Bijlage bij het artikel ”worteltrekken”.

Regel I: $(\sqrt[n]{x})^n \equiv x \quad en \quad \sqrt[n]{x^n} \equiv x$ als $x \geq 0$. Volgt direct uit de definitie!

Bewijs van regel II:

Regel II: $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \equiv \sqrt[n]{a \times b} \quad als \quad \mathrm{a} \geq 0 \ \text{en}\ \mathrm{b} \geq 0$

Bewijs voor het geval n = 2:

$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 \equiv (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} \times \sqrt{b})$ definitie van machtsverheffen

$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 \equiv \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ gebonden factoren vrijgemaakt

$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 \equiv \sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{b}$ husseleigenschap toegepast

$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 \equiv (\sqrt{a} \times \sqrt{a}) \times (\sqrt{b} \times \sqrt{b})$ vrije factoren gebonden

$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 \equiv (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2$ definitie van machtsverheffen

$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 \equiv a \times b$ regel I: $(\sqrt{x})^2 = x$

$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 \equiv (\sqrt{a \times b}\ )^2$ regel I: $x = (\sqrt{x})^2$

$\sqrt{\mathbf{a}} \times \sqrt{\mathbf{b}} \equiv \sqrt{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}$ Als $x \geq 0\ \acute{e}n\ y \geq 0\ \acute{e}n\ x^2 = y^2\ dan\ x = y$

Het bewijs van regel II voor een willekeurige natuurlijke waarde van n verloopt op een soortgelijke manier als hierboven.

Bewijs van regel III:

Regel III: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \equiv \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad als \quad \mathrm{a} \geq 0 \ \text{en}\ \mathrm{b} > 0$

Bewijs voor het geval n = 2:

$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 \equiv \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right) \times \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)$ definitie van machtsverheffen

$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 \equiv (\sqrt{a} : \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} : \sqrt{b})$ afspraak $\frac{x}{y} \equiv x : y$

$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 \equiv \sqrt{a} : \sqrt{b} \times \sqrt{a} : \sqrt{b}$ gebonden factoren vrijgemaakt

$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 \equiv \sqrt{a} \times \sqrt{a} : \sqrt{b} : \sqrt{b}$ husseleigenschap toegepast

$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 \equiv (\sqrt{a} \times \sqrt{a}) : (\sqrt{b} \times \sqrt{b})$ vrije factoren gebonden

$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 \equiv (\sqrt{a}\ )^2 : (\sqrt{b}\ )^2$ definitie van machtsverheffen

$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 \equiv a : b \equiv \frac{a}{b}$ regel I: $(\sqrt{x})^2 = x$ én $x : y \equiv \frac{x}{y}$

$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 \equiv \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$ regel I: $x = (\sqrt{x})^2$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \equiv \sqrt{\frac{a}{b}}$ Als $x \geq 0\ en\ y > 0\ en\ x^2 = y^2\ dan\ x = y$

Het bewijs van regel III voor een willekeurige natuurlijke waarde van n verloopt op een soortgelijke manier als hierboven.

Bewijs van regel IV :

Regel IV: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} \equiv \sqrt[m\times n]{x}$ $\quad m \text{ en } n \text{ zijn positieve gehele getallen en } x \geq 0$

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}\right)^{m\times n} \equiv \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}\right)^{m}\right)^{n} \qquad a^{p\times q} \equiv (a^{p})^{q} \text{ [3]}$$

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}\right)^{m\times n} \equiv \left(\sqrt[n]{x}\right)^{n} \qquad \text{regel I:}$$

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}\right)^{m\times n} \equiv x \qquad \text{regel I:}$$

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}\right)^{m\times n} \equiv \left(\sqrt[m\times n]{x}\right)^{m\times n} \qquad \text{regel I:}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} \equiv \sqrt[m\times n]{x} \qquad als\ a^{p} = b^{p}\ en\ a \geq 0\ en\ b \geq 0\ \ dan\ a = b$$

Voorbeelden van herleidingen en toepassingen van de prioriteitsregels.

