

EUCCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAAR

Nieuw spel over rekenen met negatieve
getallen

DOE040: democratische school in Eindhoven

De stelling van Bang

Pareltjes uit de vakantiecursus



Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

NR.7

JAARGANG 99 JUNI 2024

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 99 NR 7

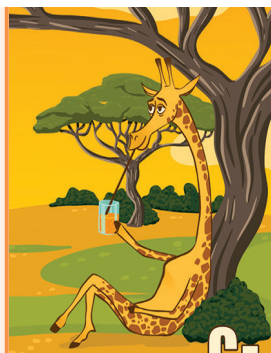


IN DIT NUMMER

MIN EN MIN IS PLUS!

Paul Durenkamp
Sibren Stienstra

4



HOE KAN IK LEERLINGEN MOTIVEREN?

INTERVIEW MET LÉON VAN DER HEIDEN,
VMBO-DOCENT
Liesbeth Coffeng

8

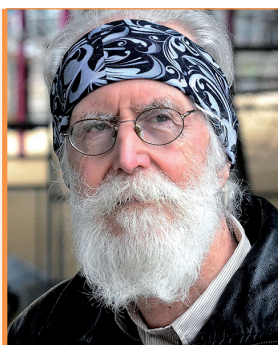
EEN SCHEVE PARABOOL KAN PRIMA ZONDER ALGEBRA

Henk Hietbrink

11

WIS EN WAARACHTIG

14



DEMOCRATISCHE SCHOLEN: WISKUNDE DOEN

INTERVIEW MET
ELIZABET MEERBEEK
Tom Goris

16



WIE WAS BANG VOOR MEETKUNDE?

Martin Kindt

19

EEN GEOMETRISCHE QUESTIE NADER BEKEKEN

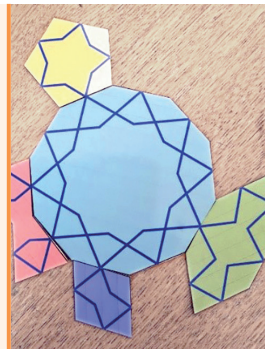
Fred Muijters

24

BOEKBESPREKING

ZEBRA 66: ISLAMITISCHE
MEETKUNDIGE PATRONEN
Jacques Jansen

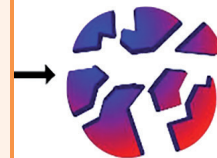
27



PARELTJES UIT DE VAKANTIECURSUS

Jeroen Spandaw
Els Vanlommel

30



ROEST RUST (NIET) LEZEN BIJ DE OPRUIMING

Ab van der Roest

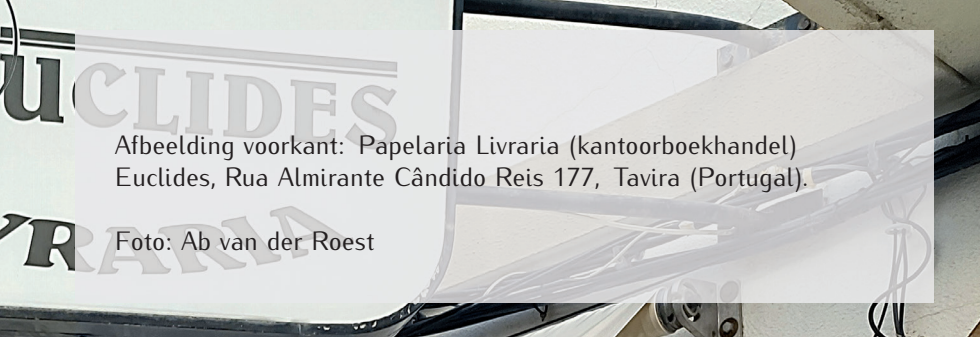
34

'TOEGEPASTE WISKUNDE' – IS DAT OOK EEN OPLEIDING?

DEEL 4 IN GESPREK MET ALUMNI

Jack Schilder

36



Afbeelding voorkant: Papelaria Livraria (kantoorboekhandel)
Euclides, Rua Almirante Cândido Reis 177, Tavira (Portugal).

Foto: Ab van der Roest

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

WERELDWISKUNDE FONDS IN OEGANDA

Hans van de Lagemaat

41

VERENIGINGSNIEUWS

43



UITSLAG KERSTPUZZEL

Alex van den Brandhof

44

PUZZEL

45

SERVICEPAGINA

46

Euclides-special 'Mooiste les'

Voor het 100-jarig bestaan van de NVvW zijn we op zoek naar verhalen met als titel 'Mijn mooiste les'. Uiteraard mag dat ook een beschrijving van een lessenserie of een project zijn. Leerlingmateriaal en foto's kunnen daar aan toegevoegd worden. Deze verhalen worden gebundeld in een *Euclides*-special.

Daarnaast zijn we op zoek naar foto's van inspirerende klaslokalen. Dat kan ook een aula of een trappenhuis zijn dat met een wiskundig sausje overgoten is.

Stuur je bijdrage naar: mooisteles@nvww.nl



Kort vooraf

Het laatste nummer van de 99^e jaargang. Ook een mijlpaal, maar meer zeg ik daar niet over anders treedt er al een jubileummoetheid op nog vóór de honderdste jaargang is aangebroken. Alleen aan het eind nog een herhaling van de oproepen aan de lezers voor mogelijke bijdragen, die inmiddels beginnen binnen te stromen.

Soms zijn er van die toevallige rode draadjes die ineens in een *Euclides* opduiken. Het begon bij het artikel van Jeroen Spandaw en Els Vanlommel over pareltjes van de vakantiecursus, zie bladzijde 30. Daarin werd melding gemaakt van het bestaan van snelle priemtestalgoritmes, zodat je van een getal met honderden cijfers snel kunt bepalen of dat een priemgetal is. Allemaal na te lezen in paragraaf 1.5 van Frits Beukers in de syllabus van de cursus.

Vlak daarna kwam de Rust Roest Niet van Ab van der Roest binnen, zie bladzijde 34. Hij vroeg zich af of een getal van dertien cijfers een priemgetal was. En vervolgens stuurde Ernst Lambeck de rubriek Wis en Waarachtig door, zie bladzijde 14, waarin te lezen is dat van een priemgetal van 32114 cijfers nog getest moet worden of het wel daadwerkelijk priem is. Toeval bestaat niet en dat redactielid Ernst al sinds jaar en dag die rubriek verzorgd mag overigens wel eens vermeld worden.

En wat betekenen de getallen 16, 23 en 30? Dat is het aantal dagen tot aan de zomervakantie voor respectievelijk Zuid, Midden en Noord. Namens de hele redactie: geniet er van en tot in de volgende jaargang. Wat was daar ook alweer mee... ?

Tom Goris

Min en min is plus!

Thermometers, liften en heksen. Hoe leg jij uit waarom min en min plus is? In dit artikel wordt ingegaan op de didactiek van het optellen en aftrekken van negatieve getallen en het gebruik van het spel *Plusminus* in de wiskundeles.

Inleiding

Om het rekenen met negatieve getallen inzichtelijk te maken, gebruikt iedere docent zijn eigen methode. Zo wordt er soms gekozen voor een koppeling met praktijkvoorbeelden: geld, temperatuur, liften of luchtballonnen. Bij sommige docenten komt de heks een ketel met warme of koude blokjes vullen, maar vaak wordt er gewoon gehamerd op de rekenregel: 'min en min is plus'. In dit artikel gaan we in op de vraag waarom leerlingen het rekenen met negatieve getallen vaak lastig vinden en dragen we manieren aan om dit onderwerp in de les te behandelen. Wanneer krijgen rekenregels betekenis voor de leerling? En wanneer draagt de aansluiting op de belevingswereld van leerlingen daadwerkelijk bij aan het begrip over rekenen met negatieve getallen?

Tellen op de vingers

Het aanleren van (natuurlijke) getallen en simpele rekenkundige bewerkingen begint al op jonge leeftijd. Een rijtje telwoorden – soms gegeven als een rijmpje of versje – wordt gekoppeld aan een aantal dingen; bijvoorbeeld blokjes of vingers. Het rijtje wordt doorlopen en als de objecten op zijn, weet een kind het gevraagde getal. Het getal is in dit stadium nog geen *object* maar wordt gekoppeld aan een *proces* (tellen). Dit is goed te zien in het optellen van twee en drie met behulp van vingers. Zo worden de sommetjes $2 + 3$ en $3 + 2$ niet van elkaar onderscheiden; je begint weer vanaf één te tellen.

Na verloop van tijd worden de getallen op zichzelf staande objecten die zich verhouden tot andere getallen. Er ontstaat een netwerk van getallen en getalrelaties. Deze getalrelaties worden steeds verder uitgebreid en spelen later een cruciale rol bij rekenen.^[1] Het voordeel van de objectvorming in combinatie met



figuur 1

$2 + 3 = 5$ en $3 + 2 = 5$ worden niet van elkaar onderscheiden; De getallen worden nog niet als object herkend.

getalrelaties is de grotere flexibiliteit bij rekenen. Wanneer gevraagd wordt naar de uitkomst van de reksom $8 + 6$, kan het bijvoorbeeld helpen om eerst 'naar tien te rekenen', dus $8 + 6 = 8 + 2 + 4 = 10 + 4 = 14$. Deze denkstappen gaan na verloop van tijd snel en het aantal verschillende manieren om een som handig aan te pakken breidt zich bij de sterkere rekenaars constant uit.^[2]

Rekenen met negatieve getallen

Bij het rekenen met negatieve getallen speelt deze proces-object-dualiteit een cruciale rol. Het aftrekken en optellen is het proces, terwijl het negatieve getal zelf (inclusief het minteken) het object is. Zo hoort bij de opgave $7 - -3$ de eerste min bij het proces en de tweede bij het object.

Om het verschil tussen proces en object duidelijk te maken, wordt door wiskundeleraars vaak een context gebruikt. We kunnen drie soorten contexten onderscheiden: een toepassingscontext, een aanleercontext en een motiverende context. Een bepaalde context kan meer dan één van deze soorten tegelijk zijn.

Contexten

Aanleercontext heeft als functie om het wiskundig concept aan te leren. De aanleercontext is vaak breder dan een toepassingscontext, zodat meer situaties in deze aanleercontext kunnen worden besproken. Het creëert als het ware een 'omgeving' waarin het concept kan worden aangeleerd. Denk aan de balans bij de balansmethode.

Toepassingscontext heeft als functie om het wiskundig concept toe te passen. De toepassingscontext is vaak specifieker, bijvoorbeeld een hangbrug bij parabolen of de lift bij negatieve getallen.

Motiverende context heeft als functie om de leerlingen te motiveren. Dit is meer persoonlijk en afhankelijk van de praktijksituatie.^[3]

Bekende en minder bekende aanleercontexten bij het rekenen met negatieve getallen zijn:

- de heks en de ketel;
- de luchtballon en de zandzakken;
- het plusmin-mannetje;
- pijlen (op een getallenlijn);
- tellers of 'counters'.

Contexten

De meest gebruikte aanleercontext bij negatieve getallen is 'de heks en de ketel': een heks beschikt over koude (negatieve getallen) en warme blokjes (positieve getallen) en haalt deze uit de ketel (aftrekken) of stopt ze juist in de ketel (optellen). Bij dit voorbeeld lijkt er een duidelijke scheiding tussen proces en object te worden aangeleerd, maar toch kleven er een paar bezwaren aan deze aanleercontext.

Ten eerste een inhoudelijk bezwaar, zie hiervoor het voorbeeld uit *Moderne Wiskunde* in figuur 2.

Het voorbeeld rept over zes koude blokjes, oftewel 6×-1 blokje. En niet over één koud blok van -6 . De optelling bij dit voorbeeld moet dus zijn: $-7 + 6 \times -1 = -13$. De handeling van de heks komt hiermee niet overeen met de uitgewerkte som. Een expert die gewend is aan het rekenen met negatieve getallen zal hier snel overheen stappen, maar voor een leerling kan deze dubbelzinnigheid wel degelijk voor verwarring zorgen. Dit zou opgelost kunnen worden door een heks te laten werken met grote en kleine blokken. Al is het dan de vraag of de aanleercontext zijn doel niet voorbijsticht.

Theorie

Als je koude of warme blokjes in de ketel doet, kun je dat als een **optelling** opschrijven.

Voorbeeld

De begintemperatuur is $-7\text{ }^{\circ}\text{C}$.
Als de heks er zes koude blokjes bij doet, dan daalt de temperatuur.
De eindtemperatuur wordt $-13\text{ }^{\circ}\text{C}$.
De volgende optelling hoort hierbij.

$$\begin{array}{ccc} \text{begin-} & & \text{eind-} \\ \text{temperatuur} & & \text{temperatuur} \\ \uparrow & & \uparrow \\ (-7) + \overset{\text{erin koude blokjes}}{(-6)} = -13 \end{array}$$

figuur 2 uit *Moderne Wiskunde*, deel 1B vmbo-gt, 12^e editie

Een tweede bezwaar is het theoretische karakter van deze context: het is onmogelijk om deze situatie in de klas fysiek uit te voeren, laat staan om het leerlingen zelf fysiek uit te laten voeren. Je kunt hooguit laten zien met behulp van een toneelstuk of applet. Hierdoor blijft het een context die zich op het bord of op papier afspeelt en waarbij de leerlingen het proces niet als zodanig kunnen ervaren. Tot slot zie je dat docenten deze context vermijden omdat het niet echt meer van deze tijd is. Bij de andere aanleercontexten schuilen vergelijkbare of andere bewaren. En hoe zit het met de toepassingscontexten zoals temperatuur, liften en schulden? Over het algemeen ontstijgen deze contexten niet de abstractie en zijn deze gekunsteld als het gaat om de lastigste elementen bij dit concept, bijvoorbeeld: de temperatuur daalt met -5 graden, de lift daalt -3 verdiepingen. Het vermogen van iemand neemt toe omdat een schuld wordt kwijtgescholden. Oftewel het onderscheid tussen het proces en het object is voor leerlingen niet duidelijk en de context is niet toereikend om dit inzicht te bieden.

Spel

Plusminus is een spel binnen de Giraf-reeks^[5] van Epsilon Uitgaven. Het is de speelse tegenhanger van de meer bekende Zebra-reeks, maar dan gericht op de onderbouw havo/vwo en vmbo.

Doel: Door de kaarten bij elkaar op te tellen probeert de speler de som van zijn vier kaarten zo dicht mogelijk bij de nul te krijgen.

Elke speler krijgt vier gesloten kaarten en legt deze

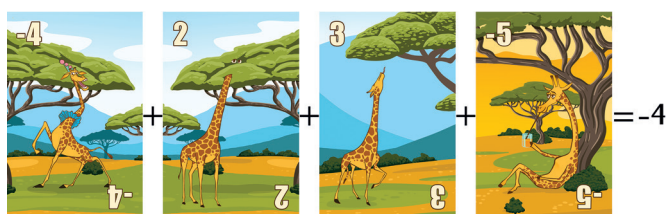


figuur 3

naast elkaar voor zich neer. Elke speler bekijkt alléén zijn buitenste twee kaarten en onthoudt deze getallen. De stapel met overgebleven kaarten ligt gesloten in het midden: de gesloten pakstapel. De jongste speler begint en pakt een kaart van de stapel en bekijkt deze. De speler kan kiezen om de gekozen kaart te ruilen met één van de kaarten die voor hem ligt of open terug te leggen naast de gesloten kaarten. Geruilde kaarten worden ook open naast de pakstapel gelegd. Hierdoor ontstaat een open pakstapel. De volgende speler mag de open kaart pakken of een kaart van de gesloten stapel. Als een speler denkt dat hij dichtbij nul zit (door de kaarten bij elkaar op te tellen), klopt hij op de tafel. De speler met de score het dichtst bij nul wint!

Plusminus

Vanuit de bezwaren op de bestaande contexten, is het idee ontstaan om een nieuwe aanleercontext te ontwikkelen waarbij de aangegeven bezwaren zoveel mogelijk getackeld worden. Dit heeft uiteindelijk geresulteerd in het kaartspel *Plusminus*, bestaande uit speelkaarten met hierop positieve en negatieve getallen (-5 t/m 5). Leerlingen krijgen een viertal kaarten die opgeteld een (tussen)score geven. Door tijdens het spel kaarten weg te leggen (aftrekken) of kaarten toe te voegen (optellen) ontstaan er nieuwe (tussen)scores.



figuur 4 Voorbeeld van een (tussen)score

Het spel heeft een aantal voordelen ten opzichte van de heks: de getallen zijn daadwerkelijke objecten, -4 is niet vier koude blokjes, maar een kaart met -4 erop. Als eventueel

nadeel kan worden opgemerkt dat de leerlingen dus bekend moeten zijn met negatieve en positieve getallen, want deze worden niet gekoppeld aan 'koud' en 'warm'.

De leerlingen ervaren zintuigelijk door wegleggen en ontvangen dat er iets weggaat (aftrekken) of iets bij komt (optellen). Dit sluit aan bij de theorie van 'embodied cognition', die stelt dat cognitie niet los gezien kan worden van waarnemen en handelen, maar juist de cognitie faciliteert.^[4] Bij de heks ontbreekt deze 'belichaming'.

Door de spelvorm kan het voorkomen dat -5 en 5 in één viertal zitten. Leerlingen zien dit snel als getallen die 'elkaar opheffen'. Het concept van 'tegengestelde getallen' wordt op deze manier informeel ontwikkeld.

Het doel is uiteindelijk dat leerlingen realiseren wat de principes zijn achter het samenspel van het proces en de objecten, bijvoorbeeld dat de som van het viertal kaarten toeneemt als je een kaart met een negatief getal weglegt (min en min is plus).

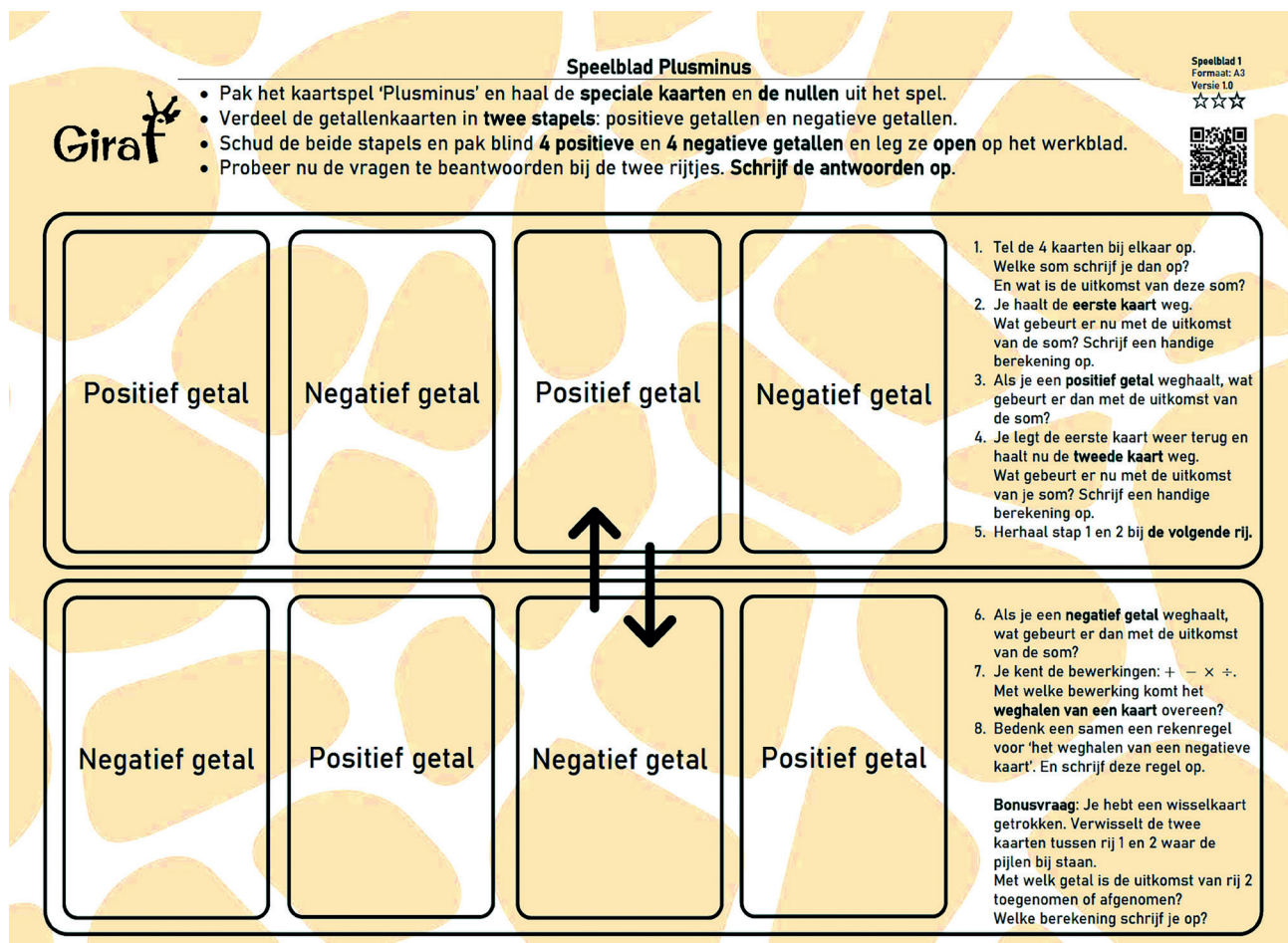
Het spel mathematiseren

Vanzelfsprekend dient er een vervolg gegeven te worden aan het spelen van het spel, waarbij de leerlingen actief worden gestimuleerd om te verwoorden wat er nu precies voor rekenkundige concepten achter het spel zitten. Het didactische model, waarbij de leerling van spelen (concreet) via voorstellen, naar formeel handelen (abstract) gaan, wordt beschreven in het handelingsmodel.^[6] Om dit handelingsmodel vorm te geven, zijn werkbladen ontwikkeld waarmee leerlingen op een andere wijze met de spelkaarten aan de slag kunnen gaan.

Het doel hierbij is de handelingen te expliciteren en te verbaliseren: 'het wegpakken staat dus voor (het proces van) aftrekken'. Waardoor er uiteindelijk begrip ontstaat over waarom bijvoorbeeld 'min en min' nu eigenlijk 'plus' is. Wanneer uit deze activiteit kan worden geconcludeerd dat er (meer) begrip is ontstaan voor deze concepten, kan er worden overgegaan naar de 'formele fase', waarbij leerlingen bijvoorbeeld uit de methode opgaven gaan maken met getallen die niet op de speelkaartjes staan (zoals hogere, lagere, decimale en gebroken getallen) en hierin vaardigheid ontwikkelen, zodat het spelen van het spel overbodig wordt voor het begrip.

