken vanwege:

- 1 de notatie-eenvoud; werken in hiërogliefen met gestapelde cijfers – en zelfs in het volkse hiëratisch systeem – is bewerkelijk, zie ook figuur 3 (rechts);
- 2 de snelle toepassing in verdelingskwesties; veel praktisch breukgebruik kwam neer op verdelen van land, voedsel, salaris en voorraden, waarbij werken met breuken met teller 1 direct duidelijkheid geeft;
- 3 de snelle inschatmogelijkheid van de grootte van een breuk; net als bij onze decimale schrijfwijze is het gemakkelijk in te schatten hoe groot ongeveer de breuk is als je die steeds kan afschatten met een kleinere, duidelijke fractie.

Een voorbeeld van het breuk rekenen is het vraagstuk uit circa 1650 vC: hoe verdelen we negen broden in gelijke delen over tien personen? In het dagelijks leven van toen kon dit een betalingswijze zijn voor een klusje dat door tien personen was uitgevoerd. Omdat $\frac{9}{10} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30}$ kon een evenwichtige verdeling van de broden plaatsvinden. Andere praktische toepassingen van rekenkunde uit die tijd zijn:

- 1 het bepalen van perceelgrenzen en de perceelomvang na de jaarlijkse overstromingen van de Nijl en de bijbehorende belastingheffingen op dat perceel en op de landbouwopbrengsten;
- 2 dosering van geneesmiddelen;
- 3 kalenderberekening op basis van onder meer de maancyclus en het zonjaar;
- 4 constructie en benodigde hoeveelheden materialen voor de bouw van piramiden en andere grote bouwwerken;
- 5 astronomie gerelateerde berekeningen, zoals het uitlijnen van tempels en piramides op hemellichamen en hoekberekeningen bij observaties van planeten en sterren.

Een bijzonder aspect van de Egyptische bouwkunst vinden we in het construeren van monumenten en piramides in perfect rechte, haakse hoeken. Steeds meer wetenschapshistorici bevestigen thans dat zij dit uitvoerden met zogenoemde koordenspanners.^[11] Deze bouwlieden maakten gebruik van de eigenschap dat een driehoek met zijde 3, 4 en 5 rechthoekig is. Ze spanden die driehoek op met deze zijdenlengten om rechte hoeken te construeren. Dit principe wordt ook nu nog in constructies toegepast. Er zijn zelfs nu nog bouwvakken te koop, gebaseerd op deze 3-4-5-steek.

“Hoe verdelen we negen broden in gelijke stukken over tien personen?”

De vader van de wiskunde

We schakelen door naar Griekenland en zijn stadstaten van na 700 vC. Het praktisch nut van wiskunde bij de oude Grieken was vooral het begrijpen van de plaats van de mens in het universum en het scheppen van orde in de kosmos.

We nemen aan dat de Grieken rond 600 vC zijn begonnen met het onderbouwen van wiskundige wetmatigheden met sluitende (onontkoombare) redeneringen. Een van de oudst bekende Griekse wiskundige (filosoof en puissant rijk zakenman) aan wie eerste bewijsvoeringen worden toegedicht, is Thales van Milete, die leefde rond 600 vC, zie figuur 4. Om die reden wordt hij ook wel 'de vader van de wiskunde' genoemd. Thales reisde veel rond in Egypte en mogelijk ook in Mesopotamië, en kwam daar in contact met wiskunde, vooral de meetkunde.



figuur 4 Thales van Milete

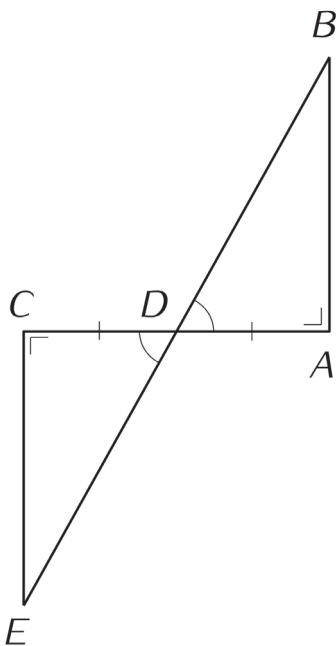
Zijn aanpak om in de wiskunde iets sluitend aan te tonen, is nog steeds de basis van onze (school)wiskunde.

Een paar voorbeelden.

Dat iedere driehoek ACB , waarvan C op de omtrek van een cirkel ligt en AB de middellijn is, een rechte tophoek C heeft, was wellicht al eeuwen bekend. Thales zou deze zeer bruikbare stelling als eerste hebben *bewezen*.

Tevens wordt aan hem toegeschreven dat hij de hoogte van een piramide kon bepalen door een stokje in de grond te steken en te wachten tot de schaduw van dat stokje even lang was als het stokje zelf. De lengte van de slagschaduw van de top van de piramide is dan gelijk aan de hoogte van de piramide. Hele praktische en nog steeds bruikbare meetkunde dus.

Een andere toepassing die aan Thales wordt toegeschreven berust op congruentie van driehoeken en gaat over de afstandsbeoordeling tussen onbereikbare punten, zie figuur 5. Als de afstand AB niet rechtstreeks te meten is vanwege obstakels of op zee, kan een loodlijn op AB vanuit A uitkomst brengen. Halverwege die loodlijn AC (C is vrij te kiezen) plaatsen we het punt D . De lijn DB trekken we – zo nodig op het oog – door totdat deze de loodlijn uit C in E treft. Uit de congruentie van de beide driehoeken volgt dat $AB = CE$.



figuur 5

Praktische toepassingen in de les

1. Er is ook een andere recursieve formule bekend voor wortelberekeningen bij de Babyloniërs. Het gaat om $\sqrt{a^2+h} \approx a + \frac{h}{2a}$, waarin de benadering $a + \frac{h}{2a}$ steeds weer als de a uit $a^2 + h$ wordt hergebruikt en h er steeds voor zorgt dat $a^2 + h$ gelijk is aan 2. Bij de tweede iteratie vinden we al vier decimalen van $\sqrt{2}$. Deze formule is pas bij opgravingen in de eerste helft van de 20^e eeuw teruggevonden. We weten niet hoe de Babyloniërs deze formule hebben ontdekt: vermoedelijk via een meetkundige weg, maar de precieze herkomst is onbekend. De beide recursieve betrekkingen om $\sqrt{2}$ te bepalen kunnen leerlingen zelf als programmeropdracht uitvoeren.
2. De hier aangegeven meetkundige toepassingen die aan Thales worden toegeschreven, zijn zeker vanwege hun praktisch nut in het (beroeps)-onderwijs te behandelen en te bewijzen, met de historische context.
3. Als in de afgeknotte piramide uit figuur 3, b gelijk is aan a dan ontstaat een blok. Je ziet dat de formule voor V dan nog steeds juist is.
4. Als we in figuur 5 punt D zouden kiezen, zó dat $AD : DC = p : q$ dan kan de lengte van AB nog steeds in die van CE worden uitgedrukt.

