



BIJVOEGSEL
VAN HET NIEUW TIJDSCHRIFT
VOOR WISKUNDE
GEWIDD AN ONDERWIJSBELAENEN
ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOOT EN P. WIJDENES
MET MEDEWERKING VAN
DR. H. J. BETH, DR. E. J. DIJKSTERHUIS, DR. D. J. E. SCHREUR, DR. P. A. VERBURGH, DR. B. P. H. ANSTEE, DR. P. A. VERBURGH, DR. P. A. VERBURGH

1e JAARGANG 1924/25, Nr. 1



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

48e jaargang
1972/1973
no 4
december

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES
VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELEREER
EXAMENNUMMER 2014
WIS EN WISKUNDE
OPPERVLAKTE BEREKENEN
JOHN DE WOLTER

NR.1

JAARGANG 80 | SEPTEMBER 2014

EUCLIDES
PAPELARIJ
EUCLIDES
LIVRAR
VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELEREER
Nieuw spel met rekenen met negatieve
getallen
DOC940: de wiskunde school in Eindhoven
De stelling van Brouwer
Beeldvorming in de wiskunde

NR.7

Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES
VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELEREER
Tweehonderd jaar oplossen van wiskunde
problemen
Jaargang 100 - oktober 2023
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

NR.2

Euclides' moeilijkste eeuw
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES
TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC
TIK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOOT EN P. WIJDENES
MET MEDEWERKING VAN
DR. H. J. BETH, DR. E. J. DIJKSTERHUIS, DR. D. J. E. SCHREUR, DR. P. A. VERBURGH, DR. B. P. H. ANSTEE, DR. P. A. VERBURGH, DR. P. A. VERBURGH
JAARGANG 1924/25, Nr. 1
P. NOORDHOFF — GRONINGEN

EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar
jaargang 71
1995-1996
8
Jacob de Gelder
en de didactiek
van de wiskunde
In memoriam
Jan Breeman
Aankondiging
Jaarvergadering
studiedag 1996
NVO-Platform

EUCLIDES
VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELEREER
EXAMENNUMMER 2024
Berekeningen aan de examens wiskunde
vmbg-g1 en -tl, havo (A en B) en
vwo (A, B en C)
Meer dan 100 jaar examens
Wiskunde in het Forum: op stap met
leerlingen
"Coördinatenspel: 'Waar staan leerlingen
in het vak wiskunde?'
JAARGANG 100 SEPTEMBER 2024
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES
VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELEREER
EXAMENNUMMER 2024
Berekeningen aan de examens wiskunde
vmbg-g1 en -tl, havo (A en B) en
vwo (A, B en C)
Meer dan 100 jaar examens
Wiskunde in het Forum: op stap met
leerlingen
Coördinatenspel: 'Waar staan leerlingen
in het vak wiskunde?'
JAARGANG 100 SEPTEMBER 2024
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES
vakblad voor de wiskundeleraar
jaargang 87
nr 5
maart 2012
Kleine didactieken
W4Kangoeroe, deel 1
NWO's keuren
Het Wwf in Kenia
Nieuwste
Rekenidiotie 2011
FvOv
Eks
W
100jaar
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES
VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELEREER
EEN LES OVER LINIEN EN HOEKEN
INTERVIEW TON ELLULDE
UITGANGSPUNTEN
SPANNENDE FIGUREN
REKENEN MET EN ZONDER FORMULES
BOEKRESEN
JAARGANG 100 SEPTEMBER 2024
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES
VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELEREER
EXAMENNUMMER 2024
Berekeningen aan de examens wiskunde
vmbg-g1 en -tl, havo (A en B) en
vwo (A, B en C)
Meer dan 100 jaar examens
Wiskunde in het Forum: op stap met
leerlingen
Coördinatenspel: 'Waar staan leerlingen
in het vak wiskunde?'
JAARGANG 100 SEPTEMBER 2024
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES
VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELEREER
EXAMENNUMMER 2024
Berekeningen aan de examens wiskunde
vmbg-g1 en -tl, havo (A en B) en
vwo (A, B en C)
Meer dan 100 jaar examens
Wiskunde in het Forum: op stap met
leerlingen
Coördinatenspel: 'Waar staan leerlingen
in het vak wiskunde?'
JAARGANG 100 SEPTEMBER 2024
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

JAARGANG 100 SEPTEMBER 2024

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 100 NR 1

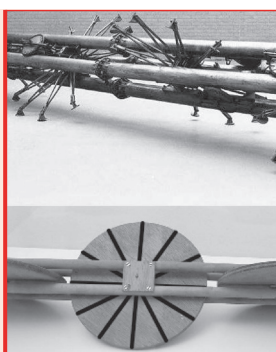


IN DIT NUMMER

EXAMEN VMBO-GL- EN -TL WISKUNDE

Ilona van Houwelingen

4



EXAMEN HAVO WISKUNDE A

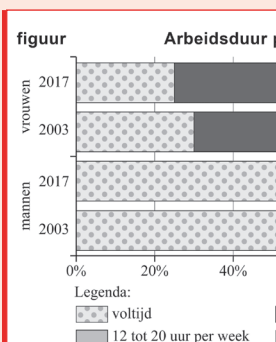
Maarten Müller

8

EXAMEN HAVO WISKUNDE B

Gerrie Stuurman

12



EXAMEN VWO WISKUNDE A

Marcel Daems

16

EXAMEN VWO WISKUNDE B

Henk Hietbrink

20

EXAMEN VWO WISKUNDE C

Kim Kaspers

24

WIS EN WAARACHTIG

26

MEER DAN 100 JAAR EXAMENS

Danny Beckers

Tom Goris

28

MEER DAN EUCLIDES EN WIMECOS

Harm Jan Smid

32

WISKUNDE IN HET FORUM!

Paul Durenkamp

36



VERENIGINGSNIEUWS

JAARVERGADERING/STUDIEDAG 2024

38



WERELDWISKUNDE FONDS

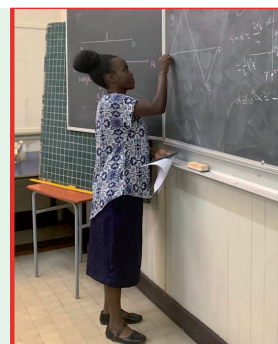
IN SURINAME

TRAINING MULO-DOCENTEN

Ewald Levens

Kenneth Tjon Soei Sjo

40



Afbeelding voorkant: verschillende voorkanten van *Euclides* in de afgelopen 100 jaar

Collage: Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

'WAAR STA IK IN HET VAK
WISKUNDE?'
HET COÖRDINATENSPEL LAAT
HET ZIEN!

Constantijn Tilanus

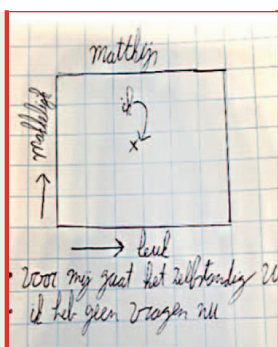
42

OLYMPIADEPUZZEL
Esther Bod

SERVICEPAGINA

45

46



Kort vooraf

De honderdste jaargang is begonnen. Op de feestelijke omslag zie je alle lay-outs die er in de afgelopen eeuw waren, een mooi tijdsbeeld. Hoe zag jouw eerste *Euclides* eruit? Voor deze honderdste jaargang hebben we Harm Jan Smid, Danny Beckers en Jenneke Krüger gevraagd om mee te denken over speciale bijdragen waarin een brug wordt geslagen tussen het verleden en de toekomst. Artikelen over gebeurtenissen of personen die een rol gespeeld hebben in het wiskundeonderwijs in de 783 verschenen *Euclidesen* die nu nog relevant zijn. In dit nummer gaat het over de voorlopers van *Euclides* en NVvW en over, hoe kan het ook anders, de berichtgeving over de examens in ons tijdschrift. Maar uiteraard is ook het eerste nummer van jaargang 100 een examenspecial.

Het is wederom gelukt om voor alle zes schriftelijke eindexamens een collega te vinden die onder grote tijdsdruk een recensie heeft geschreven. Ilona van Houwelingen, Maarten Müller, Gerrie Stuurman, Marcel Daems, Henk Hietbrink en Kim Kaspers: knap werk!

In *Euclides* 99-6 stond de puzzel 'De schaduw blijft even groot' van Lieke de Rooij en Wobien Doyer. Dat blijkt nu hun allertlaatste puzzel geweest te zijn. Twaalf jaar hebben Lieke en Wobien de puzzelrubriek verzorgd, de eerste, 'Proniks delen', verscheen in september 2012. Samen componeerden ze de puzzels, keken de ingestuurde oplossingen na en schreven daar dan weer een kort verslag over. Onvervangbaar! Letterlijk en figuurlijk... dus voorlopig doen we het met de vier Olympiadepuzzels. Uiteraard gaan we Lieke en Wobien nog uitgebreid aan het woord laten in een van de komende nummers. Maar nu alvast namens de redactie en alle puzzelende lezers: heel veel dank!

Tom Goris

EUCLIDES | september 2024

3

Examen vmbo-gl en -tl wiskunde

Ilona van Houwelingen plaatst het vmbo-gl en -tl examen in het perspectief van haar eigen leerlingen en vraagt zich af of het een examen begrijpend lezen of een examen wiskunde was. De N-term is 1,0.

Inleiding

Dit jaar was ik echt in verwarring na het examen, was dit een goed wiskunde-examen dat bij mijn leerlingen past? De titels van de onderwerpen sloten bijna allemaal aan op een profiel, behalve de laatste. Maar 'regelmatige veelvlakken' klinkt toch wel echt als wiskunde.

Sparen

Als we naar de titel van dit onderdeel kijken, dan sluit het mooi aan bij een economisch profiel. Het was echter voor vrijwel alle leerlingen een herkenbare context: een spaarrekening waar geld op gestort wordt. Maandelijks rente ontvangen is mogelijk wel realistisch, maar vond ik niet heel duidelijk voor de leerling, zie figuur 1.



Milan opent een spaarrekening waarop hij elke maand 50 euro stort. Op deze rekening krijgt hij maandelijks 0,17 procent rente.

De volgende formule hoort bij het bedrag dat op deze rekening staat:

$$B = \frac{50,085 \times (1,0017^n - 1)}{0,0017} + 50$$

figuur 1

Als docent vond ik het niet heel ingewikkeld, bij deze opdracht moesten de leerlingen tot drie keer toe een gegeven formule invullen. De eerste vraag: 3 jaar in maanden omzetten en dan invullen.

Bij vraag 2: de formule zo invullen dat je een assenverdeling kon maken en bij vraag 3: inklemmen tot een correct aantal maanden. Persoonlijk vond ik het jammer dat er een formule gegeven was die eigenlijk niet verkeerd ingevuld kón worden. Ik had dit een heel mooi vraagstuk gevonden als ze zelf een exponentiële formule hadden moeten opstellen en hier vervolgens mee moesten gaan rekenen. Nu werden er lees- en rekenmachinevaardigheden getest. Het hoort naar mijn mening wel echt bij wiskunde want het betrof 'formules toepassen'.

Melkkoeien

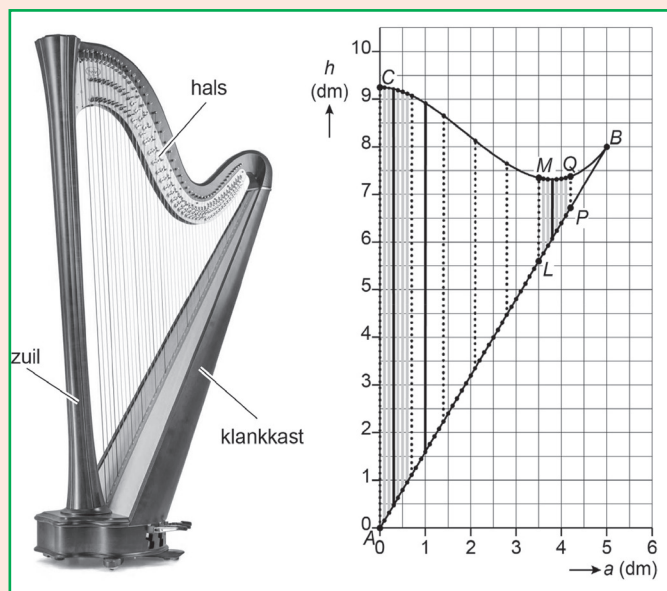


figuur 2

Een onderwerp met een mooie aansluiting bij een groen (landbouw) profiel. Dit spreekt veel van mijn leerlingen aan. Dit was echt een onderdeel met rekenvragen, een vraag over een verhouding, een procentenvraag en een vraag van dagen naar jaren waarbij de wetenschappelijke notatie in het antwoord zichtbaar moest zijn. Vraag 5 ging echter over een melkwagen met een cilindervormige tank. Waarom die melkwagen erbij is betrokken, is me niet helemaal helder. Als het namelijk over een melk(koel)tank gaat, dan bedoelen we de tank die bij de

boeren in de schuur staat en als de melk wordt opgehaald dan is dat door de tankwagen. Als we dan 'realistische' voorbeelden gebruiken dan ook graag eentje die in ieder geval tekstueel klopt. Verder is een redelijk gemiddeld aantal melkkoeien zo'n 120, maar dat is misschien zeuren in de marge. Een plaatje van zo'n tankwagen had dan ook ondersteunend kunnen zijn, terwijl enorme melkstallen als die van de afbeelding niet heel veel in Nederland te vinden zullen zijn, zie figuur 2. De opdracht vond ik wel heel sterk, leerlingen moesten namelijk zelf bedenken dat ze de inhoud moesten gaan berekenen, de eenheden correct omzetten en dan nog een juiste deling maken.

Harp



figuur 3

Dit was nu een onderwerp dat mijn leerlingen niet echt aanspreekt, maar waar de muzikale leerling wel door werd aangesproken. De vragen zijn zeer helder geformuleerd. Helaas vond ik de formule die gevraagd werd bij vraag 10 niet echt betekenisvol. Vervolgens komt er boven vraag 11 een totaal andere formule die hoort bij de snaarlengte ten opzichte van de plek van de eerste snaar (huh?) waar de context niets toevoegt. En dan komen er twee vragen waarbij eigenlijk niets anders dan invullen van de formule wordt verwacht. Wiskundig vond ik deze vraag niet echt sterk. Jammer dat er niet gekozen is om de leerlingen bijvoorbeeld de afstand tussen AC en LM te laten aflezen, zie figuur 3. Nu was het even alle punten binnentikken. Als je scherp bleef met lezen, want schijnbaar gaan we nu in één onderdeel tot drie keer toe dezelfde uitleg geven over de snaren, zie figuur 4, wat leerlingen eerder in verwarring bracht als dat het ze helderheid gaf.

8 Er zijn rode (gestippeld), zwarte en grijze snaren. Tussen twee rode snaren zitten zes snaren gespannen. AC is de langste snaar en PQ is de kortste snaar.

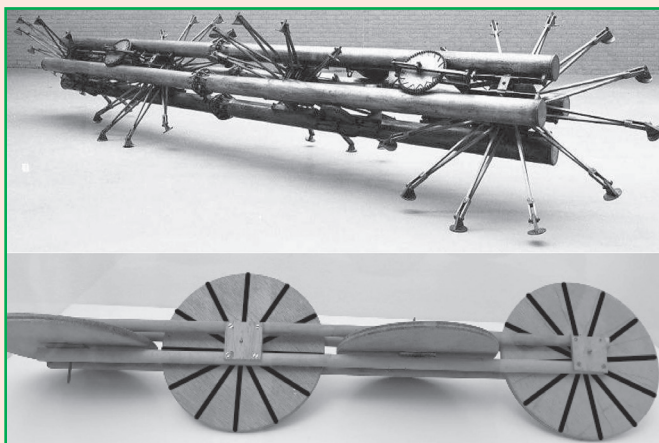
9 De snaren hebben een vast kleurenpatroon: rood, grijs, grijs, zwart, grijs, grijs, grijs, rood, grijs, grijs, zwart, ...

12 De snaren hebben een vast kleurenpatroon: rood, grijs, grijs, zwart, grijs, grijs, grijs, rood, grijs, grijs, zwart, ...

figuur 4

Tarim Machine

Dit is een onderwerp dat perfect aansluit bij een technisch profiel, dus waar mijn leerlingen prima mee uit de voeten konden en waar ik zelf wel blij van werd. Hoe kunnen we dit maken, wat is ervoor nodig? Ook echt leuk om dan te zien dat er een houten model is gemaakt, zie figuur 5. Dit is iets wat de technische jongens herkennen, eerst een schaalmodel maken en dan de werkelijkheid. De wiskunde voor de leerling met inzicht in formules was de tabel direct in te vullen, voor de andere leerling komt erbij om het allemaal kloppend te maken. De stap naar de afstand met behulp van de snelheid vond ik ook leuk en daaropvolgend de snelheid van de snelste raket. Jammer dat er niet werd gevraagd naar hoeveel keer zo snel of langzaam, dat had ik nog een leuke toevoeging gevonden. Het was geen pittige wiskunde, maar ging met een gradenberekening en schaalberekening net iets boven het basisrekenwerk uit.



figuur 5

Dug-out

Een onderwerp dat veel leerlingen herkennen. Mijn jongens zijn meer werkers dan sporters, maar ze konden hier prima wat bij bedenken. Een aantal heeft ook daadwerkelijk al eens ergens een dug-out gemaakt en/of geplaatst. Qua profiel past het onderwerp vooral bij zorg & welzijn. Maar als we kijken naar de vragen, dan zullen veel leerlingen uit dat profiel hiermee geworsteld hebben. >

Een goede schoolstart met Texas Instruments!



Breng wiskunde tot leven in de klas



Lesmaterialen



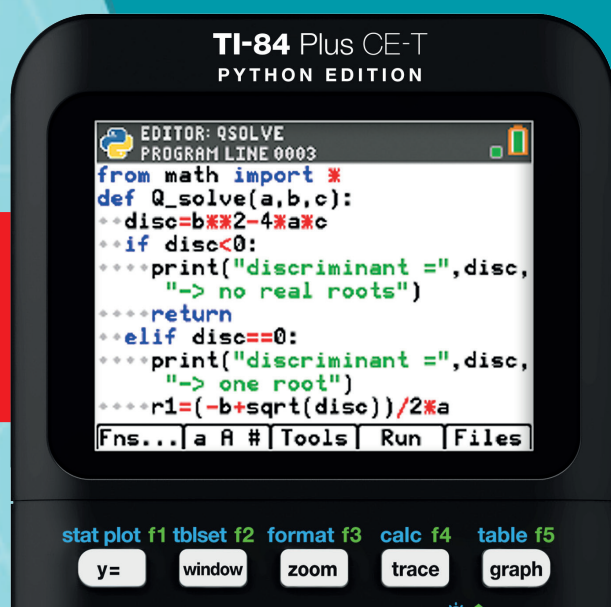
Aanbiedingen



**Trainingen en
evenementen**

Maak nog in september
gebruik van onze
kortingsactie!

**€10
korting***

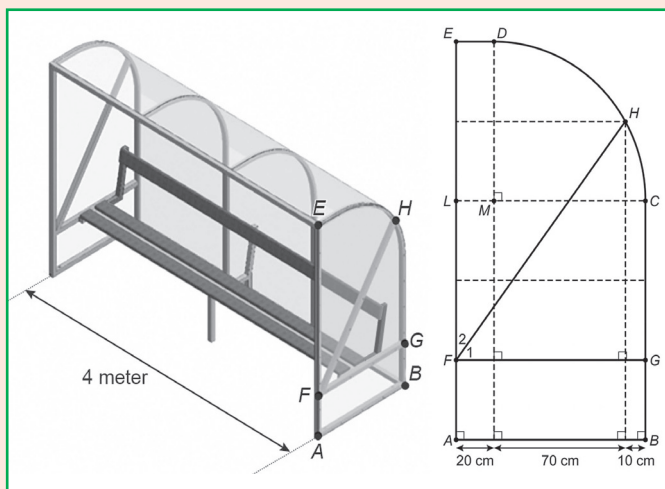


education.ti.com/nl

* De (online) winkels die deze grafische rekenmachine verkopen zijn verantwoordelijk voor het uitvoeren van de kortingsactie en de voorwaarden. De korting bedraagt € 10, inclusief btw. De korting is geldig van 1 maart tot en met 30 september 2024.

©2024 Texas Instruments

 **TEXAS INSTRUMENTS**



figuur 6

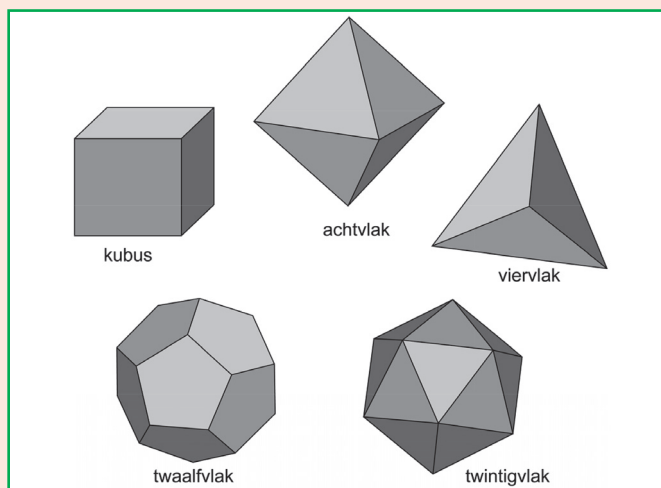
Het was een mooie 3-4-5 driehoek dus ook realistisch voor in de bouw. Persoonlijk vond ik het een makkelijke goniometrische vergelijking. Daarna werd een lengtemaat gevraagd, waarbij er rekening gehouden moest worden met een cirkeldeel. Dit was wel even lastig voor de meeste leerlingen. Bij vraag 20 werd er een berekening m.b.v. pythagoras verwacht, ook deze was vrij basic. Bij de laatste opdracht had ik verwacht dat er een oppervlakte van het gehele kunststof deel gevraagd zou worden, maar er werd alleen één zijwand gevraagd. Jammer, hier had echt wel een verdiepende slag gemaakt mogen worden. Dan was de 4 meter uit het plaatje ook zinvol geweest, zie figuur 6. In beide afbeeldingen miste ik juist de hoogte van de dug-out. Als deze erbij had gestaan, dan had dat heel wat leeswerk voor de leerlingen gescheeld. Dit was een mooi wiskundig onderdeel waarbij ik nog wel meer verdieping had willen zien.

Regelmatige veelvlakken

Een onderwerp dat echt wiskundig aandoet, zeker met de afbeelding van diverse ruimtefiguren erbij, zie figuur 7. Vraag 22 was voor iedereen punten binnenhalen. Bij vraag 23 was dit totaal anders. Voor veel leerlingen was dit meer een gokvraag dan dat ze gebruik hebben gemaakt van de formules. En mijn leerlingen hebben dat gokken ook doorgezet bij opdracht 24, terwijl dit een mooie vraag was. Voor de leerlingen met inzicht in formules was de tabel direct in te vullen, voor de andere leerlingen was de oplossing te vinden door de formules in te vullen. Jammer dat opdracht 25 weer een formule invullen was. Daarentegen was opdracht 26 een hele mooie opdracht waarbij rekenwerk en inzicht moesten worden gecombineerd.

Helaas was het hier ook weer nodig om in één onderdeel meerdere keren soortgelijke uitleg te geven, dus veel leeswerk dat niet per sé nodig was.

Deze context, die echt wiskundig overkomt, was eigenlijk pas bij de allerlaatste vraag echt wiskunde.



figur 7

Conclusie

Als wiskundedocent ben ik wel een beetje teleurgesteld in dit examen. Het was een eenvoudig examen. Ik had een N-term van 0,6-0,8 verwacht en vind 1,0 vrij hoog. Ander punt van kritiek is dat sommige stukken uitleg meerdere keren terugkwam. Zeker voor taalzwakke leerlingen is dit verwarrend.

Wat ik echt gemist heb is dat er niet om een andere formule dan een eenvoudige lineaire formule werd gevraagd. En op verschillende plekken had een verdiepende vraag gesteld kunnen worden. Hier liggen wat mij betreft echt kansen voor een volgend examen. Vergelijken is niet goed, maar ik heb digitale kaderexamens nagekeken die meer verdiepende wiskunde van de leerlingen vroegen dan dit examen.

Het invullen van een formule zat er voor mij te veel in. In dit examen waren er vier vragen waar een formule ingevuld moest worden en bij zes vragen moest een gegeven formule worden gebruikt om tot een oplossing te komen.