Conclusie

Met de ontwikkeling van het spel *Plusminus* is geprobeerd een sterkere scheiding aan te brengen tussen het proces en het object bij het rekenen met negatieve getallen. Hierbij wordt de leerlingen de ruimte gegeven om het proces expliciet te laten ervaren, net zoals jonge kinderen bijvoorbeeld vingers gebruiken om (op) te tellen én worden negatieve getallen op zichzelf staande objecten die zich



figuur 5 Voorbeeld van één van de speelbladen

verhouden tot andere getallen. Door de spelvorm vervolgens via de werkbladen te koppelen aan gewone rekenopgaven, krijgen negatieve getallen een betekenisvolle plaats in het mentale rekenschema van de leerlingen. Dit schema kan vervolgens makkelijker worden uitgebreid naar het vermenigvuldigen van negatieve getallen.

Noten

- [1] Van Stiphout, I. (2019). Wat bedoelen ze toch met... proces-object? *Euclides*, 96(6), 4-9.
- [2] Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116-140.
- [3] Faes, T., Goris, T., Konings, T., Krabbendam, H., Monquill, A., & Staal, H. (2011). *Het leren van wiskunde - Leren effectief lesgeven*. Uitgeverij Ten Brink.
- [4] Alberto, R., & Bos, R. (2020). Het Flzier gericht

op... Embodied cognition in wiskundeonderwijs. *Euclides*, 95(5), 4-6.

- [5] zie: <https://www.epsilon-uitgaven.nl/giraf-reeks>
- [6] Ecent/Elwier. (2024, april 11).

Handelingsmodel. Opgehaald van Lerarenopleidingen Science en Wiskunde/ Rekenen: <https://elbd.sites.uu.nl/2019/09/11/handelingsmodel/>

Over de auteurs

Sibren Stienstra is lerarenleider wiskunde aan de NHL Stenden. E-mailadres: sibren.stienstra@nhlstenden.com
Paul Durenkamp is lerarenopleider wiskunde aan de NHL Stenden en de RUG. Hij is tevens bestuurslid van de NVWV. E-mailadres: p.durenkamp@nvwv.nl

Interview met Léon van der Heiden, vmbo-docent

Hoe kan ik leerlingen motiveren?

Léon van der Heiden is twintig jaar werkzaam als docent wiskunde. Hij geeft nu les op de GSG Leo Vroman in Gouda, waar sinds tien jaar een nieuwe koers wordt gevaren met domeinonderwijs.

Léon heeft lesgegeven op vmbo, havo en vwo, maar de laatste vijftien jaar vooral vmbo-tl. We spraken Léon over zijn ervaringen in het vmbo.

Wat motiveerde jou om wiskundeleraar te worden?

‘Dat is een beetje gek gegaan. Ik wist niet wat ik wilde. Ik had een vwo-diploma en het voelde als een logische stap om naar de universiteit te gaan, maar je kunt je afvragen of dat zo was. Ik ging Spaans studeren, maar dat ging niet goed. Ik wilde vervolgens iets kiezen waar ik wat mee kon en waarvan ik wist wat het was. Zo kwam ik bij de lerarenopleiding. Ik wilde iets doen wat nodig voelde in de maatschappij, of betekenisvol voelde. Ik heb dus eerst voor docent en daarna pas het vak gekozen. Ik heb mijn cijferlijst bekeken en ik was het best in wiskunde.’



Léon aan het werk met leerlingen.

Je geeft les op de GSG Leo Vroman waar ze tien jaar geleden het onderwijs opnieuw hebben vormgegeven vanuit de overtuiging “dat leerlingen beter leren als ze zelf keuzes kunnen maken over hoe ze graag willen leren”. Hoe voeren jullie deze visie in de praktijk uit?

‘Ik probeer zoveel mogelijk keuzes aan te bieden op het moment dat het kan. We hebben instructielessen en domeinlessen. Tijdens de instructielessen is de docent

**“HET AANBIEDEN VAN KEUZES
MOTIVEERT, WAARDOOR LEERLINGEN
BETER AAN DE SLAG GAAN.”**

leidend, maar in de domeinlessen kunnen leerlingen zelf kiezen hoe ze de leerstof verwerken. Ze kunnen bijvoorbeeld een quiz maken, opdrachten uit het boek maken of er is ander oefenmateriaal. Het aanbieden van keuzes motiveert, waardoor leerlingen beter aan de slag gaan. Voor de instructielessen en domeinlessen hebben we aparte ruimtes. Een domeinruimte is groter dan een instructieruimte en er kunnen meer dan dertig leerlingen zitten. Er is geen digibord, soms wel een klein whiteboard voor korte aankondigingen. We zijn aan het experimenteren met het meubilair. Er zijn verschillende soorten tafels en stoelen die uitnodigen tot andere werkvormen. Er zijn bijvoorbeeld hoge en lage tafels. Voor sommige leerlingen is het heel fijn als ze kunnen afwisselen tussen zitten en staan.’

Wat spreekt jou aan in de manier van werken op de GSG Leo Vroman?

‘Ik ben zelf niet afgekomen op de nieuwe visie. Toen ik een rondleiding kreeg van de rector tijdens de sollicitatie, vond ik het wel meteen interessant. Ik wilde af van het traditionele lesgeven. Niet voor mezelf, maar ik merkte dat het niet meer van deze tijd is om een klas te hebben met een docent ervoor die vooral aan het uitleggen is en dat de leerlingen het huiswerk thuis moeten maken. Ik wilde wel proberen of het op een andere manier zou kunnen. Als leerlingen daardoor zelfstandiger zouden worden vond ik

dat van meerwaarde. Daar wilde ik mee aan de gang.'

Welke eigenschappen zijn belangrijk voor een (vmbo-) docent?

'Iedereen doet het op z'n eigen manier, maar je moet twee dingen goed kunnen. Aan de ene kant moet je duidelijk zijn, kaders stellen en regels handhaven. Aan de andere kant moet je contact maken. Het begint altijd met het contact. Wat veel starters verkeerd doen is dat ze vooral denken dat ze duidelijk en streng moeten zijn. Dat krijgen ze ook te horen van oudere collega's, voor wie dat misschien wel werkt. Ze vergeten goed contact te maken.'

Je hoort dat het moeilijk is om aan bevoegde wiskunde-docenten te komen. Hebben jullie dat probleem ook?

'Absoluut! We hebben een structureel tekort. Wat je in de krant leest is waar. Het is moeilijk om het niveau te behouden. Wij hebben veel zzp'ers. Als je een zzp'er bent, kom je alleen maar een probleem oplossen. Ze zijn minder betrokken en ze zijn na een jaar weer weg. Je bouwt niets op. Daarnaast werken we met zij-instromers en starters. Dat is prima, maar die moeten goed begeleid worden en daar is ook tijd voor nodig.

Wij werken ook met onderwijsassistenten. De bedoeling is dat de assistent tijdens de les helpt, zodat je bijvoorbeeld verlengde instructie kunt geven. Ook kan een onderwijs-assistent een zwakke leerling die moeilijk aan de slag gaat, helpen met het doornemen van een opgave. Dat werkt heel goed. Helaas gebeurt dat te weinig en dat heeft te maken met krapte. We hebben soms op één dag in de week geen conciërge, ook vanwege tekorten, en dan neemt de onderwijsassistent die taken over.'

Hoe wordt wiskunde gegeven op jullie vmbo?

'Wij hebben lessen van 45 minuten. In de brugklas en de vierde klas hebben ze vier uur wiskunde en in klas 2 en 3 drie uur. Dat is best veel. Wekelijks zijn er twee domeinlessen. Tijdens de instructielessen krijgen ze uitleg en in de domeinlessen werken ze aan hun weektaak. Voor de meeste leerlingen is dat genoeg voor wiskunde. Het idee is eigenlijk: je hebt geen huiswerk.'

Werken jullie ook vakoverstijgend?

'Dat proberen we te doen. Op dit moment zijn we bezig met vakoverstijgend rekenen. We willen bepaalde vaardigheden op één manier uitleggen en doen. Die wens is er al heel lang, maar blijkt lastig te realiseren. Je moet los durven komen van de methode.

Verder hebben we Vromandagen, vier of vijf per jaar, die bedoeld zijn voor vakoverstijgende projecten. We zijn

bijvoorbeeld met de bovenbouw voor biologie en wiskunde een keer naar Leiden gegaan en hebben Naturalis en museum Boerhaave bezocht.

In het PTA staat verder dat je een geïntegreerde wiskundige activiteit moet doen. Ik heb dat gedaan door samen te werken met gym. Ze moesten tijdens sportieve activiteiten metingen verrichten, die verwerken in diagrammen en eraan rekenen.'

Wat doe je nu anders dan aan het begin van je carrière?

'Ik ben steeds meer het belang van lesvoorbereiding gaan zien. Als je heel ervaren bent, zal het de leerlingen niet opvallen als je niet voorbereid bent. Maar als je voorbereidt, ben je al met de stof bezig en kun je beter anticiperen op vragen die er zijn. Je moet nadenken over goede voorbeelden en non-voorbeelden over de stof die je gaat uitleggen. Welke werkvorm gebruik je, waarom, hoe gaat dat dan?

“LEERLINGEN VONDEN DE CARROUSEL MET WISKUNDE- EN ECONOMIE-OPDRACHTEN SUPERLEUK EN VROEGEN: GAAN WE DIT VAKER DOEN?”

Iets anders wat is veranderd is de examinering. Door het fraudegeval in Maastricht, is er meer controle. Scholen bleken niet te doen wat er in het PTA staat. Schoolexamens werden veel gebruikt om te trainen voor de centrale examens. De schoolleiding wilde het school-examenprogramma herzien en ik heb dat mogen doen. We willen niet meerdere keren hetzelfde toetsen op dezelfde manier. Ik doe een mondeling als schoolexamen, onder andere omdat het een andere toetsvorm is. Dan ga ik 20 minuten zitten met een leerling en die krijgt 20 minuten voorbereidingstijd. Ik stel allerlei vragen over de vaardigheden. Het grote verschil met schriftelijk toetsen is dat je kunt vragen om verduidelijking. Ze mogen er ook bij schrijven en tekenen.

Afgelopen drie jaar heb ik allerlei vragen bedacht. Die heb ik in een wiel gestopt (*Wheeldecide*). Het wiel draait en dan komt er een vraag uit waar we het over hebben. Dit jaar stap ik ervan af, omdat het door de willekeur toch niet evenwichtig was. Dat heb ik geprobeerd te verbeteren door allerlei categorieën te maken, maar het werd te ingewikkeld.

>

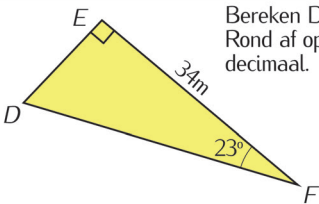
Dit jaar heb ik de onderwerpen op kaartjes geschreven en bedenk ik er ter plekke vragen bij.
Ik ben altijd op zoek naar hoe ik leerlingen kan motiveren. Leerlingen kunnen bij mij een stempel halen als ze hun weektaak af hebben. Als ze genoeg stempels hebben, kunnen ze tijdens het mondeling een van de onderwerpen kiezen.'

Wat vind jij belangrijk om je leerlingen mee te geven?
'Dat wiskunde gaat over logisch denken, je traint in stappen een probleem op te lossen en je leert de wereld beter te begrijpen. Ik zie wiskunde als algemene ontwikkeling. Ik behandel nu negatieve getallen. Dat moeten we allemaal begrijpen, want je krijgt te maken met negatieve getallen in de wereld om je heen.
Verder vind ik belangrijk: hoe ga je met elkaar om? Wat zeg je wel, wat niet? Hoe ben je een leuker mens voor de mensen om je heen?'

Is de populatie leerlingen veranderd in de afgelopen twintig jaar?
'Ja. Ik zie dat het niveau van taal en rekenen enorm is gedaald en daarmee ook de executieve vaardigheden. Ook

de motivatie is minder. Als je ze één-op-één spreekt willen ze wel, maar in een groep krijgen ze het niet voor elkaar. Qua gedrag lijken de leerlingen van nu een beetje achter te lopen. In een derde klas zie ik gedrag dat je normaal in een eerste klas ziet. In de eerste klas die ik nu heb zijn veel leerlingen traag, taalzwak en speels. Spelvormen werken goed, maar je kunt niet alles in een spel gieten. Voor de motivatie is het heel goed, maar het werkt minder voor blijvend leren.'

Op welke les ben je trots?
'Met een collega economie heb ik twee klassen door elkaar in een carrouselvorm wiskunde en economie-opdrachten laten doen. We deden in de carrousel van 90 minuten een kwartetspel met viertallen, maar ook opdrachten in tweetallen of individueel. Leerlingen vonden het superleuk en vroegen: Gaan we dit vaker doen? Het was vooral de afwisseling die ze leuk vonden.
Iets anders waar ik trots op ben is de leerdoelencheck die ik elke week doe in de vierde klas. Ik maak een formulier met drie leerdoelen. Aan elk leerdoel is een korte opdracht gekoppeld. Van de drie leerdoelen sluit er één aan bij het hoofdstuk dat we behandelen, maar de andere zijn eerder aan de orde geweest. Ze doen de leerdoelen-check in principe alleen, maar als ze er niet uitkomen, mogen ze het samendoen. De afspraak is dan dat ze een uitroepteken zetten in de kantlijn. Dan zien ze later dat ze er wel uitkwamen, maar niet alleen. Ik houd bij hoe ze het maken.'

Leerdoelen check			Naam:
leerdoel	opgave	Welke opgave uit het boek kan ik oefenen?	
Je kunt werken met een exponentiële formule.	Sten heeft op 1 januari 2024 op zijn bankrekening 650 euro. Hij krijgt 2,1% rente per jaar. Hoeveel heeft hij op zijn rekening op 1 januari 2033?	blz 57 opg v8, blz 58 opg 1, boek B	
Je kunt hoeken en zijden berekenen met sin, cos, tan.	 Bereken DF. Rond af op één decimaal.	T-1 t/m T-4 blz 30, 31 boek B	
Je kunt koershoeken meten en berekenen.	 Fred vliegt van Swansea naar Waterford. Teken en meet de koershoek van Swansea naar Waterford.	opg 2 blz 89 boek B	

Leerdoelencheck

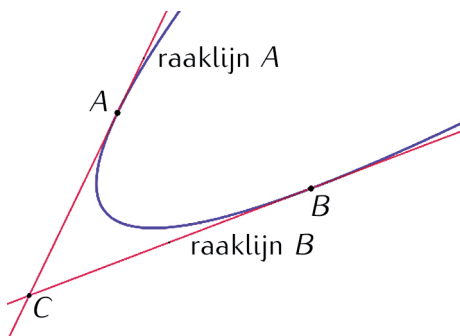
Over de interviewer en geïnterviewde

Liesbeth Coffeng is eindredacteur van *Euclides* en ze geeft wiskunde op het mbo (Laboratoriumtechniek) en hbo (Biomedische research). E-mailadres: l.coffeng@nvvw.nl

Léon van der Heiden is docent wiskunde op GSG Leo Vroman in Gouda. Hij is lid van de werkgroep vmbo van de NVvW. E-mailadres: hdn@gsgleovroman.nl

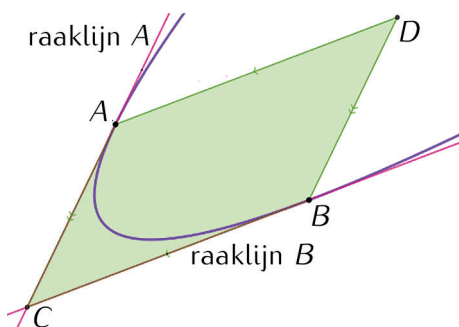
Een scheve parabool kan prima zonder algebra

In *Euclides* 98-7, 99-2 en 99-3 laat Martin Kindt zien dat je meer kunt met parabolen dan de algebraïsche voorstelling die in het onderwijs domineert. In *Euclides* 99-5 gaat Jan Otto Kranendonk op zoek naar vergelijkingen voor de scheve parabool. Zijn insteek zijn parameter-vergelijkingen en rotaties. Op de nvww-site plaatste Rob van Oord^[1] zijn ideeën over parabolen. In dit artikel een meetkundige aanpak voor scheve parabolen. Waarschuwing vooraf: deze bijdrage is alleen geschikt voor mensen die heel precies raaklijnen kunnen tekenen.



figuur 1

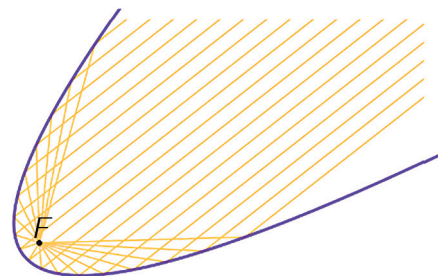
Stel dat een scheve parabool gegeven is met daarop twee willekeurige punten A en B , zie figuur 1. Vraag is om de top T te construeren, evenals brandpunt F , richtlijn r en de symmetrieas. Een assenstelsel is niet gegeven en ook niet nodig. Uitgangspunt is dat we in staat zijn om raaklijnen te trekken aan die parabool en dat we evenwijdige lijnen kunnen trekken. De gevraagde constructie blijkt mogelijk te zijn omdat de raaklijnen in die punten A en B twee zijden van een parallellogram zijn waarvan de diagonaal evenwijdig loopt aan de symmetrieas. Via die diagonaal kun je dus de symmetrieas vinden, zie figuur 2.



figuur 2

In deze bijdrage kies ik voor een ‘natuurkundige’ definitie van een parabool. Ik maak gebruik van de spiegelwet: de hoek van inval is gelijk aan de hoek van uitval. Natuurkundig gezien is het kenmerk van een parabolische spiegel dat de weerkaatsing van alle lichtstralen die vanuit het brandpunt vertrekken samen een bundel evenwijdige uitvallende lichtstralen vormen. Andersom, van een bundel invallende lichtstralen evenwijdig aan de hoofdas van de parabolische spiegel komen na weer-spiegeling alle uitvallende lichtstralen samen in het brandpunt.

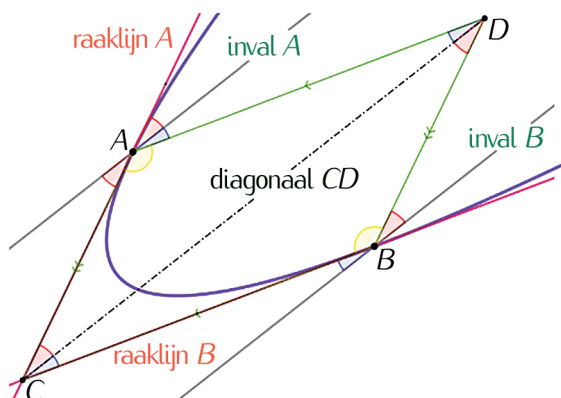
Een parabool is de kromme waar voor ieder punt op de kromme er een invallende lijn bestaat door het brandpunt van die parabool en het betreffende punt die aldaar een hoek van inval maakt met de raaklijn in dat punt die even groot is als de hoek van uitval aan dezelfde kant van die raaklijn in datzelfde punt met een lijn van uitval die evenwijdig is aan alle andere lijnen van uitval die horen bij alle andere punten op die parabool, zie figuur 3.



figuur 3

Gegeven is een parabool met zijn symmetrieas en brandpunt. Te bewijzen is dat voor ieder paar punten A en B op de parabool met raaklijnen a en b met hun snijpunt C de lijnstukken AC en BC de zijden zijn van een parallellogram $ABCD$ waarvan de diagonaal CD evenwijdig

loopt aan de symmetrieas van die parabool. Zodra deze bewering bewezen is, kan de constructie van het parallellogram gebruikt worden om een lijn evenwijdig aan de symmetrieas te construeren, om de lijnen van inval en uitval te construeren, om het brandpunt F en de top T te construeren en tot slot de richtlijn r .



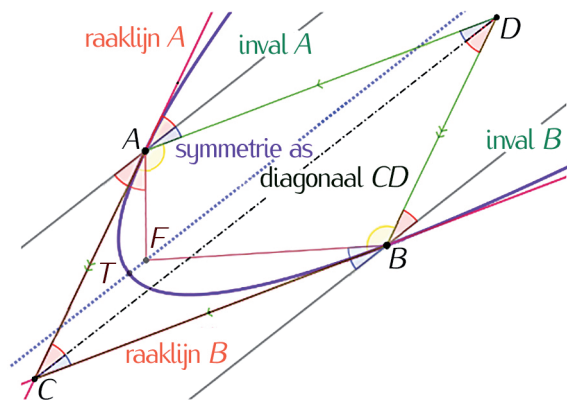
figuur 4

In figuur 4 zijn de parabool met de punten A en B en de diagonaal getekend. Ook zijn de raaklijnen getrokken en hun snijpunt C , evenals de lijnen van inval. De lijnen zijn evenwijdig aan de symmetrieas en maken hoeken α en β met hun raaklijnen. Ook zijn een lijn door punt A , evenwijdig aan de raaklijn door B , en een lijn door punt B , evenwijdig aan de raaklijn door A getrokken. Die twee lijnen snijden elkaar in een punt D . Zo ontstaat een figuur ingesloten door twee paar evenwijdige lijnen en dat is per definitie een parallellogram. Cruciaal is nu de vraag of de diagonaal CD samenvalt met de lijn c door punt C evenwijdig aan de lijnen van inval. Daarom onderzoeken we nu de ligging van het snijpunt van die lijn c met lijn AD en de ligging van het snijpunt van die lijn c met lijn BD . Die snijpunten noemen we D_a en D_b . Voor een leerling mag het logisch zijn dat die twee samenvallen met punt D , maar in de wiskunde is iets pas waar als het bewezen is. Vanwege de evenwijdigheid is hoek α , de hoek tussen de raaklijn en de lijn van inval in punt A , even groot als $\angle ACD_a$ en ook even groot als de hoek tussen de lijn van inval in punt B en lijn BD en dus ook even groot als $\angle BD_bC$. In figuur 4 is hoek α vijf keer getekend. Evenzo $\beta = \angle BCD_b = \angle CD_aA$. Conclusie is dat in de driehoeken ACD_a en BD_bC de overeenkomstige hoeken even groot zijn. Nu moeten we nog aantonen dat de zijden even lang zijn. Evenwijdige lijnstukken tussen evenwijdige lijnen zijn even lang.^[2] Dus $BD = AC = BD_b$.

Evenzo $BC = AD = AD_a$. Gevolg is dat de driehoeken ACD_a en BD_bC congruent zijn en dus is punt $D = D_a = D_b$. Conclusie is nu dat diagonaal CD evenwijdig loopt aan de symmetrieas en de lijnen van inval, hetgeen te bewijzen was.

In de tekening is ervoor gekozen om de punten A en B op twee verschillende parabooltakken te tekenen. De GeoGebra animatie^[3] laat zien dat A en B evengoed op dezelfde parabooltakken mogen liggen.