Bereken:

$\sqrt{9} \times (3 + 2)^2 + -4 \times 2^3 = 3 \times 5^2 + (-4) \times 2^3$
$= 3 \times 25 + (-4) \times 8$
$= 75 + (-32)$
$= 43$

$\sqrt{9 \times (3+2)^2} + -4 \times 2^3 = \sqrt{9 \times 5^2} + (-4) \times 8$
$= \sqrt{9 \times 25} + (-32)$
$= \sqrt{225} + (-32)$
$= 15 + (-32) = -17$

$-4 \times 3^2 \div -2^2 + \sqrt{9}^{\,2} \div -(2+1) = (-4) \times 9 \div -4 + 3^2 \div -3$
$= (-36) \div (-4) + 9 \div (-3)$
$= 9 + (-3)$
$= 6$

Bereken: $\sqrt{12} \times (4 \times \sqrt{12} + 2 \times \sqrt{3})$

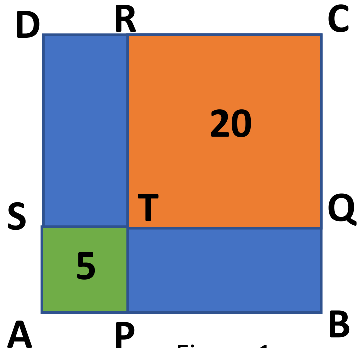
$\sqrt{12} \times (4 \times \sqrt{12} + 2 \times \sqrt{3})$	$\equiv (4 \times \sqrt{12}) \times \sqrt{12} + (2 \times \sqrt{3}) \times \sqrt{12}$	distributieve eigenschap
	$\equiv 4 \times \sqrt{12} \times \sqrt{12} + 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{12}$	gebonden factoren vrijmaken
	$\equiv 4 \times (\sqrt{12} \times \sqrt{12}) + 2 \times (\sqrt{3} \times \sqrt{12})$	vrije factoren binden
	$\equiv 4 \times (\sqrt{12})^2 + 2 \times \sqrt{(3 \times 12)}$	definitie van kwadrateren en regel II
	$\equiv 4 \times 12 + 2 \times \sqrt{36}$	regel I en $3 \times 12 = 36$
	$\equiv 48 + 2 \times 6$	$\sqrt{36} = 6$
	$= 60$	
$\sqrt{12} \times (4 \times \sqrt{12} + 2 \times \sqrt{3})$	$\equiv \sqrt{12} \times (4 \times \sqrt{(4 \times 3)} + 2 \times \sqrt{3})$	$12 = 4 \times 3$
	$\equiv \sqrt{12} \times (4 \times (\sqrt{4} \times \sqrt{3}) + 2 \times \sqrt{3})$	regel II
	$\equiv \sqrt{12} \times (4 \times \sqrt{4} \times \sqrt{3} + 2 \times \sqrt{3})$	gebonden factoren vrijmaken
	$\equiv \sqrt{12} \times (4 \times 2 \times \sqrt{3} + 2 \times \sqrt{3})$	$\sqrt{4} = 2$
	$\equiv \sqrt{12} \times (8 \times \sqrt{3} + 2 \times \sqrt{3})$	$4 \times 2 = 8$
	$\equiv \sqrt{12} \times (\sqrt{3} \times (8 + 2))$	distributieve eigenschap
	$\equiv \sqrt{12} \times \sqrt{3} \times 10$	gebonden factoren vrijmaken
	$\equiv \sqrt{36} \times 10 \equiv 6 \times 10 =$ **60**	$\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{(12 \times 3)} = \sqrt{36}$

Voorbeeld van worteltrekken in de meetkunde.

Gegeven : 3 vierkanten ABCD, APTS en TQCR. Zie Figuur 1.
Oppervlakte van APTS is 5.
Oppervlakte van TQCR is 20.

Gevraagd: De oppervlakte van ABCD.

Oplossing: lengte van zijde TQ = lengte van zijde RT = $\sqrt{20}$
Lengte van zijde TP = lengte van zijde ST = $\sqrt{5}$
Oppervlakte van PBQT = $\sqrt{20} \times \sqrt{5} = \sqrt{(20 \times 5)} = \sqrt{100} = 10$
Oppervlakte van STRD = $\sqrt{20} \times \sqrt{5} = \sqrt{(20 \times 5)} = \sqrt{100} = 10$
Oppervlakte van ABCD = 5 + 10 + 10 + 20 = 45.



Figuur 1

En passant is hiermee ook bewezen dat:
$\sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{45}$. Immers AP + PB = AB.

Cijferend worteltrekken:

Chinese methode.