Over de auteur

Iloona van Houwelingen is wiskundeleraar op het Gilde Vakcollege Techniek te Gorinchem, bestuurslid van de NVvW, lid van de werkgroep vmbo van de NVvW en lid van de commissie Onderwijs van het PWN. E-mailadres: i.vanhouwelingen@nvww.nl

Examen havo wiskunde A

Rechttoe rechtaan werk of zaten er dit jaar nog wat leuke wiskundige problemen in het eindexamen? Hoe bereid je je leerlingen voor? Maarten Müller bespreekt het eindexamen havo wiskunde A en kijkt daarbij ook terug op hoe de leerlingen zich hierop hadden kunnen voorbereiden. De N-term is 1,1.

Inleiding

Elk nieuw schooljaar begint met mooie voornemens en eindigt met de evaluatie van die voornemens middels de eindexamenresultaten. Het is altijd weer spannend wat de nieuwe plannen hebben opgeleverd. Vorig jaar schreef ik ook het artikel over het eindexamen havo wiskunde A en toen heb ik gekeken naar de verschillende typen leerdoelen: kennisdoelen, vaardigheidsdoelen en probleemoplosdoelen. Dit jaar wil ik dat weer doen. Ik heb hier met mijn leerlingen in de lessen ook veel over gesproken. Ik heb de vaardigheidsdoelen expliciet gemaakt voor mijn leerlingen in formatieve vaardighedenoverzichten, waarbij elke vaardigheid op maximaal drie niveaus gecheckt kon worden, zoals aangeraden door Peter Liljedahl in zijn boek *Building Thinking Classrooms*. Het probleemoplossen hebben mijn leerlingen vooral op de verticale whiteboards aan de muren van mijn lokaal geoefend met oude examenopgaven. Na een aantal vernieuwingen hoop je altijd dat de examenresultaten minimaal gelijk blijven, zodat je met de opgedane ervaring de jaren erna de vruchten daarvan

kunt plukken. Dat is gelukt, dus dit artikel wordt door een tevreden docent geschreven.

Kennis- en vaardigheden

Bij een deel van de vragen moesten de leerlingen rechttoe rechtaan laten zien of zij de genoemde vaardigheden in de vingers hadden. In 11 van de 22 vragen was aan de vraagstelling onmiddellijk te zien welke vaardigheid ingezet moest worden en hoefden de leerlingen alleen maar te laten zien dat ze deze vaardigheid beheersten. In tabel 1 een overzicht van wat die vaardigheden waren. De vaardigheden stonden bij ons netjes op een rij in het vaardighedenoverzicht dat ik op www.buildingthinkingclassrooms.nl/lesmateriaal heb geplaatst. In figuur 1 zie je een voorbeeld van hoe die vaardigheden eruitzien op het vaardighedenblad. Er was ook één vraag waar leerlingen rechtstreeks een stukje kennis moesten oproepen. Het ging hierbij om de betekenis van de woorden kwantitatief en kwalitatief en de woorden ordinaal en nominaal. Met deze vragen waren in totaal 41 van de 76 punten te verdienen.

Vraagnummer	Vaardigheid
3	Evenredigheidsconstante berekenen
4	Groeipercantage bepalen bij exponentieel verband
6	Terugrekenen naar 100%
10	Effectgrootte berekenen en conclusie trekken
13	Redeneren over stijgen en dalen
15	Herleiden bij formules combineren (gebroken formule)
16	Populatieomvang berekenen bij een 95%-betrouwbaarheidsinterval
17	Phi-coëfficiënt berekenen en conclusie trekken
18	Redeneren over stijgen en dalen
19	Formule oplossen met de GR
20	Herleiden (variabele vrijmaken in een gebroken formule)

tabel 1 rechttoe rechtaan vaardighedenvragen

			
Phi coëfficiënt		Bij rijschool A slaagden 34 kandidaten in één keer en 66 niet. Bij rijschool B waren dat er 57 en 60. Bepaal m.b.v. de Phi coëfficiënt of er sprake is van een klein, middelmatig of groot verschil.	
Betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie opstellen	Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie bij $p = 0,5$ en $n = 100$.	Bij een onderzoek onder 126 jongeren bleek dat 72% meer dan 8 minuten per keer doucht. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de proportie jongeren die meer dan 8 minuten per keer douchen.	
Formule exponentiële groei opstellen	Op 01-01-2020 had een stad 50 000 inwoners. Eén jaar later waren dat er 53 000. Neem aan dat er sprake is van exponentiële groei. Stel de formule op voor het aantal inwoners N . Neem t in jaren met $t = 0$ op 01-01-2020.	Op 01-01-2020 had een stad 50 000 inwoners. Op 01-01-2025 waren dat er 60 000. Neem aan dat er sprake is van exponentiële groei. Stel de formule op voor het aantal inwoners N . Neem t in jaren met $t = 0$ op 01-01-2020.	Op 01-01-2020 had een stad 50 000 inwoners. Op 01-01-2025 waren dat er 60 000. Neem aan dat er sprake is van exponentiële groei. Stel de formule op voor het aantal inwoners N . Neem t in jaren met $t = 0$ op 01-01-2020.

figuur 1 Vaardighedenblad

Probleemoplossen of basisvaardigheid

Er is nog wel een kanttekening te plaatsen bij mijn typering als rechttoe rechtaan vaardighedenvraag. Het maakt natuurlijk nogal uit of je als docent die strategieën ook echt als vaardigheid aanleert (dus veel vergelijkbare vragen laten maken) of dat je ervoor kiest om één keer zo'n vraag als probleem voor te schotelen aan je leerlingen. Twee typische voorbeelden hiervan zijn vragen 8 en 17. Bij vraag 8 werd het betrouwbaarheidsinterval gegeven en moest de steekproefomvang berekend worden. Bij vraag 17 moesten leerlingen de Phi-coëfficiënt berekenen. Dit is natuurlijk ook standaardwerk, maar zoals wel vaker, werden in de tekst niet de aantallen genoemd van de mensen die het eens en oneens waren, maar werd het aantal voorstanders en het totaal genoemd. Er moest dus eerst een nieuwe tabel worden gemaakt. Ik had er natuurlijk voor kunnen kiezen om op het vaardighedenblad uit figuur 1 ook nog een vakje te vullen bij het betrouwbaarheidsinterval waarbij leerlingen terugrekenen wat de steekproefomvang is, zodat ze die vaardigheid gingen oefenen totdat ze hem volledig in de vingers hadden als stappenplan. Bij de Phi-coëfficiënt had ik dan onder de drie pepers nog een voorbeeld kunnen opnemen waarbij de totalen gegeven werden. Ik heb er echter bewust voor gekozen dit niet te doen. Het kost de leerlingen tijd om hier thuis mee aan de slag te gaan en je moet die vaardigheid dan ook als zodanig in de les

introduceren. Ik wilde liever de tijd stoppen in het werken aan het probleemoplossend vermogen van mijn leerlingen vanuit begrip (kennis) en met gebruik van andere getrainde vaardigheden.

'Thinking classrooms'

De setting waarin dit in de les gebeurt is zoals beschreven in Building Thinking Classrooms. Ik stel mondeling een vraag aan mijn leerlingen, maak groepjes van maximaal drie leerlingen en laat ze al samenwerkend op verticale niet-permanente oppervlakken (bij mij whiteboards) tot een oplossing komen, waarna ik de verschillende oplossingsstrategieën met ze kan bespreken door het werk van de verschillende groepjes te bespreken. Als het gaat om vragen met een lange tekstuele inleiding, zoals bij eindexamenopgaven vaak het geval is, is het ook een optie om de leerlingen printjes te geven van de vraag, die ze dan op de whiteboards plakken om ermee aan de slag te gaan. Zeker een vraag waarbij ze de steekproefomvang moeten bepalen leent zich hier uitstekend voor. Leerlingen kunnen de vraag namelijk oplossen door handmatig uit te proberen, door een tabel of grafiek te maken met de GR of door algebraïsch de vergelijking op te lossen. Daarnaast zijn er meerdere verschillende vergelijkingen mogelijk. Al deze opties kun je dan aan de hand van het leerlingwerk op een rij zetten en de leerlingen die niet goed weten hoe ze het

>

Vraagnummer	Vaardigheid
1 en 2	De vraag uit de tekst halen en in twee grafieken aangeven hoe je de gevraagde antwoorden kan vinden.
11	Getal in de juiste formule invullen en via een procentberekening tot het eindantwoord komen.
14	Getal in een formule invullen, uitkomst in een tweede formule invullen en met de gevonden snelheid en gegeven afstand de tijd uitrekenen.
21	In één formule twee verschillende waarden invullen en bepalen of er sprake is van een verdubbeling.
22	De onderzoeksoopdracht. Terugrekenen met exponentiële groei en daarna met verhoudingen richting het eindantwoord werken.

tabel 2 Eenvoudige vaardigheden

aan moeten pakken, kunnen bij andere groepjes kijken voor een eerste stap. Op die manier kunnen ze hun gereedschapskist vullen met strategieën, die ze later weer in kunnen zetten.

Probleemoplossen: omgaan met tekst, formules, tabellen en grafieken

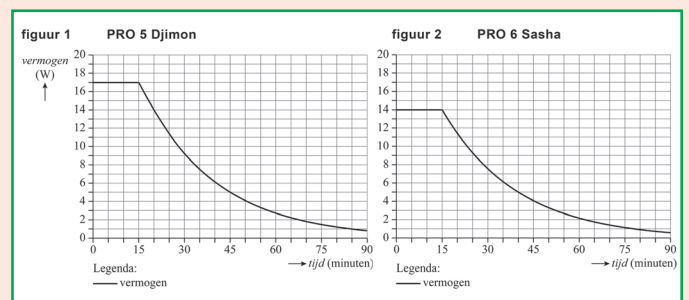
Bij wiskunde A doen wiskundige problemen zich vaak voor in de hoedanigheid van een vraag met vooral veel gegevens, waarbij je een keuze moet maken uit meestal eenvoudige vaardigheden. Ook dit jaar was dat weer het geval. In tabel 2 geef ik een samenvatting van die vaardigheden. Deze vragen werden soms goed en soms minder goed gemaakt. Doordat ik mijn leerlingen ook veel op de whiteboards had laten aflezen van grafieken (op uitwerkbijlages) was het in ieder geval goed gelukt om ervoor te zorgen dat er geen afleesfouten werden gemaakt en gaven ze bijna allemaal heel netjes op de uitwerkbijlage aan met horizontale en verticale hulplijnen hoe ze aan hun antwoord kwamen; een groot voordeel van leerlingen elkaars uitwerkingen laten bekijken en de voor- en nadelen benoemen nadat ze het eerst zelf geprobeerd hebben.

Probleemoplossen: 'Ff me telefoon opladen'

Tot slot hebben we dan nog de echt wiskundig interessante vragen. Bij wiskunde A zijn dit dan ook meteen de vragen waarop leerlingen vaak veel punten laten liggen. Het is ook erg moeilijk hierin les te geven. Het probleem is vaak dat de conceptuele kennis ontbreekt en het opschrijven van een goede redenering ook lastig wordt gevonden.

Bij vraag 5 moesten leerlingen aan de hand van de figuren op de uitwerkbijlage uitleggen dat de PRO6 minder vermogen hoefde te leveren dan de PRO 5. Bij deze vraag, vraag ik me erg af of leerlingen de vraag niet konden beantwoorden doordat ze het niet snapten of doordat ze hun gedachten niet op papier kregen. Het correctievoorschrift maakte het ons als docenten hier ook niet echt gemakkelijk. Leerlingen moesten een toelichting geven in de vorm van een tabel, schets of redenering, maar het was niet duidelijk hoeveel punten die tabel dan

zou moeten bevatten of welke redeneringen goed zouden zijn. In het verslag van de bespreking van de NVvW stond dat als er uitsluitend iets gezegd was over de eerste 15 minuten dat dan het eerste punt al toegekend kon worden. Het maken van een schets deed helaas geen van mijn leerlingen, want het overnemen van de grafiek uit figuur 1 in het assenstelsel van figuur 2 (of andersom) leek mij de meest handige aanpak.



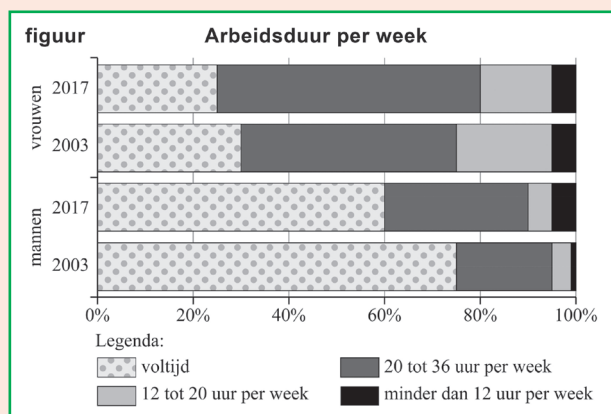
figuur 2 Uitwerkbijlage bij vraag 5

Er waren vooral veel leerlingen die probeerden een redenering op te schrijven, maar dat leverde veel vage taal op waarbij het moeilijk was om punten toe te kennen. Een mooie redenering zou zijn geweest dat de grafiek van de PRO 5 zowel bij minuut 15 als bij minuut 90 boven de grafiek van PRO 6 ligt en dat tussenliggende stukken bij beide exponentieel zijn. Ik herkende af en toe een stukje van deze redenering, maar een succesvolle poging tot een waterdichte redenering ben ik niet tegengekomen. Wel zag ik nog enkele redeneringen over oppervlaktes onder de grafieken, maar als je dat doet vergelijk je de hoeveelheid energie die geleverd moet worden door beide laders. Dat is te zien aan een analyse van de eenheden. De oppervlakte is namelijk uit te drukken in Watt x sec en aangezien Watt = Joule/sec krijg je dan een uitkomst in Joule.

Probleemoplossen: leerkrachten basisonderwijs

Bij vraag 9 moesten leerlingen uitleggen dat het percentage voltijders over de gehele groep groter kon zijn geworden, terwijl dat zowel bij de mannen als bij de vrouwen lager was geworden. Het eerste punt was te

verdiene met het aflezen van alle vier de percentages voltijders. Dat lukte af en toe wel, maar daarna was het alles of niets bij mijn leerlingen. Als het inzicht er was dat dit alleen mogelijk was als er in 2017 verhoudingsgewijs veel meer mannen waren dan in 2003, dan kon dit vaak ook in een berekening getoond worden, maar als het inzicht ontbrak, wisten de leerlingen niet waar ze moesten beginnen. Helaas was het aantal leerlingen dat dit verzoon eenvoudig op één hand te tellen.



figuur 3 figuur bij vraag 9

Probleemoplossen: hart-lopen

Bij vraag 12 moesten leerlingen onderzoeken bij welke leeftijden de formules $M(\text{ongetraind}) = 220 - L$ en $M(\text{getraind}) = 205,8 - 0,685 \times L$ antwoorden geven die meer dan 5 van elkaar verschillen. De meest eenvoudige strategie was om gewoon waarden in te vullen (al dan niet met behulp van de GR) en dan de relevante gegevens op te schrijven. Ook hierbij was ik weer erg blij met het feit dat ik mijn leerlingen meerdere keren op de whiteboards een opgave had laten uitwerken, want bijna allemaal schreven ze ook daadwerkelijk de tabel goed over. Helaas was er ook één leerling die heel netjes beschreef hoe hij zijn GR had gebruikt door te noemen welke formules hij had ingevoerd en hoe hij de tabel had ingesteld. Daarna volgde ook nog eens de juiste conclusie, maar hij verzuimde om iets van de tabel over te nemen. Op dat punt was ik niet erg blij met het correctievoorschrift. Nog steeds wordt in de correctievoorschriften van wiskunde te weinig recht gedaan aan inzichten die leerlingen tonen en wordt er te veel beschreven wat er op papier moet staan. Een correctievoorschrift als hieronder zou tot een heel ander aantal punten hebben geleid en naar mijn idee meer recht hebben gedaan aan wat wij van onze leerlingen vragen. Ik vond 4 punten voor het overnemen van de tabel van je GR wel erg veel.

— Het inzicht dat gezocht moet worden naar die waarden van L waarbij $M(\text{ongetraind}) - M(\text{getraind})$ kleiner dan

–5 of groter dan 5 is. (1 punt)

— Het beschrijven van een methode hoe deze verschillen berekend kunnen worden. (1 punt)

— Het daadwerkelijk uitvoeren en verslagleggen van de berekeningen. (2 punten)

— De conclusie. (1 punt)

Formuleren en taalgebruik

Ook dit jaar heb ik mijn leerlingen weer veel punten moeten onthouden vanwege formulering. Soms was dit terecht en soms was dit in mijn ogen onterecht. Het meest pijnlijk hierin vond ik opgave 11 waar gevraagd werd welke waarden van de hartslag mogelijk waren, waarbij het antwoord in wiskundetaal eenduidig geformuleerd zou kunnen worden als $\{104, 105, \dots, 121\}$, maar deze notatie werd uiteraard door mijn leerlingen niet gebruikt. De intervalnotatie werd hier goed gerekend, hoewel die natuurlijk geen recht doet aan het feit dat we hier met een discrete variabele van doen hebben. De meeste van mijn leerlingen antwoordden tussen 104 en 121. Volgens het verslag van de vereniging moest dit bestraft worden door één punt in mindering te brengen. Ik heb dit wel gedaan vanwege de uniformiteit, maar was het hier eigenlijk niet mee eens. De betekenis van het woord tussen is niet eenduidig bepaald in het Nederlands. 'Kies een getal tussen 1 en 10' is een uitspraak waarbij je heel raar aangekeken wordt als je hier gaat zeggen dat 1 en 10 niet gekozen mogen worden. Ik vind het prima als mijn leerlingen antwoorden in het Nederlands en niet in wiskundetaal en dan moeten we antwoorden zoals tussen 104 en 121 gewoon goedkeuren. Hier mag het correctievoorschrift wat mij betreft best wat richting in geven.

Conclusie

Er zat veel rechttoe rechtaan werk in het eindexamen, het probleemoplossen zat hem voornamelijk in het vinden van de juiste informatie in tekst, tabellen en grafieken en daar waar echt wiskundig denken getoetst werd, was het al snel te moeilijk of was het op papier krijgen van de redenering een brug te ver.

Over de auteur

Maarten Müller is drie dagen werkzaam als eerstegraads docent wiskunde aan het Marianum in Groenlo. Hij is twee dagen in de week actief als zzp-er om scholingen te verzorgen over Building Thinking Classrooms en formatief handelen en beheert de pagina www.buildingthinkingclassrooms.nl. E-mailadres: m.muller@marianum.nl

Examen havo wiskunde B

Het havo wiskunde-B-examen was compleet, ondanks het ontbreken van een eenheidscirkelcontext. De hoeveelheid tekst was in orde, volgens Gerrie Stuurman. De N-term is 1,4.

Iets te vieren

Voordat ik mijn examenrecensie ging schrijven voor deze feestelijke 100^{ste} jaargang, heb ik gekeken of ik zelf ook iets te vieren had. Ik had gehoopt dat het mijn tiende recensie over het havo wiskunde-B-examen zou zijn. Maar zover ben ik nog niet. Misschien mijn negende recensie? Want dan kon ik een mooie link leggen tussen de twee 'kwadraten'. Deze recensie is echter mijn zevende examenartikel. Nou dat brengt geluk, dus daar ga ik dan maar voor.

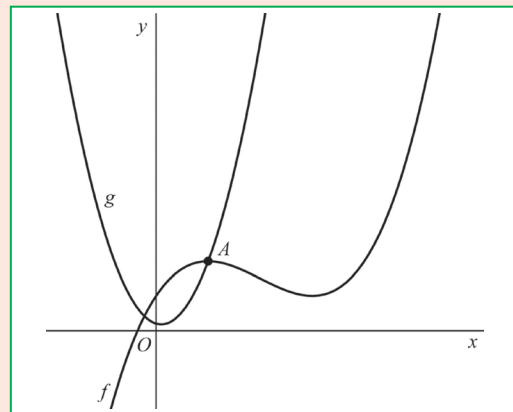
De havo wiskunde-examens waren dit jaar op de allereerste dag. De spanning in de examenzaal was merkbaar. Ik had mijn leerlingen al geïnformeerd dat ik ze zou bevragen over het examen om hun reacties in dit artikel te kunnen gebruiken. Zelf heb ik tijdens de examenzitting snel het examen even gemaakt. Mijn eerste indrukken waren 'ik mis iets' en 'wel goed te doen'. Op één leerling na hebben mijn leerlingen hun werk aan het eind van hun examenzitting ingeleverd. Hun eerste reacties waren dat het examen niet te lang was (gelukkig!) en dat ze alle opgaven goed hadden kunnen uitwerken of in ieder geval iets hadden kunnen opschrijven. En ja, ze hadden de eenheidscirkel 'gemist'. Tijd om het examen zelf in meer detail te bekijken.

Het begin is top

De eerste context heet *Door de top*, zie figuur 1. Er zijn 10 punten te verdienen van de 76 punten in totaal voor dit examen. Bij opgave 1 moet de correctheid van de gegeven afgeleide van de functie $f(x) = 2(\frac{1}{3}x - 1)^3 - \frac{1}{2}x + 3$

worden bewezen. Het differentiëren met de kettingregel gaat goed. Bij opgave 2 moet de afgeleide worden gebruikt om de coördinaten van de linkertop te bepalen. Deze coördinaten moeten vervolgens worden gebruikt om

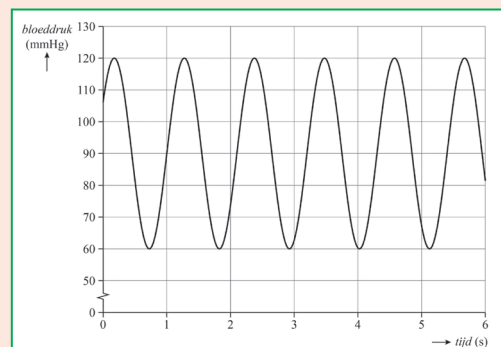
een constante c in het gegeven functievoorschrift van $g(x) = x^2 - \frac{3}{10}x + c$ te berekenen. Het zijn prettige opgaven om mee te beginnen. Mijn leerlingen halen hier gemiddeld 8 van de 10 punten binnen.



figuur 1

Bloeddruk en hartslag

Bij opgave 3, de eerste opgave in de context *Bloeddruk*, moet er een functievoorschrift bij een sinusöide van de bloeddruk worden opgesteld: $P = a + b\sin(c(t - d))$. Dat is bekend terrein, zie figuur 2. Ik hoor mezelf nog zeggen: 'In de helft van de examens zit zo'n opgave. Laten we het nog een keer oefenen.'



figuur 2

Opgave 4 is in mijn groep het slechtst gemaakt van het hele examen. 'Geen idee wat ik daar moest doen', was een van de reacties. Bij deze opgave was een formule voor de gemiddelde bloeddruk gegeven, uitgedrukt in de minimale en maximale bloeddruk:

$P_{\text{gem}} = P_{\text{min}} + 0,33(P_{\text{max}} - P_{\text{min}})$. Er moet worden uitgerekend hoeveel keer zo groot het percentage dat de bijdrage van P_{min} aan de gemiddelde bloeddruk is dan de bijdrage van P_{max} . Wij 'zien' direct dat het twee keer zoveel is, maar de leerlingen begrepen de vraag niet. Ik heb geen idee waar hem dat in zit. Op het examenforum lees ik dezelfde observatie. Dat valt weer mee. Dat geldt ook voor het aantal punten dat deze opgave waard is. Dat zijn er gelukkig maar 2.

Bij vraag 5 wordt er een formule met vier variabelen gegeven, waarvan er drie in de begeleidende tekst worden gegeven en de vierde moet worden berekend. Dat geeft mij meteen de gelegenheid om te laten zien hoe ik leerlingen een 'zinvol' gebruik van hun markers probeer te leren, zie figuur 3.

$$P_{\text{gem}} = P_{\text{min}} + (0,33 + 0,0012 \cdot H)(P_{\text{max}} - P_{\text{min}}) \quad (2)$$

Een gezonde volwassene heeft in rust een minimale bloeddruk van 80 mmHg en een maximale bloeddruk van 120 mmHg. Tijdens het hardlopen heeft hij een gemiddelde bloeddruk van 100 mmHg. Bereken bij welke hartslag volgens formule (2) de gemiddelde bloeddruk 100 mmHg is. Geef je eindantwoord in gehele slagen per minuut.