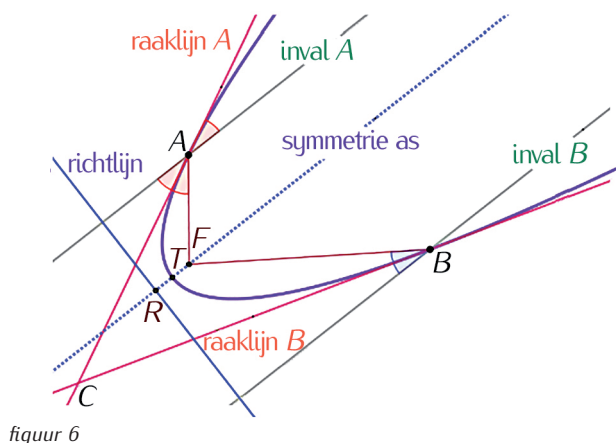
Terug naar de opdracht: gegeven een scheve parabool, construeer top T , brandpunt F , richtlijn r en de symmetrieas. Zoals hierboven is uitgelegd, geeft de constructie van het parallellogram $ABCD$ de diagonaal CD die evenwijdig is aan de lijnen van inval en uitval. Die lijnen van inval kunnen nu dus getrokken worden. De hoeken van inval en uitval zijn geconstrueerd als de hoeken met de diagonaal in de punten C en D . Dus kunnen de lijnen van uitval richting het brandpunt F getrokken worden. Het snijpunt is het gezochte brandpunt F . Top T ligt nu op de parabool als snijpunt met de lijn door het brandpunt F evenwijdig aan de diagonaal CD , zie figuur 5.



figuur 5

De richtlijn r staat loodrecht op de symmetrieas en gaat door punt R , de spiegeling van brandpunt F in top T , zie figuur 6.

In principe is het dus mogelijk om bij een scheve parabool het brandpunt en de top te construeren. Voor het bewijs volstaat onderbouw meetkunde met F - en Z -hoeken, gelijkvormigheid en congruentie. Voor het inzicht deed ik een beroep op een stukje natuurkunde. Het bewijs zullen leerlingen niet zelf verzinnen en ook is het niet nodig om het concept van de richtlijn te introduceren. Aardig is wel de wedstrijd wie in de klas het meest zorgvuldig die



figuur 6

raaklijnen kan tekenen. Mochten dat de leerlingen zijn die het slechtst zijn in algebra, dan is dat mooi meegenomen.

Praktisch probleem is dat we de kunst van het tekenen, en dan vooral van het perfect tekenen van een raaklijn verleerd lijken te zijn, maar zeg zelf, hoe recht zijn onze lijnen op het digibord en hoe rond zijn onze uit de hand getrokken cirkels en hoe precies onze parabolen?

Noten

- [1] De blogs van Rob van Oord kun je lezen op <https://www.nvvw.nl/2022/09/wiskunde-bij-de-les/>
- [2] Zie bijvoorbeeld propositie 33 en 34 uit het eerste boek van Euclides: https://fransvanschooten.nl/fvs_euclides.htm#p1-33
- [3] De animatie staat in de GeoGebra Tube: <https://www.geogebra.org/m/y8mghyct>

Over de auteur

Henk Hietbrink is docent wiskunde bij KSG De Breul te Zeist en hij is beheerder van de website www.fransvanschooten.nl. Zijn streven is om in de middelbare school wiskunde een balans te vinden tussen algebra, meetkunde en statistiek. E-mailadres: hietbrink.h@planet.nl

(advertentie)

www.epsilon-uitgaven.nl

Giraf-reeks



Zebra-reeks



Ε Epsilon Uitgaven

Giraf-reeks: €7 of €8 per deel
Zebra-reeks: €10 per deel
 12% korting bij 5 delen of meer

Achtdimensionale puntenpatroon zonder lijnen

Onderzoekers van Google DeepMind beweren de eerste wiskundige ontdekking te hebben gedaan met behulp van een AI-chatbot. Ze bouwden een factchecker die nutteloze output van de chatbot filtert. Op die manier vonden ze een patroon van 512 punten in acht dimensies waarbij geen drie punten een rechte lijn vormen.

Bron: *NewScientist*, nr. 119, maart 2024

Decimale punt al in 15^e eeuw

sensibilis. Et simili si accideret diuise. Exempli gratia. Volo in se multiplicare pedes. 92. Vnde 9. alim^{to}. o. sda. 9. b. scribi figuras omnia. 93. 92909. que in se multiplicare producent. 8. 6. 3. 2. 0. 8. 2. 2. 8. 1. nua g. quot figure sunt in nuz multiplicandem. Vltra. pedes. 1. 909. que sunt fractiones et tres nua. et totidem sunt in nua multiplicanda. 92. idem sunt. In utraque igitur erunt sex figure et ideo

figuur 1 *Compositio instrumenti*, Giovanni Bianchini, Biblioteca Estense di Modena

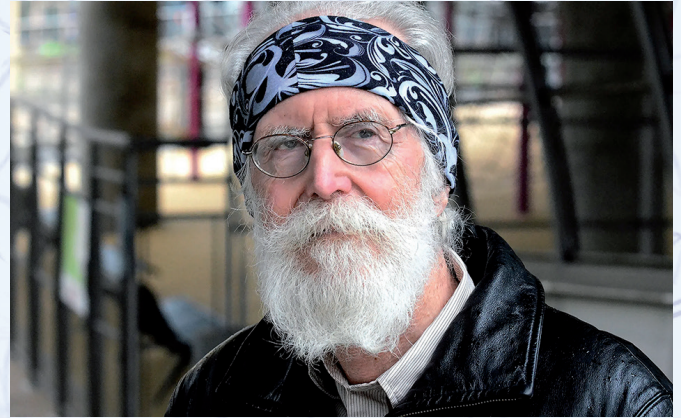
In de jaren 1440 gebruikte de Italiaan Giovanni Bianchini een decimale punt om een tiendelige breuk te noteren. Historici dachten tot voor kort dat de decimale punt of komma pas uit de late zestiende eeuw dateerde. Maar Bianchini noteerde hem dus al anderhalve eeuw eerder, in sterrenkundige en astrologische teksten. Deze ontdekking heeft Glen Van Brummelen, wiskundehistoricus aan de Trinity Western University in Langley, Canada, onlangs gepresenteerd in *Historia Mathematica*. De ontdekking betekent niet dat Bianchini de tiendelige breuk uitvond, want het principe was in Azië en het Nabije Oosten al eeuwen eerder in gebruik. Maar voor zover bekend was hij dus wel de eerste die de breuk handig met een punt noteerde.

Bron: *Historisch Nieuwsblad* 04-2024

Abelprijs voor Michel Talagrand

De Abelprijs, de 'Nobelprijs voor de wiskunde', genoemd naar de Noorse wiskundige Niels Hendrik Abel (1802-1829), wordt dit jaar toegekend aan de Fransman Michel Talagrand. Hij wordt geëerd voor zijn baanbrekende bijdragen op het gebied van kansrekening en functionele analyse.

Talagrand is vooral bekend geworden om zijn resultaten over kansverdelingen in meerdere dimensies. Daarbij kan bijvoorbeeld gedacht worden aan een pensioenfonds dat



figuur 2 Michel Talagrand

op diverse manieren belegt en deze beleggingen permanent herwaardeert op basis van de behaalde resultaten. Zijn werk heeft met name veel toepassingen in de natuurkunde.

De manier waarop Talagrand onderzoek deed is bijzonder. Hij besteedde relatief veel aandacht aan het echt goed begrijpen van eenvoudige problemen. Ook de manier waarop hij omgaat met prijzen is bijzonder. Na het winnen van de Shaw prize nodigde hij op zijn website medewiskundigen uit om via het oplossen van puzzels geldbedragen te winnen onder het motto: 'Word rijk met mijn prijzen'.

Bron: *WiskundE-brief* 24 maart 2024 en *NewScientist*

Priemgetal van 32.114 cijfers

Shyam Sunder Gupta, een gepensioneerd ingenieur van de Indiase Spoorwegen en auteur van boeken met wiskundepuzzels, heeft in april berekend dat het getal beginnend met de cijfers 23456789, gevolgd door 3567 keer het rijtje 123456789 en daarna eindigend met 123, een priemgetal is. Dat het echt een priemgetal is, moet nog worden bevestigd door een onafhankelijk algoritme, maar de ervaring leert dat zo iets slechts een formaliteit is. Het getal maakt deel uit van de zogeheten Smarandache getallenrij, die wordt geconstrueerd door de cijfers 1 tot en met 9 te herhalen als volgt: 1, 23, 456, 7891, 23456, 789123, 4567891, Het eerste getal heeft 1 cijfer, het tweede getal 2 cijfers, het derde getal 3 cijfers, enzovoort. In deze rij, vernoemd naar Florentin Smarandache, is het getal van Gupta het veertiende priemgetal.

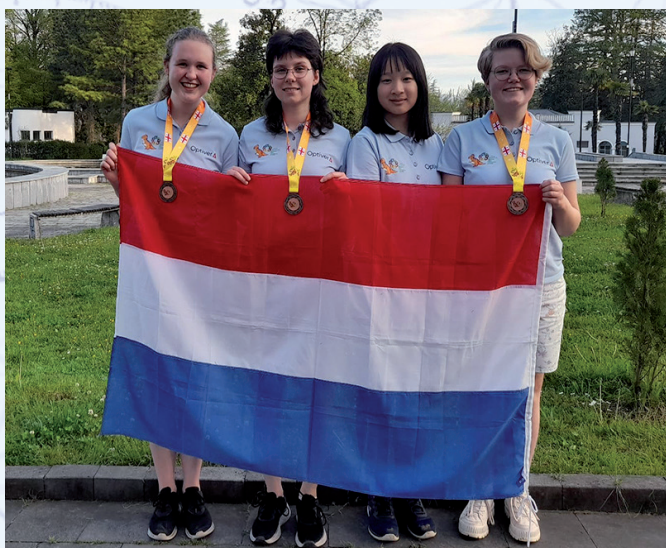
Bron: *NRC*, 13 april 2024. Zie ook: *Pareltjes uit de vakantie cursus*, blz. 30 in deze *Euclides*

Sharon Calor gepromoveerd

Op 10 april heeft Sharon Calor, bestuurslid NVvW, haar proefschrift *Scaffolding small groups' mathematics learning* met succes verdedigd aan de Universiteit van Amsterdam en is daarmee gepromoveerd tot doctor. Sharon heeft voor haar promotieonderzoek een tool ontwikkeld waarmee docenten in kleine groepjes kunnen scaffolding (hulp op maat geven).

Bron: LinkedIn

Drie keer brons voor Nederlandse meiden



Het Nederlandse team met v.l.n.r. Mirte, Katya, Wendy en Dagmar

Dagmar Tanck (17), Mirte Nauta (18) en Katya Nikitchenko (18) hebben begin april alle drie een bronzen medaille gewonnen bij de European Girls' Mathematical Olympiad in Tskaltubo, Georgië. Samen met teamgenote Wendy Huang (15) zijn zij daarmee op de 20^{ste} plaats van de 37 Europese landenteams geëindigd.

Van de opgaven was opgave 3, de op een na lastigste van de wedstrijd, bedacht door de Nederlandse record-opgavenbedenker Merlijn Staps. Het was zijn dertiende opgave. De deelnemers konden voor elke opgave zeven punten halen, waarbij ook met goede deeloplossingen punten konden worden verdiend. Dagmar behaalde 16 punten, Katya en Mirte beiden 15 en Wendy 7. Dagmar: 'Ik ben superblij met mijn bronzen medaille. Hoewel we van tevoren goed hadden geoefend, moet je uiteindelijk ook een beetje geluk hebben dat je net het juiste idee krijgt.'

Bron: wiskundeolympiade.nl

Rekenvaardigheden middelbare scholieren ondermaats

De onderwijsinspectie luidt de noodklok over de reken- en wiskundevaardigheden van tweedejaars leerlingen in het voortgezet onderwijs. Veel vmbo'ers in de onderbouw blijven steken onder het niveau dat aan het einde van de basisschool wordt vereist.

Aan het einde van het tweede leerjaar behaalde liefst 75 % van de onderzochte vmbo-basis/kader-leerlingen het door de overheid wettelijk vastgestelde referentieniveau 1F niet. Dit is het niveau dat 85 % van de basisschool-leerlingen aan het einde van het primair onderwijs zou moeten behalen. Op het havo en het vwo is het iets beter gesteld: 20 % van de leerlingen haalde aan het einde van het tweede leerjaar niet het wettelijk vereiste niveau 2F, dat nodig is om zelfstandig maatschappelijk te kunnen functioneren en een mbo-opleiding succesvol te kunnen afronden.

De peiling die de inspectie heeft uitgevoerd onder 130 representatieve middelbare scholen over het schooljaar 2021-2022, brengt voor het eerst op grote schaal de kennis en kunde van onderbouwleerlingen op het gebied van rekenen en wiskunde in kaart.

Een focusgroep van onafhankelijke experts noemt de slechte aansluiting van het rekenonderwijs in het primair onderwijs op het voortgezet onderwijs als mogelijke oorzaak van de beroerde resultaten. Verschillende termen en methoden worden immers door elkaar gebruikt. Dit bemoeilijkt de overgang voor leerlingen. Ook zijn niet alle docenten in het voortgezet onderwijs voldoende toegerust om de wettelijk vereiste referentieniveaus te bereiken, wat deels te wijten is aan het tekort aan bevoegde leraren. Om het tij te keren, adviseren de experts om rekenen en wiskunde ook bij andere vakken op een eenduidige manier terug te laten komen. 'Als het rekenen met procenten bij wiskunde anders gaat dan bij natuurkunde, is dit lastig voor leerlingen', zegt Kees Hooyman, docent wiskunde en natuurkunde en rekencoördinator bij het St. Bonifatiuscollege Utrecht in het rapport.

Ook verdere professionalisering van docenten is volgens de experts hard nodig.

Bron: *de Volkskrant* 27 februari 2024

Interview met Elizabet Meerbeek-Zwetsloot

Democratische scholen: wiskunde DOEn

Democratische scholen^[1] zijn leergemeenschappen die gebaseerd zijn op twee uitgangspunten: vrijheid en gelijkwaardigheid. Vrijheid betekent dat de leerlingen zelfgestuurd leren. Gelijkwaardigheid betekent dat de leerlingen kunnen meebeslissen over de invulling van de leeromgeving. Op democratische scholen zijn er geen traditionele klaslokalen, lessen, roosters of toetsen. Er zijn er ongeveer twintig in Nederland.



Hoe karakteriseer jij DOE?

Wij zijn een school^[2] waarin we de ruimte hebben om echt te kijken naar de ontwikkeling van kinderen in plaats van dat leerdoelen bovenaan staan. In onderwijs wordt heel veel naar doelen gekeken, die hebben best een belang, maar altijd wel ten dienste van de ontwikkeling. Hier draaien we dat om, die doelen zijn er pas als we in overeenstemming met elkaar besloten hebben dat die doelen er zijn. Ik beslis voor niemand dat die doelen er zijn, maar ik kan wel dingen aandragen die kinderen op ideeën brengen, of hun interesse opwekken, zodat ze hun eigen doelen krijgen. Dat is het grootste verschil: ontwikkeling staat voorop en de doelen volgen in plaats van andersom.^[3]

Hoe ben je hier beland?

Als deeltijdstudent bij Fontys begon ik misschien wel te snel als docent in plaats van eerst stage te lopen. Ik kwam tot de ontdekking dat wat ik aan het doen was en wat men van mij vroeg niet iets was waar ik helemaal achter kon staan. Ik hoefde alleen nog een eindstage te doen en af te studeren maar toen dacht ik 'ik stop er mee, ik wil niet voor de klas'.

Op dat moment zag ik een artikel van Jacqueline van Ewijk in de krant. Ze was bezig een democratische school op te richten in Eindhoven. Via een studiegenoot kende ik De Ruimte, de democratische school in Soest. Dat concept sprak me heel erg aan, dus ik heb contact gezocht met Jacqueline en na een aantal gesprekken maakte ik deel

uit van het oprichtingsteam van DOE. We zijn destijds begonnen met twaalf leerlingen in een oud gebouw op het TuE terrein en twee en een half jaar later zijn we verhuisd naar deze locatie in Veldhoven.



figuur 1

Jij bent de vakdocent wiskunde, maar er zijn hier ook samenwerkers en ondersteuners. Wat is jouw rol ten opzichte van deze docenten?

De samenwerkers zijn de docenten die de kinderen dagelijks zien en samen met de kinderen de school draaiend houden. Zij zijn ook de mentoren en een aantal van hen is ook vakdocent. Ze begeleiden de leerlingen op allerlei vlakken. De vakdocenten brengen hun expertise in en geven inspiratie op een bepaald vakgebied en geven begeleiding op verzoek van de leerlingen zelf. Bijvoorbeeld: een leerling vraagt begeleiding voor het doen van een examen. Je gaat dan samen met die leerling kijken hoe je een pad daarnaartoe kunt uitstippelen en uiteraard help je die leerling ook met de stof als dat nodig is.

Hoe zien jouw wiskundebijeenkomsten eruit?

Ik geef geen klassikale lessen. Het zijn meer gesprekken en activiteiten, een-op-een of met kleine groepjes. Ze zijn ergens mee bezig en hebben vragen. Ik ben heel probleemoplossend bezig, ik zoek opgaves waar we samen aan kunnen puzzelen en dat vormt het startpunt van een dialoog. Je weet dus nooit precies wat je kunt verwachten en er kan een beroep gedaan worden op al je vakkennis op ieder niveau. Je gaat het straks zelf meemaken!

Hoe sluit je DOE040 eigenlijk af?

Je hoeft hier geen diploma te halen, er zijn voorbeelden van leerlingen die op zeker moment vonden dat ze genoeg geleerd hadden om een eigen bedrijf te beginnen. Veel leerlingen gaan naar het mbo. Ze kunnen dan natuurlijk alle vmbo gt-examens maken, maar wij kunnen ook een havo 3 havo 4 overgangsbewijs afgeven. In overleg met de leerling bepalen we dan wat daarvoor aan bewijsvoering geleverd moet worden. Leerlingen die naar het hbo of wo willen, zullen natuurlijk wel alle staatsexamens moeten halen om een regulier diploma te halen. Of: hier blijven tot je 21^e en dan via de toelatingstoetsen aan de vervolgopleiding beginnen, maar die weg is voor de meesten te lang.

Je werkt hier, maar je bent ook docent op de lerarenopleiding waar je mensen opleidt die veelal in het reguliere onderwijs terechtkomen. Hoe beïnvloedt dat elkaar?

Dat is soms heel ingewikkeld door dat dilemma 'doelen of ontwikkeling bovenaan'. Ik wil studenten aanzetten tot zelf willen leren in plaats van doelen afvinken. Ik was laatst op een lesbezoek bij een student en ik zag dat hij een doel had opgesteld voor zichzelf, maar nog geen écht contact maakte met de leerlingen, en dus ook nog niet bezig was met de ontwikkeling van die leerlingen. En misschien zit daar het verschil tussen startbekwaam zijn en professionaal zijn: bezig zijn met je eigen ontwikkeling versus de ontwikkeling van de leerling. Maar er komt vast een moment dat je vertrouwen voelt dat het wel goed komt met die leerling en dan gebeuren er wonderlijke dingen. Het hoeft allemaal niet zo groots te zijn, ook in het reguliere onderwijs gebeuren DOE-achtige dingen.

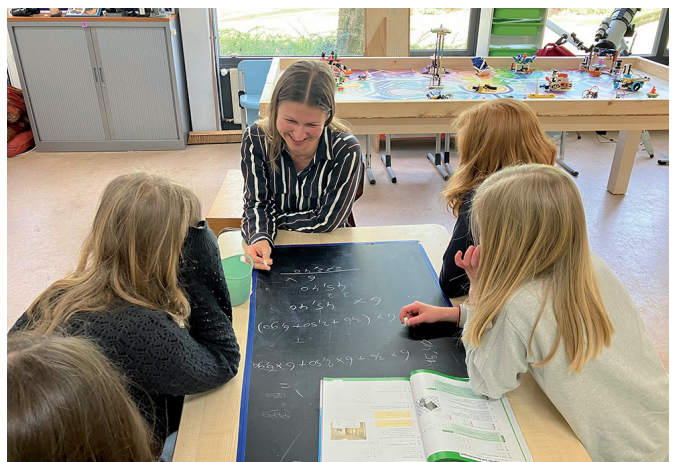
Je moet het wel durven

Dat is de titel van het boek dat we gemaakt hebben met interviews met zo'n tachtig oud-leerlingen van twaalf democratische scholen. We wilden weten waar ze terechtgekomen zijn en hoe hun tijd op de democratische school daaraan bijgedragen heeft. Het boek is gemaakt ter

gelegenheid van het twintigjarig bestaan van De Ruimte (Soest), het vijftienjarig bestaan van De Vrije Ruimte (Den Haag) en ons tienjarig bestaan.

Een ochtend op DOE040

We zitten in het sciencelokaal, een ruimte waar van alles te zien is: een skelet, grote telescopen, allerlei wiskundige lichamen, de First Lego League tafel van dit jaar, maar ook een comfortabele bank. In het midden staat een lange tafel met een krijtbord als tafelblad. De ruimte hiernaast is helemaal gevuld met lesboeken van allerlei vakken.



figuur 2 Elizabet aan het werk met leerlingen

Het eerste groepje leerlingen neemt plaats, ze willen meer weten over de volgorde van bewerkingen bij het rekenen. Aan de hand van een bladzijde uit *Moderne Wiskunde* ontstaat er een dialoog. Elizabet en de vier leerlingen zijn voortdurend dingen aan het opschrijven op de tafel en ook weer aan het uitwissen. Inmiddels staan er drie veel oudere leerlingen voor de deur van de sciencekamer te trappelen van ongeduld. Twee van hen zijn zich aan het voorbereiden op het vwo wiskunde C eindexamen, dat ze in juli als staatsexamen gaan doen, de derde is nog aan het onderzoeken of dat ook iets voor hem is. Er ontstaat een levendige discussie over een oude examenopgave. Het volgende tweetal krijgt een raadsel over aantallen paaseieren in mandjes. Daar komen ze met het nodige probeer en verifieer wel uit, maar ze zien meteen in dat dat met hele grote aantallen niet zomaar gaat lukken. 'Zal ik eens laten zien hoe de wiskunde dat oplost?', vraagt Elizabet en samen gaan ze vergelijkingen opstellen met variabelen.

Daarna komt er één leerling langs. Hij is toegelaten tot de mbo opleiding podium- en evenemententechniek maar heeft daar wel een overgangsbewijs havo 3 –

>

havo 4 voor nodig. Een goed resultaat op het vmbo gt examen wiskunde kan daaraan bijdragen, dus dat gaat hij proberen. Naast het bespreken van een opgave gaat het gesprek ook over hoe hij zich het beste daarop kan voorbereiden.

Als particerend observant heb ik genoten van deze vier totaal verschillende educatieve gesprekken.