De werking van deze methode wordt toegelicht aan de hand van een concreet voorbeeld.
Stel voor dat de opdracht is: Bepaal de wortel van het getal 987654321.
Dan gaan we in figuur 2 uit van een vierkant ABCD waarvan het oppervlak gelijk is aan 987654321.
Gecodeerd als: (ABCD) = 987654321.
We schrijven het getal 987654321 in de vorm: $p.100^q$ met $1 \leq p < 100$ en q is een geheel getal.

$$987654321 = 9{,}87654321 \,.\, 100^4$$

De conclusie die hieruit getrokken kan worden is dat de 2-de machtswortel van het 987654321 en dus de lengte van het vierkant ABCD groter is dan 1.10^4 en kleiner dan 10.10^4. De lengte van de zijde van vierkant ABCD kan dus geschreven worden als

$AB = \sqrt{(987654321)} = x_4.10^4 + x_3.10^3 + x_2.10^2 + x_1.10^1 + x_0.10^0 + x_{-1}.10^{-1} + \ldots = [x_4x_3x_2x_1x_0\,,x_{-1}......]$

De eerste benadering van AB is $AB_4 = [x_4\, 0\,0\,0\,0,\, 0...]$ de tweede benadering van AB is $AB_3 = [x_4\, x_3\, 0\,0\,0,\, 0...]$ enz.. Van de lengte AB van het vierkant ABCD wordt eerst het cijfer x_4 bepaald, daarna het cijfer x_3 en vervolgens, volgens hetzelfde stramien, worden de cijfers x_2, x_1, enz. bepaald.

1e stap $AB_4 = [x_4\, 0\,0\,0\,0,\, 0\,0\,0.......]$ Bepaal x_4 . (AB_4 is de eerste benadering van AB)
$AB_4C_4D_4$ is het grootste vierkant binnen het vierkant ABCD waarvan de lengte AB_4 te schrijven is als $x_4 \,.\, 10^4$. Het cijfer x_4 is dus het grootste cijfer waarvoor geldt dat:
$(x_4 \,.\, 10^4)^2 < 9{,}87654321\ 10^8$. Conclusie: $x_4 = 3$ en $(AB_4C_4D_4) = 9 \,.\, 10^8$.

2e stap $AB_3 = [3\, x_3\, 0\,0\,0,\, 0\,0\,0.......]$ Bepaal x_3. (AB_3 is de tweede benadering van AB).
x_3 is het grootste cijfer waarvoor geldt: $(3x_3000)^2 <$ (ABCD).
Bepaal $(B_4BCDD_4C_4)$. Het verschil het tussen de (ABCD) en $(AB_4C_4D_4)$.
$(B_4BCDD_4C_4) = 987654321 - 900000000 = 87654321$.
De lengte en breedte van vierkant $AB_4C_4D_4$ worden beide langer gemaakt met $x_3 \,.\, 10^3$.
Het resultaat is het vierkant $AB_3C_3D_3$.
$(AB_3C_3D_3) = (AB_4C_4D_4) + (B_4B_3C_3D_3D_4C_4)$ (het oppervlak van de groene strook. (zie figuur 2)

$(B_4B_3C_3D_3D_4C_4) = ([x_4].10^4 + x_3.10^3 + [x_4].10^4).\ x_3.10^3$ (zie figuur 3)
$= ([x_40].10^3 + x_3.10^3 + [x_40].10^3).\ x_3.10^3$
$= (2.[x_40] + x_3)x_3 \,.\, 10^6$

Eis: $(B_4B_3C_3D_3D_4C_4) < (ABCD) - (AB_4C_4D_4)$ ofwel
$(B_4B_3C_3D_3D_4C_4) < (B_4BCDD_4C_4)$

In ons voorbeeld betekent dit: $(B_4B_3C_3D_3D_4C_4) < 987654321 - 90000000$
$(B_4B_3C_3D_3D_4C_4) < 87654321$

De grootste waarde voor x_3 waarvoor geldt $(2\cdot 30 + x_3)x_3 \,.\, 10^6 < 87{,}654321 \,.\, 10^6$ is $x_3 = 1$

Dit geeft: $(B_4B_3C_3D_3D_4C_4) = 61 \cdot 10^6$ en

$(AB_3C_3D_3) = (AB_4C_4D_4) + (B_4B_3C_3D_3D_4C_4) = 961000000$.

3^e^ stap $AB_3 = [3\ 1\ x_2\ 0\ \ 0, 0\ 0\ 0 \ldots\ldots]$ Bepaal x_2. (AB_3 is de derde benadering van AB)

x_2 is het grootste cijfer waarvoor geldt: $(31x_200)^2 < (ABCD)$.

