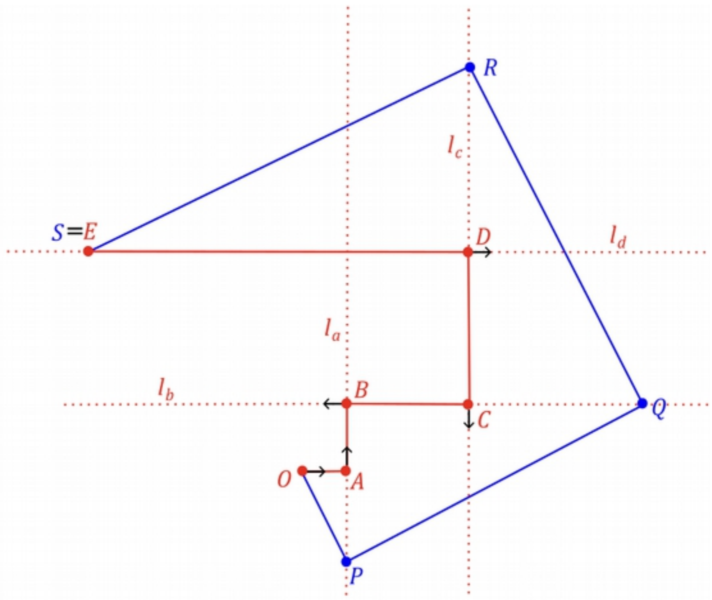
Uitwerking Puzzel 99-4 **Wobien Doyer**
Haakse-hoeken methode. **Lieke de Rooij**



Hoewel we in principe puzzels proberen te maken waarvan de oplossingen niet geheel op internet zijn te vinden hebben we nu gekozen voor een onderwerp dat wel is beschreven). Maar zover we weten is het zeker niet algemeen bekend en zeker de moeite waard. Dus hebben we er toch een puzzel van gemaakt. Het idee heeft leuke toepassingen en is ook te volgen en te begrijpen voor leerlingen, zelfs (gedeeltelijk) in de onderbouw.
Het gaat om de methode die wij "haakse-hoeken methode" hebben genoemd. Het is een manier om een voorstelling te maken van een polynoom van graad n met één variabele. Vervolgens kan je daarmee grafisch mogelijke nulpunten bepalen. Voor een tweedegraads vergelijking kan je die zelfs construeren met passer en lat. Toepassingen zijn bijvoorbeeld de driedeling van een hoek en het verdubbelen van de kubus.
Het gaat als volgt:
We maken een plaatje dat bestaat uit rechte lijnstukken met haakse hoeken. Zie de rode lijnstukken in het voorbeeld hierboven voor een polynoom van graad n=4:
$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ met a=1, b=1,5, c= – 3, d = – 3,5 en e= – 9. We zullen steeds zorgen dat a positief is en liefst 1.
We tekenen de punten O, A, B, C, D en E voor een 4e graads polynoom als volgt vanaf O:
In het eerste punt O tekenen we een pijltje naar rechts.
Bij elk volgend punt komt weer een pijltje, 90 graden gedraaid naar links ten opzichte van het vorige pijltje.
De afstand van het volgende punt is de absolute waarde van de coëfficiënt, de richting met het pijltje mee als de coëfficiënt positief is, tegen de richting van het pijltje in als de coëfficiënt negatief is.
Als één of meer van de coëfficiënten nul is dan vallen er 2 of meer punten samen en is er bij die coëfficiënt geen rood lijnstuk, maar wel een pijltje dat 90 graden gedraaid is t.o.v. het vorige.
In ons voorbeeld wordt dat met rode punten en lijnen:
Teken O en een pijltje naar rechts beginnend bij O.
Om A te vinden: a=1 dus A komt 1 rechts van O. (a is positief dus met het pijltje mee)
Het pijltje in A gaat omhoog (90 graden linksom t.o.v het pijltje in O)
Om B te vinden: b=1,5 dus B komt 1,5 boven A. (b is positief dus met het pijltje mee)
Het pijltje in B gaat naar links (90 graden linksom t.o.v het pijltje in A)
Enzovoort tot punt E.
We tekenen ook rode stippellijnen langs de pijltjes en noemen de lijn langs het pijltje bij A l_a, bij B l_b, enzovoort tot l_d .
Als er een of meer coëfficiënten 0 zijn kunnen er dus rode stippellijnen samenvallen.
We noemen het traject *OABCDE* de haakse-hoeken voorstelling van de polynoom.
Vervolgens gaan we een mogelijk nul-punt van de polynoom bepalen, dus hier een oplossing van de vergelijking $x^4 + 1{,}5x^3 – 3x^2 – 3{,}5x – 9 = 0$.