In de volgende aflevering zullen we zien wat de vroeg-Griekse wiskunde ons en hen heeft gebracht.

Op de website vind je de noten en een literatuurlijst.



vakbladeuclides.nl/1002praktischegeschiedenis_1

Over de auteur

Roel van Asselt studeerde wiskunde aan de Universiteit Utrecht en was wiskundeleraar aan de HTS in Hengelo. Hij was eindredacteur van een wiskundemethode voor het hoger onderwijs. Daarnaast was hij oprichter en directeur van het expertisecentrum LICA (Landelijk Informatie- en expertiseCentrum Aansluiting hbo). Binnen Saxion Hogescholen werd hij lector Instroommanagement en Aansluiting mbo/vo-hbo. E-mailadres: r.v.asselt@ziggo.nl

De ondoorzichtige stap die goniometrie logisch maakt

Iedere docent kent die eureka-momenten wel: dat je, omdat je van een bepaald onderwerp je leerlingen écht wil leren hoe het zit, ineens zelf je eigen conceptuele kennis op een hoger plan tilt. Joeri Moulen beschrijft hoe hem dat bij goniometrie overkwam.

Inleiding

Toen ik wiskunde volgde op de middelbare school, doorzag ik het onderdeel goniometrie nooit helemaal. Pas toen ik dit onderwerp zelf moest gaan uitleggen aan mijn bovenbouwgroepen besloot ik mij erin vast te bijten en pas los te laten zodra ik écht inzicht had in dit onderwerp. De meeste leerlingen die in de onderbouw, met relatief weinig inspanning, goed zijn in wiskunde merken dat het in de bovenbouw meestal niet meer helemaal vanzelf gaat. Daar waar het conceptmatig goed te volgen is om de formules van een lijn op te stellen door twee punten, wordt het een stuk uitdagender als je de formules van de raaklijn wilt opstellen. Tenminste als je helemaal wilt doorzien wat er gebeurt. Voor mij was het nooit voldoende om simpelweg iets aan te nemen. Ik wilde altijd weten *waarom* dit zo was. Deze behoefte had ik al toen ik in aanraking kwam met wiskunde en als wiskundedocent des te meer.

Trucjes

Ik ben allergisch voor het aanleren van trucjes, omdat dat in mijn optiek het tegenovergestelde is van waar wiskunde om draait. Leerlingen vragen zich bijvoorbeeld af wanneer ze goniometrische identiteiten of de stelling van Pythagoras ooit nog gaan gebruiken in hun leven. Maar dan missen ze iets heel fundamenteels. Het uitvoeren van wiskunde zorgt er feitelijk voor dat er nieuwe, *probleemoplossende*, verbindingen worden gelegd in je hersenen. Het gaat in mijn ogen dus veel meer over welke technieken iemand heeft ontwikkeld om wiskundige problemen op te lossen. En deze technieken zijn, bewust of onbewust, ook op andere momenten van je leven inzetbaar. Het is niet voor niets dat er bij het roosterbureau vaak nog meegekeken wordt door een wiskundige.

Sos cas toa

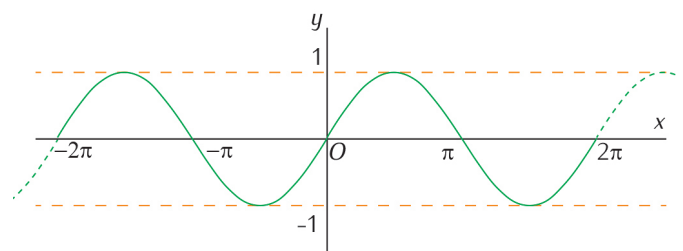
Voordat je met goniometrie begint heb je als het goed is geleerd wat de definitie is van sinus, cosinus en tangens. Je docent heeft je laten zien dat er bij een rechthoekige driehoek iets heel moois blijkt te gelden als we de hoek α vastzetten.

Er blijkt namelijk een een-op-een relatie tussen een hoek en de verhouding van twee van de drie zijdes van de rechthoekige driehoek te zijn. De grootte van de driehoek is daarbij irrelevant. Vanwege gelijkvormigheid vermenigvuldig je namelijk alle zijdes met dezelfde vergrotingsfactor en daardoor zal de verhouding van twee van de drie zijdes altijd hetzelfde blijven.

In plaats van te zeggen 'bij een rechthoekige driehoek met een scherpe hoek α van 30° verhouden de overstaande rechthoekzijde en de schuine zijde zich altijd als 1 staat tot 2' is dit wiskundig, veel korter, te noteren als ' $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$ '.

De grafiek van $f(x) = \sin(x)$

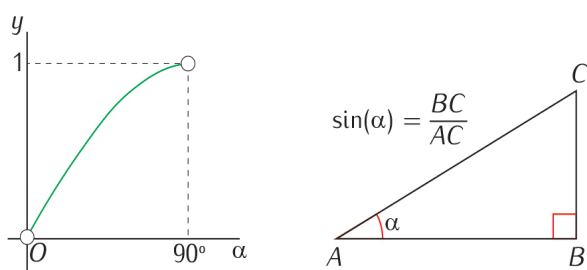
Je zou je leerlingen nu kunnen leren dat de sinusgrafiek cyclisch is. Dat de standaardgrafiek, op regelmatige wijze, fluctueert tussen -1 en 1. En dat de periode 2π is. Gelukkig zullen alle docenten méér uitleg geven.



figuur 1 De grafiek van $f(x) = \sin(x)$

De sinusgrafiek m.b.v. sos cas toa

Als je probeert de sinusgrafiek te tekenen m.b.v. sos cas toa, zul je al snel merken dat je heel beperkt bent. Een rechthoekige driehoek bestaat namelijk zolang $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Dit betekent dat je bij 0° en 90° een soort perforatie moet tekenen, want bij deze hoeken heb je géén rechthoekige driehoek. En alleen hiertussen is de sinusgrafiek gedefinieerd. Maar hoe kom je dan aan de cyclische sinusgrafiek?