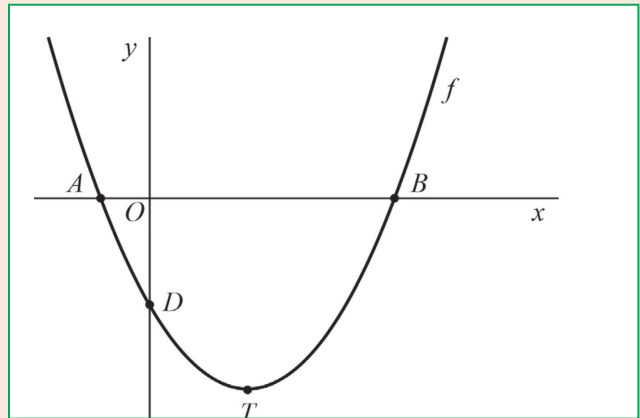
figuur 3

Uiteraard is dit kleurenfestijn niet voor elke leerling nodig, maar het kan ze helpen om kritisch te lezen en de juiste getallen op de juiste plaats in te vullen. Voor de gevraagde hartslag moet het antwoord $H = 141,666\dots$ worden afgerond naar 142. Een deel van de leerlingen rondt af naar 141, omdat er niet 142 hele hartslagen in die minuut gaan. Dat is zo, maar dat is hier niet de bedoeling. Ik bedenken dat die mmHg eigenlijk ook een afgeronde waarde is en kan variëren tussen de 99,5... en 100,49... . Welke hartslag zou horen bij die uiterste mogelijkheden? Ik wil het weten. Ik zie dat alle aantallen hartslagen van 132 tot en met 151 dan het juiste antwoord zouden kunnen zijn. Het voelt een beetje jammer dat ik die '141' niet goed mag rekenen.

Analytische meetkunde

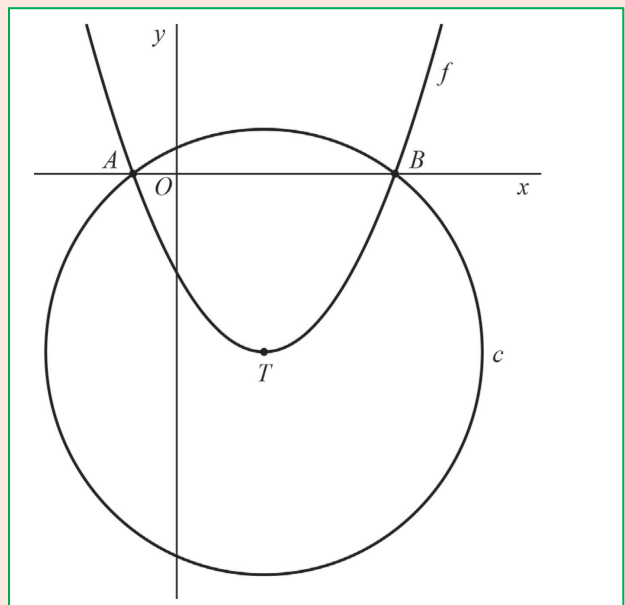
De context *Een parabool en een cirkel* betreft een van mijn favoriete lesonderwerpen. Bij opgave 6 moet er algebraïsch worden bepaald of de hoek die de raaklijn in punt D met de y -as maakt kleiner is dan 30° , zie figuur 4. Dus differentiëren, richtingscoëfficiënt berekenen,

hellingshoek α bepalen en dan eraan denken om nog even die 'andere' hoek ($90^\circ - \alpha$) uit te rekenen. Een enkele leerling berekent foutief alleen hoek OAD . Jammer!



figuur 4

Met opgave 7 vallen de meeste punten van alle opgaven te verdienen, en wel 8 punten. Het doel is om exact de snijpunten van de cirkel met de y -as te berekenen, zie figuur 5.



figuur 5

Allereerst moeten de nulpunten en de top van $f(x) = \frac{4}{9}x^2 - \frac{16}{9}x - \frac{20}{9}$ worden bepaald. Hiermee kan dan de straal van de cirkel worden berekend en de cirkelvergelijking worden opgesteld. Tot slot kan door $x = 0$ in te vullen in de cirkelvergelijking worden berekend dat de y -coördinaten van de snijpunten met de y -as gelijk zijn aan $y = -4 \pm \sqrt{21}$ zijn. Ik vind het mooi dat deze oplossingen niet 'mooi' zijn.

>

'A walk in the parc' of toch niet?

Deze opgave deed mij denken aan de context *Grachtenloop* uit het pilotexamen van 2014, tijdvak 2.

Zoek hem maar eens op. Lang geleden...

Bij deze context *Parkje in Lyon* moet algebraïsch de oppervlakte van het parkje worden berekend, zie figuur 6. Daarbij moeten de leerlingen zelf bedenken dat daarvoor de lengte van de hoogtelijn vanuit hoekpunt B berekend moet worden om deze daarna samen met de lengte van de overstaande zijde AC in te vullen in de formule voor de oppervlakte van een driehoek. De ene helft van mijn leerlingen had voor deze opgave alle punten en de andere helft bleef bij de ingang van het park staan met 0 punten.



figuur 6

Rare functie?

'Ik kreeg die dingen niet eens geplot'. Niet mijn woorden, maar de woorden van één van mijn leerlingen. De reden voor deze uitspraak was dat bij deze context *Dicht bij elkaar* bij de eerste opgave gewerkt moest worden met

de functies $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{\frac{1}{x}}}$ en $g(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$. Er moet

worden onderzocht of het snijpunt van beide grafieken een minimum is van de grafiek van f . Ook deze opgave was een 'alles-of-niets-vraag' wat betreft de punten die mijn leerlingen hebben gekregen.

Bij opgave 10, de tweede opgave in deze context, moet er worden uitgelegd waarom de grafieken van de eerder gegeven functie f en de grafiek van $h(x) = \sqrt{x}$ voor grote waarden van x steeds dichter bij elkaar komen te liggen. Zonder getallenvoorbeeld. En uiteindelijk ook bijna zonder verdiende punten. Dit soort opgaven is voor leerlingen

altijd lastig. Ik vind het zelf ook altijd erg lastig om na te kijken. Leerlingen gebruiken bijna nooit letterlijk de omschrijving uit het correctievoorschrift. Wanneer staat de juiste omschrijving er en wanneer toch niet?

Bij het laatste onderdeel moet met de grafische rekenmachine worden berekend wanneer het verschil tussen beide functies kleiner is geworden dan 0,01. Dat lukt gelukkig weer een stuk beter. Vanaf deze vraag gaat het weer steeds beter met de punten.

Biertje?

Het brouwen van bier, de context van de volgende drie vragen in dit examen, is een scheikundig proces. Tijdens het brouwproces worden alfasuren omgezet naar iso-alfasuren. Deze omzetting is een exponentieel proces. Interessant! Ik laat het aan de lezer over om te bepalen of dit bier uiteindelijk een '0.0'-tje moet worden of niet. Bij opgave 12 moet de groeifactor worden berekend uit de gegevens. Bij opgave 13 moet worden berekend wat het tijdsverschil is tussen het moment dat 13,5% van de alfasuren is omgezet en het moment dat het percentage twee keer zo hoog (27%) is geworden. Een van de 'struikel'-punten bij deze opgave is dat bij de exponentiële formule $t = 0$ overeenkomt met het moment dat het kookproces al 5 minuten bezig is. Verder zijn beide opgaven bekend terrein voor de meeste leerlingen. Bij opgave 14 wordt een formule met vier variabelen gegeven:

$$B = \frac{4 \cdot P \cdot M}{V}$$

Hierbij zijn B , de bitterheid in EBU, en

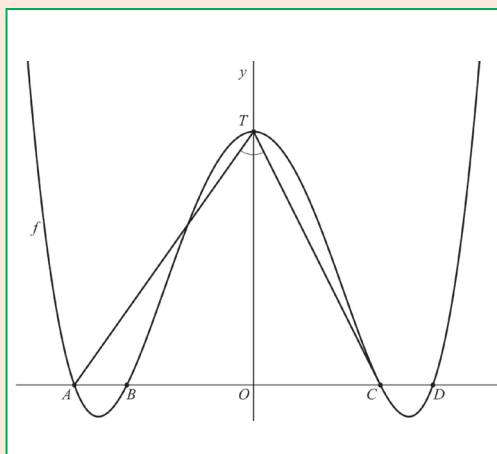
M , het aantal gram hop, gegeven. De P , het percentage alfasuren dat is omgezet, moet worden berekend uit het gegeven dat de kooktijd 30 minuten is. Daarna kan algebraïsch het aantal gebrouwen liters bier worden berekend. Er is maar één leerling die voor deze opgave 3 punten heeft. Alle andere leerlingen halen hier met 4 punten de maximale score bij deze vraag. Super!

Exponentiële functies

In deze context zitten drie opgaven met veel bekende onderdelen: exact oplossen van een exponentiële vergelijking bij opgave 15, een opgave met transformaties en een asymptoot en tot slot het herschrijven van een logaritmische uitdrukking in een andere vorm bij opgave 17. Normaliter zijn mijn leerlingen best goed in het exact oplossen van exponentiële en logaritmische vergelijkingen. Dat gaat dit keer minder goed dan anders. Ik heb geen idee waarom. Het kan natuurlijk toeval zijn. Opgave 16 en 17 maken ze overigens best goed.

Laatste context

Bij opgave 18 van de laatste context *Vierdegraadsfunctie* moet de functie $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ worden gedifferentieerd om exact het minimum te kunnen berekenen, zie figuur 7. Dat is niet zo moeilijk. Met opgave 19 sluit het examen af. Voor deze opgave hebben mijn leerlingen een p -waarde van 78 gescoord. Dat heb ik echt nog nooit eerder meegemaakt bij een laatste opgave uit een examen. Ik denk dat het ook een indicatie is van een goede lengte van dit examen. Bij deze opgave moet hoek ATC algebraïsch worden berekend. Hiervoor moeten eerst de nulpunten van de grafiek van f worden bepaald. Hierbij worden ze op weg geholpen doordat gegeven is dat f ook te schrijven is als $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2)$. Een mooie afsluiting van dit examen!



figuur 7

Conclusie

Aan het begin van dit artikel heb ik geschreven dat ik iets miste in dit examen. Ja, dat was de eenheidscirkel. Maar wat ik ook 'miste' waren grote lappen tekst. Een positieve verandering! Ik ben er blij mee. Ik had nog even de neiging om te gaan tellen hoeveel procent minder woorden er in dit examen zitten in vergelijking met voorgaande jaren. Maar ik laat het graag over aan mensen die er een handig toeltje voor hebben. Bij dezen!

Verder was het een compleet examen. Drie keer differentiëren, waarvan een keer met de kettingregel. Een exponentiële formule en iets met logaritme. Gewone meetkunde en analytische meetkunde. Redelijk wat opgaven waarbij 'exact' of 'algebraïsch' gewerkt moest worden. En mijn leerlingen hebben goed kunnen laten zien wat ze geleerd hebben bij dit examen. Fijn! Of ik nog tips voor mijn lessen eruit heb gehaald? Ja, ik denk dat ik een speciaal lesje met allerlei 'redeneer'-

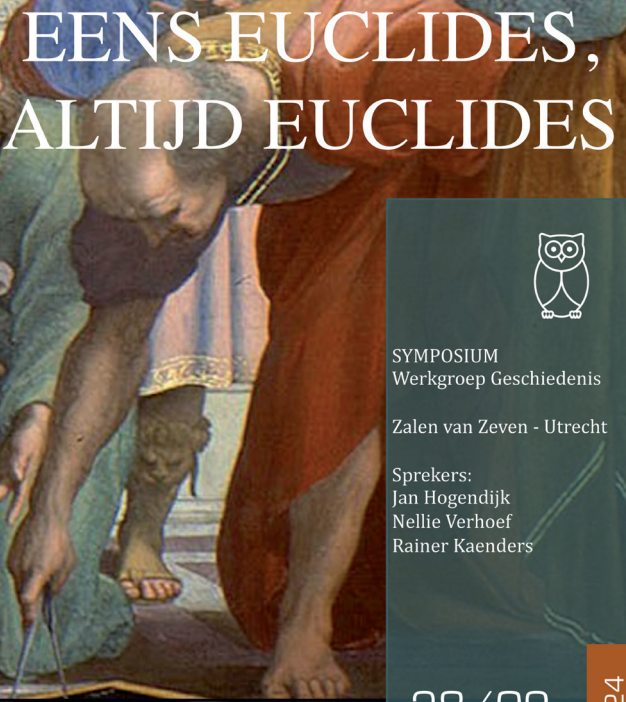
examenopgaven ga maken voor de laatste periode in aanloop naar het examen. Zo blijft er altijd iets te doen.

Over de auteur

Gerrie Stuurman is docente wiskunde op Huizermaat te Huizen. E-mailadres: gstuurman@gsf.nl

Geschiedenis Symposium

EENS EUCLIDES, ALTIJD EUCLIDES



SYMPOSIUM
Werkgroep Geschiedenis

Zalen van Zeven - Utrecht

Sprekers:
Jan Hogendijk
Nellie Verhoef
Rainer Kaenders

28/09

2024

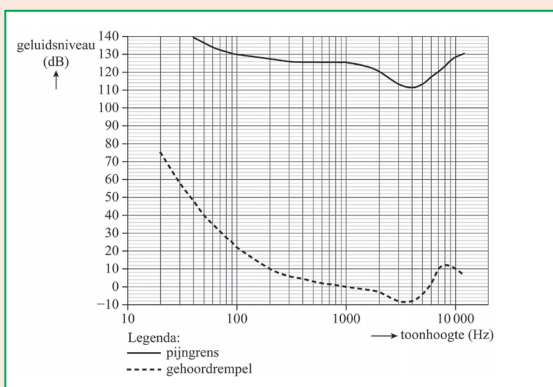
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

Examen vwo wiskunde A

Marcel Daems bespreekt het vwo wiskunde-A-examen. Zijn leerlingen vonden het lastig. Komt dat door de late afnamedatum, aan het einde van het eerste tijdvak? Of is een wiskunde-A-examen te contextrijk en is het niveau van vaardigheden eenvoudigweg nog niet hoog genoeg om deze te gebruiken in grote en deels onbekende contexten? De veelzeggende N-term is 2,1.

Horen

De eerste context bevat vijf vragen en gaat over geluid. In figuur 1 is een verband te zien tussen het geluidsniveau en de toonhoogte voor zowel de gehoordrempel als de pijngrens.



figuur 1

De eerste vraag is een fijne binnenkomer waarbij de leerlingen moeten aflezen bij welke toonhoogtes de gehoordrempel op 10 dB ligt.

Geluid in een discotheek of concert kan tot gehoorschade leiden. Een vuistregel hierbij luidt: de tijd in uren om zonder gehoorschade te kunnen genieten, halveert bij elke toename van het geluidsniveau met 3dB. Bij 80 dB kan iemand 8 uur lang zonder problemen genieten. De vraag is om de groeifactor te bepalen die bij dit exponentieel probleem hoort.

Het exponentiële verband waarmee verder gerekend moet worden is: $T = 8 \cdot 0,79^{D-80}$. Hierin is T de maximale tijd om zonder gehoorschade te kunnen genieten en D het geluidsniveau. Vraag 3 is uit te rekenen hoelang deze maximale tijd in minuten is bij een geluidsniveau van 100 dB. Nauwelijks een uitdaging te noemen. Dan begint het wat lastiger te worden.

Er wordt een logaritmisch verband gegeven tussen geluidsniveau D in dB en geluidsdruk p in micropascal, μPa . Een nieuwe term. Het verband luidt: $D = 20 \cdot \log(p) - 26,02$. De vraag is welke geluidsdruk, afgerond op duizendtallen, hoort bij een geluidsniveau van 70 dB. Voor veel leerlingen een opgave om de grafische rekenmachine te gebruiken. Een enkeling werkte het netjes algebraïsch uit.

De laatste vraag is om te zien of leerlingen met de rekenregels voor logaritmen uit de voeten kunnen. Toon aan dat de geluidsdruk verdubbelt als het geluidsniveau toeneemt met 6 dB. De eerste opgave die onderscheid maakt tussen de leerlingen.

Water bottle flip

Een deels gevuld plastic flesje met een draai zodanig in de lucht gooien dat de fles mooi rechtopstaand neerkomt. Een leuk onderwerp dat aansluit bij de doelgroep, schat ik in.

Nu blijkt uit onderzoek dat er zoiets als een optimale vulgraad voor een flesje bestaat. En uit dat onderzoek zijn de volgende formules gekomen:

$$V = \frac{\sqrt{1+M}-1}{M} \text{ met } M = \frac{w}{f}$$

Hierin staat V voor de optimale vulgraad, w voor het totale gewicht aan water dat in het flesje kan en f voor het gewicht van het flesje zelf. De gewichten zijn weergegeven in gram.

Voor flesjes waar 500 gram water in kan, is het gewicht van de optimale vulling te beschrijven met $G = 500V$. In vraag 7 moet de leerling aantonen dat

$$G = f \sqrt{1 + \frac{500}{f}} - f.$$

Velen begonnen keurig met $500V$ en gebruikten $M = \frac{500}{f}$ en gingen aan de slag. Nu heeft deze opgave in zich

dat leerlingen naar het antwoord toe werkten maar in de laatste stap, waarbij gedeeld moest worden door $1/f$, niet duidelijk noteerden dat de hele teller met f vermenigvuldigd moest worden.

De laatste vraag vind ik voor leerlingen geen fijne vraag. De opdracht is een schets van de afgeleide $\frac{dV}{dM}$ te geven en dan aan de hand van de schets te beredeneren of de vulgraad toe- of afneemt als de grootte van de fles toeneemt.

Veel leerlingen gingen differentiëren en dat is niet zo vreemd. Want differentiëren is namelijk wat ze veel geoefend hebben. Had deze vraag niet anders gekund? Door bijvoorbeeld de afgeleide te geven en de leerlingen de afgeleide te laten aantonen, waarna er een kwalitatieve vraag over zou volgen. De formule van V bevat een breuk waarin een wortel voorkomt. Deze differentiëren is nogal bewerkelijk en daar kan natuurlijk van alles bij misgaan. Zo kwamen er heel wat verschillende grafieken tevoorschijn. Het voorbeeld van een schets in het correctievoorschrift is wel erg mager. De assen zijn niet benoemd en het suggereert een verticale asymptoot bij $M = 0$. De asymptoot ligt echter bij $M = -1$ en om de schets zoals in het CV te krijgen, moet het venster horizontaal worden ingesteld van 0 tot 100 en verticaal van $-0,1$ tot $0,1$. Weinig leerlingen zullen dit uitgevist hebben. De laatste twee bollen in het correctievoorschrift vind ik dubbelop. Immers, opmerken dat V dalend is en dat V dus afneemt, is min of meer hetzelfde. Een punt voor de opmerking dat de afgeleide negatief is en een tweede punt voor de conclusie lijkt passender.

Meerlingen

Een opgave over tweelingen, drielingen en meerlingen met vragen waarbij verschillende vaardigheden aan bod komen: combinatoriek, procenten en rijen. Dat is knap bedacht van de examenmakers.

Gegeven is dat een drieling op de volgende manieren kan ontstaan: uit één eitje, een eeneiige drieling, uit twee eitjes, waarbij twee kinderen een eeneiige tweeling zijn en het derde kind uit een ander ei komt, uit drie eitjes. De eerste vraag is om te berekenen hoeveel verschillende samenstellingen er zijn. Niet echt bijzonder moeilijk, dit is het enige telprobleem in het examen.

Na de invoering van de IVF-techniek nam het aantal meerlingen in verhouding toe. Vraag 10 is een percentageberekening over die toename aan de hand van gegeven data.

Vanaf hier wordt het examen een stuk lastiger. Het aantal niet gemaakte opgaven ging nu in snel tempo omhoog.

De opgave gaat verder met de wet van Hellin uit 1895. Hij stelde dat de verhouding tweeling t.o.v het aantal geboortes $1 : 89$ is, voor drielingen is dat $1 : 89^2$, voor vierlingen $1 : 89^3$, et cetera.

$P(n)$ is het percentage n -lingen, te berekenen met een recursieve formule: $P(n) = \frac{1}{89}P(n-1)$, met $P(2) = \frac{100}{89}$ en $n > 2$.

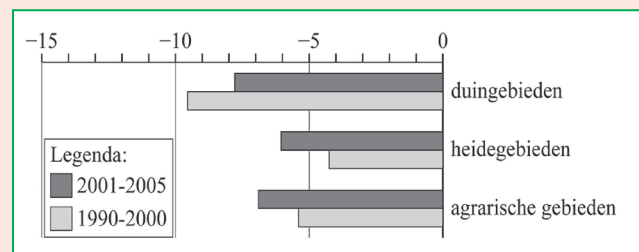
Vraag 11 luidt: schrijf deze formule als $P(n) = b \times r^n$. Nog niet eens zo makkelijk omdat de formule geldt voor $n > 2$.

In vraag 12 moet, nu met de verhoudingen $1 : 80^n$, vervolgens het percentage eenlingen berekend worden. Velen gingen hier de mist in, omdat ze een nieuwe rij gingen maken, iets wat bij de vorige vraag al niet goed ging. Maar de recursieve formule is echter al gegeven, zij het met een andere vermenigvuldigingsfactor, en anders was alles optellen ook te doen. Het is maar een som van acht termen. Op zich is er natuurlijk niets mis met een onderscheidende vraag.

Veldleeuweriken

Een grote context over een actueel thema. Mooi dat de examenmakers dit in een examen weten te bouwen. Ook hier komen weer verschillende vaardigheden samen, die deels eerder aan bod zijn gekomen.

We beginnen met de hoeveelheid grasland in Nederland. Van 1990 tot 2015 is ruim 150.000 hectare grasland verdwenen ofwel 14%. In vraag 13 is uit te rekenen hoeveel grasland er nog was in 2014. Geen ingewikkelde vraag. Bij vraag 14 komen percentages weer om de hoek kijken. Dat is in dit examen voor de vierde maal, maar iedere keer wordt een andere toepassing gevraagd. Nu is de opdracht uit een grafiek voor verschillende gebiedssoorten en voor verschillende periodes procentuele afnames af te lezen en die om te zetten naar een groeifactor om zo het aantal veldleeuweriken in 2005 te berekenen, zie figuur 2



figuur 2

Bij vraag 15 gaat het om de procentuele ontwikkeling van het aantal veldleeuweriken in Nederland. Ook dit neemt over de periode 1990 – 2014 af. Uitgaande van 100% in 1990 is het aantal veldleeuweriken in 2014 gereduceerd tot 40%. Gegeven is dat de percentages in de loop van de jaren te benaderen zijn met een meetkundige rij. De opdracht is een recursieve formule hiervoor op te stellen.

Omdat de leeftijd van jonge veldleeuweriken moeilijk valt te bepalen, gebruikt men de lengte van de tarsus als maat voor de leeftijd, een leuk weetje in het examen.

Gegeven is een grafiek met daarin een verband tussen het gewicht van een jonge veldleeuwerik en de tarsuslengte, zie figuur 2 van de wiskunde-C-recensie.

De getekende kromme geeft een verband tussen de tarsuslengte T en het gewicht G en kan benaderd worden met de volgende formule:

$$G = \frac{22}{1 + 1420e^{-0,307T}} + 9$$

In het examen staat dat het gewicht een grenswaarde heeft. In vraag 16 moet de grootte van deze grenswaarde beredeneerd worden zonder getallenvoorbeelden. Dit soort formules heeft echter twee horizontale asymptoten en het plaatje suggereert dat de grenswaarde aan de onderkant ligt. Het correctievoorschrift gaat alleen uit van de bovenste grenswaarde.

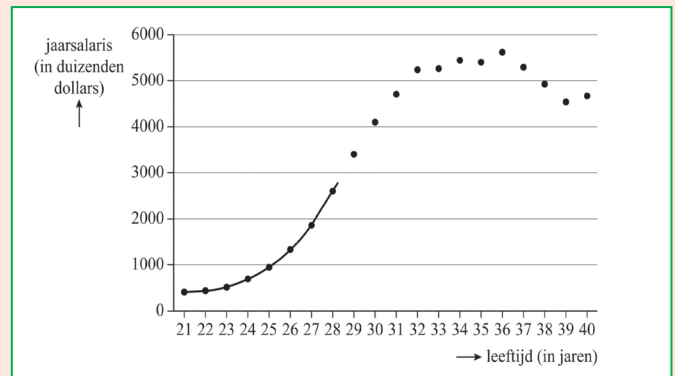
Leerlingen willen precies doen wat gevraagd wordt en zitten vaak in een situatie dat ieder punt voor wiskunde ertoe doet. De vraag anders formuleren zou hier op z'n plaats zijn geweest. Bijvoorbeeld door te vragen naar de bovenste grenswaarde, of om de grenswaarde te laten berekenen als T groter wordt, of het verschil tussen de grenswaarden te laten berekenen. De vaardigheid hoe een grenswaarde bepaald kan worden zonder getallen te gebruiken is, natuurlijk weer wel op z'n plaats in een examen.

De laatste vraag van deze context mag er zijn: met de afgeleide de maximale toenamesnelheid van het gewicht berekenen.

Honkbalsalarissen

Ook deze opgave is groot, verspreid over drie pagina's. In deze opgave komen vragen aan bod over het salaris van spelers, afhankelijk van hun leeftijd en hun honkbalkwaliteit. De vragen die hier gesteld worden, hebben een herhalend karakter.