Verschenen



Elizabet Meerbeek-Zwetsloot (red.)
Uitgever: Democratische scholen Nederland
ISBN: 978-90-834366-0-9
Prijs: € 25,-

Noten

- [1] zie <https://www.democratischesholen.nl/>
- [2] zie <https://www.doe040.nl/>
- [3] zie ook de masterscriptie van Elizabet Meerbeek-Zwetsloot: The essence of mathematics lies in its freedom ~Georg Cantor. Een verslag van een vakdidactisch ontwerponderzoek naar het in vrijheid stimuleren van wiskundige ontwikkeling. <https://www.doe040.nl/blog/onderzoek-naar-wiskundige-ontwikkeling-in-vrijheid>

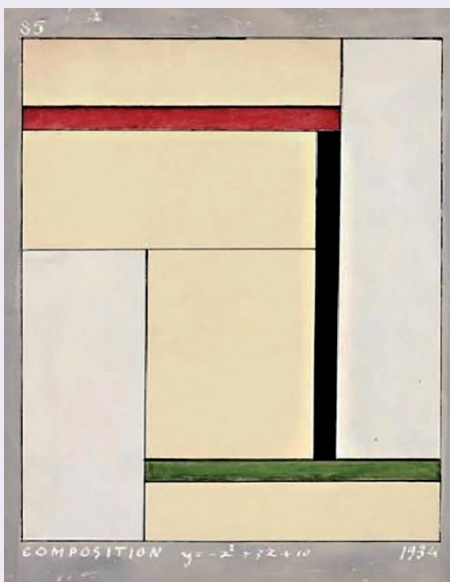
Over de interviewer en geïnterviewde

Elizabet Meerbeek is vakdocent wiskunde bij DOE040, Veldhoven en LOS, Deurne en docent wiskunde(didactiek) bij Fontys Lerarenopleiding Tilburg. Email-adres: e.meerbeek@fontys.nl

Tom Goris is hoofdredacteur van *Euclides* en docent wiskunde(didactiek) bij Fontys Lerarenopleiding Tilburg. Email-adres: t.goris@nwww.nl

Wiskundige code

Henk Rozenhart



Dit schilderij is van de Belgische kunstenaar Georges Vantongerloo. Hij behoorde kortstondig tot kunstenaarsgroep de Stijl, maar in zijn latere werk richtte hij zich meer op het gedachtengoed van Piet Mondriaan. Vantongerloo was ervan overtuigd dat er een wiskundige code ten grondslag lag aan zijn composities. De titel getuigt hiervan. Maar hoe de titel $y = -x^2 - 3x + 10$ en het werk zich tot elkaar verhouden is mij niet duidelijk geworden. Ik hoor graag of een van onze lezers mij hier iets over kan vertellen.

Wie was Bang voor meetkunde?

Wist je dat er in de meetkunde een stelling van Bang bestaat? Die kwam ik tegen in David Wells' meetkundige woordenboek en wordt hier uit de doeken gedaan.

Een merkwaardig woordenboek

Er bestaat een alfabetisch gerangschikte verzameling van intrigerende meetkundige stellingen en problemen. Auteur David Wells heeft diverse wiskundige prachtboeken op zijn naam staan. De Nederlandse vertaling van *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry* heeft als ondertitel 'Een duizelingwekkende verzameling meetkundige curiosa'.^[1]

Onder de letter B vind je als eerste onderwerp 'de stelling van Bang'. Maar wie was Bang? In MacTutor History of Mathematics Archive vind je in de Biographies onder de letter B liefst 73 namen die beginnen met Ba, maar geen Bang. Jammer dan. Maar de stelling die Bangs naam draagt, vond ik genoeg spannend om er dit stukje aan te wijden.

In de vlakke meetkunde hebben 'gelijkzijdige driehoek' en 'regelmatige driehoek' dezelfde betekenis. Bij een veelhoek met meer dan drie zijden houdt gelijkzijdigheid niet automatisch gelijkhoekigheid in. Een n -hoek met $n > 3$ moet zowel gelijkhoekig als gelijkzijdig zijn, wil zij het predikaat 'regelmatig' verdienen.

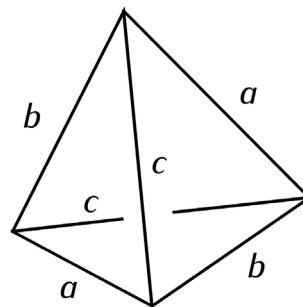
Het 3-dimensionale analogon van 'driehoek' is 'viervlak'. Geldt daarbij een analoge stelling?

Het antwoord is nee, een 'gelijkzijdig viervlak' hoeft niet regelmatig te zijn! Van een regelmatig viervlak zijn de vier zijden regelmatige driehoeken. Maar wat zal ik verstaan onder een 'gelijkzijdig viervlak'?

Naar mijn idee zijn er drie opties:

- (1) Een 'gelijkzijdig viervlak' heeft *congruente* zijvlakken.
- (2) Een 'gelijkzijdig viervlak' heeft zijvlakken met *gelijke oppervlakte*.
- (3) Een 'gelijkzijdig viervlak' heeft zijvlakken met *gelijke omtrek*.

Die drie opties, dit zegt Bangs stelling, zijn even goed, want (2) en (3) blijken equivalent met (1) te zijn! Wells' dictionary is wat je noemt een doe-het-zelfboek: er staan geen bewijzen in, wel hier en daar een soort hint. Bij de stelling van Bang bestaat die hint uit figuur 1.



figuur 1

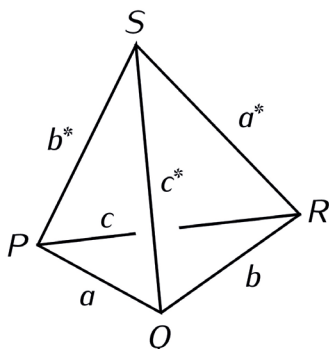
Een viervlak dus waarvan elkaar kruisende ribben twee aan twee even lang zijn.

In één oogopslag is duidelijk dat de zijden van dit viervlak congruent zijn en dat, als a , b en c niet alle aan elkaar gelijk zijn er geen sprake is van een regelmatig viervlak.

Dit plaatje kan helpen bij het zoeken van een bewijs dat (1), (2) en (3) gelijkwaardig zijn.

Zijden met gelijke omtrek

Ik begin met (3)→(1) en vervang in figuur 1 één tripel a , b , c door a^* , b^* en c^* om dan aan te tonen dat $a = a^*$, $b = b^*$ en $c = c^*$ onder de voorwaarde dat de omtrekken van de vier zijvlakken gelijk zijn.



figuur 2

Zie nu figuur 2.

omtrek $PQR = \text{omtrek } PRS \rightarrow a + b = a^* + b^*$

omtrek $PQS = \text{omtrek } QRS \rightarrow a + b^* = a^* + b$

Hieruit volgt $b - b^* = b^* - b$, dus $b = b^*$ en net zo:

$a = a^*$ en $c = c^*$. Klaar.

Daarmee is de equivalentie van de definities (1) en (3) bewezen.

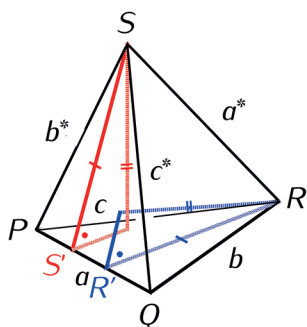
Een simpel algebraïsch bewijs dus, waar eigenlijk geen meetkunde aan te pas komt.

Het bewijs dat (1) en (2) equivalent zijn, heeft wél voeten in de meetkundige aarde, zoals het vervolg laat zien.

Eerste aanpak mislukt

In mijn zoektocht naar een mogelijk bewijs van $(2) \rightarrow (1)$ begon ik weer met figuur 2.

Omdat de oppervlakte van de driehoekige zijvlakken – in vergelijking met de omtrek – zich niet zo simpel algebraïsch laten uitdrukken in de lengten van de ribben, probeerde ik het langs de weg van de ruimtemeetkunde.



figuur 3

Zie figuur 3 waarin eerst de loodlijnen SS' en RR' op PQ zijn getrokken, respectievelijk in de vlakken PQS en PQR . Uit de gelijkheid van de oppervlakten van de driehoeken

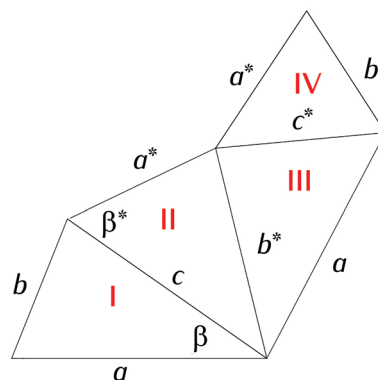
PQS en PQR volgt dat SS' en RR' even lang zijn.

Maar om hieruit de gelijkheid van b^* en b af te leiden, moest ik aantonen dat PS' en QR' even lang zijn ofwel dat R' en S' even ver van het midden van ribbe PQ afliggen, maar daar slaagde ik niet in.

Wat kon ik nog meer afleiden uit de gelijkheid van de oppervlakten van de driehoeken PQS en PQR ? Denkend aan de inhoudsformule voor het viervlak was het duidelijk dat de loodlijnstukken uit S op vlak PQR en uit R op vlak PQS ook even lang zijn. Omdat de aangestipte hoeken (figuur 3) in de rode en blauwe driehoek gelijk zijn aan elkaar (beide zijn standhoek – wie kent die term nog? – van het vlakkenpaar PQR, PQS) volgt dat de rode en de blauwe driehoek congruent zijn. Maar ook dit gaf mij niet genoeg soelaas. Dan maar over een andere boeg geprobeerd.

Tweede aanpak: bouwplaatje

Zo kwam ik op het idee om het te proberen via de uitslag (bouwplaatje) van een viervlak met ribben a, b, c, a^*, b^* en c^* , als getekend in figuur 4. Vouwen langs de ribben c, b^*, c^* en het aan elkaar plakken van de drie ribbeparen (a, a^*) , (a^*, a^*) en (b, b) levert dan een viervlak op.



figuur 4

In de situatie van figuur 4 zijn de oppervlakten van de zijvlakken niet allemaal gelijk.

Stel je nu een dergelijk bouwplaatje voor waarbij de driehoeken I, II, III en IV wél gelijk van oppervlakte zijn.

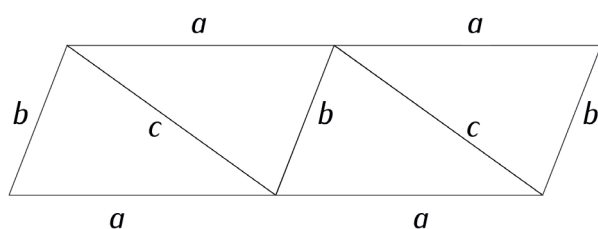
Ik beperk me daarbij tot viervlakken waarvan de zijden *scherphoekige* driehoeken zijn, en let daarbij dan op de ribben a en a^* in de driehoeken I en II. Veronderstel nu eerst dat a en a^* even lang zijn.

Als I en II gelijke oppervlakte hebben, zijn de ribben a en a^* parallel, een kwestie van gelijke Z-hoeken β en β^* .

Immers:

opp. I = $\frac{1}{2}ac \cdot \sin \beta$ en opp. II = $\frac{1}{2}a^*c \cdot \sin \beta^*$ en
vanwege $a = a^*$ geldt dan $\beta = \beta^*$.

I en II vormen samen een parallellogram, want
overstaande zijden even lang en evenwijdig, maar dat
volgt dan op dezelfde manier ook voor II en III en dan ook
weer voor III en IV. Het bouwplaatje ziet er dan dus zo
uit, zie figuur 5.

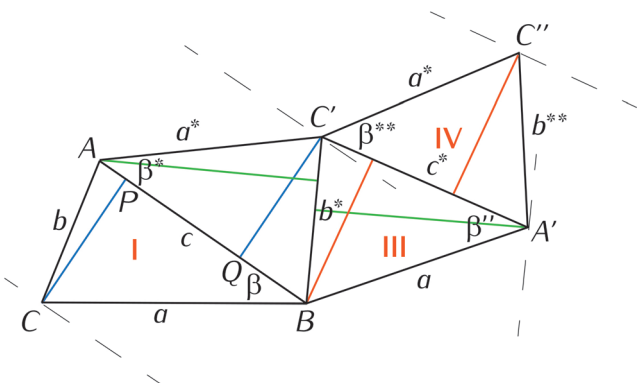


figuur 5

Dit levert een viervlak op met congruente zijden.

In figuur 6 zie je een bouwplaatje met in aangrenzende
driehoeken hoogtelijnen op de gemeenschappelijke zijde.
Uit de veronderstelde gelijkheid van oppervlakten volgt
dat die twee aan twee even lang zijn.

Stel nu dat in figuur 6 geldt: $a^* < a$.



figuur 6

Als figuur 6 een correct bouwplaatje van een viervlak is,
moeten de ribben met lengte b en b^* op elkaar kunnen
passen, ofwel $b = b^*$.

Stel nu dat $a^* < a$.

Uit $ac \cdot \sin \beta = a^*c \cdot \sin \beta^*$ en $a^* < a$ volgt dan eerst
 $\beta^* > \beta$, dus $\tan \beta^* > \tan \beta$.

Omdat $|CP| = |C'Q|$ volgt $|AQ| < |BP|$ en vandaar dan
 $|AP| < |BQ|$.

Uit de laatste ongelijkheid volgt dan via Pythagoras:
 $b^* > b$.

Dezelfde redenering kan nu worden toegepast voor de
driehoeken III en IV en dan volgt er: $b^{**} > b^*$ en a fortiori
 $b^{**} > b$, maar dan past het bouwplaatje niet!

Kortom: de veronderstelling $a^* < a$ kan ik verwerpen en
net zo is het geval met $a^* > a$.

Dus a en a^* moeten wel gelijk zijn en dan krijg ik, zoals
eerder is aangetoond, een viervlak met congruente zijden,
ook wel 'gelijkzijdig' viervlak genoemd.

Ben ik nu klaar? Helaas niet. Ik heb gebruik gemaakt
van de scherphoekigheid van de vier driehoeken, zodat de
hoogtelijnen netjes binnen de driehoeken vallen ...

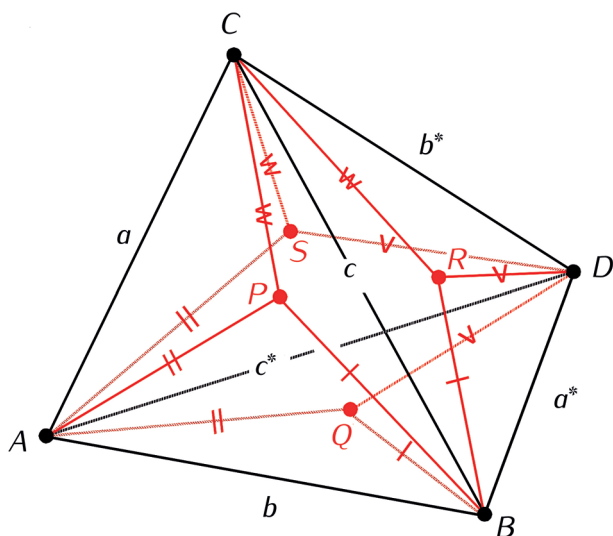
Een onderzoek naar viervlakken met tenminste één recht-
of stomphoekige driehoek lokte mij niet aan en ik ging op
google-zoektocht.

Artikelen met een bewijs van de stelling van Bang waren
wel te vinden, maar de daarin vermelde ingewikkelde
analytische bewijzen maakten mij niet bepaald blij. In
een van die artikelen^[2] werd bewezen dat een gelijkzijdig
viervlak slechts scherphoekige driehoeken als zijden heeft,
een opluchting! Ook vond ik daarin een verwijzing naar
Ross Honsberger, een door mij bewonderde auteur van
diverse 'mathematical gems'.^[3] En dit leverde mij een fraai
synthetisch bewijs voor de stelling van Bang.

Intro

Het bewijs van Honsberger is typisch een meerstappen-
bewijs, waarbij je je afvraagt hoe het proces van
ontwerpen zou kunnen zijn verlopen. Honsberger heeft
natuurlijk snel gezien dat uitdrukken van de oppervlakten
in de lengten van de ribben niet vruchtbaar is. Bij het
gelijke-omtrekken-bewijs ontstaan vier simpele verge-
lijkingen met zes onbekenden, zou zo iets ook kunnen
ontstaan door elk zijvlak te verdelen in drie deel-
driehoekjes die een dergelijk patroon van gelijke sommen
opleveren? Om tot zulke partities-in-drieën te komen,
zou je dan in ieder zijvlak een *binnenpunt* als hulppunt
moeten kiezen en zo'n punt verbinden met de hoekpunten
van dat zijvlak.

Het lumineuze idee van Honsberger is dan geweest om
voor die punten de raakpunten van de ingeschreven bol
van het viervlak in de zijvlakken te nemen, zie figuur 7.



figuur 7

Het bewijs van Honsberger

De punten P , Q , R en S zijn de raakpunten van de ingeschreven bol met de zijvlakken van het viervlak. Omdat de raaklijnstukken aan een bol vanuit een punt buiten een bol onderling gelijk zijn, geldt bijvoorbeeld:

$$|AP| = |AQ| \text{ en } |BP| = |BQ|.$$

Het gevolg hiervan is dat de driehoeken ABP en ABQ congruent zijn (ZZZ).

Op deze wijze zijn er zes paar congruente driehoeken te vinden, met twee aan twee een ribbe als gemeenschappelijke zijde.

Uit die congruentie volgt dat de twaalf hoeken tussen elkaar ontmoetende raaklijnstukken twee aan twee aan elkaar gelijk zijn.

Er geldt bijvoorbeeld:

$$\angle APB = \angle AQB = \beta.$$

Zo zijn er dus zes paren gelijke hoeken die genoteerd kunnen worden als α , β , γ , α^* , β^* en γ^* al naar gelang ze op a , b , c , a^* , b^* of c^* staan. In elk zijvlak zijn er drie van zulke hoeken die dan samen 360° zijn!

Via de vlakken ABC en BCD volgt dan:

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha^* + \beta^* + \gamma, \text{ dus } \alpha + \beta = \alpha^* + \beta^*.$$

De vlakken ABD en ACD leveren op:

$$\alpha + \beta^* + \gamma^* = \alpha^* + \beta + \gamma^*, \text{ dus } \alpha + \beta^* = \alpha^* + \beta.$$

Gevolg: $\alpha = \alpha^*$ en $\beta = \beta^*$ en analoog $\gamma = \gamma^*$.

Waar hebben we zoiets eerder gezien?

Deze analogie met het bewijs van (3)→(1) wordt nog eens door Honsberger toegepast, en wel op de oppervlakten van de twaalf deeldriehoeken in de zijden van het viervlak.

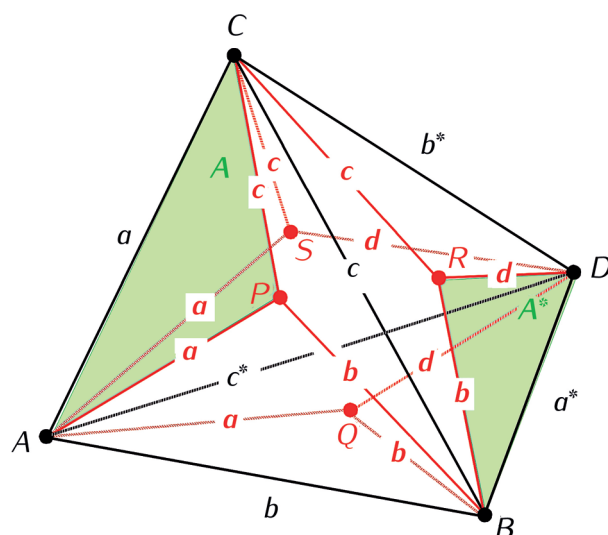
Want ja, er moet toch een keer gebruik worden gemaakt van het gegeven dat de oppervlakten van de zijvlakken gelijk zijn!

Die twaalf driehoeken zijn, als eerder opgemerkt, twee aan twee congruent.

Ik noteer de oppervlakten van die twaalf deeldriehoeken nu met groene hoofdletters, al of niet voorzien van een asterisk, corresponderend met de ribbe waar ze op staan. Bijvoorbeeld: opp. $APC = A$, opp. $BPC = C$, opp. $DRC = B^*$.

Er volgt dan dat $A + B + C$, $A^* + B + C^*$, $A + B^* + C^*$ en $A^* + B^* + C$ gelijk aan elkaar zijn en (feest der herkenning!) dus $A = A^*$, $B = B^*$ en $C = C^*$.

Verder noteer ik de lengten van de raaklijnstukken uit A , B , C , D aan de ingeschreven bol nu respectievelijk als a , b , c , d .



figuur 8

Uit de gelijkheid van de oppervlakten van APC en BRD ($A = A^*$) en van de hoeken α en α^* volgt $ac = bd$ (want oppervlakte driehoek is gelijk aan het halve product van twee zijden en de sinus van de ingesloten hoek).

De even grote oppervlakten van APB en CRD leveren dan net zo op: $ab = cd$.

Combinatie van $ac = bd$ en $ab = cd$ leidt nu tot

$$c / b = b / c \text{ en dus tot } b = c.$$

Via andere paren deeldriehoeken komt er tenslotte $a = b = c = d$.

Maar nu volgt bijvoorbeeld dat de driehoeken APC en BRD congruent zijn (ZHZ).

En daaruit volgt dan $a = a^*$!

Net zo kan worden geconcludeerd dat $b = b^*$ en $c = c^*$.

Einde meerstappenbewijs!

Terugblik

Honsbergers bewijs, dat ik hier heb geparafraseerd, kun je wel virtuoos noemen.

Wat ik er verrassend aan vind is dat er twee keer een algebraïsche analogie met het simpele bewijs van $(3) \rightarrow (1)$ wordt gebruikt.

Het is misschien een beetje jammer dat je dan nog niet klaar bent en er nog een algebraïsche exercitie met de oppervlakten van de deeldriehoeken nodig is, maar het bewijs is absoluut elementair en zou in de lessen stereometrie-van-heel-vroeger en in die van ruimtemeetkunde-wat-minder-vroeger in de bovenbouw van het vwo in een leergesprek kunnen worden behandeld.

Noten

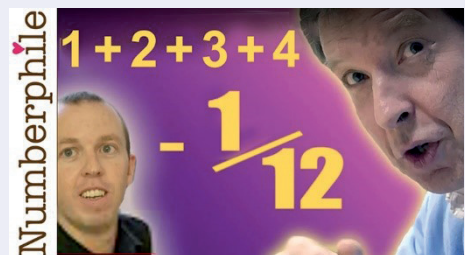
- [1] Wells, D. (1993). *Woordenboek van merkwaardige en interessante meetkunde*. Bert Bakker.
- [2] Hajja, M. & Saidi, F. (2004). A note on Bang's theorem on Equifacial Tetrahedra. *Journal for Geometry and Graphics*, 8.
- [3] Honsberger, R.A. (1976). *Mathematical Gems II*. Mathematical Assn of Amer.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

$$|s| 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots = -\frac{1}{12} ?$$

Ton Versteeg



We onderzoeken de juistheid van bovenstaande uitkomst, die in de wis- en natuurkundewereld om diverse redenen alom wordt bewierookt, zie ook deze Numberphile video!

