Olympiadepuzzel

Euclides 99 nummer 5

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Kralenkettingen

Opgave

Renske wil een kralenketting maken van zes rode en zes blauwe kralen. Ze gebruikt alle twaalf kralen en zorgt ervoor dat er nergens drie kralen met dezelfde kleur naast elkaar zitten. Hoeveel verschillende kettingen kan ze maken?
De beide uiteinden van de ketting sluiten op elkaar aan. Ga ervan uit dat de ketting een perfecte cirkel vormt en dat alle opeenvolgende kralen op gelijke afstand zitten. Kettingen die in elkaar overgaan door de ketting te spiegelen (oftewel in de ruimte om te draaien) en/of alle kralen cyclisch door te schuiven, beschouwen we als gelijk.

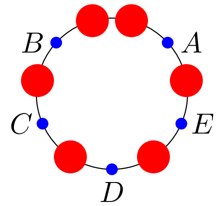
Uitwerking

Aangezien er geen drie rode kralen naast elkaar kunnen zitten, komen ze voor in groepjes van één of twee kralen. Renske heeft zes rode kralen, dus er zijn 0, 1, 2 of 3 groepjes van twee rode kralen en respectievelijk 6, 4, 2 of 0 losse rode kralen.

Als er zes losse rode kralen zijn, moeten de blauwe kralen ook allemaal los voorkomen. Op deze manier kan ze één ketting maken. Iets vergelijkbaars geldt als de rode kralen juist allemaal in groepjes van twee voorkomen: dan moeten de blauwe kralen ook allemaal in groepjes van twee voorkomen, wat één mogelijke ketting geeft.

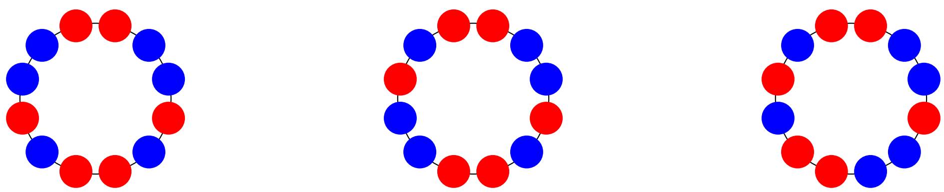
We bekijken nu de kettingen met één groepje van twee rode kralen en vier losse rode kralen. Omdat er in totaal vijf groepjes rode kralen zijn, moeten er ook vijf groepjes blauwe kralen zijn. Met zes blauwe kralen kan dat alleen als er ook eenmaal twee blauwe kralen en vijfmaal een losse blauwe kraal zijn.

Zonder verlies van algemeenheid kunnen we aannemen dat de rode kralen zijn gerangschikt zoals in onderstaande figuur. Op één van de posities A, B, C, D en E zitten twee blauwe kralen; op de andere posities één blauwe kraal. De ketting met twee blauwe kralen op positie A gaat door spiegeling over in de ketting met twee blauwe kralen op positie B. Hetzelfde geldt voor de posities C en E. Er zijn dus drie kettingen met precies één groepje van twee rode kralen.

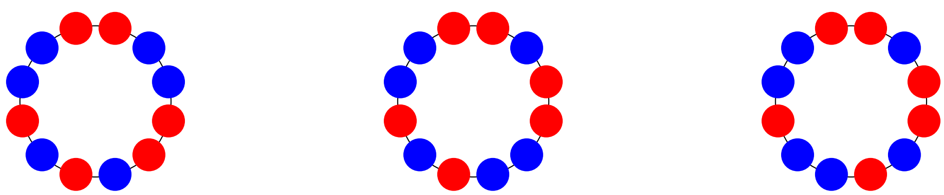


Nu resteren nog de kettingen met twee groepjes van twee rode kralen en twee losse rode kralen. Er zijn twee mogelijkheden voor de rode kralen. Beide zijn weergegeven in onderstaande figuur.

In het linker geval zijn (na spiegeling en draaiing) alle posities A, B, C en D equivalent. We kunnen dus zonder verlies van algemeenheid aannemen dat er twee blauwe kralen op positie A zijn. Er zijn nu nog drie mogelijkheden voor het andere groepje van twee blauwe kralen. Zoals in onderstaande figuur te zien is, zijn deze alle drie verschillend.



In het rechter geval zijn de posities B en D equivalent. We kunnen daarom aannemen dat er óf twee blauwe kralen op positie B zijn, óf één blauwe kraal op zowel positie B als positie D. Met twee blauwe kralen op positie B zijn er nog drie kettingen mogelijk. Uit onderstaande figuur blijkt dat deze alle drie verschillend zijn. Met één blauwe kraal op posities B en D is er één mogelijke ketting. In totaal geeft dit dus vier mogelijke kettingen.



We concluderen dat Renske $1 + 1 + 3 + 3 + 4 = 12$ verschillende kettingen kan maken.

Inzenders met de juiste oplossing

Jan Bouw en Matthijs Schukking

Winnaar van de cadeaubon

Jan Bouw