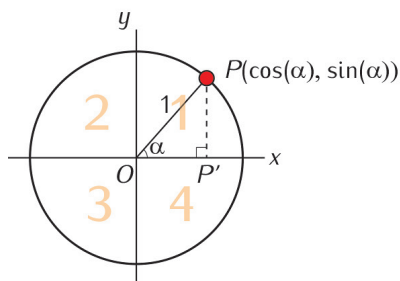
figuur 2

Nieuwe definitie sinus en cosinus

Het onderdeel goniometrie wordt geïntroduceerd m.b.v. de eenheidscirkel. Met behulp van de constructie van de rechthoekige driehoek $OP'P$ en sos cas toa kun je in het eerste kwadrant vrij eenvoudig afleiden dat de volgende identiteiten gelden:

$$\cos(\alpha) = \frac{OP'}{1} = \frac{x_P}{1} \rightarrow x_P = \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{P'P}{1} = \frac{y_P}{1} \rightarrow y_P = \sin(\alpha)$$



figuur 3

Wat dit echter betekent, werd mij pas veel later duidelijk. Hier worden de sinus en de cosinus geherdefinieerd voor het 2^e, 3^e en 4^e kwadrant.

Vanaf nu definiëren wij de sinus als: 'wat is de y -coördinaat van een punt P op de eenheidscirkel bij een gegeven hoek α ?' En de cosinus als: 'wat is de x -coördinaat van een punt P op de eenheidscirkel bij een gegeven hoek α ?' En het meest geraffineerde is dat de oude definitie, sos cas toa, nog steeds geldt binnen deze nieuwe definitie voor het 1^e kwadrant. Ik vind het verwonderlijk dat er een moment in de geschiedenis geweest is, waarbij wiskundigen peinsden over de vraag 'kunnen we de definitie van de sinus en cosinus niet uitbreiden? Wat als we het domein α weten te vergroten?' En dat is nu exact wat met deze nieuwe definitie op consistente wijze bereikt wordt. Zonder deze uitbreiding waren de sinus- en cosinusgrafiek nooit de bouwstenen geworden waarmee wij alle grafieken in een functievoorschrift kunnen ondervangen. De ontdekking van de fourieranalyse door Joseph Fourier medio 1800 laat mij nog steeds versteld staan over de eindeloze mogelijkheden die wiskunde biedt.

De cirkel is rond

Door de nieuwe definitie wordt de sinusgrafiek gecreëerd die wij allemaal kennen. Je kijkt dus telkens bij een gegeven hoek α wat de y -coördinaat is van een punt P op de eenheidscirkel. En ondanks dat je geen rechthoekige driehoek hebt waarbij $\alpha = 0^\circ$ of $\alpha = 90^\circ$, kunnen wij wel degelijk een punt P tekenen op de eenheidscirkel bij deze hoeken. En zo volgt dat $\sin(0^\circ) = 0$ én $\sin(90^\circ) = 1$. En zo kun je ook alle andere punten construeren van de cyclische sinusgrafiek.

Ondanks dat ik tijdens mijn eigen middelbare schooltijd uit de voeten kon met goniometrie, viel dit kwartje bij mij pas veel later. En op dit soort eureka-momenten heeft wiskunde iets magisch voor mij. We hebben het allemaal ongetwijfeld meermaals ervaren, maar dát is waar wiskunde in mijn ogen om draait. In dit geval is goniometrie geen trucje meer, maar heb je écht door wat er gebeurt.

Over de auteur

Joeri Moulen is werkzaam als eerstegraads docent wiskunde bij Vista college vavo Heerlen en tevens docent wiskunde op YouTube 'Mathastic'. E-mailadres: info@mathastic.nl

Betekenisgericht wiskundeonderwijs in de bovenbouw

Ongeïnteresseerde leerlingen, materiaal waar leerlingen het nut niet van inzien, en weinig mogelijkheden voor zelfsturend leren komen waarschijnlijk vrij vaak voor in bovenbouw wiskundelessen. In dit artikel wordt betekenisgericht wiskundeonderwijs gepresenteerd als een middel om deze problemen aan te pakken door wiskunde interessanter te maken en leerlingen zelfstandigheid te geven.

Inleiding

De volgende situatie is waarschijnlijk herkenbaar: leerlingen die weinig enthousiasme en interesse tonen voor het leren van wiskunde en twijfel hebben over de relevantie ervan. Leerlingen die bezig zijn met het ontdekken van hun zelfstandigheid en identiteit krijgen te maken met een vak waarin ze weinig invloed hebben op wat ze moeten leren. Hierdoor worden leerlingen intellectueel niet gestimuleerd, ze hebben vaak een passieve houding of zijn in de les met wat anders bezig dan wiskunde. Kortom, leerlingen voelen zich niet betrokken bij wiskunde.

De wiskundeonderwerpen in de bovenbouw, zoals gepresenteerd in het boek, zijn inderdaad vaak droog en lijken niet relevant voor het toekomstige leven van de leerlingen. Deze presentatie van wiskunde staat natuurlijk in schril contrast met de werkelijke relevantie van deze onderwerpen – differentiëren en stochastiek zijn relevant voor iedere toekomstige carrière, niet alleen voor STEM-richtingen. Bovendien speelt wiskunde een steeds grotere rol in het alledaagse leven, hoewel dit vaak verborgen blijft, denk bijvoorbeeld aan 'racial algorithms' die mensen van kleur minder kansen geven om een krediet te krijgen of aan klimaatmodellen. Betekenisgericht wiskundeonderwijs richt zich op het betrekken van leerlingen zodat zij niet alleen de wiskunde begrijpen, maar ook de relevantie ervan inzien voor hun toekomstige leven. Zo leidt het tot manieren van lesgeven die meer ruimte bieden aan leerlingen om interesses te volgen of om intellectueel uitgedaagd te worden op hun niveau. Maar is betekenisgericht wiskundeonderwijs haalbaar voor de abstracte onderwerpen in de bovenbouw? Hierna zal niet alleen worden aangetoond dat dit kan, maar ook dat het mogelijk of zelfs verstandig is om wiskunde in de bovenbouw op een betekenisgerichte manier te onderwijzen.