Gegeven is figuur 3 met daarin de gemiddelde jaarsalarissen uitgezet tegen de leeftijd.



figuur 3

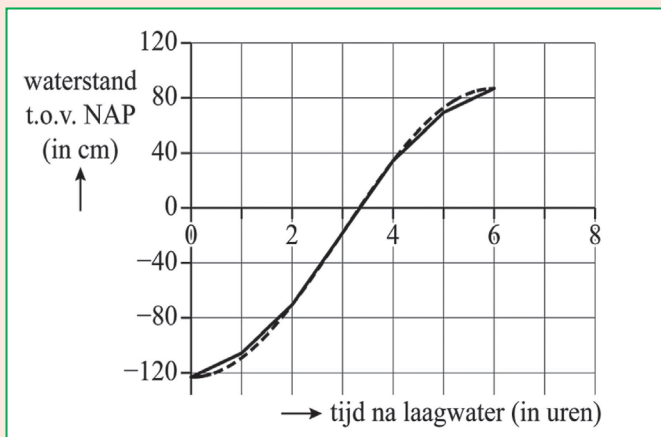
In vraag 18 moet er een formule worden opgesteld tussen leeftijd en salaris voor het eerste exponentiële deel. De valkuil is dat de teller $t = 0$ begint op leeftijd 21. Rekenen met een groeifactor is al eerder voorbijgekomen. Leerlingen die dit niet beheersen, beheersen dit nu waarschijnlijk ook niet. De formule van de benaderingskromme in de figuur 3 is eenzelfde type als bij de vorige opgave:

$$W = \frac{5500}{1 + 1600000 \cdot 0,598^t}$$

Hierin staat W voor het salaris en t voor leeftijd. Bij vraag 19 moeten leerlingen wederom een grenswaarde bepalen om vervolgens het procentuele verschil uit te rekenen tussen het werkelijke gemiddelde salaris van 39-jarige honkballers met deze grenswaarde. Ditmaal staat er duidelijk bij dat het gaat om de grenswaarde waarnaar W stijgt. De laatste vraag in deze context, over de zogenaamde WAR-waarde, was niet moeilijk.

Getij

De laatste opgave is de onderzoeksvraag. Dit keer gaat het over het benaderen van de waterstand bij Nes op Ameland. De volgende gegevens staan in de tekst: bij laagwater is de waterstand -123 centimeter t.o.v. NAP en zes uur later is de hoogste waterstand +87 centimeter t.o.v. NAP. Hiermee kan een sinusfunctie opgesteld worden om de waterstand tussen de tijdstippen van laagwater en hoogwater te benaderen. Een andere manier om de waterstand te bepalen is de twaalfdelenregel. Deze regel benadert de waterstand door lijnstukken met elkaar te verbinden. Per uur tussen laag- en hoogwater is de helling van dit lijnstuk afhankelijk van de amplitude. Voor de zes uren tussen laagwater en hoogwater geldt achtereenvolgens een helling van $1/6$, $2/6$, $3/6$, $3/6$, $2/6$ en $1/6$ deel van de amplitude, zie figuur 4. De onderzoeksvraag luidt na te gaan wat het maximale



figuur 4

verschil is tussen deze twee manieren om de waterstand te benaderen.

Hier wordt op een mooie manier naar kennis van de sinusfunctie en van een lineair verband gevraagd. Voor veel leerlingen was dit echter te veel gevraagd. De meesten kwamen niet verder dan het opstellen van de sinusfunctie. Tijdnood zal hier waarschijnlijk de oorzaak van zijn.

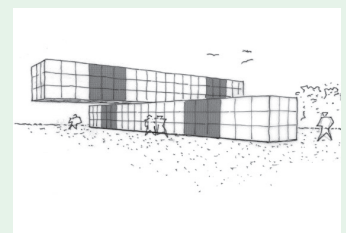
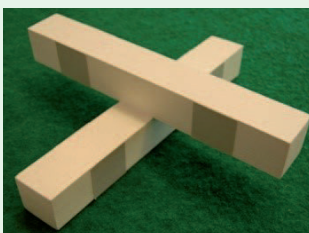
Tot slot

Veel examenonderdelen zijn aan bod gekomen. Het verwerken van verschillende wiskundige vaardigheden in een opgave verdient zeker een compliment. In die zin is het een mooi examen. In dit examen zijn de contexten echter erg groot. De eerste en derde opgave zijn beschreven in twee pagina's, de vierde en vijfde opgave zelfs in drie. Bij elkaar zijn de opgaven verdeeld over 13 pagina's. Dat is vergeleken met vorig jaar een pagina minder, maar het is nog steeds veel. Hoe meer tijd leerlingen kwijt zijn aan lezen, des te minder tijd blijft er over om over de wiskunde na te denken. En daar zou toch meer de nadruk op mogen liggen.

Over de auteur

Marcel Daems is docent wiskunde aan Christelijk Gymnasium Sorghvliet te Den Haag en lid van de ontwerpcommissie van de wiskunde Olympiade.
E-mailadres: da@gymnasium-sorghvliet.nl

Het Gebouw



Wie de afslag Leidsche Rijn neemt op de A2 zal na enig zoeken een wiskundig zeer interessant bouwwerk vinden. Het Gebouw is een tentoonstellingspaviljoen, ontworpen door kunstenaar Stanley Brouwn. Het ontwerp van deze nestor van de Nederlandse conceptuele kunst is uiterst eenvoudig: twee langwerpige witte blokken die kruislings over elkaar liggen.

De maten van het gebouw zijn afgeleid van de 'brouwnvoet', de voetmaat die de kunstenaar zelf hanteert als alternatief voor het metrisch systeem. De Utrechtse architect Bertus Mulder, bekend van zijn restauratie van het Rietveld-Schröderhuis, is de uitvoerend architect. Wie een bezoek brengt zal zich verbazen hoe de bovenste zeven kubussen in balans blijven op de onderste zeven.

Examen vwo wiskunde B

Henk Hietbrink bespreekt het wiskunde-B-examen vanuit het perspectief van zijn leerlingen. De N-term is 2,1. Dat krijg je als te veel leerlingen het examen afraffelen.

Inleiding

Dit jaar was er een mooi vwo wiskunde-B-examen met afwisselend korte opdrachten en verrassende teksten. De opdrachten waren prima te maken, tenminste als je wist wat je moest doen. Ook was het examen prima na te kijken als leerlingen conform het correctievoorschrift werkten. Maar er zijn altijd leerlingen die een andere uitwerking hebben en dan is het goed dat je met collega's en je tweede corrector van gedachten kan wisselen. Laten we eens beginnen met wat voorbeelden. Ergens wordt gevraagd om exact de hoek te berekenen tussen de x -as en de raaklijn in zeker punt aan een kromme met zekere bewegingsvergelijking. Je differentieert en berekent de afgeleide naar x en de afgeleide naar y in dat ene

gegeven punt en komt uit op richtingscoëfficiënt $\frac{-4}{-4\sqrt{3}}$ en berekent $\tan^{-1}\left(\frac{-4}{-4\sqrt{3}}\right) = 30^\circ$.

Ga je verder met de volgende opdracht of geef je een ander antwoord? Bij opdracht 10 kom ik erop terug. Ergens wordt gevraagd om exact de oppervlakte te berekenen. Stel dat je dat doet door slim het verschil van twee oppervlaktes te nemen. Je komt uit op $\frac{2}{3}\sqrt{14\frac{2}{9}} - \frac{1}{2}\sqrt{8}$. Ga je verder met de volgende opdracht of zou je je tijd verdoen aan verder vereenvoudigen? Bij opdracht 12 kom ik erop terug.

Interviews

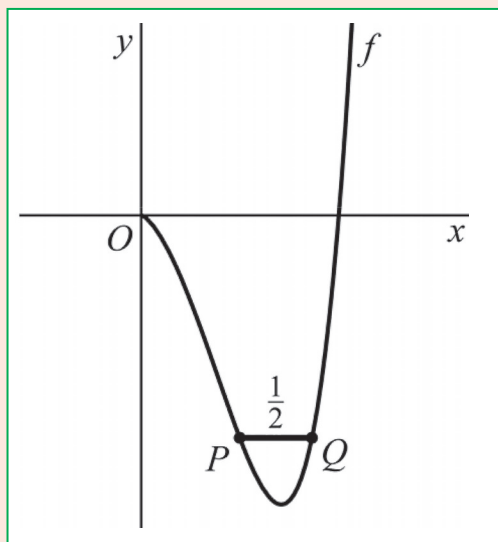
Voor deze bijdrage heb ik in de week na het examen interviews afgenomen bij leerlingen met bovengemiddelde SE-cijfers om te begrijpen hoe ze denken over hun handelen tijdens het examen. Dominant is hun strategie dat ze alle opdrachten willen maken. Afraffelen lijkt hen geen bezwaar, want wie weet pak je ergens nog een puntje. Inderdaad pakken leerlingen overal wel een puntje,

maar tegelijk verliezen ze ook veel punten door slordig werk, overhaaste stappen en notatiefouten. Persoonlijk vind ik het jammer dat wiskunde op deze manier een afraffelvak wordt, in plaats van een logisch denkvak waar je de tijd krijgt om logisch na te denken. Volgens mij hou je, wanneer je een kwart van de opdrachten schraapt, nog steeds een goed dekkend examen over. Zou het een idee zijn om zorgvuldigheid te stimuleren door een extra bolletje toe te voegen dat de kandidaat aantoonbaar zijn antwoord verifieert? Bij de 'bereken exact' opdrachten kan dat door met de GR de (tussen-) antwoorden numeriek te controleren. Op deze manier wordt de cyclus van probleemanalyse, aanpak en uitwerking gesloten. Uiteraard vraagt dat extra inspanning van de leerling en dus moeten er een paar opdrachten geschrapt worden. Mijn leerlingen vonden dat het wel wat minder mocht.

Stijgend en horizontaal

De opdrachten waren dit jaar stuk voor stuk goed te doen. De eerste serie vragen kunnen, wat mij betreft, zo in een toets voor 5 vwo. Neem de eerste: het is een mooie vraag om te bewijzen dat de grafiek van een eenvoudige machtsfunctie als $f(x) = x^5 - 3x\sqrt{x}$ stijgt in het punt $A(1, -2)$. Toch verliezen leerlingen punten bij het differentiëren, bijvoorbeeld door de productregel toe te passen op $3x\sqrt{x}$ (met dit soort fouten laat de kandidaat zien dat hij de stof niet beheerst) of bij het onzorgvuldig afmaken van de redenering (zo moeilijk is het niet om op te schrijven dat de helling positief is en dat dus de grafiek stijgt). Bij hetzelfde functievoorschrift wordt gevraagd de x -coördinaat te berekenen van een punt P , eindpunt van een horizontaal lijnstuk PQ met lengte $\frac{1}{2}$, waarbij de punten P en Q beide op de grafiek van f liggen, zie figuur 1. De grafiek van f staat al in de figuur en ook zijn de punten P en Q getekend. Antwoord in drie decimalen volgt uit het oplossen van de vergelijking $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$

met de grafische rekenmachine. Er zijn leerlingen die dit exact proberen uit te werken en die falen jammerlijk. Ik krijg terug dat ze niet gezien hebben dat er staat 'bereken' en niet 'bereken exact'. Leerlingen geven aan dat ze zoveel tijdsdruk ervaren dat het niet tot ze doordringt: 'Het zal wel exact moeten, toch meneer?'



figuur 1

Wachttijden

De vragen 3, 4 en 5 gaan over wachttijdtheorie. Dat vind ik mooie toegepaste wiskunde. Gegeven wordt de functie $f(t) = 50e^{-\frac{1}{2}t}$. Het verband tussen die 50 en die $-\frac{1}{2}$ is mijn leerlingen niet opgevallen. In vraag 3 moet de integraal $\int_0^3 50e^{-\frac{1}{2}t} dt$ algebraïsch uitgerekend worden. Wee de kandidaat die zonder nadenken dx opschrijft in plaats van dt want volgens het verslag van de vereniging is dat echt een notatiefout die maar liefst drie keer aangerekend kan worden, namelijk in vraag 3, 4 en 5. Cruciale informatie staat in de stam voor vraag 4. Er staat dat

$$y = \left(\frac{1}{a}t - \frac{1}{a^2}\right)e^{at} \text{ een primitieve is van } y = te^{at}.$$

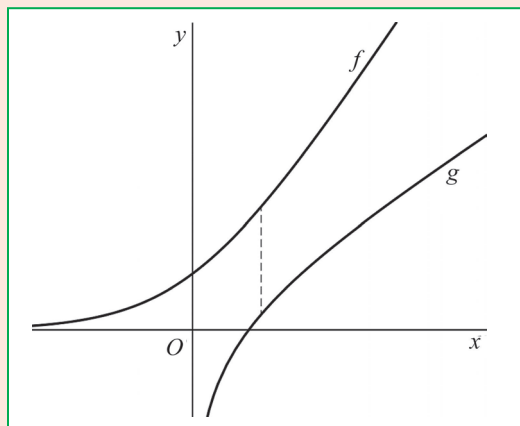
Vervolgens moeten de kandidaten dat bewijzen. Gebruikelijk doe je dat door de primitieve te differentiëren, maar er zijn leerlingen die proberen om zelf een passende primitieve te vinden en dat gaat bijna altijd fout, te meer omdat ze de controle 'differentieer jouw primitieve en kijk of je goed uitkomt' achterwege laten. Leerlingen geven terug dat ze ervan overtuigd zijn dat er geen tijd is voor controles. Ze vertrouwen erop dat hun resultaat goed is, maar het past ook in hun tactiek. Ik hoor van ze dat ze van YouTube onthouden hebben dat het helemaal niet erg is als de afgeleide of primitieve niet goed is, want als je er mee doorrekent krijg je wel de punten voor de volgende

bollen. Het is een riskante strategie.

Bij vraag 5 moet algebraïsch de gemiddelde wachttijd uitgerekend worden met de integraal $\int_0^{20} t \cdot 50e^{-\frac{1}{2}t} dt$ als benadering van de integraal $\int_0^{\infty} t \cdot 50e^{-\frac{1}{2}t} dt$. De bedoeling is dat je bovengenoemde primitieve gebruikt (dat is de primitieve die in de stam staat). Toch kiezen leerlingen voor hun eigen primitieve, komen raar uit met negatieve getallen waarvan het minteken magisch verdwijnt om toch op iets positiefs uit te komen. Consequentie van het stug vasthouden aan een foute primitieve is dat kandidaten heel veel punten verliezen. Tijdens de interviews moest ik herhaaldelijk wijzen op de essentiële informatie in de stam. Leerlingen zien het niet. Ze geven toe dat ze vooral bezig zijn met uitwerken en doorgaan, maar niet met lezen, ordenen of reflectie, want 'daar heb je geen tijd voor, meneer'.

Verschuiven

In de context *Verschuiven* betreft vraag 6 het functievoorschrift van g waarvan de grafiek ontstaat uit een verschuiving naar rechts en omhoog van de grafiek van $f(x) = (3x - 7)^2$ waarbij punt A(5, 40) op de grafiek van g ligt met helling -6 . Ook deze opdracht kan zo in een 5 vwo toets. De zwakkere leerlingen gaven aan dat ze een opdracht als deze nooit eerder gezien hadden, maar dat zijn ook de leerlingen die de uitdagende opdrachten uit het boek overslaan, omdat ze achterlopen met hun huiswerk. In termen van het RTTI-model, zit het examen hoog op de T2 (toepassen van leerstof in nieuwe situaties) en de I (inzicht). Een schoolexamen in 5 vwo met veel reproductie (R) vragen die beantwoord kunnen worden op basis van uit het hoofd geleerde lesstof en veel vragen die gericht zijn op het toepassen van de leerstof in bekende geofende situaties (T1) is onvoldoende voorbereiding op het echte werk.



figuur 2

Klavertje drie

De volgende opdrachten gaan over een bewegingsvergelijking met een klavertje drie als baan.

Petje af voor de constructiegroep dat ze weer iets origineels gevonden hebben. Punt P loopt met π seconden achter op punt Q . In de stam wordt keurig uitgelegd wat de bewegingsvergelijking is van punt P en wat die van punt Q . Ook staat er dat er een bijzonder moment is waarop de punten P en Q recht boven elkaar liggen. Gevraagd wordt naar de afstand PQ . Veel leerlingen rekenen keurig die afstand uit in enkelvoud, ook als ze uitgerekend hebben dat de tijdstippen (meervoud) zijn $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = \frac{3}{2}\pi$. Hier verliezen ze punten want in de vraag staat 'in deze situaties' (meervoud).

In vraag 10 wordt gevraagd om de scherpe hoek tussen een raaklijn aan het klavertje drie en de x -as in graden exact te berekenen. Dit is een prima opgave en veel leerlingen komen op het juiste antwoord van 30° . Helaas verliezen ze punten. Veel leerlingen zijn gewend dat bij dit soort opdrachten de hoek in de laatste stap met de rekenmachine uitgerekend mag worden met de knopjes $\cos^{-1}$ en $\tan^{-1}$. Het antwoord is dan een getal dat afgerond mag worden. Mijn leerlingen gingen voorbij aan het onderscheid tussen 'bereken algebraïsch' en 'bereken exact'. Een tussenantwoord kon zijn dat $\tan(\alpha) = \frac{-4}{-4\sqrt{3}}$

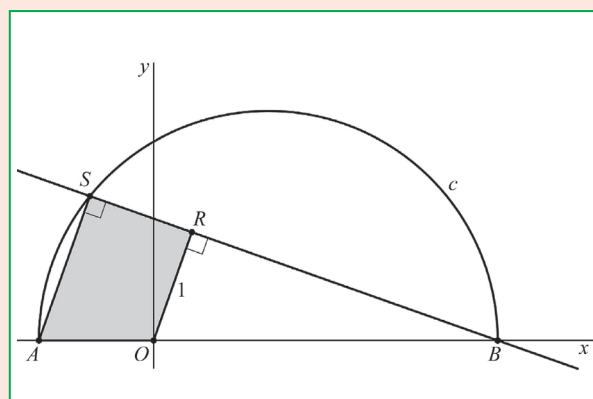
Het correctievoorschrift stelt dat er $\tan(\alpha) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ of $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ moet staan en dat de bijbehorende hoek 30° is. Was het echt de bedoeling van 'bereken exact' dat leerlingen verwezen naar de tabel met exacte waarden in plaats van hun rekenmachine? Ik had het er moeilijk mee dat leerlingen die exact de richtingscoëfficiënt hadden bepaald en keurig uitkomen op het gevraagde antwoord twee van de zes punten verliezen. Achteraf vertelden mijn toppers dat ze er niet bij stil hadden gestaan dat die 30° de trigger was om het nog exacter te doen. In de inleiding hintte ik naar deze opdracht. Wat had jij gedaan?

Halve cirkel

Er was ruimte voor meetkunde. Gegeven zijn twee punten $A(-1, 0)$ en $B(3, 0)$ als middellijn van een cirkel met daarop een punt P . Gestreste kandidaten berekenen dat het middelpunt van de cirkel het punt $M(2, 0)$ is. Onderzoek of dit juist is. Vanuit de oorsprong is een lijnstuk OP getrokken met lengte $2\frac{1}{2}$. Op het oog lijkt punt P te liggen op de lijn $y = x$, maar dat is gezichtsbedrog (dat voor sommige kandidaten onweerstaanbaar is). Vraag 11 is om exact de x -coördinaat van punt P te berekenen. Vraag 12 vind ik leuk. In de halve cirkel worden rechthoekige driehoeken BRO en BSA met punt

R op zijde BS en $OR = 1$. Gevraagd wordt om exact de oppervlakte van vierhoek $AORS$ te berekenen, zie figuur 3. Het correctievoorschrift voorziet in vele alternatieven en mijn kandidaten verrassen mij met nog meer variatie. In de intro benoemde ik bijvoorbeeld de uitkomst $\frac{2}{3}\sqrt{14\frac{2}{9}} - \frac{1}{2}\sqrt{8}$.

Zou jij dat antwoord goedkeuren als gelijkwaardig aan $\frac{7}{18}\sqrt{8}$? Ik zag twee soorten fouten. Ergerlijk is het 'zien' dat het om een vierkant gaat met $OR = RS = 1$ (niet waar). Laat de cirkel weg en volgens mij kan een onderbouwklas deze opdracht maken zodra ze het begrip gelijkvormigheid geleerd hebben. Veel leerlingen hebben deze opgave verknald, maar dat ligt niet aan de opdracht.



figuur 3

Vereenvoudigde sterrenkunde

Dit vind ik een originele context. Prettig is dat die begint met een inkoppertje. Vervolgens moet een verband aangetoond worden. Waar denk je aan bij

$$\frac{d^2 - 0,51}{\cos(\alpha)} = \frac{d^2 - 2,07}{\cos(180^\circ - \alpha)}$$

? Juist, wij denken aan de

cosinusregel, maar leerlingen vermoeden door de breuken dat je de uitdrukking moet herleiden tot iets dat terug te brengen is tot de sinusregel. Vraag 17, de een-na-laatste, gaf aanleiding tot discussie op het forum. Je moet bij bovenstaande vergelijking de onbekende d uitrekenen. Niet iedereen doorzag dat $\cos(\alpha) = -\cos(180^\circ - \alpha)$. Het verslag van de vereniging was onverbiddelijk. Wie dat niet ziet en voor α wat probeert in te vullen, die maakt zich schuldig aan een getallenvoorbeeld en dat moest afgestraft worden met 0 van de 3 punten.

Tot slot is er een vraag over het gezamenlijke zwaartepunt van de zon en Jupiter, de twee zwaarste objecten in ons zonnestelsel. Hier kon je iets doen met vectoren. Of gewoon doen wat je bij natuurkunde leert: evenwicht, moment, kracht en arm.

Samengevat

Het examen van 2024 bevat stuk voor stuk prima vragen die goed te maken zijn. Voor mij een stimulans om meer in te zetten op toetsen met meer nieuwe situaties (T2) of inzicht (I) waarbij de leerling zelf de context en methode moet construeren om tot een antwoord te komen. Niet moeilijker, niet met vervelende getallen, geen rare puzzels, maar wel opdrachten waarbij eerst nagedacht moet worden over een aanpak. Het examen van 2024 bestond uit veel vragen. Ik vind dat het er te veel waren. Persoonlijk vind ik het jammer dat het examen afgeraffeld wordt in de hoop zo veel mogelijk punten te scoren. Dit doet geen recht aan wat we ze vanaf de onderbouw proberen bij te brengen. Nu gedragen ze zich alsof ze in één minuut tijd zo snel mogelijk door een supermarkt

mogen rennen voor gratis boodschappen. Dat is plat vermaak voor televisiekijkers die houden van kippen die rennen zonder kop. Geef mij maar een quiz waar kandidaten even tijd hebben om iets op te zoeken.

Over de auteur

Henk Hietbrink is docent wiskunde bij KSG De Breul te Zeist en hij is beheerder van de website www.fransvanschooten.nl. E-mailadres: hietbrink.h@planet.nl

Wiskunde Olympiade



Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade

Op vrijdag 13 september zal de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaatsvinden. Hiervoor zijn 159 leerlingen uitgenodigd uit de categorieën zesde klas (50), vijfde klas (59) en vierde klas of lager (50). Zij krijgen in drie uur tijd vijf pittige opgaven voor hun kiezen. We hopen dat al deze toptalenten een leuke en uitdagende wedstrijdmiddag zullen beleven.

Vanaf maandag 16 september vind je de opgaven (en uitwerkingen) van de finale op www.wiskundeolympiade.nl. Een aantal weken later zullen de vijftien prijswinnaars (vijf in elk van de drie categorieën) bekend worden gemaakt.

Uitslag Internationale Wiskunde Olympiade 2024

Bij de Internationale Wiskunde Olympiade, die dit jaar plaatsvond van 14 tot en met 22 juli in Bath, Verenigd Koninkrijk, heeft het Nederlandse team vijf medailles gewonnen. Ryan Staal sleepte een zilveren medaille in de wacht.

De Internationale Wiskunde Olympiade is de meest prestigieuze wiskundewedstrijd ter wereld. Meer dan honderd landen van over de hele wereld vaardigden een team van meestal zes scholieren af. Het evenement

bestaat onder andere uit twee wedstrijddagen, waarop de leerlingen steeds vier en een half uur de tijd hadden om drie uitzonderlijk lastige opgaven op te lossen. Voor elke opgave konden zeven punten worden verdiend. Ongeveer de helft van de deelnemers kreeg een medaille. Daarnaast verdienden leerlingen die een opgave foutloos oplosten een eervolle vermelding.