Het verschil het tussen de (ABCD) en $(AB_3C_3D_3)$ is $(B_3\,BCDD_3\,C_3)$

$(B_3\,BCDD_3\,C_3) = (ABCD) - (AB_4C_4D_4) - (B_4B_3C_3D_3D_4C_4)$

$(B_3\,BCDD_3\,C_3) = 987654321 - 900000000 - 61000000 = 26654321$.

De lengte en breedte van vierkant $AB_3C_3D_3$ worden beide langer gemaakt met $x_2 \cdot 10^2$.

Het resultaat is het vierkant $AB_2C_2D_2$.

$(AB_2C_2D_2) = (AB_3C_3D_3) + (B_3B_2C_2D_2D_3C_3)$ (het oppervlak van de blauwe strook. (zie figuur 2)

$(B_3B_2C_2D_2D_3C_3) = ([x_4x_3].10^3 + x_2 .10^2 +[x_4x_3].10^3) \cdot x_2 .10^2$ (zie figuur 4)

$= ([x_4x_30].10^2 + x_2 .10^2 +[x_4x_30].10^2) \cdot x_2 .10^2$

$= (2.[x_4x_30] + x_2).x_2.10^4$

Eis: $(B_3B_2C_2D_2D_3C_3) < (ABCD) - (AB_3C_3D_3)$ ofwel

$(B_3B_2C_2D_2D_3C_3) < (ABCD) - (AB_4C_4D_4) - (B_4B_3C_3D_3D_4C_4)$

In ons voorbeeld geldt: $x_4 = 3$, $x_3 = 1$ $(B_3B_2C_2D_2D_3C_3) < 26654321$

De grootste waarde voor x_2 bij de ongelijkheid $(2.\ 310 + x_2).x_2\ 10^4 < 26654321$ is $x_2 = 4$

Met $(B_3B_2C_2D_2D_3C_3) = (2.\ 310 + 4).4\ 10^4 = 24960000$.

Het verschil het tussen de (ABCD) en $(AB_2\,C_2\,D_2)$ is $(B_2\,BCDD_2\,C_2)$

$(B_2BCDD_2\,C_2) = 26654321 - 24960000 = 1694321$.

4^e^ stap $AB = [3\ 1\ 4\ x_1\ 0, 0\ 0\ 0 \ldots\ldots]$ Bepaal x_1.

Naar analogie van de stappen 2 en 3 volgt voor de bepaling van x_1:

Voor de oppervlakte van de strook $B_2B_1C_1D_1D_2C_2$ geldt:

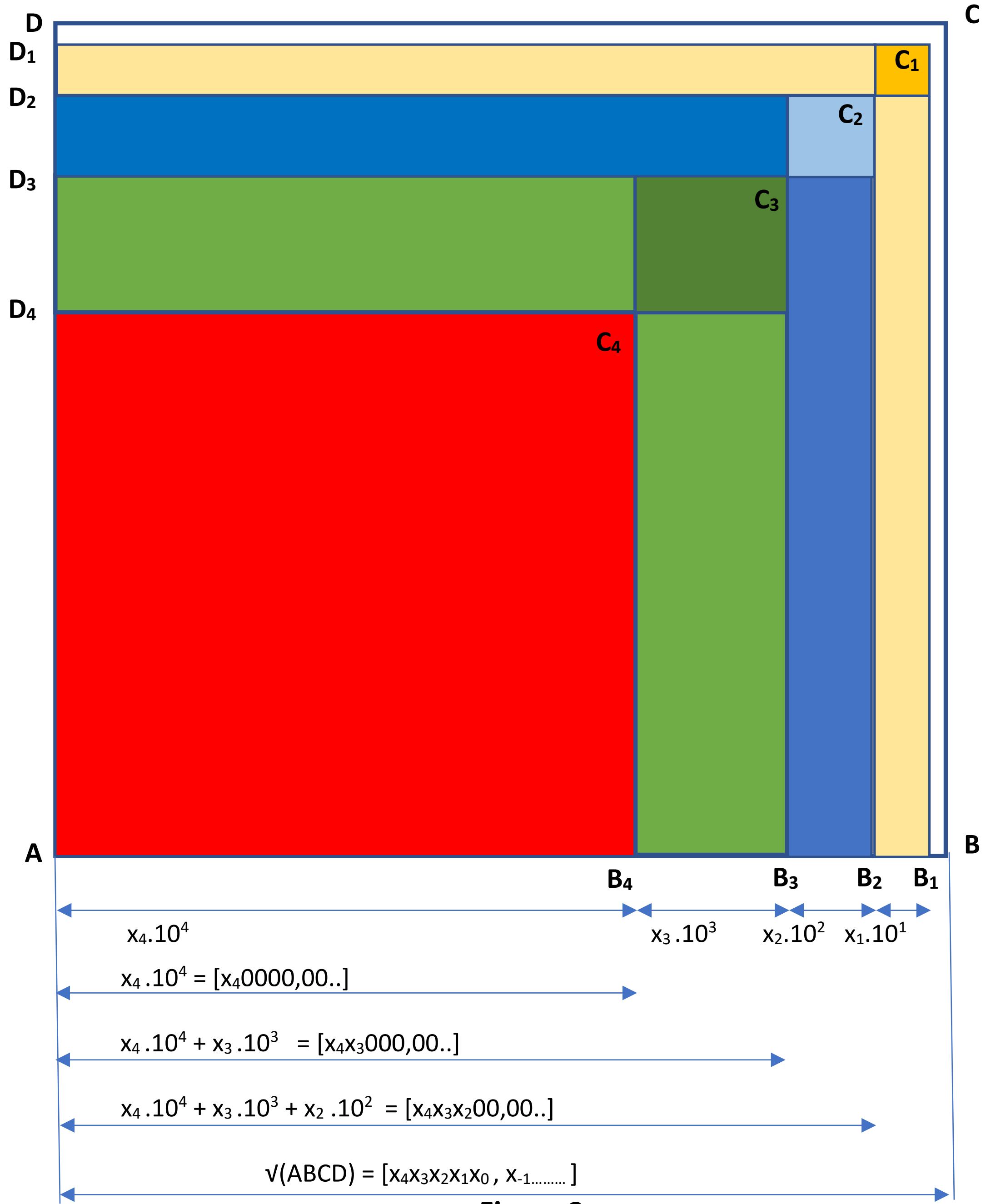
$(B_2B_1C_1D_1D_2C_2) = (2[x_4x_3x_20]+ x_1) \cdot x_1 .10^2$

En de eis: $(B_2B_1C_1D_1D_2C_2) < (ABCD) - (AB_4C_4D_4) - (B_4B_3C_3D_3D_4C_4) - (B_3B_2C_2D_2D_3C_3)$

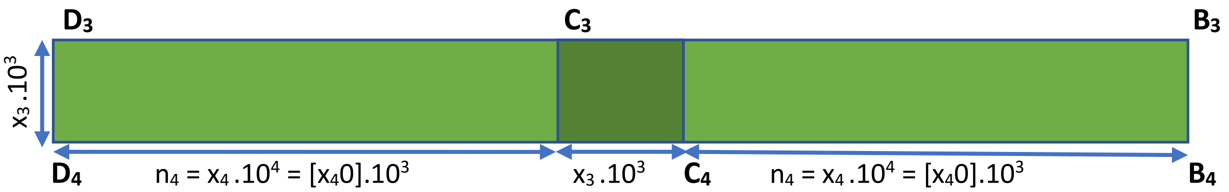
$(B_2B_1C_1D_1D_2C_2) < (B_2BCDD_2\,C_2)$

Enzovoort.

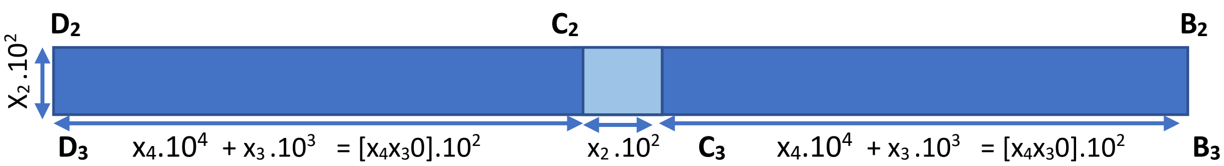
Worteltrekken m.b.v. de Chinese methode



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

In figuur 5 zijn de hierboven uitgevoerde stappen 1, 2, 3 en 4 schematisch weergegeven. Bovendien zijn de stappen 5 en 6 toegevoegd.