* http://archive.numdam.org/article/NAM_1867_2_6__359_0.pdf
. https//wikipedia.org/wiki/Lill's_method

We kiezen een punt P op l_a en trekken OP met een blauwe lijn. Het punt Q is dan het snijpunt van de loodlijn van OP in P met l_a. Trek PQ met een blauwe lijn.
Op dezelfde manier construeren we ook QR en RS. Het laatste punt is dus S, maar dat zal in het algemeen niet samenvallen met E, zoals in de figuur hierboven.

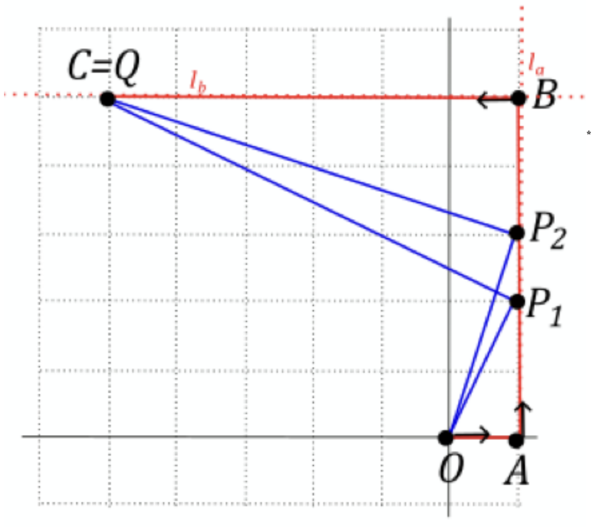
Vervolgens verschuiven we P langs l_a, zodanig dat P samenvalt met E. We hebben dan een tweede haakse-hoeken traject met hetzelfde begin- en eindpunt, maar met één haakse hoek minder.

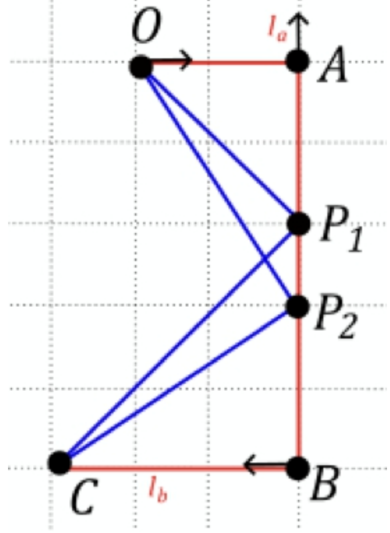
Afhankelijk van de lengte van AP en OA kunnen we nu een oplossing van de vergelijking bepalen. Let daarbij op het teken + of –.

Het is natuurlijk niet zo makkelijk om de juiste plaats van punt P te vinden. Je kan daar doorzichtig millimeter papier voor gebruiken, maar zeker voor grotere n blijft dat lastig. Met GeoGebra of een vergelijkbaar tekenprogramma kan je echter heel gemakkelijk punt P langs l_a schuiven tot S en E samenvallen. Het blijft echter een benadering.
Maar voor tweedegraads vergelijkingen kunnen we het keurig met met passer en lat construeren!

Opgave 1a.
We onderzoeken met de haakse-hoeken methode mogelijke oplossingen van $x^2+5x+6=0$ en van $2x^2-5x+3=0$. De rode figuur heeft dan dus de punten O, A, B en C, de blauwe figuur heeft dan de punten O, P en Q.
1) Bepaal de plaatsen van de punten van de rode en blauwe trajecten. (Geef coördinaten of een tekening).
2) Waar/hoe vind je een punt P zo dat C en Q samenvallen en geef een oplossing van de vergelijkingen. Let ook op het juiste teken! Controleer of dit klopt.