De Nederlandse teamleden hebben de volgende scores behaald:

Zilver (28 punten)	Ryan Staal 6 vwo Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam
Brons (20 punten)	Tobias Kristiansen 5 vwo Stedelijk Gymnasium Leiden
Brons (17 punten)	Bas Capel 6 vwo Gymnasium Apeldoorn
Brons (16 punten)	Felix Hamoen 6 vwo Leidsche Rijn College, Utrecht
Brons (16 punten)	Naïm Hofstede 3e klas Thuisonderwijs, Makkum
Eervol (12 punten)	Yanniek Nitescu 6 vwo Huygens Lyceum, Eindhoven

In het landenklassement is Nederland op plaats 44 geëindigd.

Examen vwo wiskunde C

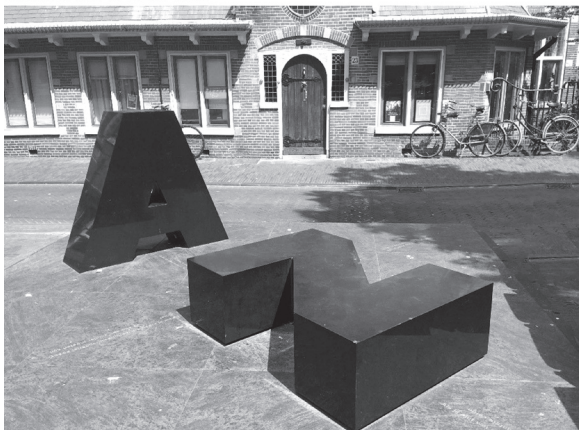
Kim Kaspers bespreekt het wiskunde-C-examen en concludeert dat het een gemoeidelijk examen is dat recht doet aan haar leerling. De N-term is 0,7.

Van A tot Z

Leerlingen met wiskunde C zijn vaak leuke en bijzondere leerlingen, met wie je interessante gesprekken kunt voeren. Zo ook dit jaar. Helaas had ik er maar één. Ik moet op mijn nieuwe school nog hard aan de slag met het belichten van de mooie kanten van het vak. Op mijn oude school startte ik in september altijd met een excursie waarin ik verschillende kanten van wiskunde C liet zien. In deze excursie kregen de leerlingen, al wandelend door een stad, opdrachten die passen bij het examenprogramma. In mijn Haarlemse versie zit de opdracht AZ (mijn oude school stond in Alkmaar, dus de opdracht werd altijd vergezeld van de opmerking dat het niet de voetbalclub betreft). Dat het beeld AZ, ter nagedachtenis aan Lennart Nijgh, uitermate geschikt is voor een meetkundige opdracht, vonden de examenmakers klaarblijkelijk ook, zie figuur 1.

Van A tot Z

Op de Oude Groenmarkt in Haarlem staat het beeld *Van A tot Z* van de Nederlandse beeldhouwer en landschapskunstenaar Marinus Boezem, uit 2007. Het is een monument voor de Haarlemse tekstdichter Lennaert Nijgh (1945–2002). Het kunstwerk bestaat uit twee massief marmeren letters A en Z. Zie de foto.



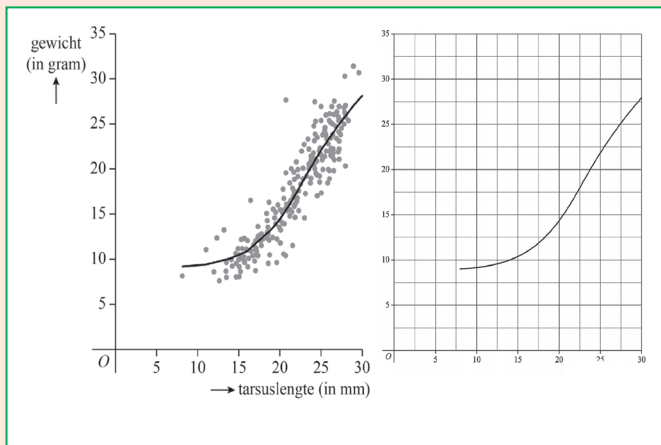
figuur 1

De inhoud van het beeld moest berekend worden. Niet in 'kubieke handen', zoals ik meestal laat doen, maar 'gewoon' in dm^3 . Hiervoor moest het beeld in stukken gedeeld worden en dat was niet moeilijk met de maten die erbij gegeven waren. Eigenlijk was het zelfs vrij standaard. Ook vraag 2 (aanzicht tekenen) en vraag 3 (ooghoogteberekening) waren goed te doen. Mijn leerling had er geen enkele moeite mee, ook al had ze mijn excursie nooit gedaan. Het examen kende zo een heerlijk rustige start.

“De vragen pasten prima bij het examenprogramma.”

Veldleeuweriken

Na AZ kwamen de *Veldleeuweriken*, met enkele berekeningen met procenten, aflezen uit een diagram, het opstellen van een recursieve formule bij een meetkundige rij en een redeneervraag. Veel verschillende vaardigheden bij één context. Over vraag 8 was enige discussie. *Bepaal met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage de maximale toenamesnelheid van het gewicht.* Zie figuur 2. Het begrip raaklijn staat niet in de kruisjeslijst voor wiskunde C. In de syllabus staat echter wel *grafisch de helling van een grafiek in een punt bepalen* en bovendien moeten de leerlingen iets weten over af- en toenemende stijging/daling. Mijn leerling heeft de vraag helaas overgeslagen.



figuur 2 Links de figuur in de opgave, rechts het uitwerkblad

Rechtspraak

We zijn inmiddels beland bij *Rechtspraak*. Een volledige opgave met logisch redeneren, mijn favoriete onderwerp bij wiskunde C. Het onderdeel was dit jaar goed bedeed met 11 punten. Een venndiagram, een paar beweringen testen op geldigheid en een raadseltje. Een beetje ontspanning tijdens het examen. Oké, misschien ben ik hiermee iets te optimistisch, maar het kan m.i. geen kwaad voor een leerling om het formulewerk af te wisselen met 'puzzelen'.

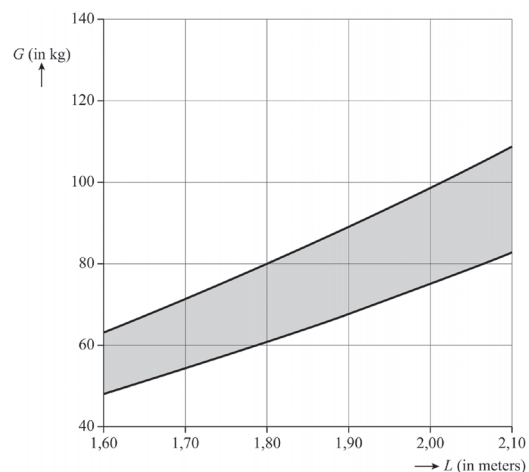
Vetpercentage

Na het, al dan niet ontspannende, raadsel, kwam *Vetpercentage* over het percentage vet in het lichaamsgewicht van mensen. In deze opgave moesten verschillende formules gecombineerd worden. Weliswaar is dit altijd lastig voor een wiskunde C'er (leerling: Is één formule niet erg genoeg?), maar de formules waren niet al te ingewikkeld. Natuurlijk kon ook 'beredeneer zonder gebruik te maken van een getallenvoorbeeld' niet ontbreken. Deze opgave sloot af met vraag 16 en dat was een interessante vraag. Net even anders. Er was gegeven dat zowel een te hoog als een te laag vetpercentage niet gezond is. Een gezond vetpercentage ligt tussen de 8% en 20%. In de uitwerkbijlage stond de bovengrens getekend voor een gezond gewicht, uitgezet tegen de lengte. Aan de leerlingen werd gevraagd om de ondergrens te tekenen (geen rechte lijn) en het gezonde gebied te arceren. Nou ja, in de vraag stond letterlijk dat het gebied tussen de twee lijnen gearceerd moest worden, dus er hoefde niet nagedacht te worden welk gebied er gearceerd moet worden. Wat deze vraag prettig maakte is dat er weliswaar gesuggereerd werd dat je een formule kon

maken, maar dat dit niet nodig was. De leerlingen konden gewoon praktisch aan de slag door bij enkele lengtes (minimaal drie volgens het CV, zie figuur 3) het bijbehorende gewicht berekenen en vervolgens een vloeiende lijn tekenen. Ik denk dat zo'n aanpak voor de meeste leerlingen beter werkt dan het ombouwen van de formules en daar was het CV ook op ingericht. Het 'gratis arceerpunt' was mooi meegenomen.

16 maximumscore 4

- Voor de ondergrens geldt: $58,271 - 943,8 \cdot \frac{L^2}{G} = 8$ 1
- Het voor de ondergrens berekenen van de waarde van G bij minimaal drie waarden van L 1
- Het tekenen van de bijbehorende punten in de figuur en deze verbinden met een vloeiende lijn 1
- Het arceren van het gebied tussen de twee grafieken 1



figuur 3

Rubiks kubussen en meerlingen

Bij *Rubiks kubussen* waren er weer genoeg standaardvragen, bijvoorbeeld 'toon aan dat er in de tabel geen sprake is van een lineair of exponentieel verband' en het slot van het examen ging over percentages meerlingen. Je moest even goed lezen om door te hebben hoe je om moest gaan met alle getallen die er werden genoemd, maar dan was de opgave weer goed te doen.

Tot slot

Eigenlijk was dit kenmerkend voor het hele examen: de vragen pasten prima bij het examenprogramma en bij de sommen die leerlingen in de loop der jaren hebben geoefend. Weinig verrassingen. En dat is geen negatief commentaar, integendeel. Hoewel je als docent vaak vrolijk wordt van 'leuke' vragen, geldt dat niet voor leerlingen. In de examenstress verdient een wiskunde-C-leerling een gemoedelijk examen. Mijn eigen leerling heb

ik dit hele schooljaar verteld dat ze wat meer vertrouwen in zichzelf moet hebben en niet in paniek moet raken tijdens toetsen, want 'Je kunt alles heel erg goed'. Dit was voor haar een perfect examen. Ook met de lage N-term 0,7 (laag t.o.v. wiskunde A en B) had mijn leerling een heel mooi cijfer. En dat verdiende ze ook.

Over de auteur

Kim Kaspers is wiskundeleraar op het Lyceum Sancta Maria te Haarlem en lid van de ontwerpcommissie van de wiskunde Olympiade. E-mailadres: kimk@euronet.nl

Wis en Waarachtig



Zeven medailles voor Nederland bij Benelux Wiskunde Olympiade

Eind april heeft Nederland zeven medailles behaald bij de Benelux Wiskunde Olympiade in Valkenswaard. De 17-jarige Tobias Kristiansen heeft een van de drie gouden medailles gewonnen. Daarnaast ging Nederland met vier van de vijf zilveren medailles naar huis en had het team ook nog twee bronzen medailles en een eervolle vermelding. De wedstrijd is gewonnen door de Belg Pierre-Akin Dürrüoglu met 22 van de 28 punten. In totaal deden 30 wiskundetalenten uit België, Nederland en Luxemburg aan de wedstrijd mee.

De resultaten van het Nederlandse team zijn als volgt:

Tobias Kristiansen,	5 vwo, Stedelijk Gymnasium Leiden, 19 punten, goud
Tijmen de Lange,	6 vwo, Gymnasium Ceeleum, Zwolle, 15 punten, zilver
Felix Hamoen,	6 vwo, Leidsche Rijn College, Utrecht, 14 punten, zilver



V.l.n.r. Josiah, Fenne, Ryan, Tijmen, Yorick, Lucas, Tobias K;
2^e rij: Felix, Tobias P, Casper

Fenne Meijer,	4 vwo, Bataafs Lyceum, Hengelo, 12 punten, zilver
Ryan Staal,	6 vwo, Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam, 12 punten, zilver

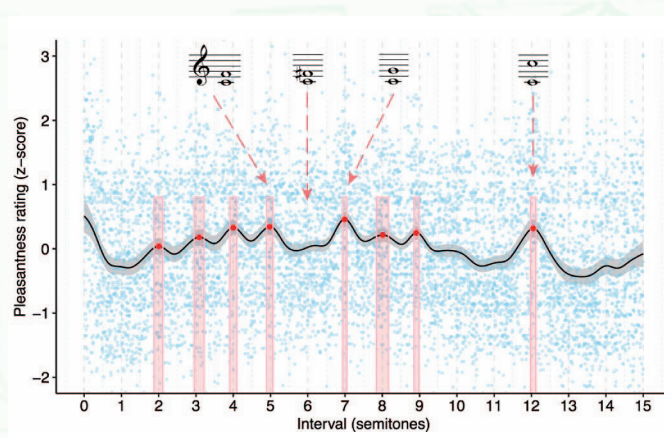
Josiah 't Hart,	4 vwo, Willem Lodewijk Gymnasium, Groningen, 9 punten, brons
Casper Heimel,	5 vwo, Utrechts Stedelijk Gymnasium, 9 punten, brons
Yorick Nap,	4 vwo, thuisonderwijs, 8 punten, eervolle vermelding
Lucas van de Sande,	5 vwo, Driestar College, Gouda, 7 punten
Tobias Piet,	4 vwo, Cygnus Gymnasium, Amsterdam, 6 punten

Bron: www.wiskundeolympiade.nl

Opvatting Pythagoras over muziek weerlegt

Pythagoras stelde 2.500 jaar geleden dat mensen muziek mooi vinden als klanken en noten goed bij elkaar passen. Maar wetenschappers van de universiteiten van Cambridge en Princeton zeggen nu dat die opvatting niet klopt. Pythagoras leefde in de zesde eeuw voor het begin van onze jaartelling. Pythagoras had een wiskundige verklaring waarom mensen muziek mooi vinden. Volgens de Griekse filosoof is mooie muziek afhankelijk van zogenoemde consonantie. Daarbij sluiten de klanken en noten harmonisch op elkaar aan en liggen ze dus makkelijk in het gehoor.

Maar een internationaal team van wetenschappers beweert op basis van hun onderzoek dat die harmonie helemaal niet nodig is om muziek mooi te vinden. In Nature schrijven ze dat juist het tegenovergestelde bleek nadat ze meer dan 4.000 mensen hadden onderzocht.

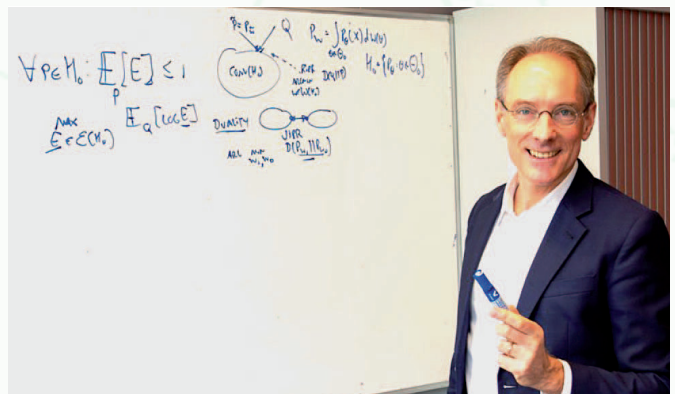


Niet alle tonen worden even aangenaam ervaren

'We houden juist wel van een beetje afwijking. Kleine onvolmaaktheden geven "leven" aan de geluiden, en dat vinden we prettig om te horen', zegt hoofdonderzoeker Peter Harrison. 'Onze resultaten spreken tegen dat harmonie maar op één manier kan plaatsvinden en dat muzieknoten deze wiskundige samenhang moeten hebben. Er zijn juist veel verschillende harmonieën. Daarom is muziek in elke cultuur ook anders.'

Bron: www.nu.nl

ERC Advanced Grant voor onderzoek naar e-waarde



Peter Grünwald

Peter Grünwald, senior onderzoeker in de Machine Learning onderzoeksgroep van het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) en hoogleraar Statistisch Leren aan de Universiteit Leiden heeft een ERC Advanced Grant gekregen voor zijn onderzoek naar de ontwikkeling van een nieuwe, revolutionaire theorie over statistiek. Grünwald zal de prestigieuze topsubsidie van 2,5 miljoen euro gebruiken voor de ontwikkeling van een nieuwe, robuustere en flexibelere statistische theorie, gebaseerd op het nieuwe concept van de 'e-waarde'. Dit zal leiden tot betrouwbaardere methoden om te bepalen of wetenschappelijke resultaten statistisch wel of niet significant zijn. Kortom: de e-waarde is de nieuwe p-waarde.

Bron: www.cwi.nl



Meer dan 100 jaar examens

Sinds 1979 kent *Euclides* een examenspecial. Danny Beckers en Tom Goris gingen op zoek naar de rol die *Euclides* speelde in de berichtgeving over de examens in de afgelopen 100 jaar.

Inleiding

Examens zijn zo oud als het onderwijs zelf. Meestal namen scholen of schoolbesturen zelf examens af, en was het vooral een manier om te controleren of de leraar zijn werk wel goed had gedaan. Soms moest een leerling of een student een toelatingsexamen doen. Docenten werden aan vergelijkende examens onderworpen tijdens sollicitaties bij populaire gemeentelijke scholen. Maar het fenomeen van leerlingen die aan het eind van hun lagere of middelbare school een paar dagen blokken op een landelijk georganiseerde toets stamt uit de negentiende eeuw. De opkomst van dat type examen hing samen met de professionalisering van leerkrachten aan door centrale overheden gefinancierde scholen.

Landelijke examens

In Nederland werden de eerste eindexamens afgenomen in 1867. Dit waren op provinciaal niveau georganiseerde eindexamens hbs. Vanaf 1868 waren die schriftelijke examens voor het hele land hetzelfde. De examens werden nagekeken door een provinciale commissie die door de commissaris van de betreffende provincie werd benoemd. Diezelfde commissie nam ook mondelinge examens af, waarvoor de leerlingen naar een centraal in de provincie gelegen locatie moesten afreizen. Vanaf 1902 werden de schriftelijke en mondelinge examens op de scholen afgenomen. De experts die de mondelinge examens kwamen afnemen, de zogenaamde 'rijks-gecommitteerden' reisden vanaf dat moment dus naar de scholen. Ze kregen vanuit het ministerie daarvoor een vergoeding voor reis en verblijf.

De landelijke mulo examens bestonden sinds 1907, in een christelijke en katholieke variant, verzorgd door de respectievelijke verenigingen van mulo-docenten. Ook de mulo-leerlingen deden een examen schriftelijk en

mondeling, maar dan zonder aanwezigheid van de eigen docent. Gymnasia, als oudste schoolvariant, kregen pas in 1920 een landelijk eindexamen, dat eveneens leek op de regeling die op dat moment aan de hbs bestond, met een landelijk schriftelijk examen en met hoogleraren wiskunde als rijks-gecommitteerden die de mondelinge examens op scholen kwamen afnemen. In aanwezigheid van de leraar werden de leerlingen tijdens de mondelinge examens aan de tand gevoeld. Voor de vakexperts en hoogleraren boden de examens ook de gelegenheid om contact te houden en van gedachten te wisselen over wiskunde-onderwijs.

Berichtgeving in *Euclides*

Ten tijde van de ontstaan van het tijdschrift *Euclides* waren de examens voor mulo, hbs en gymnasium dus al landelijk georganiseerd. In *Euclides* werd er weinig aandacht aan besteed. Dat gebeurde wel in de weekbladen en tijdschriften van de docenten-verenigingen. Alleen de staatsexamens, voor toelating van leerlingen tot de universiteit buiten het gymnasium om, werden geregeld door *Euclides* besproken, meestal in de vorm van samenvattingen van de verslagen die in de *Staatscourant* gepubliceerd waren. Deze traditie hield een halve eeuw stand, zo'n verslag verscheen voor het laatst in 1975.

Die besprekingen waren stevast negatief van toon, zie figuur 1: leerlingen waren over het algemeen slecht voorbereid. De besprekingen dienden eerder de wiskunde-docenten te bevestigen in hun overtuiging dat een opleiding aan hbs of gymnasium superieur was aan ieder denkbaar alternatief: alleen hele goede leerlingen konden zich zelfstandig voorbereiden op het staatsexamen, de rest kon zich beter tot een docent aan een gymnasium wenden.

Ook de pogingen tot beredeneering van de wijze, waarop men bij een gebroken rationeele functie $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$ de intervallen voor x bepaalt, waarin zij positief en negatief is, en van de wijze, waarop de extremen van deze functie worden bepaald, en waarop wordt uitgemaakt, welk der extremen een minimum en welk een maximum is, gaven in menig geval blijk van volkomen wanbegrip der theorie of van uiterst slordige voorbereiding.

figuur 1 Fragment uit de examenbespreking van 1936

Omdat de examens uit twee of drie vraagstukken bestonden, was er onder docenten wiskunde geregeld discussie als één van de vraagstukken slecht was gemaakt. Hoofdredacteur Wijdenes was bijvoorbeeld van mening dat examens beter uit kleinere losse opdrachten konden bestaan, zodat leerlingen beter konden laten zien wat ze hadden geleerd. Beth vond dat flauwekul. Schriftelijke examens waren volgens hem sowieso geman-keerd en hij wees in *Euclides* op het gunstige effect van het mondeling examen: dan kon de examinerator snel signaleren of een leerling er echt iets van begrepen had. Zelden speelden die discussies zich in *Euclides* af. Uitzondering was de bespreking van de resultaten van een enquête in *Euclides* 9-4 (1932) over een opgave uit het algebra-examen hbs van 1931, zie figuur 2. Let wel: differ-entiaal-rekening werd nog niet onderwezen. De vragen waren: ‘Acht U het 3e vraagstuk Algebra, opgegeven op het schriftelijk eindexamen 1931, te moeilijk?’ en ‘Wat mag naar Uwe meening op het schriftelijk eindexamen omtrent de graphische voorstellingen gevraagd worden?’

UITSLAG VAN DE ENQUÊTE

betreffende het derde vraagstuk, dat in 1931 op het schriftelijk eindexamen voor Algebra is opgegeven.

Dit vraagstuk luidde als volgt:

„Van een quadratische functie raakt de graphiek in den oorsprong aan de X -as en gaat door het punt $(-2, -2)$. Welke is de functie?

Welkē rechte evenwijdig met de rechte $y = x$ raakt aan deze graphiek?

Van welke quadratische functie snijdt de graphiek de X -as in de punten, waarvoor x de waarden -2 en 6 heeft, terwijl de functie voor $x = 0$ de waarde 6 aanneemt?

Wat kunt ge zeggen bij vergelijking van de graphieken der beide functies, van welke in dit vraagstuk sprake is?”

figuur 2 181 van de 490 aangeschreven ‘leeraren’ reageerden: 97 ‘Nee’, 61 ‘Ja’, 17 ‘ongeschikt’

Uiteraard was er wel interesse voor examens en resul-taten van examens onder de wiskundedocenten, maar die werden gepubliceerd als bijlagen van het staatsblad, dat in elke openbare leeszaal was in te zien. Daar kwam bij dat het examen overwegend bevestigde wat de docent al

wist: alleen de goede leerlingen kwamen in de examen-klas terecht. Het onderwijs werd geacht te selecteren, en in de praktijk slaagde ook maar een kwart van de leerlingen die aan een hbs of gymnasium begonnen. De kinderen van gefortuneerde ouders deden het daarbij steevast het beste. Dat aspect van het Nederlandse (en meer algemeen: westerse) onderwijs werd vanuit de Amerikaanse testpsychologie en vanuit alternatieve onderwijsvormen met argwaan bekeken. Het werd als een bewijs gezien dat docenten leerlingen uit hun eigen sociale groep al dan niet bewust bevoordeelden boven anderen – en daar moest het onderwijs zich volgens hen juist tegen verzetten.

“In de praktijk slaagde maar een kwart van de leerlingen die aan een hbs of gymnasium begonnen.”

Democratisering

In Nederland veranderde de rol van examens na de Tweede Wereldoorlog, toen onderwijs door de Nederlandse overheid een meer serieuze rol kreeg toebedeeld in het economisch beleid. Nederland nam geen bijzondere plek in die ontwikkeling in. Internationale organisaties als OESO en UNESCO stimuleerden in de jaren 1950 en daarna, dat onderwijs leerlingen zou moeten voorbereiden op een toekomst als burger in een democratische staat waarin, zo werd verondersteld, de technologie in rap tempo zorgde voor veranderingen. Onderwijs moest voorbereiden op ‘een leven lang leren’, en bovendien *alle* leerlingen bedienen – niet alleen de maatschappelijke bovenlaag. De toestroom van leerlingen naar mulo, hbs en gymnasia werd aangemoedigd. Met de mammoetwet die in 1968 in werking trad, nam dat aantal, nu aan mavo, havo en vwo, nog harder toe: in 1936 was voor 74% van de jongens de lagere school eindonderwijs. In 1974 was dat nog maar voor 27% het geval; een tendens die voor meisjes nog explosiever was, en die zich zou voortzetten. Er werd, zowel in Nederland als internationaal, gesproken van ‘verborgen talent’ dat men zowel om ethische als economische redenen niet langer kon negeren. Het was een trend die bekend werd als de democratisering van het onderwijs. Met de groei die met de democratisering van het onder-

wijs gepaard ging, was het systeem met de gecommitteerden die elk jaar, op kosten van het ministerie, stad en land afreisden niet meer haalbaar. Met de mammoetwet was zodoende voorzien in een systeem waarin de school zelf een deel van de toetsing op zich nam: het schoolonderzoek. Na 1968 (de eerste mammoet-examens vielen in het schooljaar '70 – '71) werd het schoolonderzoek, samen met het centraal schriftelijk eindexamen, bepalend. Dat schoolonderzoek kon in theorie mondeling worden ingericht, maar ons zijn geen scholen bekend waar dat voor wiskunde gebeurde. In de praktijk verdwenen de mondelinge wiskunde-examens met de laatste examens mulo, hbs en gymnasium in 1972.