Bronnen van betekenis voor wiskunde

Hoe kan wiskunde betekenisgericht worden gemaakt? Het is niet zo dat betekenis altijd van toepassingen uit het echte leven hoeft te komen. Betekenis kan ook ontstaan door het ervaren van een intellectueel uitdagend probleem dat vraagt om opgelost te worden.



figuur 1 Bronnen van betekenis in wiskundeonderwijs

Anne van Streun^[1] identificeerde de volgende bronnen van betekenis van wiskunde, zie figuur 1:

- 1 Leerlingen ervaren de kracht van algemene probleem-oplossende heuristieken die ook toepasbaar zijn buiten de wiskunde: *In de eerste plaats moeten leerlingen leren problemen op te lossen, hun hersens leren gebruiken. Wiskunde en meetkunde in het bijzonder zijn zeer geschikte terreinen om denkmethoden onder de knie te krijgen.*
- 2 Leerlingen ervaren dat wiskunde nuttig is om de wereld te begrijpen: *In de tweede plaats moeten leerlingen leren toegepaste situaties te formuleren in wiskundige modellen, zoals formules of vergelijkingen, want daar gaat het om bij het toepassen van wiskunde.*
- 3 Leerlingen ervaren dat wiskunde een unieke, krachtige discipline en manier van nadenken is: *Ten derde moet wiskunde gebaseerd zijn op de Elementen van Euclides, te vitaliseren met een nieuw didactisch concept. Het ging hem niet om de meetkunde zelf, maar om het wiskundig en logisch denken.* ^[2]

Voor bovenbouw wiskunde zou nog een andere bron van betekenis kunnen worden toegevoegd:

4 Leerlingen worden intellectueel gestimuleerd door het herkennen van de eenvoud achter schijnbaar ingewikkelde wiskunde: ze leren bijvoorbeeld getaltheorie om te begrijpen hoe check-digits in een IBAN-code ervoor zorgen dat typfouten herkend worden door de bankapp. Of leerlingen leren waar algoritmes verborgen zitten, het principe van de werking ervan en hoe deze getraind worden.^[3]

Deze vier bronnen van betekenis laten zien dat er meerdere manieren zijn om tot betekenisgericht wiskunde-onderwijs te komen. Dit biedt ruimte voor variatie in methodes, van traditionele lessen naar innovatieve methodes of zelfs zelfgestuurd project-gebaseerd leren zonder de behoefte aan een vaste lesstructuur, zie verderop. Het betekent ook dat het betrekken van leerlingen bij bewijzen of definities als betekenisgericht en plezierig kan worden ervaren, als het de leerlingen intellectueel stimuleert of als het ze helpt om de unieke aard van wiskunde te ontdekken.

Voorbeeld: tachograaf

Laten we kijken naar een voorbeeld. Figuur 2 toont een betekenisvolle beginopdracht over integreren. Leerlingen moeten hier hun eigen vraag opstellen:

- Is het mogelijk dat mevrouw Huizing een pauze nam wanneer de tachograaf geen data toont?
- Reed zij te hard toen de tachograaf niet aan het opnemen was?
- Kunnen we bepalen hoe snel zij reed, door de grafiek in het lege gedeelte te reconstrueren?



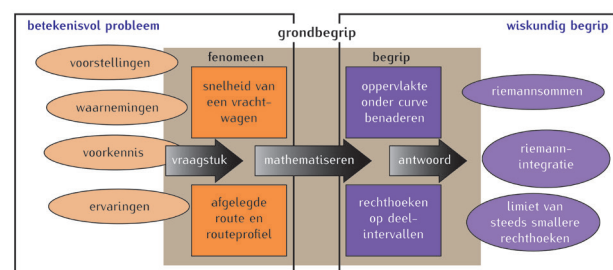
figuur 2 Betekenisgerichte opdracht voor het ontdekken van integreren^[4]

In de volgende stap verzamelen leerlingen gegevens uit de grafiek, maar ook uit de context (bijv. de afstand tussen

Bochum en München, die rond de 650 km ligt, maar hier is bepaald door $86875 \text{ km} - 86432 \text{ km} = 443 \text{ km}$. Het centrale idee dat leerlingen moeten hebben is dat de oppervlakte onder de grafiek een maat is voor de afgelegde afstand. Bijvoorbeeld, tussen 4:45 en 6:10 's ochtends heeft mevrouw met een snelheid van 40 km/h (tot 5:10) en 80 km/h (tussen 5:10 en 6:10) gereden en dus de volgende afstand afgelegd:

$$\frac{25}{60} \text{ h} \cdot 40 \frac{\text{km}}{\text{h}} + \frac{60}{60} \text{ h} \cdot 80 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{100}{6} \text{ km} + 80 \text{ km} \approx 96,67 \text{ km}$$

Hier zijn de producten geïnterpreteerd als oppervlakten onder de grafiek. Deze strategie kan ook toegepast worden op de rest van de grafiek. Met deze informatie kunnen studenten de afstand vinden die gereisd is tijdens het gat in de grafiek en zo ook de snelheid van de vrachtwagen bepalen in het gat, omdat het precies 1 uur lang is. De opdracht laat zien hoe leerlingen een relevant wiskundig concept uit het curriculum zelf kunnen ontdekken, vanuit hun voorkennis, waarnemingen en ervaringen, zie figuur 3. Vanuit wiskundig perspectief kan de tachograaf geïnterpreteerd worden als een grafiek van een functie, die kwalitatief de snelheid gedurende de reis (tijd) bepaalt. Het redeneren vanuit rechthoeken op deelintervallen bereidt de leerlingen voor op het idee van Riemannsommen. Echter, omdat de functie bijna een stapfunctie voorstelt zullen leerlingen waarschijnlijk niet op het idee komen om kleinere intervallen te nemen voor een betere benadering. Daarom zal het idee van een 'limiet van steeds kleinere rechthoeken' niet worden ontwikkeld in deze opdracht, dat vraagt om het zoeken naar vergelijkbare opdrachten.



figuur 3 Schema van de ontwikkeling van een curriculair wiskunde begrip van een betekenisvol probleem ^[5]

Ondersteuning

De tachograafopgave illustreert een typische uitdaging van betekenisgericht onderwijs, namelijk het afwegen wanneer ondersteuning nodig is en wanneer leerlingen zelf op ontdekkingstocht moeten gaan. Tijdens betekenisgericht wiskunde-onderwijs volgen leerlingen hun individuele trajecten naar het leerdoel, gebaseerd op hun persoonlijke interesses, ervaringen en hun individuele

>

voorkennis van wiskunde, zie figuur 3 links. Figuur 3 toont aan hoe de ideeën van de leerlingen, hun betekenisgeving, tot het beoogde wiskundig begrip kan leiden, dus is het een voorbeeld hoe een betekenisvolle les met de ‘tachograaf’ ingericht moet worden zodat de leerlingen naar het wiskundig begrip kunnen overstappen. Leerlingen moeten overstappen naar ideeën van ‘oppervlakte onder de curve benaderen’ en ‘rechthoeken op deelintervallen’. Maar om leerlingen deze stap te laten maken is er sturing door de docent nodig.