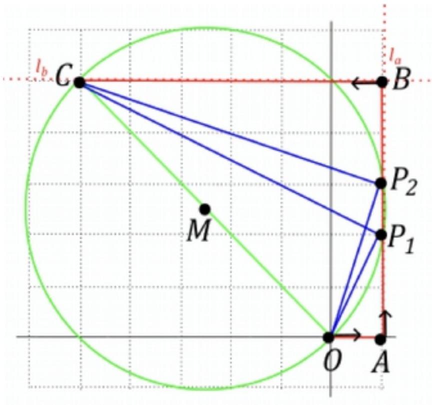
Uitwerking 1a
1a 1:Zie de twee figuren:
$x^2+5x+6=0$ geeft rood: O(0,0), A(1,0),B(1,5) en C(1–6,5)=(–5,5).
blauw: O(0,0), P1(1,2), P2(1,3) en Q=C.
$2x^2-5x+3=0$ geeft rood: A(2,0), B((2,–5) en C(2–3,–5)=(–1,–5)
O(0,0), P1(2,– 2), P2(2,–3) en Q=C=(–1,–5).
1a 2:
$x^2+5x+6=0$: De figuur is gemaakt met behulp van Geogebra, de richtingspijltjes zijn erbij getekend, en de twee plaatsen van P waarbij C en Q samenvallen zijn allebei in de figuur getekend.
We zien dat de lengten van de lijnstukken AP_1 en AP_2 ongeveer 2 en 3 zijn, maar de oplossingen van $x^2+5x+6=0$ zijn – 2 en – 3.
Het recept om de oplossingen te vinden zou kunnen zijn: Als $P(1, p)$, dan is $x=-p$ een oplossing.





$2x^2 – 5x + 3 = 0$: De gevonden lengtes van de lijnstukken AP_1 en AP_2 met P_1 en P_2 onder A zijn nu 2 en 3, terwijl de oplossingen zijn $x = 1$ en $x = 1{,}5$.
Het klopt wel als we niet de lijnstukken AP nemen, maar $x = –AP/OA$ of $x = – \tan\angle AOP$, waarbij we die hoek zoals gebruikelijk positief nemen als P boven A ligt, of negatief als P onder A ligt.
Of: **Als $P(a, p)$ dan $x = – p / a$.**
Dat ligt ook voor de hand, want als je in plaats van $2x^2 – 5x + 3 = 0$ oplost, en je kiest ervoor om alle coëfficiënten door 2 te delen, dan krijg je dezelfde oplossingen.
Dit moet natuurlijk nog wel bewezen worden, maar dat doen we in opgave 4.

Opgave 1b:
Beschrijf hoe je in het algemeen de oplossingen van een tweedegraads vergelijking met de haakse-hoeken methode kan construeren met passer en lat en hoe je dan meteen kan zien hoeveel oplossingen er zijn. Leg ook uit dat je hiermee bewijst dat de haakse-hoeken methode voor n=2 juist is.
Uitwerking van opgave 1b:
Bij een 2e graads vergelijking kunnen we, gegeven de punten O, A, B en C, de punten P_1 en P_2 met passer en lat construeren als volgt



(zie het voorbeeld $x^2+ 5x+ 6 = 0$):
Bepaal het midden van OC en noem dat punt M. Teken de cirkel met middelpunt M en straal OM.

Die cirkel snijdt de lijn AB in P_1 en P_2. Omdat OC middellijn van de cirkel is zijn de hoeken bij P_1 en P_2 recht (Thales). En zo moet je ze ook tekenen volgens de haakse-hoeken methode.

We kunnen nu laten zien dat de haakse-hoeken methode voor n=2 altijd juist is:

We bekijken vergelijkingen van de vorm: $ax^2+ bx + c = 0$. Dan is in de haakse-hoeken figuur, getekend in een assenstelsel: $O(0,0)$, $A(a,0)$, $B(a,b)$ en $C(a–c,b)$.
Dan is $M(½(a–c), ½b)$ en de straal is $OM=½\sqrt{\{a–c)^2+ b^2\}}$.
De formule van de cirkel is dus $\{x – ½ (a –c)\}^2 + (y – ½ b)^2= ¼\{(a– c)^2+ b^2 \}$.
Of $(x– ½ (a –c)^2 + (y – ½ b)^2 = ¼ (a^2+ b^2+ c^2– 2ac)$.

Om een punt P te vinden moeten we de cirkel nu snijden met de lijn door A en B, dus $x=a$ invullen geeft: $(a– ½ (a –c)^2 + (y – ½ b)^2 = ¼ (a^2+ b^2+ c^2– 2ac)$.