						oppervlakte						
					9 8 7 6 5 4 3 2 1 , 0 0	(ABCD)	x_4	x_3	x_2	x_1	x_0	x_{-1}
x_4	◦	x_4	◦	10^8								
3	◦	3	◦	10^8	9 0 0 0 0 0 0 0 0 , 0 0	$(AB_4C_4D_4)$	[3]					
					8 7 6 5 4 3 2 1 , 0 0	$(B_4BCDD_4C_4)$						
$(2[x_40] + x_3)$	◦	x_3	◦	10^6								
6 1	◦	1	◦	10^6	6 1 0 0 0 0 0 0 0 , 0 0	$(B_4B_3C_3D_3D_4C_4)$	[3	1]				
					2 6 6 5 4 3 2 1 , 0 0	$(B_3BCDD_3C_3)$						
$(2[x_4x_30] + x_2)$	◦	x_2	◦	10^4								
6 2 4	◦	4	◦	10^4	2 4 9 6 0 0 0 0 , 0 0	$(B_3B_2C_2D_2D_3C_3)$	[3	1	4]			
					1 6 9 4 3 2 1 , 0 0	$(B_2\,BCDD_2C_2)$						
$(2[x_4x_3x_20] + x_1)$	◦	x_1	◦	10^2								
6 2 8 2	◦	2	◦	10^2	1 2 5 6 4 0 0 , 0 0	$(B_2B_1C_1D_1D_2C_2)$	[3	1	4	2]		
					4 3 7 9 2 1 , 0 0	$(B_1\,BCDD_1C_1)$						
$(2[x_4x_3x_2x_10] + x_0)$	◦	x_0	◦	10^0								
6 2 8 4 6	◦	6	◦	10^0	3 7 7 0 7 6 , 0 0	$(B_1B_0C_0D_0D_1C_1)$	[3	1	4	2	6]	
					6 0 8 4 5 , 0 0	$(B_0BCDD_0C_0)$						
$(2[x_4x_3x_2x_1x_00]+x_{-1})$	◦	x_{-1}	◦	10^{-2}								
6 2 8 5 2 9	◦	9	◦	10^{-2}	5 6 5 6 7 , 6 1	$(B_0B_{-1}C_{-1}D_{-1}D_0C_0)$	[3	1	4	2	6	9]

Figuur 5 De wortel van 987654321,00 = 31426,9…….

Als we de formules, de overbodige nullen in de kolom “oppervlakte”, “x_4” enz. weglaten, en de cijfers van het argument opdelen in groepjes van 2 cijfers vanuit de komma, dan kan figuur 5 worden versimpeld tot het sjabloon in figuur 6.

									argument						
									9	87	65	43	21	00	
						3	x	**3**	9						
										87					
					6	1	x	**1**		61					
										26	65				
				6	2	4	x	**4**		24	96				
										1	69	43			
			6	2	8	2	x	**2**		1	25	64			
	$(20 \text{ x } 3142 + x_0).x_0$										43	79	21		
		6	2	8	4	6	x	**6**			37	70	76		
											6	08	45	00	
	6	2	8	5	2	9	x	**9**			5	65	67	61	

Figuur 6 $\sqrt{987654321} = 3142,9 \ldots..$

In figuur 7 is als voorbeeld de opdracht: bepaal de wortel van 237 in 5 decimalen, uitgewerkt.

									237						
									2	37	00	00	00	00	
						1	x	**1**	1						
									1	37					
					2	5	x	**5**	1	25					
										12	00				
				3	0	3	x	**3**		9	09				
										2	91	00			
			3	0	6	9	x	**9**		2	76	21			
											14	79	00		
		3	0	7	8	4	x	**4**			12	31	36		
											2	47	64	00	
	3	0	7	8	8	8	x	**8**			2	46	31	04	
												1	32	96	00
3	0	7	8	9	6	0	x	**0**				0	00	00	00
												1	32	96	00

Figuur 7 $\sqrt{237} = 15{,}39480 \ldots.$

Cijferend Worteltrekken m.b.v. de Babylonische methode:

De Babylonische methode maakt gebruik van het meetkundige gemiddelde van twee getallen. Het meetkundige gemiddelde van 2 getallen a en b is √(ab)
De methode begint met de keuze van 2 willekeurige getallen waarvan wel geëist wordt de vermenigvuldiging van de gekozen getallen het getal oplevert waarvan de wortel bepaald moet worden.
Procedure voor het bepalen van de wortel van het getal W:

1) Kies 2 getallen x_0 en y_o waarvoor geldt $x_o \cdot y_o = W$
2) Bepaal met de getallen x_0 en y_o twee nieuwe getallen x_1 en y_1 waarvoor weer geldt $x_1.y_1 = W$. Kies hierbij voor x_1 het gemiddelde van x_0 en y_o .
   $x_1 = (x_0 + y_0) / 2$ en $y_1 = W/x_1$.
3) Bepaal met de getallen x_1 en y_1 twee nieuwe getallen x_2 en y_2 waarvoor geldt $x_2.y_2 = W$
   $x_2 = (x_1 + y_1 / 2$ en $y_2 = W/x_2$.
4) Herhaling van deze stappen leidt naar de situatie waarbij zowel x_n als y_n naderen naar de wortel van W : $\sqrt{W}$.