De didactische tool die richtlijnen kan bieden voor sturing is het *grondbegrip* (definitie hieronder). Een grondbegrip toont aan wat de typische juiste manieren zijn om een wiskundig concept te interpreteren. Zo kunnen grondbegrippen richtlijnen bieden voor leraren bij het nemen van beslissingen: onderzoeken leerlingen een grondbegrip gerelateerd aan het beoogde wiskundig begrip, dan kunnen ze zelfstandig verder, gaan ze een andere kant op, dan kan sturing nodig zijn.

Definitie grondbegrip:

Een standaardinterpretatie van een wiskundig concept dat betekenis geeft aan dit concept. Grondbegrippen kunnen ons lesgeven helpen, omdat aangenomen kan worden dat leerlingen een concept begrijpen als ze de grondbegrippen beheersen. Bovendien kunnen grondbegrippen richting geven aan de kennisontwikkeling van leerlingen naar een bepaald wiskundig concept: Hoe kunnen nieuwe grondbegrippen aan eerder verworven grondbegrippen worden gekoppeld? Welke grondbegrippen sluiten aan bij het huidige begrip van leerlingen en welke stappen moeten worden gezet om deze leerlingen verder te brengen?

Het overzicht van grondbegrippen van de integraal in tabel 1 laat zien dat de tachograafopdracht het grondbegrip oppervlakte behandelt en ook het grondbegrip het gemiddelde. Daarom kunnen we verwachten dat leerlingen deze twee methodes zullen gebruiken, of een combinatie van deze twee tot een nieuwe. Sommige leerlingen zullen

wellicht het idee van het optellen van oppervlaktes volgen. Dit idee werd gebruikt in het voorbeeld hierboven door delen van oppervlaktes van de tachograaf van links naar rechts op te tellen, in lijn met de interpretatie van de tachograaf als stapfunctie. In de vervollessen moeten dan de andere grondbegrippen van het integreren worden behandeld en formele procedures worden geïntroduceerd op basis van deze grondbegrippen.

Richtinggevende principes

Er zijn bepaalde principes die richting kunnen geven aan het in praktijk brengen van betekenisgericht wiskunde-onderwijs.

Exploratieprincipe:

De leerlingen moeten een centraal grondbegrip van de onderwijseenheid onderzoeken met informele middelen, op basis van hun alledaagse ervaringen en hun eerdere wiskundige kennis. Leerlingen moeten bijvoorbeeld gegevens onderzoeken met Excel (statistiek), gegevens uit een diagram lezen of nieuwe diagrammen tekenen (zie het voorbeeld van de tachograaf), materiaal gebruiken (luciferpatronen om variabelen te introduceren ^[7]), hun looptempo meten (lineaire functies) of de snelheid meten van een auto die van een helling rolt (kwadratische functies).

Van concept naar procedure:

Het tachograafvoorbeeld laat zien dat leerlingen eerst een concept van Riemannsommen ontwikkelen dat helpt om procedures voor het berekenen van een integraal te begrijpen. Van concept naar procedure geeft dus aan hoe leerlingen hun wiskundig begrip ontwikkelen, namelijk vanuit een grondbegrip dat betekenis geeft aan een informele procedure (optellen van oppervlaktes), die vervolgens wordt geformaliseerd. Van concept naar procedure beschrijft dus ten tweede ook een prioritering: concepten geven betekenis aan formele procedures. Zonder concepten is er geen betekenisvorming, dus geen begrip van waar een procedure goed voor is.^[8]

grondbegrip oppervlakte	grondbegrip reconstructie	grondbegrip gemiddelde	grondbegrip accumulatie
Het doel is om een kromlijinig begrensde oppervlak zo nauwkeurig mogelijk te bepalen.	(Re-)constructie van een grootte uit gegeven veranderingsgegevens, evenals de (re-)constructie van een stamfunctie van een gegeven functie.	Het grondbegrip gemiddelde drukt uit dat een gemiddelde berekend kan worden met behulp van de integraal van een bepaalde functie over een bepaald interval, gedeeld door de lengte van het interval.	Het grondbegrip van accumulatie verwijst naar het proces van verza-men of optellen van deelproducten tot een productsom.

tabel 1 Grondbegrippen van de integraal ^[6]

Type betekenis-gericht wiskunde-onderwijs	Startpunt voor het leren van wiskunde	Hoe leerlingen betekenis ervaren	Scope
Probleemgestuurd onderwijs ^{[1], [7]}	Het ontwikkelen van denkstrategieën gericht op het oplossen van problemen. <i>In de eerste plaats moeten leerlingen leren problemen op te lossen, hun hersens leren te gebruiken. Wiskunde en meetkunde in het bijzonder zijn zeer geschikte terreinen om denkmethoden onder de knie te krijgen.</i> ^[1]	Ervaren van de kracht van wiskundige aanpakken voor verschillende problemen (toepassingen, formeel, modelleren, bewijzen, ...)	Kleinschalig (een of twee lessen)
Genetic teaching ^{[13], [14]}	<i>Hoe wiskundige 'denkobjecten' kunnen helpen om fenomenen uit de werkelijkheid te organiseren en structureren.</i> ^[15]	Ervaren van wiskunde in haar ontwikkeling, door het wiskundig maken van de realiteit met problemen die wiskundigen tegenkwamen toen zij nieuwe wiskunde uitvonden	Kleinschalig (een of twee lessen of als algemeen principe binnen een onderwijseenheid)
Modelling ^[16]	<i>In de basis komt wiskundig modelleren neer op het identificeren van een probleem in de werkelijkheid, het ontwikkelen van een relevante wiskundige representatie, een daarop aansluitende wiskundige oplossing, het interpreteren van deze oplossing in de originele context, en het evalueren van de validiteit van de oplossing om het originele probleem op te lossen.</i> ^[17]	Ervaren van de kracht van wiskunde om de werkelijkheid te begrijpen	Een of twee lessen in het midden van een onderwijseenheid, om kennis te oefenen/toe te passen
Project-based / Challenge-based learning ^[18]	Leerlingen worden geconfronteerd met een werkelijk technisch of maatschappelijk probleem, waarvoor geen kant-en-klare oplossing bestaat. Leerlingen definiëren hun eigen strategie om (een gedeelte van) het probleem op te lossen door middel van wiskunde, maar ook gerelateerde disciplines.	Zelfgestuurd onderzoek naar het gebruik van wiskunde in maatschappelijk relevante problemen	Vijf tot tien lessen, of hele onderwijseenheid, kan dan problem-solving, modellering of genetic teaching bevatten