Opkomst van Cito

Examinering veranderde nog veel fundamenteeler van karakter dan deze beschrijving doet vermoeden. Democratisering betekende niet alleen dat meer leerlingen een 'voortgezet onderwijs' diploma kregen, maar ook dat de overheid meer zeggenschap kreeg over de inhoud van dat onderwijs en die examinering. Dit werd zichtbaar in almaar uitdijende beschrijvingen van de examenstof, maar vooral ook in twee tegengestelde tendensen die de nieuwe rol van examinering ieder op een eigen manier wilden invullen. Democratisering betekende immers niet alleen meer leerlingen, maar ook meer aandacht voor doorstroom. Aan de ene kant was er een groep die groot vertrouwen had in onderwijsvernieuwing en die via de lerarenopleiding de (toekomstige) docenten bewust wilden maken van hun vooroordelen aangaande bepaalde groepen leerlingen. Op die manier zou er bij docenten meer begrip ontstaan, en met een eventuele aanpassing in didactiek ook een groter percentage leerlingen dat zou slagen. Aan de andere kant stond het Cito.

Cito was het geesteskind van Adriaan de Groot. De Groot meende dat democratisering juist te bereiken viel door de rol van de docent in de beoordeling van leerlingen te verkleinen. Hij had in de Verenigde Staten kennis genomen van de mogelijkheden in de testpsychologie en was ervan overtuigd dat via multiple-choice-tests snel, adequaat en consequent kon worden getoetst of een leerling iets had begrepen – mits precies genoeg was omschreven wat de leerling geacht werd te kennen en kunnen. De Nederlandse overheid zag het voordeel van de visie van De Groot en besloot dat de mavo-eind-examens (vanaf 1971) onder verantwoordelijkheid van het in 1968 opgerichte Cito zouden worden samengesteld en beoordeeld. Cito zou sinds 1969 een overgangstoets afnemen bij alle basisschoolleerlingen, om op die manier

tot 'een meer objectief oordeel over een passend vervolgonderwijs' voor leerlingen te komen – meer objectief dan de leerkracht van de leerling, was het idee.

De visie van De Groot botste met die van veel docenten en lerarenopleiders. Vanuit de alternatieve scholen, die sowieso niet zoveel op hadden met toetsen en veel meer waarde hechtten aan observaties door de docent, was er verzet tegen de invoering van de overgangstoets. De 'kritiese' onderwijzers van de jaren '70 verzetten zich ook. Zij zagen meer in leerlingen aan het werk zetten met eigen onderzoekjes – een soort profielwerkstuk avant-la-lettre. Maar Cito groeide in haar rol van toetsexpertise-centrum. Waar ze in 1969 in Nederland de noviteit van het multiple-choice-examen lanceerde, wist ze zich in de jaren '70 ook in de examens van havo en vwo te positioneren doordat het ministerie een Cito adviseur aan de examencommissies toevoegde. Ger Limpens herinnert in 2018 nog aan de wijze waarop sommige Cito-adviseurs in die commissies zich nauwelijks gedooft voelden.

Cito streefde al snel naar een grotere rol van toets-evaluaties. Ook curricula konden via toetsen worden geëvalueerd, langetermijndoelen en ook toetsen met open vragen leenden zich voor de analyse door de toetsexperts van Cito dankzij twee projecten die in 1976 van start waren gegaan. Door haar ideeën uit te dragen, onder andere in *Euclides*, timmerde Cito aan de weg. Zichtbaar was het instituut als inspirator achter het eerste examennummer dat de redactie in januari 1979 publiceerde. Tot 2015 werden in de examenspecial alle examens door cito-medewerkers uitsluitend aan de hand van psychometrische data besproken.

Toetsgericht onderwijs

De acceptatie van Cito binnen het wiskundeonderwijs ging echter niet zonder slag of stoot. In een venijnige bespreking van de hand van Martinus van Hoorn uit 1983, waarin hij sneren uitdeelde ten aanzien van het jargon van toetsdeskundigen ('interbeoordeelaars-betrouwbaarheid!') nam hij ook het streven van Cito op de korrel:

Stelling: Het zou het Cito sieren indien het de naam van het project (thans: 'Leerdoelgerichte Toetsen') zou wijzigen in 'Toetsgericht Onderwijs'.

Daarmee gaf hij heel scherp aan wat het bezwaar was van deze groep docenten: het laatste dat je als weldenkende docent wilde, was dat je leerlingen alleen nog maar zou leren toetsen maken. Examens mochten nooit een onder-

wijsdoel worden, en met Cito was dat wel precies het gevaar. Het is eveneens het bezwaar dat ook vanuit alternatieve hoek te beluisteren viel, en ook de ontwikkeling die door het echtpaar Suus en Hans Freudenthal werd gevreesd.

De rol van Cito groeide desondanks, hoewel de privatisering van 1999 weer nieuwe bezwaren deed opvlammen. Van aanwezigheid bij de bespreking van examens en examenresultaten – ook ter vaststelling van de cesuur – naar de formele samenstelling van de examens en de nakijkmodellen vandaag de dag. Hoewel er altijd een rol voor de docenten is blijven bestaan: zij maken in eerste instantie de opgaven waar de toets uit wordt samengesteld.

Na 2000

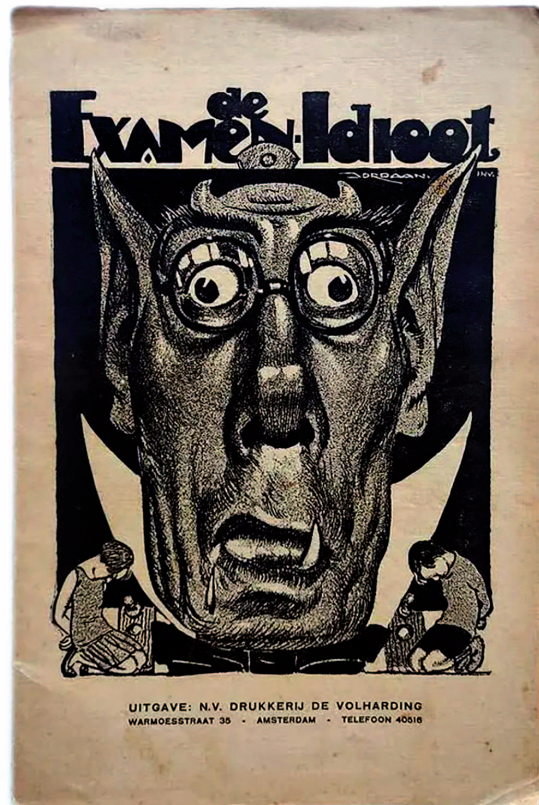
Toch is er sinds 2000 ook een beweging gaande waarin de invloed van de school en docent op het onderwijs en examens weer groter wordt gemaakt. Het schoolonderzoek, dat moest plaatsvinden in het examenjaar, werd in schooljaar 2001–2002 vervangen door een schoolexamen dat scholen en docenten veel meer vrijheid gunde in het uitvoeren van projectwerk. In de praktijk werd op veel scholen het schoolexamen ingevuld met toetsen over delen van de stof van het centraal examen – en werd de vrees dat leerlingen vooral voor toetsen leerden realiteit – maar er zijn toch ook veel scholen waar projectwerk en alternatieve toetsvormen in de plaats voor de ‘traditionele’ toetsen zijn gekomen.

Met het 50-jarig bestaan van Cito in 2018 verscheen in *Euclides* een serie artikelen waarin Cito-medewerkers zich uiterst genuanceerd uitlieten over de (on)mogelijkheden van toetsevaluaties – en hoe die gekleurd worden door de uitgangspunten die worden gekozen in het correctiemodel. Ook daar herkent men de meerwaarde van intrinsieke motivatie – iets wat door een examen zelden wordt gestimuleerd.

Tot slot

Sinds 1979 is er dus ieder jaar een examenspecial, met uitzondering van 2020 wegens corona. De laatste jaren vormen de recensies van collega's de kern, aangevuld met bijdragen over examengerelateerde onderwerpen. Die recensies mogen kritisch zijn, er wordt nadrukkelijk naar de mening van de recensenten gevraagd.

We zijn in onze reacties vandaag de dag best mild, als je het vergelijkt met de bundeling van pamfletten die de Bond van Nederlandse Onderwijzers in 1928 publiceerde uit protest tegen de (her)invoering van toelatingsexamens voor het voortgezet onderwijs, zie figuur 3.



figuur 3 In 1929 publiceerde de Nederlandse Bond van Onderwijzers dit pamflet, als bijlage bij hun tijdschrift. De geboeide kinderen links en rechts onder de demonische schoolmeester, en de inhoud van het pamflet, waren vooral een aanklacht tegen het soort vragen dat bij de toelatingsexamens voor hbs en gymnasium werd gesteld. De titel van het pamflet werd al snel een begrip, zowel bij voor- als tegenstanders van de toelatingsexamens. Daarmee illustreert het pamflet eveneens dat examens door een aanzienlijk deel van de Nederlandse onderwijzers niet als een vanzelfsprekendheid werden gezien.

Op de website vind je een uitgebreide literatuurlijst.



vakbladeuclides.nl/1001examens

Over de auteurs

Danny Beckers is universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. Zijn onderzoeksinteresse ligt vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs.

E-mailadres: d.j.beckers@vu.nl

Tom Goris is docent wiskunde(didactiek) bij Fontys Lerarenopleiding Tilburg en hoofdredacteur van *Euclides*.

E-mailadres: t.goris@nvww.nl



Meer dan *Euclides* en Wimecos

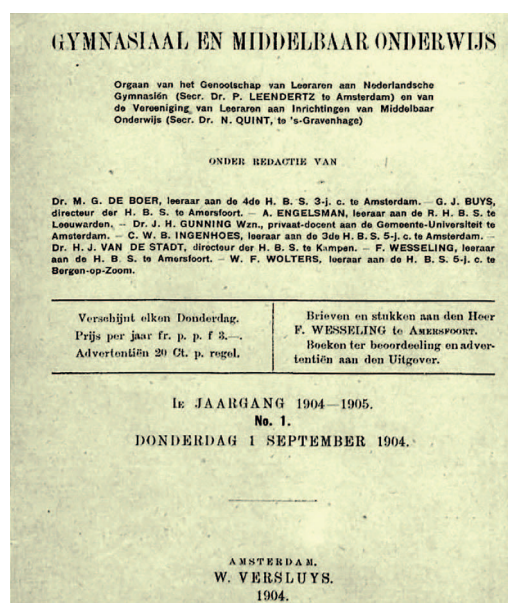
In het kader van 100 jaar *Euclides* en 100 jaar NVvW duiken we in het verleden, op zoek naar gebeurtenissen en personen die nu nog relevant zijn, mede aan de hand van de publicaties daarover in *Euclides*. Harm Jan Smid bijt het spits af met een bijdrage over de voorlopers van *Euclides* en NVvW.

Een 'wonderjaar'

Hans Freudenthal noemde het jaar 1924 een 'wonderjaar' – hij zei het wat plechtiger, een 'annus mirabilis' – van de Nederlandse wiskundendidaktiek. Dat kwam, zo schreef hij in zijn herinneringen, door drie zaken: de publicatie van een brochure door Tatiana Afanassjewa over het belang van meetkundeonderwijs voor niet-wiskundigen, het verschijnen van het eerste nummer van het didactisch *Bijvoegsel* bij het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* en de publicatie van het rapport van de commissie Beth-Dijksterhuis. Nu was dat laatste een vergissing, want dat rapport verscheen in 1926, maar duidelijk is dat Freudenthal deze drie zaken belangrijk vond. Hij had ook de oprichting van Wimecos (Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Cosmographie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea) in 1925 aan dat rijtje kunnen toevoegen, om te onderstrepen dat er midden jaren twintig van alles gebeurde in het Nederlandse wiskundeonderwijs.

Nu valt op de term 'wonderjaar' ook wel wat af te dingen. Tatiana Afanassjewa had al veel eerder, in 1915, een uitgebreid artikel in het Nederlands over meetkundeonderwijs gepubliceerd. Van de voorstellen van Beth en Dijksterhuis zou niet veel terechtkomen. Wimecos was de eerste tien jaar van zijn bestaan een tamelijk machteloos clubje, en *Euclides* was geruime tijd een wat noodlijdend tijdschrift met een beperkte lezerskring. Hoe belangwekkend de gebeurtenissen rond 1924–1926 ook waren, wonderen waren ze niet. Er bestonden al langer tijdschriften waarin veel interessants over wiskundeonderwijs was te lezen en er bestonden al eerder invloedrijke organisaties van (wiskunde)leraren. Eerlijk gezegd zijn die boeiender dan Wimecos en *Euclides* in hun beginjaren. Maar ja, die tijdschriften en organisaties zijn verdwenen, en *Euclides* en de opvolger van Wimecos, de

NVvW, bestaan nog steeds. Geschiedenis wordt door de overwinnaars geschreven, vandaar dat er in deze jaren veel aandacht is voor de honderdjarigen: *Euclides* en de NVvW. Terecht natuurlijk, maar in dit artikel besteden we een beetje aandacht aan twee van de verliezers. Dat is in dit jubileumjaar wel zo eerlijk.



figuur 1 Het Weekblad 1^e jaargang nr. 1

Het Weekblad

Van 1904 tot en met 1950 verscheen het *Weekblad voor gymasiaal en middelbaar onderwijs*. Dat was het orgaan van twee lerarenorganisaties: het 'Genootschap van Leeraren aan Nederlandsche Gymnasiën' (voortaan kortweg het Genootschap) en de 'Algemene Vereniging van Leeraren bij het Middelbaar Onderwijs', de A.V.M.O., voor de hbs-leraren. Het Genootschap was opgericht in

1830, oorspronkelijk vooral om de materiële belangen van de leraren aan de gymnasia te behartigen. Op den duur ging het Genootschap zich ook bezighouden met de kwaliteit van het onderwijs. De A.V.M.O., van 1867, was in eerste instantie juist bedoeld om de kwaliteit van het onderwijs aan de hbs, een gloednieuw schooltype, te bevorderen. Later ging de vereniging zich ook meer om materiële zaken bekommeren.

In 1904 besloten beide organisaties hun krachten te bundelen en gezamenlijk een weekblad uit te geven. Dat ging goed tot 1950, toen onenigheid over de inhoud leidde tot het einde van deze opmerkelijke samenwerking. Het *Weekblad* weerspiegelde het dubbele karakter van beide organisaties. Het blad bevatte veel vakbondsnieuws, bijvoorbeeld over salarissen, pensioenen en taakomvang. Daarnaast kwamen ook algemeen onderwijskundige zaken aan de orde, zoals lessentabellen en inrichting van de eindexamens. Opvallend is echter dat er ook heel veel aandacht aan wiskundeonderwijs werd besteed, veel meer dan aan andere vakken.

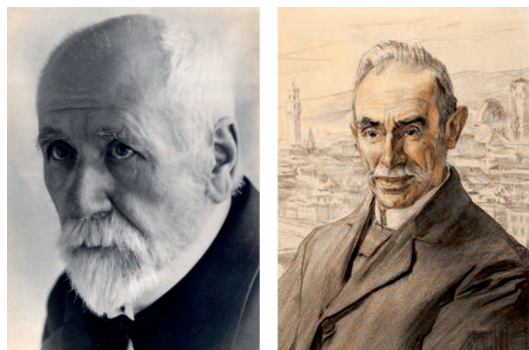
Zo vind je in het *Weekblad* nogal wat artikelen met een wiskundige inhoud, meestal natuurlijk gerelateerd aan de schoolwiskunde. Zo'n artikel kon soms leiden tot lange discussies, vooral als het over eindexamenopgaven ging, die volgens de auteur onduidelijk waren of buiten de examenstof vielen. Een artikel in 1935 over een twijfelachtige examenvraag over trigonometrie leverde bijvoorbeeld niet minder dan negen reacties op. Dat toont tegelijk ook een belangrijk pluspunt van het *Weekblad*. Het verscheen wekelijks en had een korte productietijd, daardoor konden reacties en antwoorden snel gepubliceerd worden. Nu gaat dat via het internet, maar het *Weekblad* laat zien dat levendige discussies ook honderd jaar geleden zeer goed mogelijk waren.

Het blad bevatte ook boekbesprekingen. Dat waren vaak recensies van schoolboeken, meestal tamelijk welwillend, een enkele keer echt kritisch. Een voorbeeld is de recensie van de schoolboeken van J.H. Schogt. Die waren volgens de recensent vanuit wiskundig oogpunt onberispelijk, maar voor de meeste leerlingen te moeilijk en dus niet aan te raden. De keuze aan schoolboeken was vroeger veel ruimer dan nu, en die recensies konden leraren dus helpen een keus te maken. Nu is de keuze heel beperkt, maar toch zou een kritische bespreking van de huidige methodes in ons 'Vakblad voor de wiskundeleraar' niet misstaan!

Opvallend prominent aanwezig in het *Weekblad* zijn artikelen over de didactiek van de wiskunde. Het hiervoor genoemde artikel van Tatiana Afanassjewa uit 1915 over meetkundeonderwijs verscheen in het *Weekblad*

en het ontlokte een aantal reacties die ook weer door Afanassjewa werden beantwoord. Haar artikel is een voorbeeld uit een onverdacht progressieve hoek, en daar verschenen er meer van. Zo publiceerde het *Weekblad* in de jaren dertig een serie verslagen van de activiteiten van de 'Wiskunde Werkgroep', de groep waar Freudenthal na de oorlog voorzitter van werd. Er stonden daarnaast ook onversneden conservatieve stukken in het blad. Ook het Beth-Dijksterhuis rapport van 1926 kwam uitgebreid aan de orde.

Misschien waren voor de meeste leraren de rapportages en discussies over nieuwe leerplannen en examenprogramma's wel het belangrijkste. Allerlei commissies, soms ingesteld door een van beide lerarenorganisaties, soms gevormd op initiatief van de inspectie, presenteerden voorstellen voor aanpassing van het leerplan en examenprogramma's voor gymnasium of hbs. Het *Weekblad* publiceerde daarover en dat gaf altijd aanleiding tot levendige discussies tussen voor- en tegenstanders.



figuur 2 Fransiscus Johannes Vaes (1867 - 1953) en Cornelis Adrianus Cikot (1854 - 1928)

Ook individuele leden konden zulke plannen ontwikkelen. In 1904 begonnen twee leden van de A.V.M.O., F.J. Vaes en C.A. Cikot, een campagne om differentiaal- en integraalrekening op het programma van de hbs te krijgen. Cikot publiceerde artikelen in het *Weekblad* over de mogelijkheden van analyse op school, waaronder ook ervaringen uit het buitenland. Vaes promootte de voorstellen binnen de A.V.M.O. Hun voorstellen kwamen eerst in de sectie wiskunde van de A.V.M.O. aan de orde, en werden daarna besproken op de algemene vergadering van de Vereniging. Van die voorstellen en de daaropvolgende discussies werd uitgebreid in het *Weekblad* verslag gedaan. Hun plannen haalden het uiteindelijk niet, maar alle leden, ook niet-wiskundigen, hadden hun mening daarover kunnen vormen.

Het is niet zo vreemd dat Wimecos en *Euclides* het aanvankelijk moeilijk hadden. Waarom zou je extra geld

>

uitgeven aan een aparte vereniging en een apart tijdschrift als je al door je algemene club en hun weekblad uitstekend bediend werd?

Naschrift. Is het erg gezocht naar aanleiding van bovenstaande kwestie te wijzen op de wenschelijkheid van een Vereeniging voor Nederlandsche Wiskunde-leeraren? Me dunkt, zoo'n vereeniging is de aangewezen plaats voor het bespreken van kwesties als deze en den omvang van het onderwijs in Mechanica. (Wanneer komen we daaromtrent iets naders te hooren?) Dergelijke vereenigingen bestaan in Duitschland, Oostenrijk, Italië, Engeland, Amerika en, naar ik meen, ook in Zwitserland en in Frankrijk. Bedoeld wordt eene vereeniging, niet om geleerdheid aan den man te brengen, maar om het onderwijs in Wiskunde te verbeteren; een vereeniging, die werkt met minimum-omhaal en minimum-kosten. Vooral de Engelsche vereeniging heeft practisch gewerkt, en doet dat nog. (Karakteristiek is, dat op den maaltijd, die de bijeenkomst dit jaar sloot, toasten verboden waren!)

's-Hertogenbosch.

C. A. CIKOT.

figuur 3 Uit het Weekblad in 1905: CA Cikot overpeinst de oprichting van een soort NVvW...

Liwenagel

Het Genootschap en de A.V.M.O. waren algemene organisaties, open voor leraren van alle vakken. In jaarvergaderingen werd wel sectiegewijs overlegd, maar gaandeweg ontstond toch ook de behoefte om zulk vakgericht overleg een meer permanente basis te geven. In het Genootschap werd daartoe in 1920 een 'groep' van leraren in de wiskunde en de natuurwetenschappen opgericht, met de merkwaardige naam Li.W.e.N.a.G.e.L. (de laatste L staat voor Lycea), meestal als Liwenagel geschreven. Zo'n 'groep' was binnen het Genootschap een club met een officiële en permanente status, met een eigen bestuur en reglement. Binnen Liwenagel bestonden vier permanente 'commissies': voor wiskunde, natuurkunde, scheikunde en biologie. Als er binnen de wiskundewereld, bijvoorbeeld in *Euclides*, over Liwenagel werd gesproken, werd meestal de wiskundecommissie of de wiskundigen uit Liwenagel bedoeld.

Liwenagel telde al spoedig een kleine honderd leden. De groep hield ieder jaar een algemene vergadering, die meestal zo'n 25 tot 30 deelnemers telde. Dat lijkt niet zo veel, maar toch heel wat meer dan bij Wimecos, waar de jaarvergadering in de beginjaren vaak niet meer dan een dozijn aanwezigen trok. De agenda en vaak uitvoerige verslagen van de jaarvergaderingen werden in het *Weekblad* gepubliceerd.

Er waren nog twee verenigingen voor leraren van alle vakken, voor hbs en gymnasium samen: voor leraren aan Protestants Christelijke en aan Katholieke scholen. Binnen die verenigingen bestonden eveneens permanente secties voor wiskundeonderwijs. Wimecos, de vereniging

voor wiskundeleraren aan de hbs, was de enige die geen deel uitmaakte van een groter geheel. Men sprak wel van 'de vier organisaties van wiskundeleraren', daarmee werden Liwenagel, Wimecos en de wiskundesecties van de confessionele bonden bedoeld. Tussen die vier groeide al snel een goede samenwerking.



figuur 4 Diederik Pieter Adriaan Verrijp (1869 – 1937)

Binnen Liwenagel waren de wiskundigen het meest actief. De eerste voorzitter, D.P.A. Verrijp, sprak over activiteiten naar buiten en naar binnen. 'Naar buiten toe' betekende lobbyen bij de inspectie en de overheid over zaken als leerplannen en examenprogramma's, uren aantallen en de verdeling daarvan over de leerjaren, en de inrichting van het eindexamen. De strijd om het behoud van het schriftelijk eindexamen voor gymnasium- α ging verloren, maar op het gebied van de urenverdeling werden wel wat successen geboekt. Daarbij kreeg Liwenagel natuurlijk te maken met collega's van andere vakken. Dat verliep niet zonder strijd of zelfs conflicten, maar dat Liwenagel deel uitmaakte van het Genootschap gaf ook meer mogelijkheden voor vakoverstijgend overleg dan voor het veel geïsoleerder werkende Wimecos.