$¼ (a+c)^2+y^2–by+¼b^2= ¼ (a^2+ b^2+ c^2– 2ac)$

$a^2 +2ac+ c^2+ 4y^2– 4by+b^2= a^2+ b^2+ c^2– 2ac$.

$4ac+4y^2–4by=0$ of $\boldsymbol{y^2– by + ac = 0}$.

Als we $y=p=AP$ invullen krijgen we: $p=AP= ½ \{b ± \sqrt{(} b^2– 4ac) \}$ en dat is precies de oplossing die we verwachten: $ax^2+ bx + c = 0$ heeft als oplossingen:

$x=\{–b ± \sqrt{(} b^2– 4ac) \}/(2a) = – ½\{b ± \sqrt{(} b^2– 4ac) \}/a= –AP/a= –p/a$. En dus met $P(a, p)$: $\boldsymbol{x= –p/a}$.

Voor het tweede voorbeeld: $P_1(a,p)=(2,–2)$ en $P_2(2,–3)$ en volgens vermoeden: $x = –p/a=2/2=1$ en $x=3/2=1{,}5$ zijn twee oplossingen.

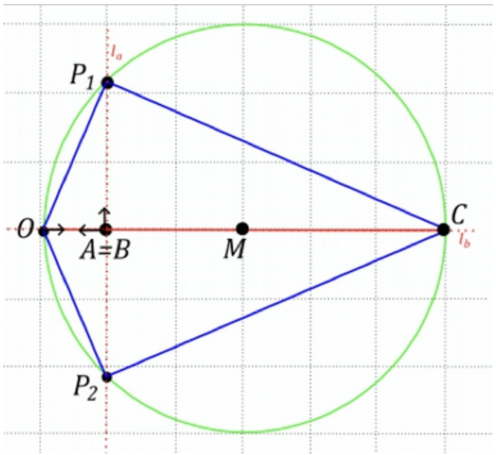
Dus klopt de haakse-hoekenmethode voor n=2. En als er geen oplossing zijn zijn er geen snijpunten, of als de lijn door A en B de cirkel raakt is er precies een snijpunt.

Opmerking: Dat de oplossing die we zo met de haakse-hoeken methode vinden voor n=1 is eigenlijk triviaal: Teken het rode traject voor $ax+b=0$: $O(0,0)$, $A(a,0)$ en $B(a,b)$. Het blauwe traject wordt OAP , waarbij P nu moet samenvallen met B. Dus $P(a,b)$. Dan wordt volgens onze aanname de oplossing: $x= -p/a$: Hier dus $x= -b/a$ is inderdaad de oplossing voor $ax+b=0$.

We gaan nu de wortel trekken uit een getal c, dus de oplossingen van $x^2=c$.

Opgave 2: Leg uit hoe je met passer en lat $\sqrt{c}$ kan bepalen met de haakse-hoeken methode en vergelijk het met een meer bekende methode om de wortel van c te construeren.

Uitwerking opgave 2:
Als x de wortel is van c dan is $c=x^2$ of $x^2-c=0$, een vierkantsvergelijking die we kunnen oplossen met de haakse-hoeken methode: a=1, b=0 en $c=c$..
In de figuur: A en B vallen samen, en C ligt in het verlengde van OA op een afstand c van A.
M is het midden van OC. P_1 en P_2 liggen op de cirkel op de lijn l_a.
Deze constructie komt overeen met een andere methode om deze wortel te construeren en kan met hetzelfde plaatje:



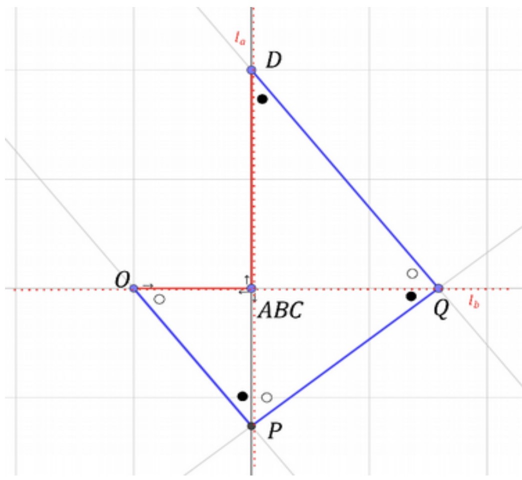
We zoeken de wortel uit c: Teken een lijn OC met lengte $1+c$, en construeer het midden M van die lijn en de lijn door A loodrecht op OC op afstand 1 van O. Die snijdt de cirkel in P_1 en P_2, met $AP_1=AP_2$. Dan geldt: $AP_1*AP_2=OA*AC=1*c$ en dus $AP_1=AP_2 = \sqrt{c}$. *q.e.d.*

Nog twee toepassingen: De verdubbeling van een kubus en de driedeling van een hoek .