Stel $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots$. Dit is ook te schrijven als:

$$S = 1 + (2 + 3 + 4) + (5 + 6 + 7) + (8 + 9 + 10) + \dots \rightarrow$$

$$S = 1 + 9 + 18 + 27 + \dots \rightarrow$$

$$S = 1 + 9(1 + 2 + 3 + \dots) \rightarrow$$

$$S = 1 + 9S \rightarrow 8S = -1 \rightarrow$$

$$S = -\frac{1}{8}. \text{ Dus } 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots = -\frac{1}{8}. \text{ Hmm... opmerkelijk.}$$

Hierbij is geen gebruik gemaakt van het discutabele $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$, zoals in andere berekeningen/bewijzen om op $S = -\frac{1}{12}$ uit te komen.

Ik vind dit discutabel omdat bij het wijdverbreide 'bewijs' ervan wordt uitgegaan van twee verschillende S -en.

$S = 0$ bij een even aantal termen en $S = 1$ bij een oneven aantal termen. Dus in dat bewijs stellen dat

$S = 1 - S$ is onjuist. Het is dus $S = 1 - S^*$, waarbij S^* één term minder bevat dan S . Het is dus meten met twee maten.

Ook in mijn 'bewijs' dat $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots = -\frac{1}{8}$ is sprake van twee verschillende S -en.

De S waar ik mee begin is de echte S , maar de S^* die ik later heb gecreëerd heeft heel wat meer termen van de echte S nodig om die zogenaamde echte S weer te verkrijgen. Ook dit bewijs rammelt dus aan alle kanten.

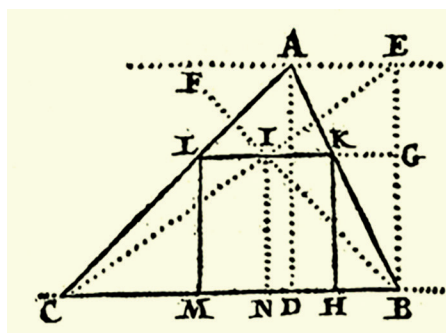
Mijn conclusie is dan ook dat $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots = \infty$. Het meest logische antwoord!

Een geometrische questie nader bekeken

Een tekst met meetkundige problemen die allemaal met klassieke meetkundige vondsten worden opgelost, zonder gebruik van methoden uit de analytische meetkunde, is voor onze tijd bijzonder. Rond 1614 verschijnt het boek 'Hondert geometrische questien en hare solutien' van Sybrandt Hansz Cardinael ^[1]. Het bevat prachtige tekeningen, berekeningen en oplossingen met als doel '...om allerleye metinghen seer constichlijck te doen, en onbekende verborghen linien cortelijck ende behandelijck te vinden...'. Eén kwestie wordt eruit gelicht voor een nader onderzoek... met analytische meetkunde.

De kwestie

Het vraagstuk, nummer 89, betreft de vraag binnen een gegeven driehoek een vierkant te zetten met een zo groot mogelijke oppervlakte, zie figuur 1. Dit is de figuur zoals die in het boek staat, het is meteen de analysefiguur.^[2]



figuur 1

Nu volgt de aanpak van Cardinael, met aanpassing van de notatie door de schrijver dezes.

... Om dit te doen, richt een loodlijn op te B zodat

$|BE| = |AD|$. $|AD|$ is een hoogtelijn in $\triangle ABC$.

De lijn BF is een bissectrice van $\angle EBC$ en die snijdt lijn CE in punt I .

Dan is $|IN|$ de lengte van de zijde van het gevraagde vierkant.

Met lijn GI evenwijdig aan BC ontstaan de snijpunten K en L met de zijden. Dan LM en KH evenwijdig aan lijn AD getrokken geeft vierkant $KLMN$, zo groot als mogelijk in de gegeven driehoek.

Want BI is een bissectrice dus vierhoek $GINB$ is een vierkant.

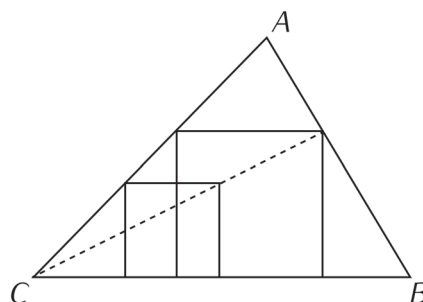
Omdat $|GI| : |BC| = |EG| : |EB| = |AK| : |AB| = |KL| : |BC|$ volgt: $|KL| = |GI|$.

En dan ook: $|LM| = |KH| = |BG| = |IN| = |IG|$.

Vierkant $KLMN$ is dus even groot als vierkant $GINB$.

Er volgt ook nog een getallenvoorbeeld met $|BC| = 14$, $|AD| = 12$.

De aanpak is bijzonder en echt anders dan de vaak gebruikte methode om zo'n vierkant te construeren. Dan wordt begonnen met een klein vierkant op zijde BC dat dan vervolgens wordt vermenigvuldigd vanuit punt C zodat het vierde hoekpunt op zijde AB komt, zie figuur 2.



figuur 2

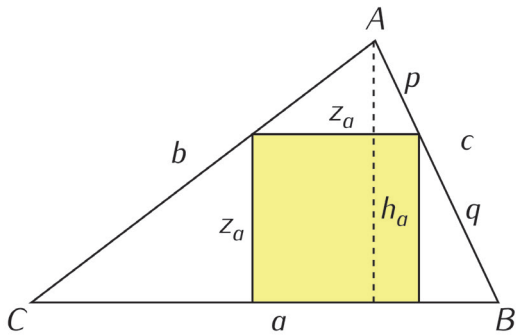
Dus zeker een mooie aanpak maar de vraag was een vierkant te maken 'soo groot als het moghelijck is'. Dat bewijst Cardinael niet, ook niet met het voorbeeld met getallen.

Dat het vierkant een zijde op BC moet hebben is niet gegeven of gevraagd. Wat als het vierkant een zijde op AB of op AC zou hebben? Is zo'n vierkant dan kleiner?

Hulp van analytische meetkunde

Met enige analytische meetkunde is meer te concluderen voor vierkanten op een zijde.

Noem de hoogtelijnen uit punt ... h_A , h_B , h_C , de zijden van de vierkanten op zijde ... z_a , z_b , z_c . Zie figuur 3, dat is de situatie als in figuur 1.



figuur 3

Met gelijkvormigheid volgt: $\frac{z_a}{h_a} = \frac{q}{c}$. En ook: $\frac{z_a}{a} = \frac{p}{c}$.

Dus: $\frac{z_a}{h_a} + \frac{z_a}{a} = \frac{q}{c} + \frac{p}{c} = 1$.

Gevolg: $z_a = \frac{a \cdot h_a}{a + h_a} = \frac{2 \cdot \text{opp}(\triangle ABC)}{a + h_a}$. (*)

Cardinael gebruikt in het getallenvoorbeeld:

$a = 14$ en $h_a = 12$.

De andere zijden kiest hij niet maar dat doen we nu wel.

Met $(a, b, c) = (14, 15, 13)$ zou volgen:

$\text{opp}(\triangle ABC) = 84$.^[3]

En: $(h_a, h_b, h_c) = (12, 11\frac{1}{5}, 12\frac{12}{13})$.

En: $(a + h_a, b + h_b, c + h_c) = (26, 26\frac{1}{5}, 25\frac{12}{13})$.

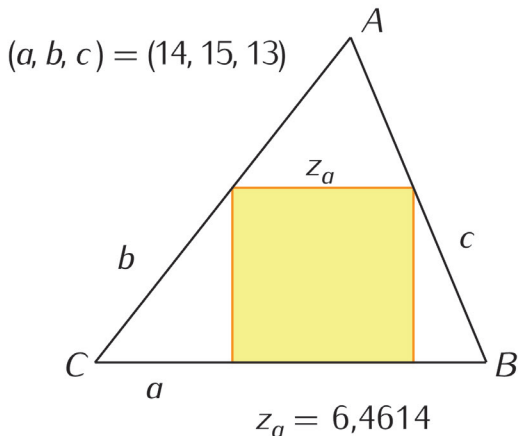
(*) heeft bij een gegeven driehoek de grootste waarde indien de noemer het kleinst is.

Dus bij $(a, b, c) = (14, 15, 13)$ geeft dat een vierkant op

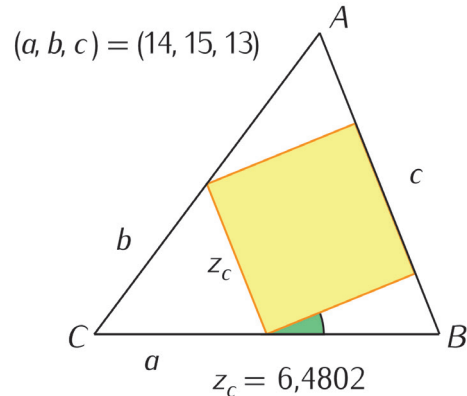
zijde AB: $z_c = 6\frac{162}{337} = 6,48\ldots$

Het getallenvoorbeeld geeft: $z_a = 6,46\ldots = 6\frac{6}{13}$, dus in dit geval niet de grootste zijde.

Met de figuren 4 en 5 hieronder is een en ander in beeld gebracht.



figuur 4



figuur 5

Met enige analyse volgt nog dat bij $\text{opp}(\triangle ABC) = 84$

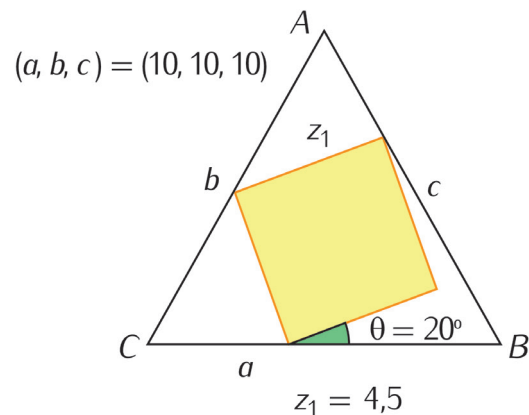
geldt:

$$z_x = \frac{168}{x + \frac{168}{x}} = \frac{168x}{x^2 + 168}.$$

De zijde z_x is maximaal voor $x = \sqrt{168} \approx 12,96$. En dan volgt ook: $h_x = \sqrt{168}$. Dus het grootste vierkant ontstaat voor deze waarden of hier zo dicht mogelijk bij!

Bijzondere situaties

Voor situaties met geen zijde van het vierkant op een zijde van de driehoek gelegen, ontstaan vierkanten met kleinere oppervlakte. Dat geeft enige rekenarij maar bij een gelijkzijdige driehoek valt dat mee, zie figuur 6. De driehoek is gelijkzijdig en de aangegeven draaihoek is θ .



figuur 6

Merk op: $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$.

Dan volgt voor de zijde van zo'n vierkant:

$$z_1(\theta) = \frac{5\sqrt{3}}{\sin(60^\circ + \theta) + \cos(\theta)} = \frac{5\sqrt{3}}{2\cos(15^\circ)\cos(\theta - 15^\circ)}.$$

De zijde is maximaal ($\approx 4,64$) voor $\theta = 0^\circ$ of 30° .

De noemer is dan minimaal.

Het vierkant heeft één zijde op een zijde van de driehoek.

De zijde is minimaal ($\approx 4,48$) voor $\theta = 15^\circ$. De noemer is dan maximaal.

Het vierde hoekpunt van het vierkant ligt op de bissectrice van hoek B .

Voor de rekenlustigen: bij $(a, b, c) = (14, 15, 13)$ is de zijde minimaal ($\approx 6,35$) voor $\theta \approx 11^\circ$.

Het vierde hoekpunt ligt nu niet op de bissectrice van hoek B .

Uitdagingen

Al met al een mooie kwestie tussen al die 101(!) kwesties.

Bij het doorlopen van dit alles is te zien welk een pracht er uitgaat van Cardinaels aanpak. Het boek laat ook zien wat een groot rekenmeester hij was. Wortels uit grote breuken, optellingen en delingen daarmee, het komt allemaal voorbij en hij draait er zijn hand niet voor om, meesterlijk. Kom daar maar eens om in deze tijd van zorgen over rekenvaardigheid ... ^[4]

Noten

- [1] Online beschikbaar via <https://lib.ugent.be/nl/catalog/rug01:001758905>
- [2] Cardinael benoemt hoekpunten soms met en soms tegen de wijzers van de klok in.
- [3] Veel kwesties in het boek gaan met gehele getallen en de hier genoemde lengtes van zijden van een driehoek worden vaak gebruikt. De oppervlakte van de driehoek is dan geheeltallig.
- [4] Voor meer achtergrond, zie Sitters, M.H. (2008). *Sybrandt Hansz Cardinael, 1578-1647 Rekenmeester en wiskundige - Zijn leven en zijn werk*. Uitgeverij Verloren.

Over de auteur

Fred Muijrs was tot zijn pensioen docent aan de eerste- en tweede graads lerarenopleiding wiskunde van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen.
E-mailadres: fmuijrs@yahoo.com

Oude wijsheid

De leerling die de wiskunde bedrijft,
is als de vinger die de maan aanwijst,
de meester die de wiskunde beschrijft,
is als de hand die heel de kosmos prijst.

Paul Bezembinder



Het gedicht Oude wijsheid is afkomstig uit de bundel *Duizelingen* van Paul Bezembinder. Paul studeerde theoretische natuurkunde in Nijmegen. In zijn poëzie zoekt hij in vooral klassieke versvormen en thema's naar de balans tussen serieuze poëzie, pastiche en smartlap.



Zebra 66: Islamitische meetkundige patronen



Titel: Islamitische meetkundige patronen
Ondertitel: De geheimen van een eeuwenoude ontwerptraditie ontsluit
Auteur: Goossen Karssenbergh
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam, 2021
Zebra-reeks, deel 66, 72 pagina's, paperback
ISBN: 978-90-5041-196-7
Prijs: € 10,00

Inleiding

De eerste betegeling waar ik mee in aanraking kwam, was de vloer van de slagerij van mijn vader. Zie in figuur 1 de afbeelding van een losse tegel. Er moet een moment zijn geweest dat de symmetrieën in deze tegels mij gingen boeien. Leerlingen in de brugklas, waar ik wiskundeles gaf, vonden spiegelsymmetrie een leuk onderwerp. Veel later, met name in vakanties trokken tegels altijd mijn aandacht. Zo bezocht ik in Nederland o.a. het tegelmuseum in Otterlo en het keramiekmuseum Prinsessehof in Leeuwarden.



figuur 1

Later bezocht ik in Spanje het paleis Generalife en het Alhambra in Granada en diverse plaatsen zoals Madrid, Sevilla (Alcázar) en in Portugal Lissabon. Ik kwam als ik de tegels bestudeerde niet veel verder dan 'oh wat prachtig' en wat een fraaie patronen en regelmatigheden. Een goed boek dat mij hielp was *Een passie voor symmetrie* (2014) geschreven door Jan van de Craats. Ik kan je dit werk echt aanraden. Voor de leerlingen was er nauwelijks iets, behalve een verdwaald Escherwerk in de leerboeken. Een enthousiaste leraar kende waarschijnlijk *Doeboek 17* (1998) met de titel *Zelf Escher-achtige vlakvullingen ontwerpen* uitgegeven door de stichting Vierkant. De vraag is natuurlijk waardoor werd Maurits Escher geïnspireerd? Je kent natuurlijk het antwoord: islamitische meetkundige patronen. Jarenlang werd collega Goossen Karssenbergh geobsedeerd en nog steeds, door deze islamitische kunstvorm. Gelukkig heeft hij zijn onderzoeken en bevindingen, na vele workshops, in een Zebraboekje vastgelegd. In het voorwoord geeft hij meteen de kernvraag: 'Hoe bedachten middeleeuwse islamitische ontwerpers nieuwe meetkundige patronen?' Probeer zo'n vraag maar te beantwoorden in een boekje waarbij het aantal pagina's de 70 absoluut niet mag overschrijden. Gelukkig heeft de auteur een eigen website waar je werkbladen, activiteiten behorend bij Zebra 66 kunt vinden en een heleboel andere informatie. Ook vond ik zijn artikel in *Euclides* 98-5 zeer verhelderend.

Structuur van het boekje

In de meeste zebraboekjes treffen we veel opgaven aan. In dit boekje hebben we geen opgaven maar 34 kansen, open vragen en vaak onderzoekgericht. Op het eind van het boekje gaat het echt om het zelf ontwerpen. Er zijn in totaal vijf hoofdstukken met daarnaast een voorwoord met als advies: ga zelf aan de slag. Je leest tips over tekenen en meetgereedschap. Nieuw was voor mij de *geofractor* waarbij je snel veel voorkomende hoeken kunt tekenen. Je vindt het instrument achter in het boekje.

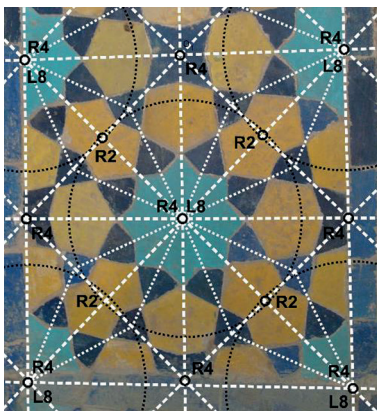
Inleiding H1

In dit hoofdstuk kom je nog geen kans tegen. Verschillende symmetrieën worden genoemd. Meestal waren afbeeldingen van mensen en dieren niet in de islam toegestaan. Maar wat heeft de natuur te bieden? Bloemen, wijnranken, bladeren, olijfbomen enz.

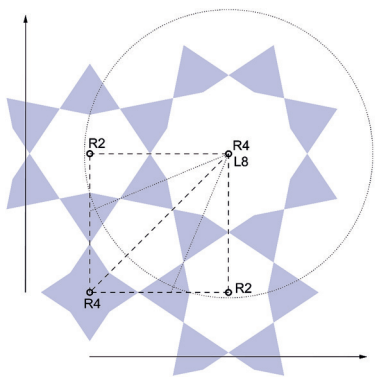
H2 Basisanalyse van meetkundige patronen

In de basisanalyse wordt verwezen naar de zeventien behangpatroongroepen. Een overzicht had wel op de site [Zebra 66](#)

van de auteur mogen staan. De islamitische ontwerpen gaan veel verder. Je leest in dit hoofdstuk welke stappen je moet zetten om tot een basisanalyse te komen. Je zoekt spiegellijnen, rotatiesymmetrieën en lokale draaisymmetrieën. Belangrijk zijn ook codes, stippellijnen en streepjeslijnen, zie figuur 2. Waar het echt om draait is het ontdekken van een cel. Als je er een stempel van zou maken dan kun je daarmee het hele patroon stempelen. In dit hoofdstuk zie je allerlei voorbeelden, zie ook figuur 3.



figuur 2 Codes, stippellijnen en streepjeslijnen



figuur 3 Een cel

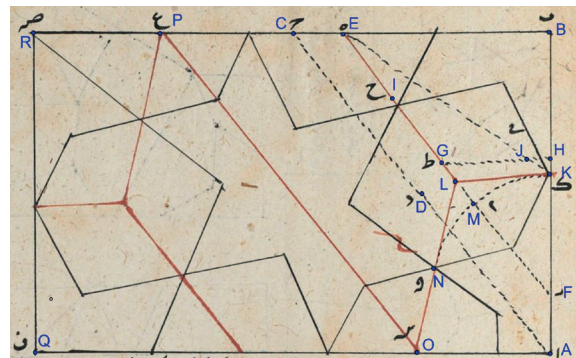
H3 Basisvaardigheden patroonkunde

Nu wordt uitgelegd wat een geofractor is en hoe je ermee moet werken. Bekende basisvaardigheden worden opgefrist zoals constructies van middelloodlijn, bissectrice, loodlijn tekenen vanuit een punt op een gegeven lijn en spiegelen in een lijn. Er wordt gewerkt met rasters van gelijkzijdige driehoeken en ruitjes. Op pagina 27 zien we een constructie van een regelmatige vijfhoek. In deze constructie zou je willen dat leerlingen *bewijzen* dat de verhouding van diagonaal en zijde de gulden snede is. Het valt mij op dat er in het boekje niet aan bewijzen gedaan wordt. Het gaat natuurlijk om onderzoeken, zelf recon-

structies met de hand uitvoeren en ontwerpen. Je krijgt ook te maken met *onzekerheden*. Er wordt meegedeeld dat het niet zeker is of de constructie zo is gegaan. Het is goed dat leerlingen worden geconfronteerd met onzekerheden en hoe je ermee om moet gaan. In het boekje komen we dat verschijnsel nog vaker tegen.

H4 De reconstructie van patronen

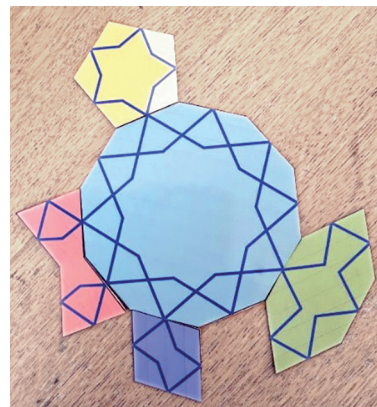
In dit hoofdstuk krijg je verschillende reconstructies te zien van panelen. In het vierde voorbeeld komen we regelmatige zevenhoeken tegen en dat schijnt volgens de auteur zeer uitzonderlijk te zijn.^[1] De tekening is voorzien van een Perzisch handschrift, zie figuur 4. Er is een vertaling met veertien instructies en dan mag je daarna zelf uitzoeken hoe het verder moet. Weer zo'n onzekerheid. Het hoofdstuk wordt afgesloten met een bijzonder apparaatje om hoeken te tekenen van bijvoorbeeld $\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}$ toer, waarbij 1 toer staat voor 360°.



figuur 4

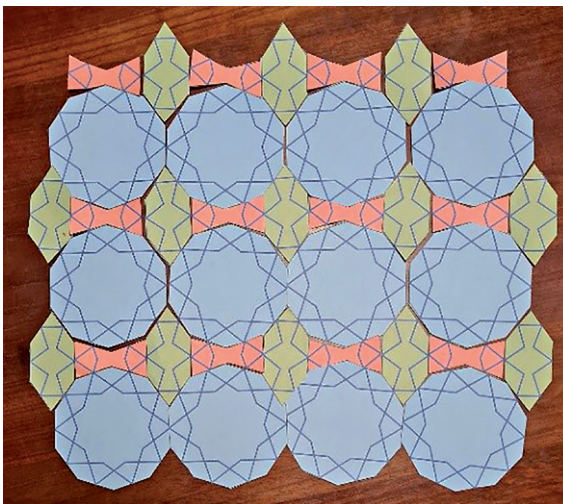
H5 Ontwerpen volgens de islamitische traditie

Ik vond dit echt het leukste hoofdstuk. Rijk aan ideeën om uit te voeren. De *girih*-tegels krijgen de meeste aandacht. Je kunt mozaïeken produceren volgens de 'tegen-elkaar-aanliggende-veelhoeken-methode', zie figuur 5.



figuur 5

Dat is mogelijk met verschillende families of setjes van veelhoeken die voorzien zijn van lijntjes die door het midden van de zijden gaan. Dat kan bijvoorbeeld een verzameling van regelmatige achthoeken en vierkanten zijn. Op internet vond ik – de auteur moedigt je hier ook toe aan – een familie van vijf veelhoeken. Al die veelhoeken hebben dezelfde zijdelengte. Een strik (zandlopervormige zeshoek), een bootje, ruit, regelmatige vijfhoek en een regelmatige tienhoek. Met drie ervan kun je al een vlak betegelen zonder dat er gaten ontstaan. De lijntjes binnen de veelhoeken sluiten bij het betegelen mooi op elkaar aan en dan zie je weer nieuwe figuren en vormen. Wat een creatie! Zie mijn schamele eerste poging in figuur 5.



figuur 6

In de laatste paragraaf word je via zes stappen gestuurd om zelf een paneel te construeren. Dat begint met het kiezen van geschikt materiaal en afmetingen tot het maken van een portfolio.