"Bewijs":

Als "oneindig" veel stappen zijn uitgevoerd mag je veronderstellen dat
$x_n = x_{n+1}$ en $y_n = y_{n+1}$ dus

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad \text{geeft } x_n = \frac{x_n + y_n}{2} \quad \text{ofwel } x_n = y_n \quad \text{en}$$

$$y_{n+1} = \frac{W}{x_{n+1}} \quad \text{geeft } x_n = \frac{W}{x_n} \quad \text{ofwel } x_n^2 = W \quad \mathbf{dus}\ \mathbf{x_n} = \boldsymbol{y_n} = \sqrt{\mathbf{W}}$$

Bepaling van de wortel van 5 (W = 5)						
stap		1	2	3	4	5
x_n	$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$	1	3	$\frac{7}{3}$	$\frac{47}{21}$	$\frac{4414}{1974}$ ~2,23606889..
y_n	$y_{n+1} = \frac{W}{x_{n+1}}$	5	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{105}{47}$	$\frac{9870}{4414}$ ~2,236067059..

Figuur 8

Herleiden van wortelopdrachten:
Voordat de rekenmachines bestonden ging worteltrekken vaak samen met erg veel cijferwerk. Toen was het verstandig om:

A. het aantal keren worteltrekken zoveel mogelijk te beperken
B. de getallen waarvan je de wortel moet bepalen zo klein mogelijk te houden
C. delen door de uitkomst van een worteltrekking te voorkomen

De belangrijkste reden om rekenopdrachten met worteltrekkingen zo te herleiden dat aan deze 3 eisen wordt voldaan is terug te leiden naar de tijden van voor het gebruik van de moderne rekenmachines.
Voorbeelden: Bereken de uitkomst in 5 decimalen nauwkeurig door eerst te herleiden totdat slechts één keer de bewerking worteltrekken voorkomt om daarna gebruik te maken van de tabel in figuur 9.

$$
\begin{aligned}
17\sqrt{21} + 5\sqrt{84} - 7\sqrt{21} &\equiv 17\sqrt{21} + 5\sqrt{4 \times 21} - 7\sqrt{21} && \text{84 ontbinden in factoren}\\
&\equiv 17\sqrt{21} + 5(\sqrt{4} \times \sqrt{21}) - 7\sqrt{21} && \text{regel II}\\
&\equiv 17\sqrt{21} + 5 \times 2 \times \sqrt{21} - 7\sqrt{21} && \text{gebonden factoren vrijmaken}\\
&\equiv (17 + 10 - 7)\sqrt{21} && \text{de distributieve eigenschap}\\
&\equiv 20\sqrt{21} \approx 91{,}65152
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} \times \sqrt{10} \times \sqrt{35} &\equiv \sqrt{2} \times \sqrt{2 \times 5} \times \sqrt{5 \times 7} && \text{ontbinden in factoren}\\
&\equiv \sqrt{2} \times (\sqrt{2} \times \sqrt{5}) \times (\sqrt{5} \times \sqrt{7}) && \text{regel II}\\
&\equiv \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{7} && \text{gebonden factoren vrijmaken}\\
&\equiv (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{5} \times \sqrt{5}) \times \sqrt{7} && \text{vrije factoren binden}\\
&\equiv (\sqrt{2})^2 \times (\sqrt{5})^2 \times \sqrt{7} && \text{definitie van kwadrateren}\\
&\equiv 2 \times 5 \times \sqrt{7} && \text{regel I}\\
&\equiv 10 \times \sqrt{7}\\
&\approx 26{,}45751
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1\tfrac{4}{5}} \times \sqrt{2\tfrac{7}{10}} &\equiv \sqrt{\tfrac{9}{5}} \times \sqrt{\tfrac{27}{10}} && \text{van gemengde breuk naar gewone breuk}\\
&\equiv \sqrt{\tfrac{9}{5} \times \tfrac{27}{10}} && \text{regel II: } \sqrt{a} \times \sqrt{b} \equiv \sqrt{a \times b}\\
&\equiv \sqrt{\tfrac{9 \times 27}{5 \times 10}} && \text{vermenigvuldigen van twee breuken}\\
&\equiv \sqrt{\tfrac{9 \times (9 \times 3) \times 2}{5 \times 10 \times 2}} && \text{teller en noemer vermenigvuldigen met hetzelfde getal}\\
&\equiv \sqrt{\tfrac{9 \times 9 \times 6}{10 \times 10}} \equiv \sqrt{\tfrac{9^2 \times 6}{10^2}} \equiv \sqrt{\tfrac{9^2}{10^2} \times 6} && \text{definitie van kwadrateren en } \tfrac{a \times b}{c} \equiv \tfrac{a}{c} \times b\\
&\equiv \sqrt{\left(\tfrac{9}{10}\right)^2} \times \sqrt{6} && \text{regel } \sqrt{a} \times \sqrt{b} \equiv \sqrt{a \times b} \text{ en regel } \tfrac{a^p}{b^p} \equiv \left(\tfrac{a}{b}\right)^p\\
&\equiv \tfrac{9}{10} \times \sqrt{6} \approx 0{,}9 \times 2{,}449490 \approx 2{,}20454
\end{aligned}
$$