Opgave 3a:
Bepaal de lengte van de ribben van een kubus met inhoud 2 liter. Geef een vergelijking waarmee je de oplossing kan vinden met de haakse-hoeken methode en leg uit hoe.

Uitwerking opgave 3a:

Als a de lengte is van de ribben dan is de inhoud gelijk aan a^3. We moeten dus oplossen: $x^3 = 2$, dus $x^3 - 2= 0$. Dat bepalen we met de haakse-hoeken methode. Geogebra levert de figuur van de haakse-hoeken oplossing hiernaast:



O is de oorsprong, de punten A, B en C vallen samen in (0,1). D ligt op (1,2). De haakse-hoeken methode geeft punten in $O(0,0)$, P op de lijn l_a (= de lijn x=1), Q op de lijn l_b (= de x-as) en R die moet samenvallen met D. In Geogebra zet je dus een punt P op de lijn x=1, en PQ loodrecht op OP en QR loodrecht op PQ . Dan verschuif je P op de lijn $x=1$ tot R en D samenvallen.

Er blijkt dan precies één punt P te zijn dat hier aan voldoet. Je kan dan de coördinaten van P aflezen, in mijn geval P=(1, –1,260003) . Maar Geogebra geeft geen nauwkeurige oplossing maar een vlekje waar R en D binnen liggen. Erg nauwkeurig is het dus niet, maar laat wel zien dat waarschijnlijk de methode in dit geval klopt: $1{,}260003^3 \approx 2{,}000390$ (oplossing $\approx$1,26 diameter)
We kunnen zelfs aantonen dat de oplossing exact is:
Je kan in de tekening de 3 rechthoekige driehoeken OAP, PAQ en QAD zien. Dat ze gelijkvormig zijn volgt uit de open en dichte rondjes in de hoeken.
Dus geldt $AP : OA = AQ : AP = AD : AQ$, en met OA=1 en AD=2 dus $AP=AQ/AP$ of $AQ=AP^2$.

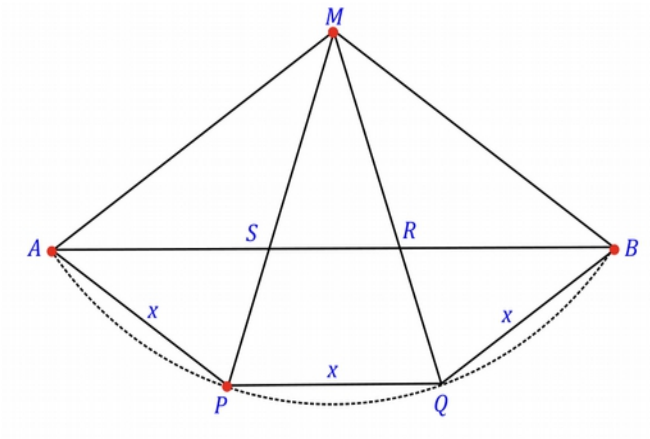
AQ^2=AP^4. En $AQ/AP=AD/AQ$ dus $AQ^2=AD*AP=2AP$. Gevolg: AP^4=2AP en AP^3=2.

Hoewel we nog niet bewezen is dat de methode altijd klopt (behalve voor vierkantsvergelijkingen) weten we nu dat hij ook klopt voor derdegraadsvergelijkingen van de vorm $a^3 – d$= 0.

Opgave 3b:

Idem voor de driedeling van een hoek. Teken daartoe een gelijkbenige driehoek ABM met gegeven lengte AB, en MA=MB=1, en een cirkel met middelpunt M en straal=1. Schets de koorden $AP=PQ=QR=x$.

Tip: Druk de lengte van x uit in AB. Leg vervolgens uit hoe je x kan bepalen met de haakse-hoeken methode.



Uitwerking Opgave 3b.