Tot slot

Ik heb genoten van de patroonkunde. In dit boekje komen hele andere vaardigheden aan de orde dan die we in de schoolboeken gewend zijn. Een leerling die onderzoekgericht is kan zijn creativiteit botvieren. Maar moeten we niet alle leerlingen nieuwsgierig maken en enthousiasmeren? Ik vind dit boekje een aanrader. En lees ook eens dat leuke boekje *Snijpunt Isfahan* van zijn dochter Maite Karssenberg die met haar vader naar Iran reisde ^[2].



Noten

- [1] In *Pythagoras* van juni 2018 (auteur Jan Guichelaar) staat een constructie die bij benadering correct is.
De fout in deze constructie is ongeveer 0,002. In een technische tekening dus verwaarloosbaar. Deze constructie is terug te vinden in het werk van kunstenaar Albrecht Dürer (1471–1528) maar was waarschijnlijk al eerder bekend.
- [2] Zie de recensie van Marijke Boon in *Euclides* 93–7

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen.
E-mailadres: jacques.jansen@wxs.nl.

Pareltjes uit de vakantiecursus

Sinds 1946 organiseert Platform Wiskunde Nederland aan het einde van de zomervakantie een vakantiecursus voor wiskundeleraren, waarbij sinds vorig jaar wordt samengewerkt met Platform Wiskunde Vlaanderen. De cursus vindt dit jaar plaats op 23–24 augustus in Amsterdam en op 6–7 september in Antwerpen met als thema ‘Banach–Tarski en groepentheorie’. Hoofdsprekers zijn Stefaan Vaes (Universiteit Leuven) en Jeroen Spandaw (TU Delft).

Het fenomeen ‘vakantiecursus’

In dit artikel vertellen we over deze prachtige cursus. Voor meer informatie en inschrijving, zie [2]. In de vakantie-cursus wordt pittige wiskunde op een toegankelijke wijze gepresenteerd door wiskundige onderzoekers. Deelnemers aan de cursus ontvangen een syllabus die speciaal voor de cursus is geschreven door de hoofdspreker(s). (Zie [4] voor een prachtige collectie materialen!) De cursus richt zich op wiskundeleraren in de bovenbouw havo/vwo. De thema’s van de afgelopen jaren waren priemgetallen, stochastische netwerken, stangconstructies, speltheorie, deep learning en cryptografie. Om een indruk te geven van de vakantiecursus, kijken we vooruit naar de komende editie en terug naar de laatste drie edities.

Vooruitblik op de cursus van 2024

De vakantiecursus 2024 start op vrijdag met een inleiding in de groepentheorie. Hierbij zullen we enkele eenvoudige, maar inzichtverschaffende, concrete voorbeelden ‘door-rekenen’ om de abstracte begrippen uit de theorie betekenis te geven. De deelnemers maken opgaven om vertrouwd te raken met die begrippen. We gebruiken daarbij het computerprogramma GAP, waarmee snel gerekend kan worden in groepen. Op zaterdag zal Stefaan Vaes ons in een prettig rustig tempo door het bewijs van de verbluffende Banach–Tarski-paradox leiden. Gebruikmakend van de op vrijdag geleerde groepentheorie laat hij zien dat een eenheidsbol in enkele disjuncte delen kan worden opgedeeld, die vervolgens via rotaties en translaties (dus zonder vervormingen!) kunnen worden samengevoegd zodat daardoor twee eenheidsbollen ontstaan! Het zou niet moeten mogen...

Vrijdagavond kunnen de deelnemers ontspannen luisteren naar een lezing door David Eelbode over het merkwaar-

dige feit dat rotaties over 360° niet altijd terugleiden naar de beginpositie: soms is daar een rotatie over 720° voor nodig, een cruciaal fenomeen in de deeltjesfysica! We kunnen dit begrijpen door te kijken naar de vorm van de groep van rotaties in $\mathbb{R}^3$.

De cursus ‘Priemgetallen’ van 2023

De cursus over priemgetallen begon met Euclides’ beroemde bewijs dat er oneindig veel priemgetallen bestaan. Hierna leerden we dat voor grote waarden van x ongeveer 1 op de $\ln(x)$ natuurlijke getallen onder x een priemgetal is. De *formulering* van deze beroemde priemgetalstelling is gemakkelijk te begrijpen. Het *bewijs* is andere koek en dit werd dan ook door Frits Beukers wijselijk achterwege gelaten. (Met *wolframalpha.com* vind je trouwens snel dat voor natuurlijke getallen onder 10^3 , 10^4 , 10^5 , ... één op 6.0, 8.1, 10.4, 12.7, 15.0, 17.4, 19.7, ... priem is. Zelfs brugklassers kunnen hierin een patroon ontdekken!) In de andere lezingen werd gefocust op priemtesten: hoe test je of een gegeven groot getal priem is? De naïeve aanpak, door deelbaarheid te testen door 2, 3, 5, . . . tot $\sqrt{n}$, kost voor priemkandidaten als $n = 41206829246722409930529586729445413728472565292961$ tientallen miljoenen jaren rekenwerk. Gelukkig zijn er slimme methoden die de klus klaren in enkele seconden en die we bovendien nog kunnen doorgronden! Dergelijke priemtests zijn essentieel voor cryptografie, die bijvoorbeeld wordt gebruikt in online transacties.

Gastspreker Benne de Weger leerde ons hoe je met deze kennis een plausibele schatting kunt maken van onder andere het aantal priemtweelingen onder x . In de praktijk blijken dergelijke schattingen goed te werken, hoewel de heuristische aanpak – waarbij deterministische priemgetallen als toevalsvariabelen worden behandeld! – niets

bewijst. Zo weten we nog steeds niet of er oneindig veel priemtwelingen bestaan!

Roland van der Veen vertelde over een belangrijke methode, die de discrete, grillige wereld van de (priem)-getallen verbindt met de gladdere, continue wereld van functies. Telkens als we een rij getallen willen bestuderen, zoeken we daar een geschikte functie bij waarin de hele rij 'gecodeerd' wordt. Door krachtige analytische methoden als integreren en differentiëren toe te passen op die functies, kun je interessante uitspraken doen over de rij getallen, waar het ons uiteindelijk om te doen is.

Neem bijvoorbeeld de Fibonacci-rij $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$. We vertalen deze rij in de machtreeks

$G(x) = 0 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^4 + 5 \cdot x^5 + 8 \cdot x^6 + \dots$. De lezer kan nu verifiëren dat $G(x) - xG(x) - x^2G(x) = x$ en dus

$$G(x) = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

In deze eenvoudige rationale functie zit alle informatie over de rij van Fibonacci verstopt! Met breuksplitsen levert dit uiteindelijk een expliciete formule voor het n -de Fibonaccigetal, namelijk:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Een 'vergelijkbare' aanpak, toegepast op de rij van priemgetallen leidt tot de fameuze Riemann-zetafunctie:

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots = \prod_p \frac{1}{1-p^{-x}}$$

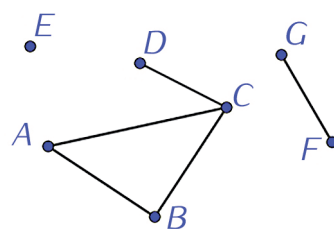
In de cursus leerden we hoe de ligging van de complexe nulpunten van deze functie informatie geeft over de fout in de eerdergenoemde schatting $\frac{x}{\ln(x)}$ voor het aantal priemgetallen onder x .

In de recente edities van de vakantiecursus wordt een deel van de tijd besteed aan een practicum, waarin de deelnemers opgaven maken om zich de leerstof beter eigen te maken. In de priemgetalcursus werkten we met de gratis software *PARI* om efficiënt te kunnen rekenen met grote (priem)getallen en zo bijvoorbeeld berichten te coderen en decoderen met de *RSA*-methode.

De cursus 'Stochastische Netwerken' van 2022

Stochastische netwerken worden niet alleen toegepast om digitale netwerken als het World Wide Web, Facebook en X (voorheen Twitter) te begrijpen, maar ook zaken als

griepiepidemieën. Een netwerk representeren we wiskundig als een graaf. Dit is een verzameling 'knopen' plus een verzameling 'bogen'. Een boog is een verbinding van twee knopen. We geven de bogen geen richting en we veronderstellen dat de twee eindpunten van iedere boog verschillend zijn. Verder nemen we aan dat er voor ieder tweetal verschillende knopen verbonden is door hoogstens één boog. De positie van de knopen in het vlak en de vorm van de bogen doen er niet toe. Het gaat er alleen om welke paren knopen verbonden zijn.

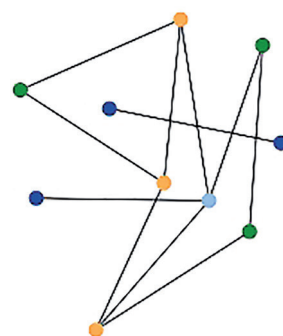


figuur 1 Een ongerichte graaf zonder lussen

Om een 'toevallige' graaf te maken, leggen we eerst het aantal knopen, n , vast. Nummer de knopen $1, 2, \dots, n$ en kies een kans $p \in [0, 1]$. Ga nu alle

$$\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$$

ongeordende paren van knopen af en verbind zo'n paar met kans p door een boog.



figuur 2 Een toevallige graaf met $n = 10$ en $p = 0,25$

Dergelijke toevallige grafen heten Erdős-Rényi-grafen. In figuur 2 zie je de E-R-graaf met parameters $n = 10$ en $p = 0,25$.^[2] Voor $n = 10$ volgt het aantal bogen

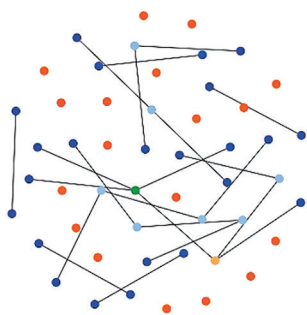
een binomiale kansverdeling met $N = \binom{10}{2} = 45$ en $p = 0,25$.

Het verwachte aantal bogen is dus $45 \cdot 0,25 = 11,25$, terwijl de standaardafwijking

$\sqrt{45 \cdot 0,25 \cdot 0,75} \approx 2,90$ een idee geeft van de spreiding.

De *graden* van de knopen volgen een binomiale kansverdeling met $N = n - 1 = 9$ en $p = 0,25$.

Vervolgens werden toevallige grafen bestudeerd met 'relatief kleine' graden. De verwachtingswaarde van de graad van een knoop in een E-R-graaf met parameters n en p is gelijk aan $(n - 1) \cdot p$. Als we $p = \lambda/n$ nemen met een constante λ , dan geldt voor de verwachtingswaarde: $(n - 1) \cdot p < \lambda$. In figuur 3 zie je een voorbeeld met $n = 50$ en $\lambda = 1$ (dus met $p = 1/50$).



figuur 3 Een E-R-graaf met $n = 50$ en $\lambda = 1$

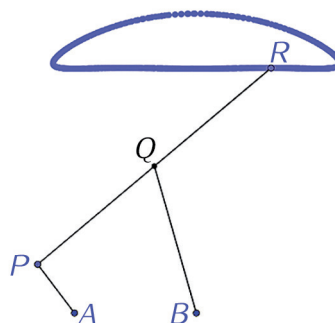
De kans dat een gegeven knoop graad 0 heeft, is $(1 - \lambda/n)^{n-1}$. Deze kans convergeert naar $e^{-\lambda}$ voor $n \rightarrow \infty$. Bij $n = 50$ en $\lambda = 1$ verwachten we dus ongeveer $50e^{-1} \approx 18,4$ geïsoleerde knopen (vergelijk figuur 3).

Vervolgens werd onderzocht hoeveel driehoeken, vierkanten en dergelijke te verwachten waren in de E-R-grafen met parameters n en $p = \lambda/n$ voor grote n . De moeilijkheidsgraad werd langzaam opgebouwd in een serie van zes presentaties van 45 minuten verdeeld over twee dagen. Nelly Litvak had veel interactie met het publiek, waardoor haar verhaal goed te volgen was. De cursus eindigde met een presentatie van Pim van der Hoorn over o.a. het PageRank-algoritme (van Google) toegepast op het spoorwegennetwerk van Nederland en een presentatie van Clara Stegehuis over sociale netwerken. Ook hier werden de deelnemers aan het werk gezet met enkele opdrachten om zich de ideeën eigen te maken.

De cursus 'Stangenconstructies' van 2021

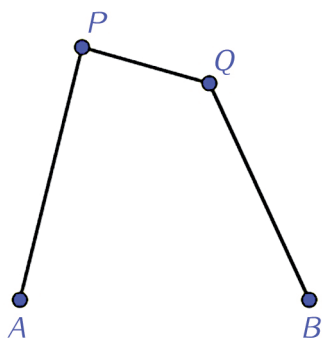
In 2021 verzorgde Rainer Kaenders de vakantie-cursus over de meetkunde van stangenconstructies.

Stangenconstructies vind je in deuren van bussen, in hijskranen, ruitenwissers, fitnessstoestellen, kindervagens, bureaulampen, in de beroemde strandbeesten van Theo Jansen, enzovoorts. In figuur 4 zie je bijvoorbeeld de zogenaamde λ -constructie van Tsjebysof. De punten $A(0, 0)$ en $B(4, 0)$ zijn vast, P beweegt over de cirkel met middelpunt A en straal 2, Q beweegt over de cirkel met middelpunt B en straal 5, het lijnstuk PR heeft lengte 10 en Q is het midden van PR . Je kunt deze constructie in GeoGebra maken, P (laten) bewegen langs de cirkel en bij punt R het 'spoor' aanzetten. Je ziet dan dat R beweegt langs een lus met een vrij 'platte' onderkant. Jansen gebruikt soortgelijke constructies om een cirkelbeweging om te zetten in een stapbeweging van de poten van zijn strandbeesten.



figuur 4

In de cursus hebben we geëxperimenteerd met fysieke stangenconstructies, geleerd hoe je hiermee rechte lijnstukken kunt tekenen en kunt spiegelen in cirkels. Teun Koetsier vertelde over stangenconstructies in de stoommachines van Watt. Kunstenaar Theo Jansen heeft enkele strandbeesten en stangenmechanismen daarin gedemonstreerd en daarna eindigde Rainer met twee sensationele uitsmijters. De ene betrof een ongelooflijke 'universaliteitsstelling': elk deel van elke reële algebraïsche kromme (dus een kromme in $\mathbb{R}^2$ die wordt gegeven door een reële polynomiale vergelijking) kan worden getekend door een stangenconstructie! De andere uitsmijter ging over configuratieruimten. Neem bijvoorbeeld de constructie uit figuur 5. De punten A en B zijn vast en de lijnstukken AP , PQ en QB hebben vaste lengte, zeg a , b en c . Waar in het vlak kan Q liggen? Om dit te onderzoeken kun je de constructie in GeoGebra tekenen (bij gegeven keuzen van A , B en a , b en c) het spoor van Q aanzetten en P bewegen over de cirkel met middelpunt A en straal a . Daarna kun je *beredeneren* wat het antwoord is.



figuur 5

Vervolgens kun je een 5-stangenconstructie onderzoeken of dit door leerlingen laten uitzoeken. (Als ze snel klaar zijn, kunnen ze met de 6-stangenconstructie verder... .) In de vakantiecursus hebben we ontdekt hoe het schijnbaar eenvoudige probleem van de 5-stangenconstructie leidt tot topologische overpeinzingen over strandballen, zwembanden en krakelingen. Dit alles staat prachtig beschreven in de syllabus met handgetekende, gekleurde illustraties. Wat een geweldige kennismaking met topologie ('rubber meetkunde') zou zo'n project voor leerlingen kunnen zijn!

Tot slot

Deze drie voorbeelden (de priemgetallen, de stochastische netwerken en de stangenconstructies) laten zien wat je kunt verwachten op een vakantiecursus: uitdagende, mooie wiskunde in de vorm van een zorgvuldig opgebouwde cursus van ongeveer zes voordrachten in twee dagen. Behalve een uitgebreide syllabus krijg je ook een lijst met bronnen (bijvoorbeeld simulaties en software) mee en een hoofd vol ideeën, waarvan je er zeker enkele in de klas kunt toepassen. Een eenvoudige priemtest uit de cursus kan bijvoorbeeld een groot natuurlijk getal n snel 'ontmaskeren' als niet-priemgetal, zonder dat we moeizaam naar een deler van n hebben moeten zoeken en zelfs zonder dat we een deler van n kennen! Verder kun je laten zien hoe dit soort wiskunde in het dagelijks internet-verkeer wordt gebruikt. Je kunt met leerlingen toevals-grafen genereren en enkele eenvoudige eigenschappen en consequenties voor verspreidingen van epidemieën onderzoeken. In GeoGebra kun je stangenconstructies (laten) simuleren en eigenschappen hiervan laten onderzoeken.

Vakantiecursus 2024



De vakantiecursus voor leraren wiskunde 2024 zal plaatsvinden in Amsterdam (CWI): vrij 23 en za 24 augustus. En in Antwerpen (Universiteit Antwerpen, Campus Groenenborger): vrij 6 en za 7 september.

De organisatie is in handen van PWN (Platform Wiskunde Nederland) en PWV (Platform Wiskunde Vlaanderen).



Het thema is: 'Banach-Tarski: hoe groepentheorie van één meloen er twee maakt'. Hoofddocenten: Stefaan Vaes (KU Leuven) en Jeroen Spandaw (TU Delft). Gastdocent: David Eelbode (UAntwerpen).

Je kunt je opgeven op www.platformwiskunde.nl/vakantiecursus/. Hier kun je ook de brochure downloaden met alle inhoudelijke en praktische informatie. Het cursusgeld bedraagt €99, waarbij de syllabus en de maaltijden zijn inbegrepen. Voor studenten en leerlingen bedraagt het cursusgeld €39, terwijl voor gepensioneerden een gereduceerd tarief geldt van €55. Vanzelfsprekend zijn je collega's, alsmede leerlingen uit de bovenbouw met interesse in wiskunde, ook van harte welkom!

Noten

- [1] <https://platformwiskunde.nl/>
- [2] Gemaakt door www.networkpages.nl/ CustomMedia.
- [3] Alle materialen vanaf 1983: <https://platformwiskunde.nl/vakantiecursus/>

Over de auteurs

Els Vanlommel is leerkracht wiskunde in het Heilig Hart van Maria te Berlaar, redactielid van het tijdschrift *Uitwiskeling* en bestuurslid van het Platform Wiskunde Vlaanderen. Jeroen Spandaw is gepromoveerd en gehabiteerd in de algebraïsche meetkunde. Hij was docent wiskunde en natuurwetenschappen en sinds 2007 is hij universitair docent en lerarenopleider wiskunde aan de TU Delft.

Lezen bij de opruiming



Na mijn laatste werkdag had ik het voornemen om eerst mijn kamer op te ruimen. Nu meer dan een jaar later ben ik er nog niet klaar mee. Je komt allerlei dingen tegen die herinneringen oproepen, zoals artikeltjes uit de krant, wiskundeprobleempjes en noem maar op. Ik lees ze door en soms ben ik er zo door gegrepen dat van opruimen niets terecht komt.

Zo had ik laatst het boek *De eenzaamheid van de priemgetallen* van Paolo Giordano in mijn handen. Ik wist niet eens dat ik het had, maar zo'n intrigerende titel zette me meteen aan het lezen. Een apart verhaal, maar ik vind het wel de moeite waard. Uiteraard is er een jongen die zeer goed is in wiskunde en zijn docenten verstand doet staan. Bijna ook vanzelfsprekend, want zo lijkt de wereld naar wiskundigen te kijken, is hij zwaar autistisch. Opgesloten in zichzelf krijgt hij toch een soort relatie met een meisje.

Dan komt er ook nog wat wiskunde aan te pas.

Priemtweelingen. Eerst een niet geheel correcte definitie van een priemgetal: priemgetallen zijn alleen deelbaar door zichzelf en door één. Niet geheel correct, want dan zou één ook priem zijn, maar dat is niet zo. Twee is het kleinste priemgetal.

De hoofdpersoon vindt de priemgetallen eenzame getallen. Ze hebben eigenlijk nooit naaste burens, want tussen twee priemgetallen bevindt zich bijna altijd een even getal. De enige uitzondering zijn natuurlijk 2 en 3. Maar soms staan de

“TUSSEN TWEE PRIEMGETALLEN
BEVINDT ZICH BIJNA ALTIJD EEN EVEN
GETAL”

alle priemgetallen tot 100:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

figuur 2

priemgetallen erg dicht bij elkaar zoals 3 en 5 en 11 en 13. Dit zijn voorbeelden van priemtweelingen. Dan komt hij met een priemtweeling: 2760889966649 en 2760889966651. Het eerste was zijn getal en het tweede het getal van zijn vriendin. Eenzame getallen, dicht bij elkaar, maar geen directe burens van elkaar. Ik vind het wel mooie symboliek en als je het boek leest, ben je het misschien wel met me eens.

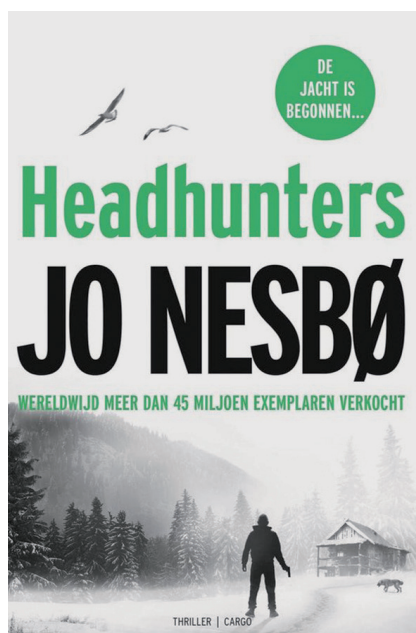
Maar, zijn het priemgetallen? Dat is natuurlijk de vraag die meteen opkomt. Maar hoe controleer ik het? Deelbaar door 3 en 5 gaat nog wel, maar door 7 en 11 enzovoort. Je hoeft natuurlijk maar te controleren tot de wortel uit het getal, maar dat is in dit geval tot 520471. En dat zijn grote getallen...