tabel 2 Conceptualisaties van betekenisgericht wiskundeonderwijs in nationaal en internationaal onderzoek naar wiskundeonderwijs

Verbind representaties:

In het tachograafvoorbeeld kan de grafische representatie van Riemannsommen worden ontwikkeld op basis van informele tekeningen van de leerlingen. Deze tekeningen kunnen verder worden uitgewerkt met een symbolische beschrijving van deze Riemannsommen. Dit toont het centrale principe dat representaties systematisch ontwikkeld moeten worden vanuit de initiële informele representaties, door ze te verbinden.^[9] Het Enactief-Iconisch-Symbolisch-principe stelt voor om te bewegen van informele (*enactief*, dus schetsen, eerste berekeningen), naar grafische representaties (*iconisch*, dus patronen, grafieken) naar *symbolische* representaties (aritmetisch, algebraïsch)^[10] en wiskundige taal.^[11]

Productgericht:

De tachograafopdracht is een goed voorbeeld om leerlingen aan een gezamenlijk product te laten werken terwijl ze in groepjes aan whiteboards werken, zoals Liljedahl aanbeveelt.^[12] Hoe meer leerlinggestuurd het onderwijs is ingericht, des te meer verantwoordelijkheid leerlingen hebben voor het produceren van een zichtbaar resultaat, zoals een poster of een presentatie. Een product is een manifestatie van al het harde werk dat leerlingen hebben gedaan en geeft hen eigenaarschap.

Verschillende concepten

Er zijn verschillende manieren om betekenisgericht wiskundeonderwijs in te richten. Een centrale eigenschap is dat studenten de ruimte hebben om intellectueel uitdagende wiskundeopdrachten te maken. De variëteit aan opdrachten is groot: van opdrachten die vragen om de toepassing van eerder geleerde wiskunde tot opdrachten waarvoor leerlingen een nieuw stukje wiskunde dienen te ontdekken, of project-gebaseerd leren waar leerlingen hun eigen opdrachten moeten formuleren, en zo zichzelf nieuwe wiskunde leren en hun oplossingen moeten presenteren, zie tabel 2.

Hoewel er veel interessante en betekenisvolle opdrachten gevonden kunnen worden (bijvoorbeeld op het internet), is het vinden van opdrachten die passen bij het wiskunde-curriculum een uitdaging. Een betekenisvolle opdracht is in lijn met het Nederlandse curriculum als leerlingen zich de kennis en leerdoelen van het curriculum eigen maken door deze opdracht. Een andere factor van belang is dat de opdrachten opgelost moeten kunnen worden met de voorkennis van de leerling en de beschikbare hulpmiddelen.

>

Verenigingsnieuws

Notulen NVvW

Conclusie

Betekenisgericht wiskundeonderwijs in de bovenbouw is geschikt om leerlingen te enthousiasmeren voor wiskunde. Om dat te bereiken moet worden voldaan aan enkele voorwaarden.

Ten eerste, er moet een match zijn tussen het wiskundige vraagstuk of probleem (figuur 3) en het wiskundige grondbegrip (tabel 1). Dit zorgt ervoor dat de les beide doelen bereikt: het ondersteunen van betekenisvorming en het ontwikkelen van curriculaire kennis.

Ten tweede, er moet een match zijn tussen het wiskundige vraagstuk of probleem en de methodologische opzet van betekenisgericht wiskundeonderwijs (tabel 2). Als een opdracht gestuurd en beperkt in omvang is, dan kan het gebruikt worden met een generieke aanpak of door probleemoplossend onderwijs. Als de opgave groter van omvang is en om meer eigenaarschap van de leerling en initiatief over meerdere lessen vraagt, dan kan het gebruikt worden met de principes van projectleren.

Ten slotte, de leraar moet de rollen op zich nemen die de begripsvorming bij leerlingen ondersteunen, in lijn met de behoeften van de leerlingen om vooruitgang te bereiken in een opdracht. Hiervoor kan het didactisch construct *grondbegrip* richting geven.

De keuze voor geschikte opdrachten is niet triviaal. De ene keer biedt het boek inspiratie, de andere keer biedt het echte leven inspiratie. Er zijn verschillende bronnen beschikbaar ter inspiratie, zoals de Zebra-boekjes. Maar dit probleem blijft een lastige uitdaging en biedt kansen voor samenwerking tussen docenten en vakdidactici om innovatief lesmateriaal te ontwikkelen.

Voor de noten, zie de website



vakbladeuclides.nl/1002betekenisgerichtonderwijs

Over de auteurs

Alexander Schüler-Meyer is lerarenopleider en universitair hoofddocent voor wiskundendidactiek aan de Eindhoven School of Education (TU/Eindhoven). In zijn onderzoek houdt hij zich bezig met kwesties van taal in het wiskundeonderwijs en het verbeteren van de lerarenopleiding. E-mailadres: a.k.schuelermeyer@tue.nl.

Nathalie J. van der Wal is lerarenopleider wiskunde aan de Eindhoven School of Education (TU/Eindhoven). Zij houdt zich onder meer bezig met het ontwikkelen van innovatief wiskundeonderwijs. E-mailadres: n.j.v.d.wal@tue.nl

Opening

Bij de opening van de jaarvergadering memoreert de voorzitter, Ebrina Smallegange, het overlijden van Joop van Dormolen, die op 94-jarige leeftijd op 27 september is overleden. Joop is voor vele docenten een bekende naam, mede vanwege het handboek didactiek van zijn hand.