We tonen eerst aan dat alle scherpe driehoeken in de figuur congruent of gelijkvormig zijn en gelijkbenig. met gelijke basis hoeken **α**=$\angle PAM$.

Uit de constructie blijkt direct dat ΔAPM, ΔPQM en ΔQBM congruent en gelijkbenig zijn met verhouding basis : benen = x : 1.

$SR//PQ \rightarrow \Delta SRM \sim \Delta PQM$ en ook $\boldsymbol{\Delta SRM \sim APM} \rightarrow SR:SM=x:1$, dus $\boldsymbol{SR=x*SM}$

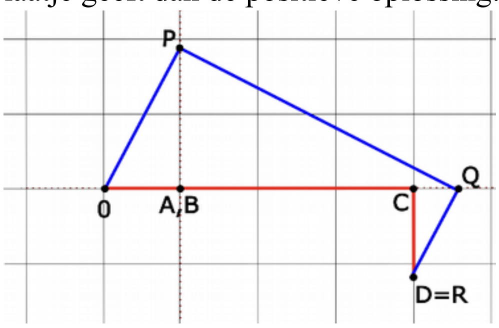
En ook: $\angle MSR=\angle MPQ=\boldsymbol{\alpha}=\angle APS\rightarrow\boldsymbol{\Delta PSA\sim\Delta APM\rightarrow AS=x}$ en ook $\boldsymbol{BR=x}$.

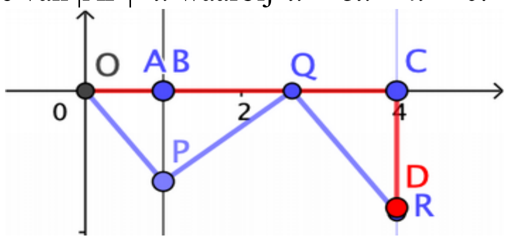
en PS: $x = x$: 1, dus $\boldsymbol{PS = x^2} \rightarrow \boldsymbol{SM}$=1–$PS$ = $\boldsymbol{1– x^2}$.

En dus : $\boldsymbol{SR=x*SM= x\,(1– x^2)}$.

Gevolg: $AB=AS+BR+SR = x + x + x(1– x^2) = 3x– x^3$ of $\boldsymbol{x^3 – 3x + AB = 0}$.

We kennen de lengte van AB, die noemen we n, (omdat AB ook in de haakse-hoeken methode wordt gebruikt). Ook de letter P wordt daar een punt op de lijn x =1. We gaan dus een oplossing zoeken voor $\boldsymbol{x^3 – 3x + n = 0}$ met de haakse-hoeken methode. O(0,0), A=B((1,0), C(4,0) en D(4,–n). Merk op dat volgens het vermoeden dat we eerder hebben opgesteld moet gelden dat P onder de x-as moet liggen, want dan is de oplossing voor x positief: Als $P(1, p)$, met p negatief, dan moet gelden bij x= –p dat $x^3 – 3x + n = 0$. Schuif dus P op de lijn x=a=1 zodat D en R samenvallen. Het rechter plaatje geeft dan de positieve oplossing: de lengte van |AP|=x waarbij $x^3 – 3x + n = 0$.





Opgave 4

Als x=s een oplossing is van een polynoom $p(x)$=0 met graad n, dan is $p(x)$ deelbaar door (x–s) en bestaat er een blauw haakse-hoeken traject $q(x)$ van graad n–1. Bepaal het verband tussen $p(x)$ en $q(x)$ en bewijs hiermee dat de haakse-hoeken methode juist is.

Tip: Let op gelijkvormige driehoeken waarmee je de ruimte tussen de blauwe en de rode trajecten kan opvullen..

Uitwerking van opgave 4.

Laat $p(x)$ een polynoom zijn met graad n en stel dat er een nul-punt is met $x=s$. We kiezen $a_0=1$.
$p(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_ix^{n-i}+\dots a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n$. Als $p(s)=0$ is $p(x)$ deelbaar door $(x-s)$.
Het quotient noemen we $q(x)$. Stel $q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\dots+b_ix^{n-i-1}+\dots b_{n-2}x+b_{n-1}$.
Er geldt dan: $(x-s)*q(x)=p(x)$. En we kiezen $a_0=1$.
Voor het gemak vermenigvuldigen we eerst $q(x)$ met x en dan met $-s$:

$$
\begin{array}{llllllll}
p(x) & = a_0x^n+ & a_1x^{n-1}+ & a_2x^{n-2}+\dots+ & a_ix^{n-i}+\dots+ & a_{n-2}x^2+ & a_{n-1}x+a_n & \\
q(x) & = & b_0x^{n-1}+ & b_1x^{n-2}+\dots+ & b_{i-1}x^{n-i}+\dots+. & b_{n-3}x^2+ & b_{n-2}x+b_{n-1} & \\
 & & & & & & & \\
xq(x) & = b_0x^n+ & b_1x^{n-1}+ & b_2x^{n-2}+\dots+ & b_ix^{n-i}+\dots+ & +b_{n-2}x^2+ & b_{n-1}x & \\
-s*q(x)= & & -sb_0x^{n-1}+ & -sb_1x^{n-2}-\dots- & sb_{i-1}x^{n-i}-\dots- & sb_{n-3}x^2- & sb_{n-2}x & -sb_{n-1} \\
\hline
\end{array}
\;+
$$

$$(x-s)q(x)=b_0x^n+(b_1-sb_0)x^{n-1}+(b_2-sb_1)x^{n-2}+\dots+(b_i-sb_{i-1})x^{n-i}+\dots+(b_{n-2}-sb_{n-3})x^2+(b_{n-1}-sb_{n-2})x-sb_{n-1}$$

Dan moet gelden met $a_0=1$: $b_0=a_0$ en $b_n=0$:

$$
\begin{array}{lcl}
a_0=1=b_0 & \rightarrow & b_0=1 \\
a_1=b_1-sb_0 & \rightarrow & b_1=a_1+sb_0=a_1+s \\
a_2=b_2-sb_1 & \rightarrow & b_2=a_2+sb_1=a_2+sa_1+s^2 \\
.. & & \\
a_i=b_i-sb_{i-1} & \rightarrow & b_i=a_i+sb_{i-1}=a_i+sa_{i-1}+s^2a_i+\dots+s^i \\
\dots & & \\
a_{n-2}=b_{n-2}-sb_{n-3} & \rightarrow & b_{n-2}=a_{n-2}+sb_{n-3}=+\dots\dots s^{n-2} \\
a_{n-1}=b_{n-1}-sb_{n-2} & \rightarrow & b_{n-1}=a_{n-1}+sa_{n-2}+s^2a_{n-3}+\dots+s^{n-2}a_1+s^{n-1} \\
a_n=b_n-sb_{n-1} & \rightarrow & b_n=a_n+sa_{n-1}+s^2a_{n-2}+\dots+s^{n-1}a_1+s^n
\end{array}
$$

Omdat $a_0=1$ en $b_n=0$ ($q(x)$ heeft graad $n-1$) geldt: $a_n+sa_{n-1}+s^2a_{n-2}+\dots+s^{n-1}a_1+s^na_0=0$
Dit is een vergelijking van graad n met variabele s. Als we s vervangen door x is het precies gelijk aan $p(x)=0$ en p(x)is deelbaar door $x-s$.

Nu gaan we dit tekenen volgens het recept voor de haakse-hoeken methode:

Voor de rode lijnen gebruiken we de coëfficiënten a van $p(x)$ en voor de blauwe de coëfficiënten b van $q(x)$.
De methode met $a_0=1$ zegt: kies een punt P op de lijn $x=1$ en verschuif die zodanig dat het laatste punt van de rode en de blauwe figuren samenvallen. Als we een punt P hebben gevonden waar dat aan voldoet en de coördinaten van P zijn $(1,-p)$ dan is $p(p)=0$ een oplossing.
Dus moet gelden: $s=p$.

Bewijs:
Net als in opgave 3b kunnen we gelijkvormige rechthoekige driehoeken vinden tussen de rode en de blauwe trajecten. De eerste is ΔOAP, met zijden 1, p en $\sqrt{(p^2+1)}$. De volgende is ΔPBQ, vervolgens ΔQCR, enzovoort tot de laatste driehoek en die zijn allemaal gelijkvormig met verhouding van de rechthoekszijden $1{:}p$. De oorzaak is dat $\angle AOP$ in al die driehoeken voorkomt, omdat allebei de trajecten steeds haakse hoeken maken.
Het blauwe haakse-hoeken traject ligt gedraaid in de figuur, en dan zou de eerste coëfficiënt gelijk zijn aan $\sqrt{(p^2+1)}$. Maar gezien onze berekening met $p(x)=(x-s)q(x)$ is de eerste coëfficiënt $b_0=1$ en die lengte zien we in de eerste driehoek terug als $OA=1$. Alle coëfficiënten b van $q(x)$ kunnen we dus aflezen in die gelijkvormige driehoeken aan de lengtes van de rechthoekszijden die overeen komen met OA in de eerste driehoek.
Die lengtes hebben we hierboven berekend als alle coëfficiënten b van $q(x)$.