De zeef van Eratosthenes is natuurlijk wel bekend, zie figuur 2. Streep alle veelvouden van 2, 3, 5 enz. weg. Getallen die je overhoudt zijn dan priem. Maar de genoemde getallen zijn wel erg groot.

Makkelijkste is dan om WolframAlpha op te starten en te vragen: 'Is 2760889966649 a prime number' wat in een fractie van een seconde het antwoord geeft: '2760889966649 is a prime number'.

Maar dat is natuurlijk niet echt bevredigend, maar enig zoekwerk leverde alleen maar moeilijke vragen op. Had ik vorig jaar nou maar de zomercursus bezocht (zie blz xx in deze *Euclides*)...

Priemgetallen lijken voor schrijvers intrigerend te zijn. Ik kwam ze ook tegen in *Headhunters* van Jo Nesbø. Het gaat hier ook over priemtweelingen. De hoofdpersoon vraagt aan een mooie vrouw na uitgelegd te hebben wat priemgetallen zijn en dat er veel priemtweelingen zijn zoals 11 en 13, 17 en 19, 29 en 31, of er ook drie opeenvolgende oneven priemgetallen zijn.



"HAD IK VORIG JAAR NOU MAAR DE ZOMERCURSUS BEZOCHT"

De mooie vrouw antwoordt heel snel: natuurlijk niet, tenminste niet boven de 7. De man twijfelt of ze het antwoord echt weet en vraagt waarom niet en dan volgt het geweldige antwoord: in een getallenreeks van vijf opeenvolgende getallen is er altijd een van de oneven getallen deelbaar door drie. De hoofdpersoon is zo diep onder de indruk van het antwoord dat hij meteen besluit dat zij zijn vrouw moet worden. Waar wiskunde toch al niet goed voor is!

Overigens denk ik dat het antwoord niet volledig goed is, want in de reeks 10, 11, 12, 13, 14 is het getal dat deelbaar is door drie 12 en dat is een even getal. Maar dit is natuurlijk een flauw voorbeeld, want we praten over drie opeenvolgende oneven getallen en daartussen zitten dan de twee even getallen. De reeks wordt dan $2n + 1$, $2n + 2$, $2n + 3$, $2n + 4$, $2n + 5$ en deze bevat altijd een drievoud. Denk maar aan resten: als $2n + 1$ een drievoud is ben je klaar. Als $2n + 1$ bij deling door 3 rest 1 heeft, dan is $2n + 3$ een drievoud en als $2n + 1$ rest 2 heeft, dan is $2n + 4$ een drievoud.

Overal kom je de wiskunde tegen zelfs bij het lezen van literatuur of van spannende boeken.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde in ruste.

E-mailadres: a.b.vanderroest@ziggo.nl

X en y

Ik ben x en ik wil dat het stopt.

Ik word steeds met y in een formule gepropt.

Ik wil geen getal worden om tot y te komen.

Ik heb mijn eigen zorgen, mijn eigen dromen.

y is ook veel te afhankelijk van mij.

Houd het simpel: ik ben x en jij bent y.

Ieder onszelf, allemaal blij.

Lourens Schuijtemaker, OSG West-Friesland te Hoorn

Deel 4: In gesprek met alumni

'Toegepaste wiskunde' – is dat ook een opleiding?

In *Euclides* 98-2 signaleerden we de grote onbekendheid van de opleiding 'Toegepaste Wiskunde (TWI)' onder middelbare scholieren en hun wiskundedocenten. Voor het artikel in *Euclides* 98-4 interviewden we vijf recentelijk afgestudeerden, van elke opleiding één. In *Euclides* 98-7 kwamen de docenten aan het woord en nu schetst, tot slot, een aantal alumni het verloop van hun carrière na hun afstuderen.



Anouk van Wingerden, 27 jaar

Wiskundige vooropleiding: havo wiskunde B
Afgestudeerd aan de Haagse Hogeschool in 2018
Master Data Science – Universiteit van Amsterdam
2020
Loopbaan
2019: Lely
2019 – nu: Scope Data

Hoe ben je bij Toegepaste Wiskunde terechtgekomen?

Ik wist niet van het bestaan van de opleiding, maar ik heb gewoon de hele lijst van opleidingen doorgelopen en bijna onderaan stond Toegepaste Wiskunde (toen heette het nog Bedrijfswiskunde). Ik heb me ingeschreven en daar heb ik geen moment spijt van gehad.

Wat heb je gedaan tijdens je afstudeeropdracht bij Toegepaste Wiskunde?

Ik heb mijn afstudeeropdracht gedaan bij Lely, een bedrijf dat robots maakt dat koeien kan melken en voederen. Beide robots worden vaak samen gebruikt en leggen heel veel data vast. Ik onderzocht de relatie tussen kwaliteit en de samenstelling van de melk zoals vastgesteld door de

melkrobot en de door de voederrobot uitgevoerde activiteiten.

De wiskundige technieken die ik daarbij gebruik heb waren PCA (*Principal Component Analysis*) en multi-variabele regressie. Het onderzoek was belangrijk voor de sales omdat nu aangetoond was dat een voederrobot een positief effect heeft op de hoeveelheid en de kwaliteit van de melk. Daarna heb ik nog een tijdje gewerkt bij Lely waar ik onder andere voor groepen reserveonderdelen tijdreeksmodellen heb ontwikkeld in Python. Ook heb ik dashboards gemaakt in *Tableau* en meetmodellen voor de datakwaliteit.

En bij de afstudeeropdracht voor de master Data Science?

Ik heb mijn thesis gedaan bij Royal Brinkman. Dit bedrijf is gespecialiseerd in producten en diensten voor telers en heeft een veelgebruikte webshop. Het onderzoek ging over het voorspellen van de tijd waarop een klant weer een nieuwe aankoop via de webshop ging doen. Als er dan een lange periode tussen de ene en de volgende aankoop zou zitten, kon dat bijvoorbeeld een signaal zijn voor een accountmanager om actie te ondernemen. LSTM (*long short-term memory*) was de techniek die hiervoor werd gebruikt. Dit is een speciale soort RNN (*recurrent neural network*). Om deze goed te trainen was er data van meerdere jaren nodig. In de jaren ervoor hadden wisselingen plaatsgevonden in het platform waar de webshop op draaide, wat de datakwaliteit voor de trainingsset beïnvloedde. Dat maakte het onderzoek extra moeilijk.

Sinds die tijd werk je bij Scope Data – wat doe je daar zoal?

Ik wilde vooral iets doen met data en heb de tijd genomen om gesprekken aan te gaan met een aantal bedrijven die

mij via LinkedIn 'bestookt' hadden met aanbiedingen. Bij Scope Data ben ik echt op mijn plek. Ik ben ondertussen bij een aantal verschillende organisaties gedetacheerd geweest.

Bij een van die organisaties heb ik een topic model ontwikkeld dat grote hoeveelheden tekst clustert naar groepen van teksten die over dezelfde onderwerpen gaan. Bijzonder hieraan was dat deze clustering zodanig gemaakt werd dat de semantische betekenis van teksten ook werd meegenomen. Dit model zorgde voor inzicht in trending topics, maar kon ook eenvoudig de 'bijzondere' outlier teksten detecteren.

Hoeveel wiskunde gebruik je nog?

Heel veel eigenlijk. Veel machine learning maar ook data-analyse. Correlaties, feature importance, t-testen, minimaliseren van de error, normaliseren van de data, etc; het komt nog dagelijks terug.

Wat vind/vond je het meest waardevol aan de opleiding?

De toepassingen en de cases waardoor ik direct al zag wat er in het bedrijfsleven mogelijk was. De kleinschaligheid van de opleiding vond ik ook heel prettig. Ik zie de meiden uit mijn jaargang nog steeds een paar keer per jaar. Veel daarvan zijn data scientist of data-analist.



Derya Ilicali Celik, 38 jaar

Yildiz Technical University - Master in Physics 2010
Graduated at InHolland 2017

Professional career

2018 – 2022: Irdeto

2022 – present: Dynamic Web Marketing

Why did you choose Applied Mathematics after coming to the Netherlands?

In Turkey, my original aim was to study mathematics at university. However, due to my entrance exam score not

being high enough, I opted for physics instead. When I came to the Netherlands, I was also interested in software engineering, but unfortunately, it wasn't available in English at InHolland. Applied Mathematics turned out to be a good second choice because I had a passion for mathematics, and the program also included some aspects of software engineering. Looking back, I realized that the *hbo* system suited me better than studying at a university because my internships focused more on the business side rather than pure research.

Tell us a bit about your internships.

During my first internship at Backbase, I gained practical experience in a software development role that didn't involve much mathematics. My second internship was at Irdeto, where I worked on a project related to conditional access technology. *Conditional access* (CA) is a method for providing access to pay TV content exclusively to subscribed users. It involves transmitting encrypted keys to subscribers via the satellite network. Bandwidth consumption is a critical factor because TV providers have limitations. For my graduation project at Irdeto, I developed a simulator to measure bandwidth consumption and optimized the solution to meet the bandwidth limitations.

The mathematics involved in this project included applying algorithms and mathematical concepts. The *Dynamic Key Ladder algorithm* was designed to solve the grouping problems, and LKH (*Logical Key Hierarchy*) operations were used to calculate bandwidth consumption. The solution was optimized by batching the messages, and the results were compared with non-batched messages.

How about your professional career?

After my internships, I joined Irdeto's graduate program for 18 months, working in three different teams. In one of these teams, I served as a data engineer and primarily focused on creating scripts to monitor the performance of the data warehouse. Subsequently, I transitioned to a software engineer role. In October 2022, I joined Dynamic Web Marketing as a Java developer and later transitioned to an Engineering Manager role.

In what way were or are you still using mathematics during your career?

As a developer, mathematics still play a significant role. Despite the title, my current role involves creating *Key Performance Indicators* (KPIs) as well using a tool called *Datadog*. The developers implement the metrics, and my role primarily involves using basic arithmetic functions

>

such as sum, min, max, and avg to analyse the data. In Datadog, you can build customised dashboards to present the results. Some might say I am working as a business intelligence engineer at the moment. I don't need to use complex queries because the underlying calculations are handled by Datadog.

In my career, I continue to utilise various mathematical concepts and areas of mathematics that are relevant to my work. Some of these include statistics, linear algebra, calculus, and optimization. These mathematical principles enable me to make data-driven decisions by analysing and interpreting complex datasets, improve performance by optimizing algorithms and processes, and develop efficient solutions by applying mathematical modelling and problem-solving techniques.

For example, statistics allows me to analyse data trends and patterns, identify correlations, and draw meaningful insights from large datasets. Linear algebra is essential for tasks such as matrix operations and solving systems of linear equations, which often arise in data analysis and optimization problems. Calculus plays a role in understanding rates of change, optimizing functions, and performing numerical computations. Optimization techniques help me find the best possible solutions by minimizing costs, maximizing efficiency, or optimizing resource allocation.

By leveraging these mathematical concepts, I can contribute to improving business processes, optimizing algorithms, and developing innovative solutions that drive performance and deliver value in my role as an Engineering Manager.

What would you tell someone to promote studying Applied Mathematics?

Studying Applied Mathematics offers a wide range of job possibilities. If I were to provide a suggestion to InHolland, it would be to integrate more AI (Artificial Intelligence) into the program. Additionally, it's worth mentioning that I already know programmers who write code using ChatGPT exclusively, highlighting the versatility and relevance of the skills acquired through studying Applied Mathematics.



Gabriëla de la Cruz, 28 jaar

Wiskundige vooropleiding: havo wiskunde B en D.
Afgestudeerd aan de Haagse Hogeschool in 2016
Master Data Science – Universiteit van Amsterdam
2022

Loopbaan

2019 - 2020: Ordina
2021 - 2023: Tensing GIS Consultancy
2023 - nu: Esculine

Hoe ben je bij Toegepaste Wiskunde terechtgekomen?

Ik heb de propedeuse Verpleegkunde gedaan met de bedoeling geneeskunde te gaan studeren maar ik werd uitgeloot. Ik had nog wel contact met oud-klasgenoten en daarvan deed iemand de opleiding en na een proefles vond ik het zo leuk dat ik mij aangemeld heb. Ik had voor die tijd nog nooit van de opleiding gehoord. Ik zie nu overigens op LinkedIn wel meer aanwezigheid van de opleiding.

Wat heb je gedaan tijdens je afstudeeropdracht bij Toegepaste Wiskunde?

Ik heb mijn afstudeeropdracht gedaan bij de afdeling Medische Microbiologie van het UMC Utrecht. Daar gebruikte men twee tools om vast te stellen welke micro-organismen in patiëntmateriaal aanwezig waren en men wist niet in welke gevallen de ene en in welke gevallen de andere tool het beste kon worden gebruikt. Ik heb op de beschikbare data statistische analyses uitgevoerd tussen de door de tool gegenereerde classificaties en de originele classificaties. Voor de evaluatie heb ik de voor dit soort situaties gangbare technieken toegepast.

En bij de afstudeeropdracht voor de master Data Science?

Die heb ik ook gedaan bij het UMC Utrecht. Het afstudeeronderzoek richtte zich op het kunnen voorspellen of een patiënt met kanker schadelijke bijwerkingen kan ontwikkelen tijdens de immunotherapie. Allerlei beschikbare gegevens worden gekoppeld en gebruikt als input in een

machine learning model. Het eindresultaat is een *pipeline* waarin de gebruiker de data van een patiënt invoert in een bepaalde *template* en voorspellingen krijgt of deze in een periode van twee tot vijf jaar ernstige bijwerkingen zal ontwikkelen tijdens de behandeling.

Ik moest de data opschonen, standaardiseren en ik moest met statistische technieken de outliers zien op te sporen. Ik heb vier machine learning modellen bekeken: neurale netwerken, *random forest*, *XGBoost* (een variant op beslisbomen) en lineaire regressie. Een neurale netwerk bleek de beste methode te zijn.

Wat heb je zoal gedaan bij je vorige werkgevers?

Mijn werk voor Tensing GIS Consultancy betrof vaak dataconversie met behulp van FME (*Feature Manipulation Engine*), een ETL-tool (*Extract, Transform, Load*) die vaak gebruikt wordt bij geografische informatiesystemen. Ik werkte als Python developer en daar kwam niet veel wiskunde aan te pas, maar vooral analytisch denken. Mijn laatste klussen voor Tensing GIS Consultancy waren bij Rijkswaterstaat – niet alles zat in de medische sfeer. Regio's van Rijkswaterstaat doen geregeld verzoeken om iets aan de data te veranderen zoals het datamodel of de datastructuur. Door middel van generieke Python-modules voerde ik deze veranderingen door in de landelijke databases zodat een en ander overal gesynchroniseerd was. De gebruikers beschikken daardoor over de laatste geüpdatete versie.

Wat is je nieuwe baan?

Ik ga half augustus aan het werk bij Esculine. Dit bedrijf voorziet zorgorganisaties van tools om hun zorgdata eenvoudig te kunnen analyseren. Ik ga in eerste instantie aan de slag als data engineer maar uiteindelijk is het de bedoeling dat ik ingezet word als *healthcare informatics consultant*. Hiermee zit ik weer meer in de analytische hoek en ben ik toch ook terug weer in de medische sfeer.

Wat vind/vond je het meest waardevol aan de opleiding?

Ik kijk heel positief terug op de opleiding. Het is heel uitdagend en je leert groepswork. Als je eenmaal klaar bent, kun je echt alle kanten op. Ik heb nog wel contact met medestudenten en dan zie je dat ze allemaal op heel verschillende posities terecht zijn gekomen. Als je ict leuk vindt maar je wilt geen 'harde' ict'er worden, dan is dit een leuke opleiding. De opleiding is ook heel breed en zit zo goed in elkaar dat je ook geen angst voor wiskunde hoeft te hebben.

Hogescholen

Dit zijn (in alfabetische volgorde) de hogescholen die de opleiding aanbieden.

De Haagse Hogeschool – locatie Delft – voertaal Nederlands. <https://www.dehaagsehogeschool.nl/opleidingen/hbo-bachelor/toegepaste-wiskunde>

Fontys Hogeschool – locatie Eindhoven – er is vanaf 2022-2023 naast de Nederlandstalige variant ook een Engelstalige variant. <https://fontys.nl/Studeren/Opleidingen/Toegepaste-Wiskunde-voltijd.htm>

Hogeschool InHolland – locatie Amsterdam – voertaal Engels. <https://www.inholland.nl/opleidingen/applied-mathematics-data-science-eng-full-time/>

Hogeschool van Amsterdam – locatie Amsterdam – voertaal Nederlands.

<https://www.hva.nl/opleidingen/toegepaste-wiskunde>

NHL Stenden Hogeschool – locatie Leeuwarden – voertaal Nederlands.

<https://www.nhlstenden.com/hbo-opleidingen/toegepaste-wiskunde>

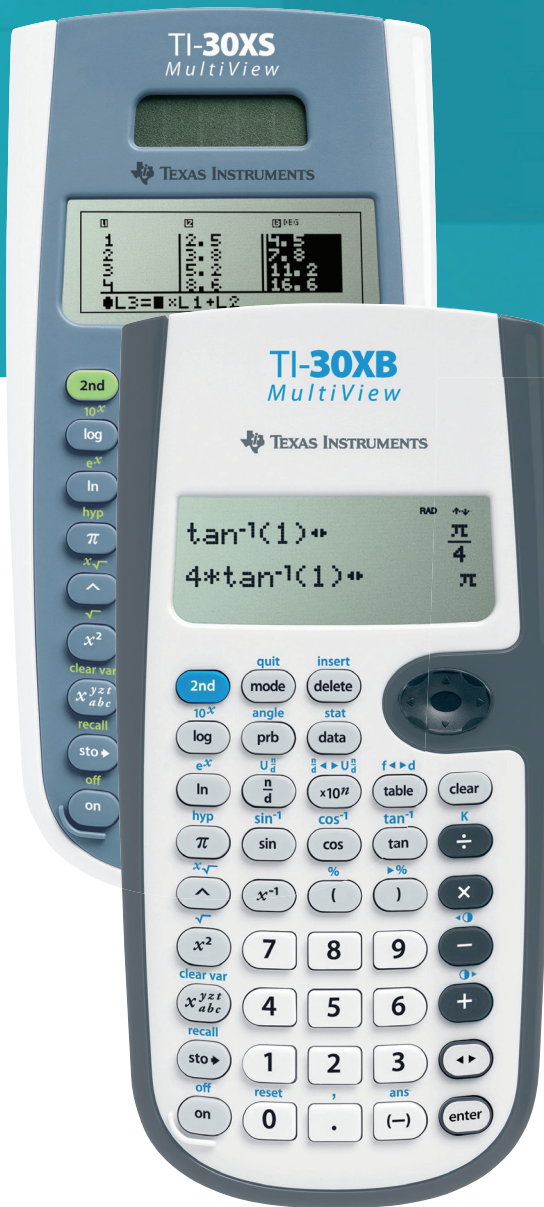
In memoriam Jack Schilder

Jack Schilder schreef voor *Euclides* deze serie artikelen over de hbo-opleiding Toegepaste Wiskunde, waarvan er al drie verschenen. Toen bereikte ons het droevige bericht dat Jack vrij plotseling was overleden. Op basis van wat hij al had verzameld kon, in samenwerking met zijn familie, dit vierde artikel afgerond worden.

Jack Schilder deed doctoraal wiskunde in Amsterdam. Hij werkte vanaf 1975 als docent wiskunde in het voortgezet onderwijs en vanaf 1984 als docent informatica in het hbo. Hij schreef boeken over programmeren en over het schrijven van een rapport. Na zijn pensionering gaf hij vanaf 2014 bij de opleiding Toegepaste Wiskunde aan NHL Stenden hogeschool de vakken Databases en Business Intelligence. Ook gaf hij een aantal malen een pre-master cursus wiskunde bij de Universiteit Groningen.

Jack was zeer deskundig op diverse terreinen en een hele prettige collega om mee samen te werken. Privé was hij lange tijd in verschillende functies betrokken bij de voetbalclub GVAV-Rapiditas in Groningen. Jack werd 73 jaar oud.

Klaas-Jan Wieringa, NHL Stenden hogeschool, Leeuwarden. E-mailadres: klaas-jan.wieringa@nhlstenden.com



Een rekenmaatje voor in elke klas!

Met deze wetenschappelijke rekenmachines bereken je eenvoudige sommen én wetenschappelijke en statistische functies.

Geschikt voor

- » Vmbo-mavo, onderbouw havo en vwo, bovenbouw havo en vwo (naast software).
- » Toegestaan bij de examens voor alle vakken op alle niveaus, behalve bij de examens wiskunde havo en vwo.



De TI-30XS MultiView™ heeft als extraatje dat deze ook werkt op zonne-energie!