'Naar binnen toe' betekende, in de woorden van Verrijp, zorg voor het 'gehalte van het wiskundeonderwijs'. In 1919 was een nieuw leerplan voor de gymnasia ingevoerd. Liwenagel organiseerde een enquête over de praktische invulling en de gevolgen van dat leerplan en rapporteerde daarover in het *Weekblad*. De wiskundecommissie formuleerde vervolgens een 'minimumleerplan', ook dat werd gepubliceerd in het *Weekblad* en daarna besproken op een algemene ledenvergadering van Liwenagel. Naar aanleiding van vragen over het minimumprogramma besloot de wiskundecommissie een nadere toelichting op papier te zetten, maar de commissie kon het daarover niet eens worden. Besloten werd te volstaan met een verslag van de interne discussies. Later schreef Verrijp dat de

goede lezer wel kon zien dat er twee stromingen binnen de commissie bestonden: een richting die meer waarde hechtte aan strengheid en historische ontwikkeling, en een die meer rekening wilde houden met de eisen die de psychologie stelde. Maar, aldus Verrijp, dat beide standpunten bij de discussies in de commissie aan bod kwamen was geen nadeel, maar juist een voordeel. Bovendien, beide richtingen 'ontmoetten elkaar in de wenschelijkheid van het steeds meer tot zijn recht laten komen van het functiebegrip'.

De belangstelling binnen Liwenagel voor didactische vragen bleek ook uit een ander initiatief. In 1926 organiseerde het, met medewerking van de drie andere organisaties van wiskundeleraren, een 'Algemene bijeenkomst van Wiskundeleeraren', waarop 'wiskundige onderwerpen geheel van didactisch standpunt werden beschouwd'. Er volgden nog vijf van zulke bijeenkomsten, ieder jaar tot 1931. Ze werden goed bezocht, soms 'wel tot 70 deelnemers'.

Vanaf 1932 organiseerde Liwenagel, samen met Wimecos, Velines en Velebi, een tweejaarlijks 'Congres van Leeraren in de Wiskunde en Natuurwetenschappen'. Velines was de vereniging voor leraren in de natuur- en scheikunde, Velibi voor die in biologie. Ook die congressen trokken veel deelnemers, het derde in 1936 bijvoorbeeld 172. Er werden in totaal zestien van deze bijeenkomsten gehouden, de laatste was in 1966 (tussen 1940 en 1948 werden er geen congressen georganiseerd). Het is jammer dat een dergelijke mooie samenwerking tussen NVvW en NVON (de opvolger van Velines en Velibi) niet meer schijnt te kunnen!

Ook na de oorlog leverde Liwenagel belangrijke bijdragen aan de ontwikkeling van het Nederlandse wiskunde-onderwijs. Het slaagde erin een nieuw examenprogramma voor gymnasium- α tot stand te brengen, met daarin interessante keuzeonderwerpen als geschiedenis van de wiskunde en kansrekening en statistiek. Verder publiceerde Liwenagel in 1950 een rapport voor een verdere modernisering van het examenprogramma van gymnasium- β , dat een belangrijke bouwsteen vormde voor het Wimecos-programma van 1958. De grote man van Liwenagel in die jaren was Piet Vredenduin, vele jaren redacteur van *Euclides* en later nog voorzitter van de NVvW.

Besluit

Liwenagel was een actieve club en tot na de oorlog minder behoudend dan Wimecos. Ook het *Weekblad* was lange tijd gevarieerder dan *Euclides*. Het blad was gebonden aan het Genootschap en de A.V.M.O. samen,



figuur 5 Piet Vredenduin (1909 – 1996) (links) en Frank Laforce (1921 – 1994), voorzitter van de Vlaamse Vereniging Wiskundeleraars in 1983

Liwenagel aan het Genootschap. Ook de twee confessionele verbanden van wiskundeleraren waren onderdeel van een groter geheel. Daarin lag lange tijd hun kracht, maar het leidde uiteindelijk ook tot hun verdwijnen.

Door onenigheid tussen het Genootschap en de A.V.M.O. werd de uitgave van een gemeenschappelijk weekblad in 1951 stopgezet. Het Genootschap, de A.V.M.O. en de confessionele verenigingen verdwenen in 1972, toen alle vier fuseerden tot het Nederlands Genootschap voor Leraren. Dat betekende ook het einde van Liwenagel en de confessionele verbanden van wiskundeleraren. Wimecos, dat onafhankelijk was, had zich al in 1968 omgevormd tot de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. *Euclides*, de andere overlever, is nu haar eigendom. Het is mooi en terecht dat we hun 100-jarig bestaan vieren. Ze waren echter niet de eerste, en gedurende een groot deel van hun bestaan hadden ze ook geen monopoliepositie. Ook andere, nu grotendeels vergeten tijdschriften en organisaties, leverden belangrijke bijdragen aan het Nederlandse wiskundeonderwijs.

Op de website vind je een uitgebreide literatuurlijst en de bronvermelding van de figuren.



vakbladeuclides.nl/1001meerdaneuclides

Over de auteur

Harm Jan Smid was leraar wiskunde en lerarenopleider aan de TU Delft. Hij is auteur van een aantal boeken en artikelen over de geschiedenis van het Nederlandse wiskundeonderwijs. E-mailadres: harmjansmid45@gmail.com

Wiskunde in het Forum!

Als leerlingen vragen naar het nut en de noodzaak van wiskunde is een veel gegeven antwoord dat 'de wiskunde overall om ons heen is te vinden'. Laten we de leerlingen dit ook zien en ontdekken.

'Teach what you preach'

De veiligheid van het klaslokaal kan ook wel eens beklemmend werken. Zeker als je voorstaat dat leerlingen wiskunde moeten kunnen ontdekken en/of ervaren. Onder het motto 'teach what you preach' zijn we met een groep minor-studenten van de RUG naar het Forum gegaan. Een openbare trekpleister midden in het centrum van Groningen met een bijzondere architectuur. Juist deze architectuur geeft ontzettend veel aanknopingspunten om actief met wiskunde aan de slag te gaan.

Het Forum

Het Forum is in 2019 geopend in het centrum van Groningen als openbare ontmoetingsplek met o.a. bibliotheek, bioscoop en museum. Het heeft een karakteristieke vorm (zie figuur 1) en speelse inrichting met veel roltrappen (zie figuur 3). Wanneer je als docent je wiskundebril opzet, komen er al snel tal van mooie vragen opborrelen (die je samen met leerlingen kan uitvogelen): welke vorm heeft het grondvlak? Hoeveel zijvlakken zijn er? Waar moet ik staan om zo veel/min mogelijk zijvlakken te zien? Wat is de oppervlakte van het dakterras? Etcetera.



figuur 1 Bovenaanzicht van het Forum in Groningen

Onderzoekskaarten en domeinen

Om deze vragen uit te zoeken heb ik de deur van het lokaal achter mij dichtgetrokken en ben met de studenten van de lerarenopleiding naar het Forum gegaan. De studenten gingen eerst zelf aan de slag met 'onderzoekskaarten'. De onderzoekskaarten zijn ingedeeld in vijf verschillende thema's die aansluiten bij het gebouw en de omgeving:

- Perspectief & vorm
- Lengte & oppervlakte
- Hoeken & routes
- Tijd & snelheid
- Raadsels

F

WiskundeForum
Lengte & oppervlakte
Onderzoekskaart 1

Inleiding

Als je een rondje om het Forum loopt merk je al snel de eigenaardige vorm van het gebouw.

De opdracht

- Hoeveel vierkante meter is het grondoppervlak van het Forum?

Toegepaste hulpmiddelen

- pen/potlood & papier
- geodriehoek
- meetlint of rolmaat
- rekenmachine



Hulpbronnen

- Oppervlakte driehoek en vierhoeken:
<https://nl.wikipedia.org/wiki/Oppervlakte>

Klaar?

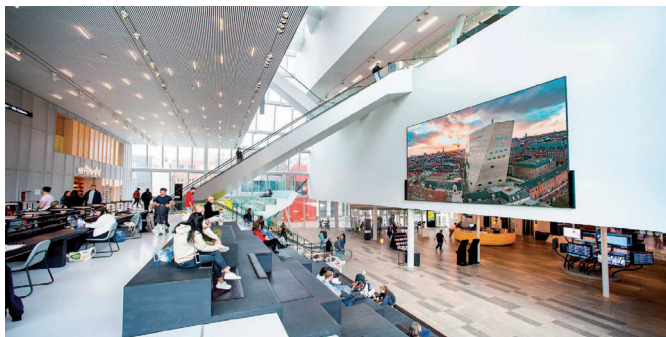
- Bepaal of iedereen het eens is met het antwoord en of het antwoord realistisch is.
- Ga naar de begeleider/docent voor verdere instructies.

figuur 2 Eén van de onderzoekskaarten

Elk thema heeft een aantal onderzoeksvragen, wat uiteindelijk in 13 onderzoekskaarten resulteerde (zie figuur 2). Uitgangspunt hierbij is 'hele taak eerst', waarbij je als

docent niet begint met een uitleg en vervolgens een aantal deelvragen geeft om uiteindelijk tot 'de hele taak' te komen. Je draait het om: je geeft leerlingen eerst de hele taak en (indien nodig!) daarna deelvragen (in dit kader zijn dat hints gegeven door de docent) en eventueel uitleg. Voordelen van 'hele taak eerst' zijn o.a. dat het inhoudelijk motiveert en dat leerlingen al snel ontdekken wat ze nog niet kunnen en kennen en zodoende weten wat ze nog moeten leren of opzoeken.^[1] Hierdoor ontstaat 'uit zichzelf' al een mate van differentiatie, want elk groepje heeft een andere behoefte in ondersteuning. Deze ondersteuning kun je in eerste instantie door de groep zelf laten onder-
vangen, doordat leerlingen elkaar helpen.

De studenten gingen in twee- of drietallen enthousiast aan de slag met de onderzoekskaarten. Met name op het oog simpele vragen als 'hoe snel gaat de roltrap' of 'wat zijn de afmetingen van het grote scherm boven je hoofd' (waar je vanwege de afstand niet bij kan met een meetlint; figuur 3) werden op zeer verschillende wijzen aangevlogen. Zo benaderde het ene groepje de roltrap in z'n geheel en keek het andere groepje naar de aparte treden. De uitkomsten vergeleken ze vervolgens met informatie die ze op hun telefoon hadden opgezocht over snelheid van een roltrap om zich zodoende te controleren. Dat de mobiele telefoon ook ingezet kan worden voor het oplossen van een probleem werd opvallend genoeg niet opgemerkt. Bij het grote scherm had elke groepje de breedte weliswaar weten te achterhalen, maar de hoogte vormde een obstakel. Op basis van een inschatting van de ratio of door de hoogte te relateren aan objecten in de omgeving werd een inschatting gemaakt, maar geen enkel groepje kwam op het idee om er een foto van te maken en zodoende met een verhoudingstabel op te lossen.



figuur 3 Impressie van de binnenkant van het Forum met het grote scherm in de centrale hal.

Zelf onderzoekskaarten maken

Nadat de studenten van elk domein één onderzoekskaart hadden onderzocht, was het tijd om zelf een kaart te

ontwikkelen. Bij voorkeur een die aansluit bij het niveau en onderwerp van hun stageklas. In het algemeen is het niet eenvoudig om goede wiskundeopdrachten te bedenken en zeker niet voor studenten die nog maar een paar maanden voor de klas staan. Door het karakter van de onderzoekskaarten ('hele taak eerst') en de inspirerende omgeving ontwikkelden de studenten relatief eenvoudig opdrachten in de trant van 'wat is de inhoud van de ronde boekenkast?', 'zoek drie cirkelvormige objecten en bereken de oppervlakte' of 'bereken de oppervlakte van de centrale klok' (waarbij een gat in het midden zit in de vorm van een iPhone). De aandacht kwam hierdoor met name te liggen op de manier waarop leerlingen dit zouden uitwerken en tegen welke obstakels leerlingen kunnen aanlopen. Bij een methode worden vaak de theorie, deelvragen en uitwerking al gegeven, waardoor het moeilijker is als (beginnend) docent om hiervan 'los te komen' en met open visie jezelf af te vragen 'hoe zou een leerling dit (kunnen) oplossen?'.

Wiskunde in de praktijk

Door buiten het klaslokaal te kijken hoop je natuurlijk als docent dat leerlingen de toepassingen van de wiskunde gaan zien doordat ze leren om met 'wiskundige ogen' naar hun omgeving te kijken, bijvoorbeeld vormen herkennen en schattingen maken. Echter biedt de praktijk ook uitdagingen die moeilijker op een werkblad in het klaslokaal zijn te vatten (ook al kan de vraag hetzelfde zijn!), namelijk het grip krijgen op de probleemsituatie. Bijvoorbeeld: Op een werkblad in de klas staat bij de vraag 'wat is de oppervlakte van het dakterras' al een schematische weergave van het terras. Voor het berekenen van een oppervlakte hoef je dus niet naar buiten, maar hoe bepaal je zelf de vorm als je op het terras staat (zie ook figuur 1)? En welke gegevens heb je vervolgens nodig om hier iets over te kunnen zeggen? Welke meetinstrumenten kies je en welke beperkingen hebben deze instrumenten? Hoe weet je dat de uitkomst realistisch is? Etcetera.

Maak de laatste de eerste les!

Een dergelijke les waarbij je buiten het lokaal treedt, wordt dikwijls als 'laatste les' gedaan, zo ook deze. Echter, een belangrijk leerpunt is dat je hierdoor niet meer gezamenlijk kunt reflecteren en dat opgedane kennis, vaardigheden en inzichten niet meer kunnen worden toegepast in de volgende lessen. Mijn advies is daarom: maak de laatste les je eerste les! Je hebt dan tijd om te reflecteren, je ziet hoe leerlingen problemen aanpakken (of juist niet) en wat de inhoudelijke verschillen zijn tussen de leerlingen.

>

Verenigingsnieuws

Jaarvergadering /

En als ik nu niet in Groningen woon?

Dan neem je de trein! Of je gaat op zoek in jouw directe omgeving naar inspirerende architectuur of natuur. In het geval dat je beschikt over bijvoorbeeld een kleine wiskunde (-D of -C-)klas, dan is dit relatief eenvoudig te organiseren en hoeft het niet veel voorbereidingstijd te kosten als je de volgende tips ter harte neemt:

- Je hoeft het antwoord niet per sé zelf te weten, maar denk wel na over eventuele oplossingsrichtingen en niveau.
- Laat leerlingen ook zelf vragen ontwerpen (en oplossen!); dit geeft je gelijk weer nieuwe inzichten voor de volgende keer, maar leerlingen leren ook zelf te kijken naar 'de wiskunde om hen heen'.
- Laat leerlingen reflecteren, zodat je ook een terugkoppeling kunt maken in de klas, bijvoorbeeld:
 - Hoe kreeg je grip op de probleemsituatie?
 - Waarin verschillen deze vragen t.o.v. de vragen 'in het boek'?
 - Hoe ben je omgegaan met ontbrekende informatie?
 - Hoe heb je nagegaan of het antwoord zou kunnen kloppen?

Dit zijn nuttige vaardigheden die leerlingen juist ook weer in het klaslokaal kunnen gebruiken.

Noten

- [1] Janssen, F., Hulshof, H., & Van Veen, K. (2016, maart). Uitdagend gedifferentieerd vakonderwijs – ICLON. Opgehaald van Universiteit Leiden: <https://www.universiteitleiden.nl/binaries/content/assets/iclon/onderzoek/uitdagendgedifferentieerdvakonderwijsdef.pdf>

Bronnen afbeeldingen

figuur 1: <https://www.scia.net/nl/user-stories/forum-groningen>

figuur 3: <https://www.avex-int.com/nl/nl/forum-groningen/>

Over de auteur

Paul Durenkamp is lerarenopleider wiskunde aan de RUG en NHL Stenden, algemeen bestuurslid van de NVvW en redactievoorzitter van de Giraf-reeks.

E-mailadres: p.durenkamp@nvww.nl

Tweede uitnodiging

Dit is de tweede uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 2 november 2024.

Aanvang: 10.00 uur

Sluiting: 16.15 uur

Plaats: Ichthus College, Vondellaan 4, 3906 EA Veenendaal.



Thema van de studiedag: De magie van 100

Het 100^{ste} verenigingsjaar van de NVvW, opgericht op 15 december 1925: daar willen we een gedenkwaardig jaar van maken. Deze zaterdag moet de aftrap worden van een jaar met allerlei memorabele en feestelijke activiteiten.

We zullen tijdens deze studiedag terugblikken en vooruitkijken. Waar hadden we het 100 jaar geleden over? Welke hulpmiddelen hebben we door de eeuw heen gehad? Welke didactische benaderingen van vroeger zijn ook nu nog waardevol? En als we de andere kant op kijken, wat zien we dan voor ons in de toekomst met de aanstaande curriculumvernieuwingen? Kunnen we de leerlingen uitdagen om te modelleren en, zowel kritisch als creatief, met algoritmes leren werken? Is AI inzetbaar om wiskunde te leren?

Genoeg om een feestelijke studiedag mee te vullen! Het zou leuk zijn als je een werkgroep wilt verzorgen waar verleden, heden of toekomst van het wiskundeonderwijs een rol in speelt. Dat kan op diverse manieren:

- Een thema van weleer afstoffen en geschikt maken voor de huidige onderwijspraktijk.
- Een blik vooruit naar modelleren, het werken met algoritmes en ervaringen met het gebruik van AI en bijvoorbeeld ChatGPT in de klas.

studiedag 2024



— 100 – is dat een binair getal of denken we tientallig?
Goochelen met getallen, vroeger en nu!

We nodigen wiskundedocenten en andere betrokkenen bij ons wiskundeonderwijs uit om kennis en ervaringen te delen. We hopen dat we elkaar deze studiedag in het honderdste verenigingsjaar weer mogen ontmoeten en inspireren!

Sharon Calor, Margot Rijnierse en Michiel Doorman

10.00-11.00 uur – Jaarvergadering (concept)agenda

- 1 Opening door de voorzitter, Wim Caspers
- 2 Jaarrede van de voorzitter
- 3 Notulen van de jaarvergadering van 4 november 2023
- 4 Jaarverslagen 2023/2024.
 - 4.1 Jaarverslag van de NVvW
 - 4.2 Jaarverslag van *Euclides*
- 5 Financiën
 - 5.1 Jaarrekening en balans 2023/2024
 - 5.2 Verslag kascommissie
 - 5.3 Decharge van het bestuur
 - 5.4 Begroting en vaststelling contributie
 - 5.5 Benoeming nieuwe kascommissie
- 6 Bestuursverkiezing

Aftredend zijn Paul Durenkamp, Tanja Groenendaal, Michiel Doorman en Wim Caspers, omdat hun bestuurstermijn verlopen is. Het bestuur nodigt leden uit zich te melden wanneer zij belangstelling hebben voor een plaats in het bestuur (E-mailadres: secretaris@nvvw.nl). Tot 28 dagen na het verschijnen van deze uitnodiging kunnen bestuurskandidaten eveneens schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden.
- 7 Rondvraag
- 8 Sluiting van de jaarvergadering

Studiedag

De studiedag, met plenaire lezingen, workshops, lunch en markt en gelegenheid om elkaar te ontmoeten begint om 11.00 uur en eindigt rond 16.15 uur.

Nieuwe leden

De studiedag is een uitstekende gelegenheid voor nieuwe leden om kennis te maken met de vereniging. Attendeer daarom je collega op het bestaan van deze studiedag. Ieder die een collega-niet-lid meeneemt ontvangt een presentje.

Kosten

De studiedag is gratis voor leden (inclusief lunch). Niet-leden zijn welkom tegen betaling van een bijdrage in de kosten van € 87,50. Hiermee ben je tevens gratis lid van de vereniging tot 1 augustus 2025 inclusief alle faciliteiten, waaronder zeven nummers van de lopende jaargang van *Euclides*, mogelijkheid tot deelname aan de verenigingswerkgroepen en gratis gebruik van helpdesk t.b.v. advisering in arbeidszaken.

Aanmelding

Aanmelden kan vanaf half september. Voor de organisatie is het van belang dat je je op tijd aanmeldt. Ook dit jaar gaat de aanmelding weer geheel digitaal via de site van de vereniging. Daarop staat t.z.t. het volledige programma, inclusief de workshops waar je een keuze uit kunt maken.

Markt

Naast alle workshops is er ook een uitgebreide markt waar je je hart kunt ophalen aan boeken, rekenmachines, spellen, wiskunst en alle wiskundemethodes.

Certificaat

Wil je een certificaat ontvangen, vermeld dan bij je aanmelding ook voorletters en geboortedatum. Het certificaat wordt na afloop van de studiedag digitaal toegezonden.

Dus reserveer in je agenda: NVvW-dag op zaterdag 2 november 2024.

Via de nieuwsbrief en de website krijg je nadere informatie over wat je kunt verwachten op deze dag. Voor meer praktische informatie over de organisatie kun je je wenden tot Heleen van der Ree. (hoofdbureau@nvvw.nl).

Wereldwiskunde Fonds in Suriname

Training mulo-docenten

Ewald Levens,
Kenneth Tjon Soei Sjo



Door de wereldwijde covidepidemie heeft het Surinaamse onderwijs ruim twee jaar zo goed als stilgestaan. Het verzorgen van incidenteel onderwijs was steeds meer regel dan uitzondering. Met als gevolg dat leerlingen achterstand hebben opgelopen. Een ander gevolg was dat leerkrachten lange tijd geen bijscholing konden volgen.

De wiskundetraining

Op verzoek van het Rooms Katholiek Bijzonder Onderwijs (RKBO) in Paramaribo heeft de Rotary Club Paramaribo Residence, met een financiële ondersteuning van €1600 door het Wereldwiskunde Fonds, in de periode oktober 2023 tot en met april 2024 zeven wiskundetrainingen verzorgd. De trainingen werden verzorgd door Ewald Levens, Lindsay Klosteren en de assistente Jane Antonius. Gemiddeld twintig mulo (mavo) wiskundeleerkrachten van de bovenbouw leerjaar 3 en 4 hebben deelgenomen aan deze training. De evaluatie van de leerkrachten na elke training is de bron geworden van dit verslag. Opvallend is dat nog steeds uit de methode *Moderne Wiskunde hm* uit de jaren '80 wordt gewerkt.



Tijdens de workshop

Algemeen

Uit de evaluatie door de leerkrachten is gebleken dat de deelnemers zeer tevreden zijn over de trainingen. Dat neemt niet weg dat zij bij elke sessie ook verbeterpunten hadden. Bij de start van de training gaven de leerkrachten aan dat ze graag via de app vooraf wilden weten welke vragen aan de orde zouden komen bij elke training. We hebben echter besloten dat slechts het behandelde domein vooraf bekend zou worden gemaakt, zodat zij zich onbevangen en goed konden voorbereiden op de komende training.

Kwadratische vergelijkingen en functies

Sommige leerkrachten kozen bij het bepalen van extremen bij kwadratische functies er steeds voor om 'het gemiddelde' te nemen van de snijpunten met de x -as en met behulp daarvan de extreme waarde te berekenen. Deze methode brengt heel wat beperkingen met zich mee. Zeker als de parabool geheel boven of onder de x -as ligt. In dat geval is een andere methode zoals het kwadraatafsplitsen een oplossing. We hebben ze laten ervaren hoe vanuit het bouwschema $ax^2 + bx + c = 0$ door middel van kwadraatafsplitsen, de abc -formule is ontstaan.

Goniometrie

Ook hier vonden de leerkrachten dat de training hun kennis over dit domein heeft verrijkt. Vooral de didactische aanpak vonden zij erg goed. Er waren zeer interessante discussiepunten. Een voorbeeld was de introductie van de eenheidscirkel waarmee werd aangetoond dat $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$ en dat $\tan 90^\circ = 1/0$ en dus niet bestaat. Met behulp van een gelijkzijdige driehoek die gehalveerd wordt en met de stelling van Pythagoras lieten we zien dat:

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

En met behulp van een vierkant dat gehalveerd wordt lieten we zien dat:

$\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
---------------------------------------	---------------------------------------

Heel wat leerkrachten wisten niet dat de formule $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ afgeleid kan worden met behulp van de stelling van Pythagoras. Vaak moeten de leerlingen de bovenstaande vormen uit het hoofd leren zonder deze vooraf af te leiden.

Toepassingen in de goniometrie

We kwamen tot de ontdekking dat veel leerkrachten niet wisten hoe de sinusregel (of de cosinusregel) kan worden afgeleid. Tijdens de training hebben zij dat in groepsverband kunnen ervaren. Vooral ook het toepassen van deze regels in een stomphoekige driehoek was voor velen interessant.



Docent Carmen Gouvela van de St. Paschalis mulo-school

Vectoren

Aan bod kwamen: de introductie van het begrip vector; staart en kop; de bewerkingen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen toepassen op vectoren; kengetallen van vectoren; de nulvector; het begrip representant bij vectoren en de lengte van een vector. Ook is aandacht besteed aan het kunnen uitrekenen van de lengte van een vector.

Er was aandacht voor het verband tussen de lineaire vergelijking en de vectorvoorstelling van een lijn.

Voorbeeld: zet

$-2x + y - 4 = 0$ om in een vectorvoorstelling en ook andersom. Veel aandacht heeft het volgende vraagstuk getrokken: Gegeven de punten $A(-6, 2)$ en $B(6, 8)$. Het punt P ligt op AB zo, dat $AP : PB = 2 : 1$. Bereken de coördinaten van P met behulp van vectoren. Naast deze oplossing hebben we laten zien dat dit ook met behulp van gelijkvormigheid opgelost kan worden.