Jaarrede

Ebrina Smallegange spreekt haar laatste jaarrede als voorzitter uit en blikt daarbij terug op negen jaar in het bestuur, waarvan zes jaar als voorzitter. Deze bestuursperiode werd gekenmerkt door diverse curriculumvernieuwingen. Een in 2014 gestart onderzoek naar de vmbo wiskundeprogramma's leidde in 2019 tot de opdracht aan een vakvernieuwingscommissie om voor alle leerwegen in het vmbo een vernieuwd examenprogramma te ontwerpen. Deze programma's zijn in 2022 opgeleverd en worden momenteel voorbereid voor beproeving in de praktijk. In september van dit jaar zijn ook nieuwe conceptkerndoelen voor rekenen en wiskunde voor het primair onderwijs en de onderbouw van het voortgezet onderwijs opgeleverd. De voorzitter nodigt docenten uit zich aan te melden voor de fase waarin deze concept kerndoelen getest gaan worden.

Op basis van een voorstel van NVvW en PWN voor herstructurering van de wiskundevakken is een vakvernieuwingscommissie bezig met het maken van vernieuwde examenprogramma's voor havo en vwo. De NVvW had plaats in de vmbo vernieuwingscommissie en in de advieskringen voor de actualisatie van de kerndoelen en voor de actualisatie van de examenprogramma's. Ook corona heeft een stempel gedrukt, zowel op het lesgeven als op het verenigingswerk. Maar ondertussen was er ook ruimte voor nieuwe initiatieven, zoals bijvoorbeeld de Giraf-reeks, het projectenfonds, docentvluchteling voor de klas, een nieuwe website. De voorzitter dankt alle leden, werkgroepen en andere ondersteuners voor hun inzet voor de vereniging.

Het bestuur heeft uit haar midden Wim Caspers benoemd als voorzitter. Hij vervolgt de jaarrede en blikt vooruit aan de hand van nog openliggende vraagstukken rond curriculumvernieuwing, zoals bijvoorbeeld de aansluiting van kerndoelen op het vmbo-examenprogramma en het havo/vwo-examenprogramma, de verhouding tussen kerndoelen en referentieniveaus rekenen, de verdeling van onderwerpen over de verschillende havo/vwo-programma's, en de rol van ict.

Jaarvergadering 2023



In het kader van het Masterplan Basisvaardigheden wordt binnenkort het Expertisepunt Rekenen-Wiskunde geopend, waarbinnen scholen, docenten en experts bij elkaar worden gebracht rond vragen op het gebied van basisvaardigheden. De nieuwe voorzitter sluit de jaarrede af met de mededeling blij te zijn met de bijdragen van de werkgroepen en van *Euclides*, en met het aanbod aan congressen en meet-ups: alles om het wiskundeonderwijs te blijven ontwikkelen.

Afscheid, jubileum en erelidmaatschap

De nieuwe voorzitter spreekt zijn dank en waardering uit voor het werk dat Kees Garst als secretaris de afgelopen negen jaar met heel veel zorgvuldigheid en stijl voor de vereniging heeft gedaan. In het dankwoord aan de vertrekkende voorzitter, Ebrina Smallegange, wordt onder meer de doelgerichtheid genoemd in overleggen met OCW, CvTE, SLO of de VO-raad. En verder natuurlijk de continue drive om het vmbo-onderwijs op de kaart te zetten en te houden. De leden ondersteunen deze woorden met een warm applaus.

Onze beleidsmedewerkster, steunpilaar en spin in het web, Heleen van der Ree, viert een tienjarig jubileum bij de vereniging. Ze wordt bedankt voor haar tomeloze inzet voor de vereniging gedurende de afgelopen jaren. Tot grote verrassing van de betrokkene zelf draagt het bestuur Lidy Wesker voor als erelid. Binnen de vereniging heeft zij zich met energie en gedrevenheid ingespannen voor behoud van de focus op wiskundeonderwijs, onder meer door jarenlang de inhoud van de studiedagen vorm te geven, maar ook via diverse vakinhoudelijke artikelen voor *Euclides*. Naar buiten toe toonde ze zich op diverse plaatsen en momenten een waar ambassadeur van wiskunde-onderwijs en van de vereniging. Onder een welgemeend applaus ontvangt Lidy een speciaal ontworpen speld.

Notulen en jaarverslagen

De notulen van de jaarvergadering 2022, het jaarverslag van de vereniging en het jaarverslag van *Euclides* worden, met dankzegging aan de opstellers ervan, vastgesteld.

Financiën

De jaarrekening laat een positief resultaat van €13.921,08 zien. Het bestuur stelt voor €11.000,- te reserveren. Dat is €4.500,- meer dan begroot. De extra reservering is bedoeld voor het jubileum. Ook wordt er weer geld toegevoegd aan het Vredenduinfonds.

De vergrote inkomsten komen door nog betere debiteuren-

administratie en aan minder uitgaven door online vergaderen door werkgroepen en bestuur. Aan promotie is meer geld uitgegeven dan begroot, vooral aan een Welkomst-*Euclides*. Een financiële meevaller ontstaat bij rechtspositie, waar het bureau ons een gunstig tarief rekent. De kascontrolecommissie, bestaande uit Zwaantje Warmelink en Marco ten Hoff, heeft geconstateerd dat de jaarrekening over het boekjaar 2022/2023 op juiste wijze is verantwoord en de commissie stelt voor het bestuur te dechargeren voor het gevoerde financiële beleid. De aanwezige leden stemmen hiermee in met applaus. Uitgangspunten voor de begroting van 2023/2024 zijn wederom om realistisch en scherp te begroten, en een eventueel negatief resultaat te accepteren vanwege het aanzienlijke eigen vermogen en de diverse reserveringen van de vereniging. Het bestuur verwacht dat een deel van de vergaderingen online zal blijven. In de begroting zijn alle personele uitgaven omhooggegaan in lijn met cao-verhogingen. Verder maakt het bestuur graag middelen vrij om initiatieven rond docentvluchtelingen en statushouders voort te zetten, ook als dit niet volledig door subsidie gedekt kan worden. Voor het projectenfonds wordt niet langer geld gereserveerd, omdat het bestuur graag eerst de werkwijze en het wenselijk bedrag evalueert. De leden stemmen in met de voorgestelde begroting 2024/2025. De nieuwe kascommissie, bestaande uit Zwaantje Warmelink en Bert Wikkerink wordt benoemd.