$\frac{7\times\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-\sqrt{6}} \equiv \frac{7\times\sqrt{3})}{3\sqrt{3}-\sqrt{3}\times\sqrt{2}}$ Toegepast $\sqrt{6} = \sqrt{3\times 2} = \sqrt{3}\times\sqrt{2}$

$\equiv \frac{7\times\sqrt{3})}{\sqrt{3}(3-\sqrt{2})}$ Toegepast de distributieve eigenschap: a x b – a x c ≡ a (b – c)

$\equiv \frac{7\times(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$ Teller en noemer gedeeld door $\sqrt{3}$ en

Teller en noemer vermenigvuldigd met $(2 + \sqrt{3})$

$\equiv \frac{7\times(3+\sqrt{2})}{(3)^2-(\sqrt{2})^2}$ Toegepast (a + b)(a - b) ≡ $a^2 - b^2$

$\equiv \frac{7\times(3+\sqrt{2})}{9-2} \equiv \frac{7\times(3+\sqrt{2})}{7}$ Toegepast $(\sqrt{2})^2 = 2$

$\equiv 3 + \sqrt{2} \approx 4{,}41421$ teller en noemer gedeeld door 7 .

getal	√(getal)	Getal	√(getal)	getal	√(getal)	getal	√(getal)	getal	√(getal)
1	1	21	4,582576	41	6,403124	61	7,810250	81	9,
2	1,414214	22	4,690416	42	6,480741	62	7,874008	82	9,055385
3	1,732051	23	4,795832	43	6,557439	63	7,937254	83	9,110434
4	2	24	4,898979	44	6,633250	64	8	84	9,165151
5	2.236068	25	5	45	6,708204	65	8,062258	85	9,219544
6	2,449490	26	5,099020	46	6,782330	66	8,124038	86	9,273618
7	2,645751	27	5,196152	47	6,855655	67	8,185353	87	9,327379
8	2,828427	28	5,291503	48	6,928203	68	8,246211	88	9,380832
9	3	29	5,385165	49	7	69	8,306624	89	9,433981
10	3,162278	30	5,477226	50	7,071068	70	8,366600	90	9,486833
11	3,316625	31	5,567764	51	7.141428	71	8,426150	91	9,539392
12	3,464102	32	5,656854	52	7,211103	72	8,485281	92	9,591633
13	3,605551	33	5,744563	53	7,280110	73	8,544004	93	9,643651
14	3,741657	34	5,830952	54	7,348469	74	8,602325	94	9,695360
15	3,872983	35	5,916080	55	7,416198	75	8,660254	95	9,746794
16	4	36	6	56	7,483315	76	8,717798	96	9,797959
17	4,123106	37	6,082663	57	7,59834	77	8,774964	97	9,848858
18	4,242641	38	6,104414	58	7,615773	78	8,831761	98	9,899495
19	4,358899	39	6,244998	59	7,681146	79	8,888194	99	9,949874
20	4,472136	40	6,324555	60	7,745967	80	8,944272	100	10

Figuur 9