Extra's

- » Gratis emulatorsoftware
- » Instructievideo's



bit.ly/3UiUZno

education.ti.com/nl

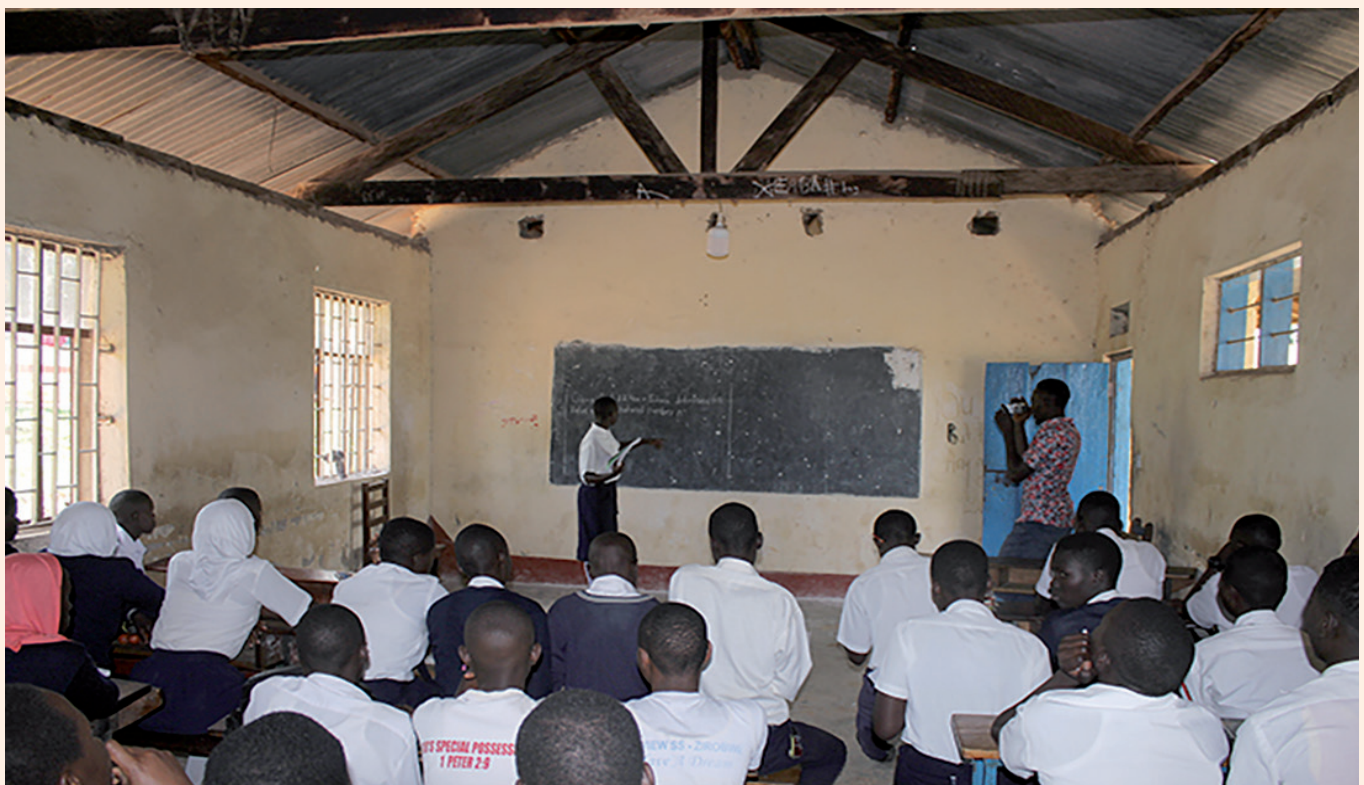
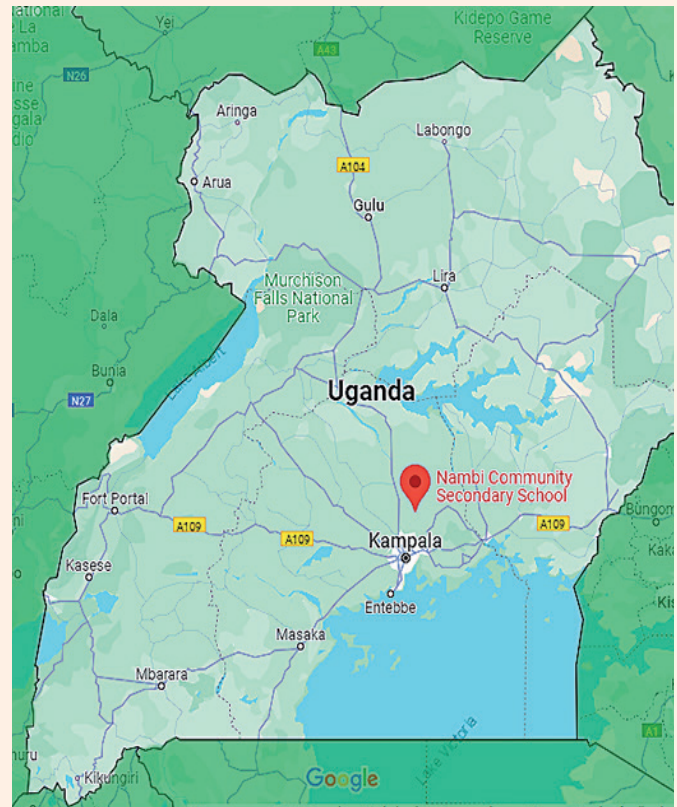
Wereldwiskunde Fonds in Oeganda

Inleiding

Voor de tweede maal ondersteunde het Wereldwiskunde Fonds in samenwerking met Lubega Cosmas Foundation Uganda (LUCOF)^[1] een school in Oeganda om te helpen bij het wiskundeonderwijs. In *Euclides* 98-5 heb je een verslag kunnen lezen van het project op de Wakatayi middelbare school. Omdat dit een succesvol project is gebleken, aarzelden we niet om een tweede school met LUCOF te gaan ondersteunen: Nambi middelbare school. Het WwF stelde ruim 4800 euro beschikbaar, niet alleen voor boeken en ander benodigd materiaal, maar ook voor de training van docenten in workshops om meer kennis en vaardigheden bij hen aan te brengen om het wiskunde-onderwijs te verbeteren.

De school

Nambi ligt op ruim 60 km afstand van de hoofdstad Kampala. De school is een dorpsschool die ondersteund wordt door de overheid. De school trekt veel plattelandskinderen uit arme en kwetsbare gezinnen, omdat er geen schoolgeld betaald hoeft te worden. De overheid zorgt voor de financiering van gebouwen en docenten, maar er is een schreeuwend tekort aan materialen.



Het project

Uit het rapport van LUCOF: 'The main aim of the project is to ensure that by the end of 2023, learning and studying mathematics in secondary school in Nambi has become a passion and an integral part of the students and mathematics teachers. To ensure that Mathematics is promoted and encouraged to all the desperate and vulnerable students who study it and all the teachers who teach it in this school, so that the students love it and excel in national examinations. This helps them to progress to higher education and university.'



Resultaten

In hoeverre worden de beoogde doelen eigenlijk behaald? Dat vragen we ons natuurlijk dikwijls af. Niet vaak krijgt de werkgroep concrete cijfers terug. Maar vanuit de Nambi school kwamen er cijfers door van resultaten vóór de start van het project en daarna.

Onderstaande tabel spreekt denk ik voor zich. Als het percentage geslaagde leerlingen een maat is voor een toegenomen passie voor de studie van de wiskunde onder docenten en studenten, dan kunnen we ook nu weer spreken van een zeer geslaagd project in Oeganda.

Noot

[1] Zie: <https://lucofuganda.org/nambi-mathematical-project/>

Over de auteur

Hans van de Lagemaat is docent wiskunde aan Rijnlands Lyceum Oegstgeest en sinds 2007 lid van de werkgroep Wereld Wiskundefonds. E-mailadres: H.vandelagemaat@rijnlandslyceum-rlo.nl

Algebra	Van de 65 leerlingen in klas S.4 slaagde slechts 12% vóór het algebraproject. Sinds juni heeft 78% of meer van de studenten een voldoende.
Meetkunde	Van de 65 leerlingen in klas S.4 slaagde slechts 17% vóór het meetkundeproject. Sinds juni heeft 65% of meer een voldoende.
Statistiek	Van de 65 leerlingen in klas S.4 slaagde slechts 14% vóór het statistiekproject. Sinds juni heeft 71% of meer een voldoende.
Goniometrie	Van de 65 leerlingen in klas S.4 slaagde slechts 21% vóór het goniometrieproject. Sinds juni heeft 69% of meer een voldoende.
Overige	Er was ook een significante toename in het behalen van Calculus (met 48%), waarschijnlijkheidsrekenen (met 51%), grafieken en kwadratische functies (met 43%)



Eerste uitnodiging

Dit is de eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/-studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 2 november 2024.

Aanvang: 10.00 uur
Sluiting: 16.15 uur
Plaats: Ichthus College
Vondellaan 4
3906 EA Veenendaal.

Thema van de studiedag: De magie van 100

Het 100^{ste} verenigingsjaar van de NVvW, opgericht op 15 december 1925, daar willen we een gedenkwaardig jaar van maken. Deze zaterdag moet de aftrap worden van een jaar met allerlei memorabele en feestelijke activiteiten.

We zullen tijdens deze studiedag terugblikken en vooruitkijken. Waar hadden we het 100 jaar geleden over? Welke hulpmiddelen hebben we door de eeuw heen gehad? Welke didactische benaderingen van vroeger zijn ook nu nog waardevol? En als we de andere kant op kijken, wat zien we dan voor ons in de toekomst met de aanstaande curriculumvernieuwingen? Kunnen we de leerlingen uitdagen om te modelleren, en zowel kritisch als creatief met algoritmes leren werken? Is AI inzetbaar om wiskunde te leren?

Genoeg om een feestelijke studiedag mee te vullen! Het zou leuk zijn als je een workshop wilt verzorgen waar verleden, heden of toekomst van het wiskundeonderwijs een rol in speelt. Dat kan op diverse manieren:

- Een thema van weleer afstoffen en geschikt maken voor de huidige onderwijspraktijk.
- Een blik vooruit naar modelleren, het werken met algoritmes en ervaringen met het gebruik van AI en bijvoorbeeld ChatGPT in de klas.
- 100 – is dat een binair getal of denken we tientallig? Goochelen met getallen, vroeger en nu!

We nodigen wiskundeleraars en andere betrokkenen bij ons wiskundeonderwijs uit om kennis en ervaringen te delen. We hopen dat we elkaar deze studiedag in het honderdste verenigingsjaar weer mogen ontmoeten en inspireren!

Heb je ideeën voor een workshop? Dan horen we die graag. Mail naar studiedag@nvvw.nl

*Sharon Calor, Margot Rijnierse en
Michiel Doorman*

(Concept) Agenda jaarvergadering 10.00-11.00 uur – Jaarvergadering

- 1 Opening door de voorzitter, Wim Caspers
- 2 Jaarrede van de voorzitter
- 3 Notulen van de jaarvergadering van 4 november 2023
- 4 Jaarverslagen 2023/2024.
4.1 Jaarverslag van de NVvW
4.2 Jaarverslag van *Euclides*
- 5 Financiën
5.1 Jaarrekening en balans 2023/2024
5.2 Verslag kascommissie
5.3 Decharge van het bestuur
5.4 Begroting en vaststelling contributie
5.5 Benoeming nieuwe kascommissie
- 6 Bestuursverkiezing
- 7 Rondvraag
- 8 Sluiting van de jaarvergadering

Programma studiedag

In het volgende nummer van *Euclides* en via de nieuwsbrief krijg je nadere informatie over wat je kunt verwachten op 2 november 2024. Voor meer praktische informatie over de organisatie kun je je wenden tot Heleen van der Ree (hoofdbureau@nvvw.nl).

**Dus reserveer in je agenda: NVvW-dag op
zaterdag 2 november 2024.**



In december plaatsten we een kerstpuzzel. We vroegen Alex van den Brandhof of hij de inzendingen wilde bespreken en als enig jurylid de winnaars wilde bepalen.

Een groep van n kabouters wordt gevangengehouden. Ze worden achter elkaar in een rij geplaatst. Eén van hen krijgt een rode muts op zijn hoofd, de rest een blauwe muts.

Dat weten de kabouters, maar uiteraard wordt niet verteld wie de rode muts zal krijgen. Elke kabouter kan alleen de mutsen van de kabouters vóór hem zien. Eén voor één wordt de kabouters gevraagd of ze hun mutskleur kennen – de kabouter achteraan eerst, daarna de kabouter vóór hem, enzovoort. De kabouters (die vooraf niet de gelegenheid krijgen om met elkaar te praten) moeten antwoorden met 'ja' of 'nee'. Iets anders mogen ze niet zeggen. Alle kabouters worden vrijgelaten als de roodgemutste kabouter 'ja' antwoordt. Als de $n - 1$ blauwe mutsen en de ene rode muts willekeurig worden verdeeld onder de n kabouters, hoe groot is dan de bevrijdingskans als n even is? En als n oneven is?

Oplossing

We ontvingen zes inzendingen, waarvan er vijf correct waren. Bij de opgave stond niet vermeld dat kabouters nooit liegen. Een omissie die door de meeste inzenders werd opgemerkt. Gelukkig hadden alle inzenders wel door dat een kabouter alleen 'ja' mag zeggen als hij zeker weet wat de kleur van zijn muts is (en hij dat ook kan uitleggen). Anders is de puzzel flauw: iedereen kan dan gewoon 'ja' roepen.

De correcte oplossing luidt: voor even n is de bevrijdingskans altijd $1/2$; voor oneven n is die kans ietsje groter, namelijk $(n+1)/(2n) = 1/2 + 1/(2n)$.

We ontvingen diverse afleidingen van deze formule, onder andere gebruikmakend van recursieve en directe formules. Ook kregen we een bewijs met volledige inductie. Hier volstaan we met een korte uitleg voor het geval $n = 7$.

Bij de mutsverdeling RBBBBBB staat de roodgemutste kabouter achteraan. Omdat hij alleen maar blauwe mutsen ziet, weet hij zeker dat hij zelf roodgemutst is en dus kan hij 'ja' zeggen.

Bekijk nu de volgende mutsverdeling: BRBBBBB. De eerste kabouter ziet de rode muts voor hem, dus hij weet dat hij zelf blauwgemutst is. De eerste kabouter zegt dus 'ja'. Maar hij mag niet vertellen dat hij blauw heeft! Vervolgens is de roodgemutste kabouter aan de beurt. Hij redeneert: 'Als ik blauw heb, weet de eerste kabouter dat die rood heeft. Als ik rood heb, weet de eerste kabouter dat die blauw heeft.' Helaas moet de tweede kabouter dus 'nee' antwoorden.

Op naar de mutsverdeling BBRBBBB. De eerste twee kabouters zien de rode muts, dus weten dat ze zelf blauw hebben. Zij antwoorden dus 'ja'. De derde kabouter weet dat als één van de eerste twee kabouters de rode muts zou hebben, de eerste kabouter 'ja' zou hebben geantwoord en de tweede kabouter 'nee'. Omdat echter beiden 'ja' antwoorden, weet de derde kabouter dat de eerste noch de tweede kabouter roodgemutst is. Zelf ziet hij alleen maar blauwe mutsen, en dus weet hij zeker dat hij degene is met de rode muts.

Dan BBBRBBBB. De eerste drie kabouters antwoorden 'ja', want zij zien de rode muts en weten dus dat ze blauw hebben. De vierde kabouter weet nu zeker dat de eerste twee kabouters blauw hebben. Verder redeneert hij: 'Als ik rood heb, weet de derde kabouter dat hij blauw heeft. En als ik blauw heb, weet de derde dat hij rood heeft'; dat is de hiervoor besproken mutsverdeling. Uit de drie gegeven antwoorden kan de vierde kabouter zijn eigen kleur dus niet afleiden.

In het algemeen geldt dat de kabouters vrij zullen komen precies dan als de eerste, derde, vijfde of zevende kabouter de rode muts krijgt. Dat betekent dat de kans op een goede afloop $4/7$ is.

Ongeacht het aantal kabouters (en een voorraad blauwe mutsen die één kleiner is dan het aantal kabouters), ze komen vrij als één van de kabouters op een *oneven* positie (geteld vanaf de achterste in de rij) de rode muts krijgt. Krijgt een kabouter op een *even* positie de rode muts, moet die 'nee' antwoorden op de vraag of hij zijn kleur kent.

Winnaars

Gé Groenewegen, Hans Linders en Lieke de Rooij hebben het boek *De kabouterformule* van Alex van den Brandhof inmiddels toegestuurd gekregen.

Olympiadepuzzel 99-7

Snijdende cirkels

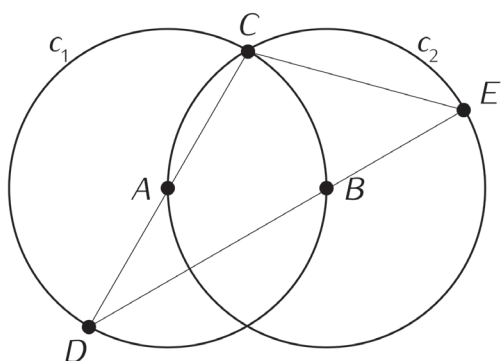
Esther Bod



De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor leerlingen van havo en vwo. Alle leerlingen van klas 1 t/m 5 met belangstelling voor wiskunde kunnen meedoen aan de eerste ronde. Deze wordt altijd in januari gehouden op alle deelnemende scholen. De speelse maar uitdagende opgaven testen je creativiteit en wiskundig inzicht. Meer informatie is te vinden op www.wiskundeolympiade.nl.



De cirkels c_1 en c_2 hebben respectievelijk middelpunten A en B . Het punt A ligt op c_2 en het punt B ligt op c_1 . Het punt C is een van de snijpunten van de cirkels. De lijn door C en A snijdt c_1 daarnaast ook in D . De lijn door D en B snijdt c_2 in twee punten. Laat E het snijpunt zijn dat buiten c_1 ligt, zie figuur 1.



figuur 1

Bereken de hoeken van driehoek $\triangle CDE$.

Inzenden oplossingen

Stuur je oplossing uiterlijk 31 juli naar euclides@wiskundeolympiade.nl. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een cadeaubon van € 20,-.

Terugblik puzzel nr. 5

In de vorige olympiadepuzzel was de opgave om kralenkettingen te rijgen van zes rode en zes blauwe kralen. De vraag hierbij was hoeveel verschillende kettingen er zijn zonder drie kralen van dezelfde kleur naast elkaar. Dat klinkt simpel, maar is lastiger dan je denkt. Door de kettingen systematisch op te bouwen, kun je alle mogelijkheden vinden. Daarbij moet je nog wel rekening houden met spiegelingen en draaiingen. Alle inzendingen voor deze opgave zaten in de buurt van het juiste aantal kettingen, maar helaas hebben de meeste inzenders óf een mogelijkheid gemist óf een symmetrie tussen twee kettingen over het hoofd gezien. Slechts twee inzenders kwamen op het juiste aantal van twaalf verschillende kettingen uit.

Met dank aan oud-olympiadedeelnemers Aimée Jacobs en Kati Overbeeke voor het nakijken van de inzendingen.

De juiste oplossing (inclusief toelichting) is te vinden op de website, samen met de namen van de twee inzenders die deze oplossing gevonden hadden. De cadeaubon van deze editie gaat naar Jan Bouw.



vakbladeuclides.nl/997olympiadepuzzel

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Hugo Duivesteijn, voorzitter
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck
Constantijn Tilanus

Inzenden bijdragen

Tom Goris,
Molenbochtplein 38, 5014 EJ Tilburg
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvww.nl

Voorzitter

Wim Caspers
E-mail: w.caspers@nvvw.nl

Secretaris

Els Franken
E-mail: e.franken@nvvw.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06 21 50 96 79 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau, Tel. 0345 531 324
E-mail: evers.rechtspositie@gmail.com
Vermeld bij je contact je lidnummer en telefoonnummer.

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt met ingang van 1 augustus 2023

- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 72,50
- leden, maar dan zonder Euclides: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 75,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen Euclides niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 90,00
Instituten en scholen: € 160,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal,
Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2024

Vr
23/08
Za
24/08

AMSTERDAM EN ANTWERPEN

Vakantiecursus wiskunde voor leraren

Thema: Banach-Tarski: hoe groepentheorie van één meloen er twee maakt

Organisatie: Platform Wiskunde Nederland

Vr
06/09
Za
07/09

UTRECHT

Geschiedenis symposium

Thema: Eens Euclides, altijd Euclides!

Organisatie: werkgroep geschiedenis van wiskunde, NVvW

Za
28/09

Za
02/11

VEENENDAAL

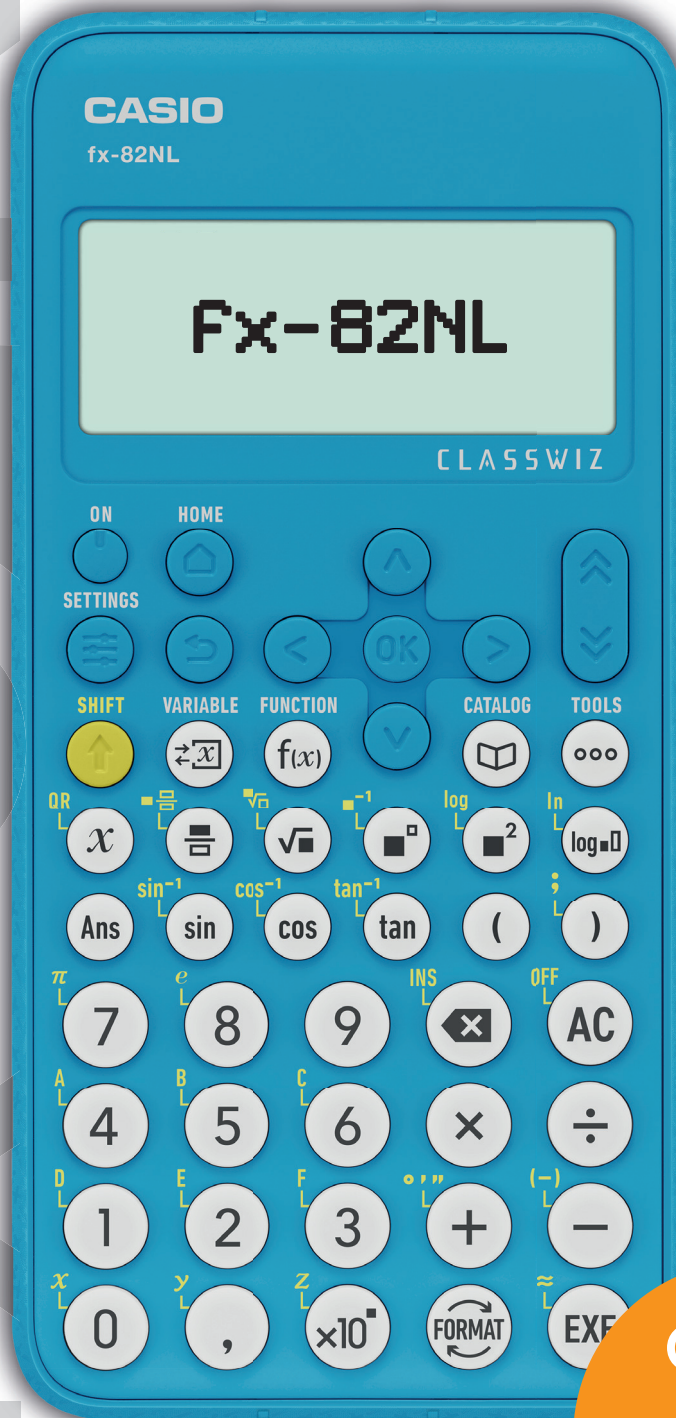
NVvW jaarvergadering en studiedag

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook vakbladeuclides.nl

JAARGANG 100

Nr.	Verwachte verschijningsdatum	deadline
1	11 september 2024	10 juni 2024
2	23 oktober 2024	19 augustus 2024
3	11 december 2024	7 oktober 2024
4	29 januari 2025	11 november 2024
5	12 maart 2025	30 december 2024
6	30 april 2024	24 februari 2025
7	18 juni 2025	20 april 2025

CASIO®



Opvolger van:
fx-82MS
fx-82EX

**Voor Nederlands
curriculum gemaakt**

I<3 WISKUNDE WEBINARS



Breng wiskunde tot leven
Vincent Vis



Zo haal je alles uit de ICT
bij Getal & Ruimte
Marleen Vos



Zo haal je alles uit de ICT
bij Moderne Wiskunde
Esther Harbers



Activerende werkvormen
Sarah Brusell



Trends in het onderwijs
Harmen Soppe



Examentraining wiskunde
Meester Mo



Wiskunde in de echte
wereld
Frédérique Kool en Jason Zijlstra



Angst voor rekenen en
wiskunde
Brenda Jansen



Webinar Data en statistiek
Lonneke Boels

TIP!

Dit webinar kun je
nog live bijwonen!
Donderdag 27 juni
15:30 – 16:15 uur

Alle wiskundewebinars van dit seizoen kijk je terug op

Noordhoff.nl/wiskundewebinars



Noordhoff

Brengt je verder