Gelijkvormigheid

Bij dit onderwerp zijn verschillende manieren om de lengten van de zijden van figuren te berekenen, besproken. De leerkrachten zijn belangrijke begrippen bijgebracht met name: lengte-vergrotingsfactor, oppervlakte-vergrotingsfactor en inhouds-vergrotingsfactor. We hebben laten zien hoe die zijn ontstaan. Bij lengte is de vergrotingsfactor k , bij de oppervlakte k^2 en bij inhoud k^3 .

Doel van de training

Het doel van de training was het verhogen van de pedagogische en (vak)didactische vaardigheden van de wiskundeleerkrachten. Kenmerken van een goede

wiskundeleerkracht zijn onder andere: plezier hebben in je vak, betrouwbaarheid, goed kunnen omgaan met kritiek, goed kunnen communiceren en creatief zijn. Wij hebben in onze training aandacht besteed aan deze aspecten, maar de vakdidactische aanpak had een centrale rol. Denk daarbij aan:

- 1 Hoe help je de leerling het wiskundeprobleem op te lossen?
- 2 Welke vragen stel je daarbij als leerkracht aan de leerling?
- 3 Interactie tussen de leerkracht en de leerling met als doel het denken van de leerling te stimuleren, waardoor het inzicht van de leerling vergroot wordt. Het inzicht wordt niet vergroot door steeds formules te gebruiken. Belangrijker is hoe de formule is ontstaan.

Eindtoets

Op de laatste training zijn de mulo-eindexamens van de jaren 2021 en 2022 in groepsverband besproken. Daarnaast kregen de leerkrachten een hand-out met een mogelijke didactisch aanpak van deze zestig examenvraagstukken. Hopelijk zal deze training zijn vruchten afwerpen bij het aanstaande mulo-eindexamen. Zowel de trainers als de leerkrachten waren heel positief kritisch over elkaar tijdens de training.



Uitreiking van de certificaten

Over de auteurs

Ewald Levens was docent wiskunde, voorzitter van de Vereniging van Reken- en Wiskundedocenten in Suriname en directeur van het Ewald Meyer Lyceum.

E-mailadres: ewald.levens@icloud.com

Kenneth Tjon Soei Sjoë was docent wiskunde en voorzitter van de vaststellingscommissie wiskunde havo A en vwo A en C. E-mailadres: johnstjon26@gmail.com

Het coördinatenspel laat het zien!

'Waar sta ik in het vak wiskunde?'

Als wiskundedocent moet je kunnen differentiëren. Leerlingen verschillen in hun ondersteuningsbehoefte en als je daarop inspeelt is het rendement van je onderwijs hoger. Maar hoe begin je daarmee als je je leerlingen nog niet kent? Het coördinatenspel geeft je inzicht in waar je leerlingen staan als het om wiskunde gaat.^[1] En leerlingen krijgen inzicht in hun leerproces.

Het lichaam als meetinstrument

Wiskunde heeft van alle schoolvakken één belangrijk voordeel: iedereen vindt er wat van – het is geen 'neutraal' vak. Een hele praktische manier om uit te vinden wát leerlingen ervan vinden, is het doen van een eenvoudige oefening die ik het coördinatenspel heb gedoopt.^[1] Met dit spel kun je leerlingen zelf laten voelen en nadenken over waar ze staan ten opzichte van wiskunde. De crux is dat dat 'staan' ook heel fysiek en letterlijk opgevat wordt, waarbij het lichaam een meetinstrument wordt. Voor de Nederlandse klassensituatie heb ik de skill-will matrix^[2] omgewerkt tot een assenstelsel op klaslokaalschaal, met twee vragen aan leerlingen:

1 Hoe leuk of stom vind je wiskunde?

2 Hoe makkelijk of moeilijk vind je het?

Leerlingen kiezen in het assenstelsel een positie die overeenkomt met hun antwoord op deze vragen.

Hoe werkt het?

Het spel kun je zien als een vorm van 'embodied learning' en werkt twee kanten op. Het spel stimuleert het aanleren van abstracte begrippen en het maakt leerlingen bewust van hun motivatie en geeft hen eigenaarschap over hun leerproces. Het blijkt dat het fysiek beleven van een positie een andere, meer diepgaande ervaring is dan alleen een tekening maken van je positie op een ruitjesvel. Het coördinatenspel is een manier om het ruimtelijk inzicht van leerlingen te verankeren, omdat visuele stimuli een ondersteunende rol kunnen hebben bij het aanleren van abstracte concepten.^[3] Het spel vergroot motivatie en eigenaarschap, doordat leerlingen de keuze krijgen om hun plek en richting te bepalen. Tevens moeten ze nadenken over wat nodig is om hun leerproces te verbeteren.



figuur 1 Coördinatenspel met 4 havo. Linksachter is (0, 0)

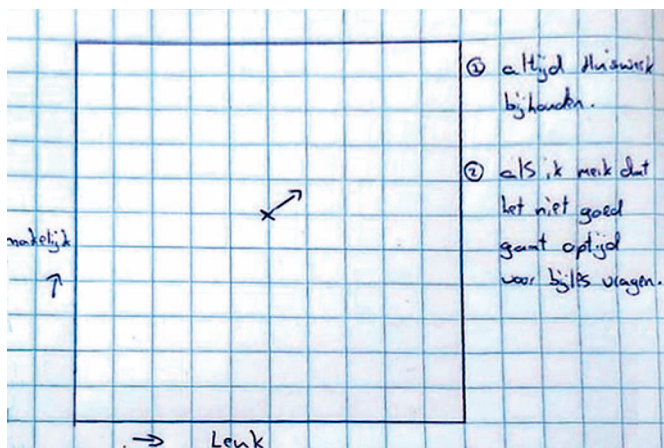
Hoe pak je het aan?

Het hangt van de specifieke omstandigheden af: het kan binnen of buiten. Zoals te zien is in figuur 1 (linksachter = (0, 0)) heb ik hier gekozen voor een opstelling op het schoolplein. Het voordeel daarvan was dat ik een vak van 10 bij 10 meter kon uitzetten met pilonnen, wat voor de leerlingen in hun schrift een 10 x 10 cm coördinatenstelsel zou moeten opleveren (met (0, 0) als stom en moeilijk, (10, 10) als leuk en makkelijk) Uiteraard: het kan ook in een klaslokaal, al wordt het dan wat minder overzichtelijk.

Er zijn drie onderdelen in de oefening: bewustwording, positie kiezen en stappen zetten, reflectie en vastlegging. De totale oefening duurt circa 30 minuten en past dus meestal in een lesuur.

Bewust worden van waar je staat

Het lijkt makkelijk, maar is het niet. Belangrijk is vooral dat leerlingen leren letten op hoe het vóelt. Kunnen ze dat? Jazeker! Als warming-up-oefening laat ik ze twee aan twee naast elkaar staan, en dan van plaats wisselen – merk je verschil? Ja, al is het niet makkelijk in woorden



figuur 2 Positie van een leerling uitgewerkt op papier

uit te drukken. Als ze het moeilijk vinden, kunnen ze ook nog voor en achter elkaar gaan staan, om daar verschil in te bespeuren. Het klinkt misschien wat zweverig, maar het helpt ook om ze aan te sporen vooral hun voeten te voelen (dan gaan ze meer 'uit hun hoofd'). En de bedoeling is dat ze hun hele lichaam als meetinstrument leren gebruiken, dus juist niet alleen dat hoofd.

Positie kiezen

Concreet is de ene hoek stom/moeilijk, de tegenoverliggende hoek leuk/makkelijk, de derde en vierde zijn respectievelijk leuk/moeilijk en stom/makkelijk. Uiteraard zullen niet alle leerlingen de uiterste posities kiezen: tussenplekken mogen net zo goed, en het is ook aan te moedigen verschillende plekken uit te proberen, om de verschillen echt te voelen. Leerlingen laten zo letterlijk en lijfelijk zien waar ze staan ten opzichte van het vak wiskunde. Vervolgens laat ik de leerlingen daarna heel bewust en zo langzaam als ze kunnen 'met aandacht bij hun voeten' een of twee stappen maken in de richting die ze het meest wenselijk vinden. Op die manier ervaren ze dat er beweging mogelijk is, en creëren ze hun eigen momentum. Zo nodig gaan ze terug naar hun uitgangspositie, en herhalen de beweging, totdat ze die echt goed ervaren.

Reflecteren en vastleggen

In hun schrift tekenen ze daarna een 10 x 10 assenstelsel, en geven eerst met een kruisje (of hartje et cetera) aan waar ze zichzelf hebben geplaatst, en met een pijltje waar en hoever ze in de gewenste richting (meestal leuk/makkelijk) willen. Als reflectievragen moeten ze dan nadenken over twee dingen:

- 1 Wat kan ik zélf doen om in de goede richting te gaan?
- 2 Welke hulp heb ik daarbij nodig? En van wie kan ik die krijgen?

Ook dit wordt weer schriftelijk vastgelegd, zo specifiek als mogelijk.

Interpretatie

Je kunt natuurlijk veel leren door het observeren van leerlingen in de ruimte. Welke positie nemen ze in? Gaan ze daar meteen naartoe of zwerven ze rond? Is er interactie tussen leerlingen? Blijven ze bij elkaar of niet? Welke richting kiezen ze voordat ze een stap zetten? Voor de hardcore wetenschappers onder ons: mogelijke uitkomstparameters zijn de coördinaten zoals die door hun gekozen positie blijken, en na afloop in hun schriftelijke weergave blijken. De correlatie tussen die twee kun je checken door (geanonimiseerde) foto's te maken ter plekke, en die te vergelijken met hun eigen papieren weergave. Voor de meer praktisch ingestelden onder ons: bewegen is altijd goed, en dit geeft ook letterlijk een beeld waar je als docent wat aan kunt hebben.

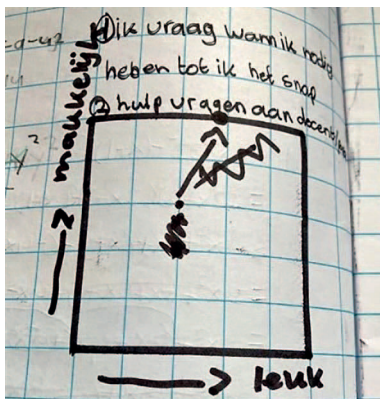


figuur 3 Klas 2 vwo: rechtsvoor is (0, 0)

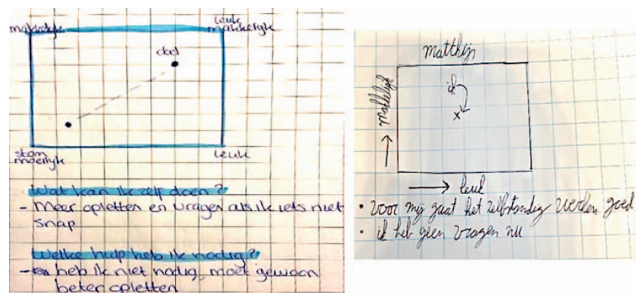
Voorbeelden uit de praktijk

Een indruk geven drie klassen (2 vwo, 4 vwo, 4 havo) waarvan de data kwalitatief geanalyseerd werden. Zoals verwacht waren er duidelijke verschillen in de gemiddelden en spreiding van de klassen: bij 4 havo was er een sterke concentratie aan de 'stomme' zijde, bij 4 vwo veel spreiding en bij 2 vwo idem. Zie de foto in figuur 3, gemaakt met inachtneming van de AVG, waardoor leerlingen niet herkenbaar op de foto staan. Een nadeel van deze statische foto's is dat het dynamische aspect van het spel niet goed uit de verf komt: er valt veel te zien aan groepsbewegingen, sociale druk, tempo et cetera. Ik benadruk vaak dat het belangrijk is dat je het spel 'voor jezelf' doet – maar ja, daar hebben pubers soms helemaal geen boodschap aan.

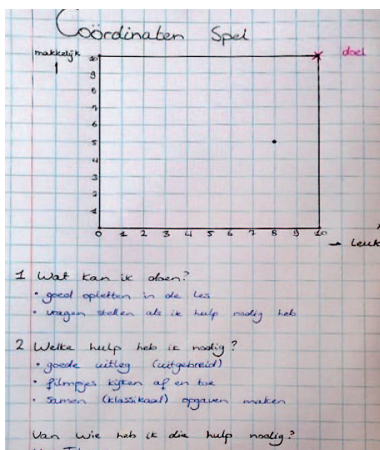
Nadat de leerlingen zichzelf aldus in de ruimte hebben geplaatst en letterlijk hun positie ten opzichte van het vak wiskunde hadden bepaald, komt de verwerking. Leerlingen nemen hun plek over in een assenstelsel in hun schrift door een kruisje te zetten en hun stappen geven ze aan met een pijltje. Vervolgens reflecteren ze op de vragen wat voor die beweging naar een gewenste positie van hunzelf en van anderen nodig is. Er was een grote variatie in hoe nauwkeurig leerlingen de tekeningen maakten en de vragen beantwoordden. Wel was er een duidelijk verschil waarneembaar in de vaardigheid tussen tweede- en vierdeklassers.



figuur 4 Tekening van een leerling uit 2 vwo



figuur 5 Tekeningen van leerlingen uit 4 havo



figuur 6 Tekening van leerling uit 4 vwo

De hier getoonde tekeningen zijn een leuke bloem- lezing van de gehele populatie. Veel leerlingen zien wel in dat huiswerk maken, opletten, vragen stellen en hulp zoeken helpen bij het leerproces. Soms melden ze ook specifieke dingen als muziek luisteren, samenwerken met vriendje, filmpjes kijken etcetera. Opvallend was dat er grote verschillen waren tussen leerlingen in nauwkeurigheid, werkwijze, en opvattingen over wat hun eigen en andermans inbreng bij het leerproces zou kunnen zijn. Deze grote interindividuele verschillen kunnen natuurlijk ook samenhangen met verschillen in 'lichaamsbeleving'. Het kan interessant zijn om daarover met LO-collega's in gesprek te gaan.

Samenvattend kun je het coördinatenspel gebruiken als een praktische 'embodied' graadmeter van het beeld dat leerlingen hebben van het vak wiskunde. Het zet leerlingen in beweging, en kan zo individuele differentiatie vergemakkelijken en eigenaarschap van het leerproces bevorderen. Wat wil een mens nog meer?

Noten

- [1] Een uitgebreidere versie van dit artikel verscheen in 2022 als Masterscriptie aan de HU 'Fysieke en visuele ondersteuning bij het aanleren van abstracte wiskundige concepten'.
- [2] Dit ontwerp is gebaseerd op de in het bedrijfsleven veel gebruikte 'skill-will matrix', waarbij motivatie en vaardigheid op twee assen worden uitgezet.
- [3] Doherty, A. & Forés, A. (2019). Physical Activity and Cognition: Inseparable in the Classroom. *Frontiers in Education*. doi:10.3389/feduc.2019.00105
Bobek, E., Tversky, B. Creating visual explanations improves learning. *Cogn. Research* 1, 27 (2016). <https://doi.org/10.1186/s41235-016-0031-6>

Over de auteur

Constantijn Tilanus is eerstegraads docent wiskunde en NLT. Sinds kort is hij verbonden aan Ithaka-ISK in Utrecht. Hij is redacteur van Euclides en bestuurslid van de NvVw. Daarnaast is hij actief als systemisch organisatieadviseur en leiderschapstrainer. E-mailadres: c.tilanus@nvvw.nl

Olympiadepuzzel 100-1

Wedstrijd

Esther Bod



De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor leerlingen van havo en vwo. Alle leerlingen van klas 1 t/m 5 met

belangstelling voor wiskunde kunnen meedoen aan de eerste ronde. Deze wordt altijd in januari gehouden op alle deelnemende scholen. De speelse maar uitdagende opgaven testen je creativiteit en wiskundig inzicht. Meer informatie is te vinden op www.wiskundeolympiade.nl.



Met dank aan oud-olympiadedeelnemers Aimée Jacobs en Kati Overbeeke voor het nakijken van de inzendingen.

De juiste oplossing (inclusief toelichting) is te vinden op de website, samen met de namen van de vijftien inzenders die deze oplossing gevonden hadden. De cadeaubon van deze editie gaat naar Erwin Bruinsma.



vakbladeuclides.nl/1001_olympiadepuzzel

Op de school van Lars hebben 28 leerlingen meegedaan aan een wiskundewedstrijd, onder wie Lars zelf. De wedstrijd bestaat uit twaalf opgaven. Ieder goed antwoord is vijf punten waard; voor een fout antwoord krijg je geen punten. Als je geen antwoord invult, krijg je één punt.

Het blijkt dat alle leerlingen een verschillende score hebben gehaald. Iedereen heeft bij minstens de helft van de opgaven een antwoord ingevuld en niemand heeft meer dan zes opgaven fout beantwoord. Bij iedere leerling zijn hooguit 80% van de door hem of haar gegeven antwoorden goed.

Lars is als 5^e van zijn school geëindigd. Bij hoeveel opgaven heeft hij het goede antwoord ingevuld?

Inzenden oplossingen

Stuur je oplossing uiterlijk 11 oktober naar euclides@wiskundeolympiade.nl. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een cadeaubon van € 20,-.

Terugblik puzzel nr. 7

Bij deze puzzel waren twee overlappende cirkels gegeven met een aantal punten en driehoeken. Alle inzenders zagen in dat de straal van beide cirkels gelijk moet zijn, omdat de middelpunten van de cirkels elk op de andere cirkel liggen. Door gebruik te maken van gelijkbenige en gelijkzijdige driehoeken konden hiermee de gevraagde hoeken gevonden worden.

Nationale Wiskunde Dagen (NWD) 2025



Als wiskundeleraar wil je van tijd tot tijd nieuwe ideeën opdoen om creatief en actief met je vak bezig te kunnen blijven. Dat kun je doen door actief mee te doen in werkgroepen of deel te nemen aan de professionele community door met collega's van gedachten te wisselen. Tijdens de Nationale Wiskunde Dagen heb je die gelegenheid volop om inspiratie op te doen. Twee dagen lang.

De 31^e editie van de NWD zal plaatsvinden op vrijdag 4 april en zaterdag 5 april 2025.

Inschrijven

De inschrijving voor de NWD is van 9 december 2024 tot en met 6 januari 2025. Op de website wordt de procedure voor inschrijven gepubliceerd, zie <https://www.uu.nl/onderwijs/nationale-wiskunde-dagen>

Workshop geven?

Wil je ook een actieve deelnemer zijn en gratis naar de NWD mogen? Stuur een beschrijving van je workshop op. Liefst zo volledig mogelijk en inclusief de materialen die je tijdens de workshop gaat gebruiken. Graag vóór 1 november 2024 opsturen naar nwd@uu.nl o.v.v. Docentenworkshop.

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Hugo Duivesteijn, voorzitter
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck
Constantijn Tilanus

Inzenden bijdragen
Tom Goris,
Molenbochtplein 38, 5014 EJ Tilburg
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingser-
vices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvbw.nl

Voorzitter
Wim Caspers
E-mail: w.caspers@nvvw.nl

Secretaris
Els Franken
E-mail: e.franken@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06 21 50 96 79 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau, Tel. 0345 531 324
E-mail: evers.rechtspositie@gmail.com
Vermeld bij je contact je lidnummer en telefoonnummer.

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt met ingang van 1 augustus 2023
- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 72,50
- leden, maar dan zonder Euclides: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 75,00
Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen Euclides niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 90,00
Instituten en scholen: € 160,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal,
Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2024

UTRECHT

Do
26/09

Conferentie Werken aan basisvaardigheden rekenen-wiskunde in alle vakken.
Organisatie: NVvW, Platform Rekenbewust vak-
onderwijs, Expertisepunt Rekenen-wiskunde, KNAG,
Vecon en NVON

UTRECHT

Za
26/09

Geschiedenis symposium
Eens Euclides, altijd Euclides
Organisatie: werkgroep geschiedenis van wiskunde,
NVvW

UTRECHT

Do
03/10

Onderwijs meets onderzoek
AI in het wiskundeonderwijs
Organisatie: NVvW

VEENENDAAL

Za
02/11

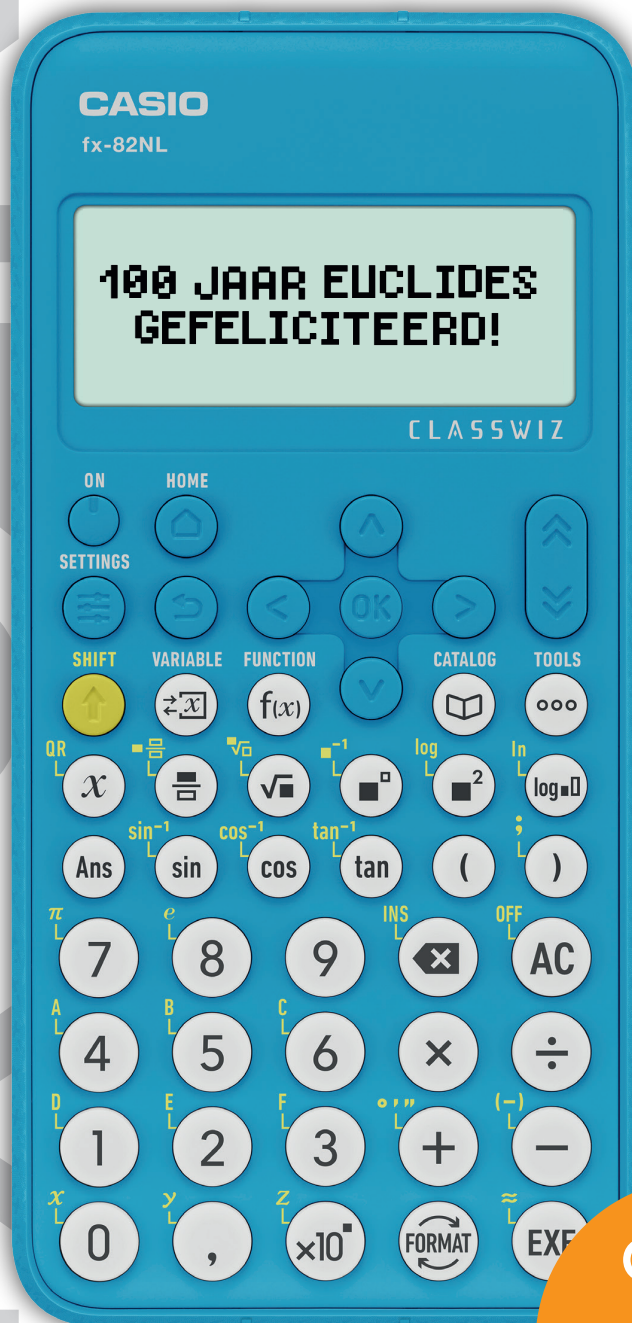
NVvW jaarvergadering en studiedag

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook vakbladeuclides.nl

JAARGANG 100

Nr.	Verwachte verschijningsdatum	deadline
2	23 oktober 2024	19 augustus 2024
3	11 december 2024	7 oktober 2024
4	29 januari 2025	11 november 2024
5	12 maart 2025	30 december 2024
6	30 april 2024	24 februari 2025
7	18 juni 2025	20 april 2025

CASIO®



Opvolger van:
fx-82MS
fx-82EX

**Voor Nederlands
curriculum gemaakt**

Goed van start!

Hopelijk heb je een fijne zomervakantie gehad en ben je klaar voor het nieuwe schooljaar. Wil je nog beter voorbereid zijn? Meld je dan aan voor één van deze webinars.

Ga je vanaf dit jaar voor het eerst werken met Getal & Ruimte of Moderne Wiskunde? Of werk je al met één van deze wiskundemethodes, maar wil je meer weten? Laat je bijpraten en stel je vragen in één van deze webinars. Komt het tijdstip niet uit? Geen probleem! Meld je aan en we sturen je een terugkijlink.

Goed van
start
webinars

Noordhoff

Webinar Goed van start met de digitale leeromgeving

-  Dinsdag 3 september
van 16.00 tot 17.00 uur
-  Donderdag 12 september
van 16.00 tot 17.00 uur



Meer informatie en aanmelden op Noordhoff.nl/goedvanstart-digitaal

Webinar Goed van start met Getal & Ruimte

-  Dinsdag 17 september
van 16.00 tot 17.00 uur

getal&ruimte



Meer informatie en aanmelden op Noordhoff.nl/goedvanstart-gr

Webinar Goed van start met Moderne Wiskunde

-  Donderdag 19 september
van 16.00 tot 17.00 uur

MODERNE WISKUNDE



Meer informatie en aanmelden op Noordhoff.nl/goedvanstart-mw

Brengt je verder