Bestuursverkiezing

Sevinç Göksen en Constantijn Tilanus worden door de leden benoemd als bestuurslid.

Rondvraag en sluiting

Rob van Oord vraagt of hij door moet gaan met het maken van blogs voor de website. De voorzitter antwoordt dat dit zeer op prijs wordt gesteld. De voorzitter wenst iedereen een inspirerende studiedag toe en sluit de vergadering.

Jaarverslagen NVvW en Euclides

Tijdens de jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 2 november 2024 staan de jaarverslagen van de NVvW en *Euclides* op de agenda. Deze verslagen staan op de site.



vakbladeuclides.nl/1002nvw

vakbladeuclides.nl/1002euclides

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Hugo Duivesteijn, voorzitter
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck
Constantijn Tilanus

Inzenden bijdragen

Tom Goris,
Molenbochtplein 38, 5014 EJ Tilburg
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailing-services.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Wim Caspers
E-mail: w.caspers@nvvw.nl

Secretaris

Els Franken
E-mail: e.franken@nvvw.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06 21 50 96 79 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau, Tel. 0345 531 324
E-mail: evers.rechtspositie@gmail.com
Vermeld bij je contact je lidnummer en telefoonnummer.

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt met ingang van 1 augustus 2023

- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 72,50
- leden, maar dan zonder Euclides: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 75,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen Euclides niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 90,00
Instituten en scholen: € 160,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal,
Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2024

Za
02/11

VEENENDAAL

NVvW jaarvergadering en studiedag

2025

LANDELIJK

03/02
21/02

Scholen kiezen zelf een dag

Op de scholen: Onderbouw Wiskundedag (3hv) en
vmbo Wiskundedag (3 vmbo-gt)

Organisatie: Freudenthalinstituut

LANDELIJK

Do
20/03

Op de scholen: W4Kangoeroewedstrijd, wereldwijde
wiskundewedstrijd

Organisatie: Stichting Wiskunde Kangoeroe

Vr
04/04
Za
05/04

NOORDWIJKERHOUT

Nationale Wiskundedagen

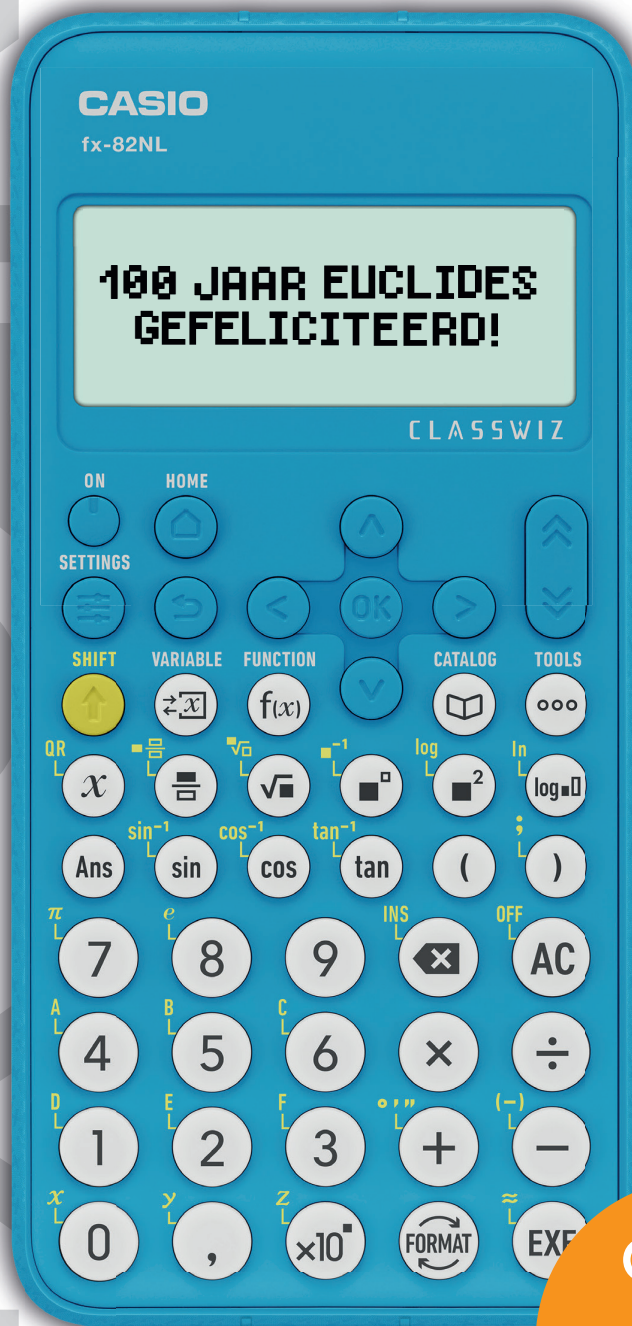
Organisatie: Freudenthalinstituut

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook vakbladeuclides.nl

JAARGANG 100

Nr.	Verwachte verschijningsdatum	deadline
3	11 december 2024	7 oktober 2024
4	29 januari 2025	11 november 2024
5	12 maart 2025	30 december 2024
6	30 april 2024	24 februari 2025
7	18 juni 2025	20 april 2025

CASIO®



Opvolger van:
fx-82MS
fx-82EX

**Voor Nederlands
curriculum gemaakt**

De nieuwe
kerndoelen:
je kunt op ons
rekenen!

Vanaf 2026 gelden de nieuwe kerndoelen voor rekenen en wiskunde. Het doel: wiskundig geletterde leerlingen, die klaar zijn voor de wereld van morgen.

Hét woord van de nieuwe doelen is 'samenhang': tussen wiskundige concepten, met andere leergebieden en met de wereld. Deze veranderingen gaan veel voor jou als wiskundedocent veranderen. Bij deze verandering sta je niet alleen. We gaan je erbij helpen. Dat doen we namelijk al meer dan 50 jaar.

Je kunt op ons rekenen!

MODERNE **WISKUNDE**

getal & ruimte

I 3 WISKUNDE

Kijk op Noordhoff.nl/wiskunde