Dus mits ook de laatste driehoek bestaat, ofwel het laatste punt van het rode en het blauwe traject vallen samen, is de oplossing inderdaad $s=-p$. *q.e.d.*

We geven nog even als voorbeel onze eerste polynoom $x^4 + 1{,}5x^3 - 3x^2 - 3{,}5x - 9$
Er is een nulpunt bij $x=2$.
Dus de coëfficiënten van $q(x)$ met $s=2$ zijn:

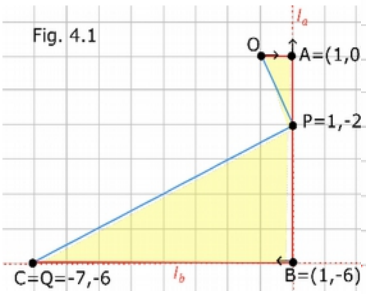
$b_0 = a_0 = 1$;		$= 1$
$b_1 = a_1 + 2b_0 = 1{,}5 + 2*1 = 3{,}5$	$= a_1 + s$	$= 1{,}5 + 2 = 3{,}5$
$b_2 = a_2 + 2b_1 = -3 + 2*3{,}5 = 4$	$= a_2 + sa_1 + s^2$	$= -3 + 3 + 4 = 4$
$b_3 = a_3 + 2b_2 = -3{,}5 + 2*4 = 8 = 4{,}5$	$= a_3 + sa_2 + s^2a_1 + s^3$	$= -3{,}5 - 6 + 6 + 8 = 2{,}5$
$b_4 = a_4 + 2b_3 = -9 + 2*4{,}5 = 0$	$= a_4 + sa_3 + s^2a_2 + s^3a_1 + s^4$	$= -9 - 7 - 12 + 12 + 16 = 0$

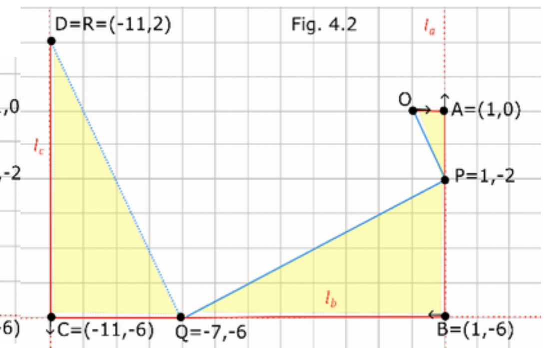
Dus $q(x) = x^3 + 3{,}5x^2 + 4x + 4{,}5 + 0$ en met $x=2$ geldt inderdaad $b_4 = 0$.

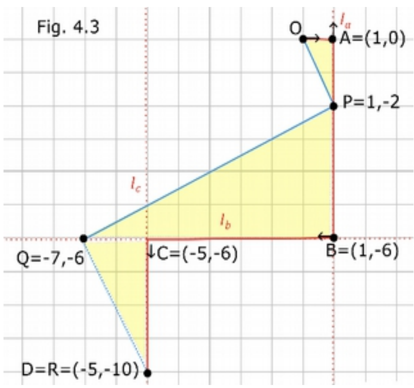
De trajecten komen bijelkaar in $S=E$, en vanaf daar zijn alle volgende coëfficiënten 0.

Toevoeging: Alternatief bewijs door uitbreiding van bestaande polynomen met bekend nul-punt.
We kiezen een polynoom van graad $n=2$ met $a=1$ (graad 1 mag ook) met een nulpunt $x=s$, dus de polynoom is deelbaar door $(x-s)$. We weten al dat we deze kunnen oplossen met de haakse-hoeken methode.

We illustreren dit met $p(x)=x^2-6x+8=0$ (fig. 4.1) met $p(2)=0$, dus $s=2$. We plaatsen dus een punt $P(1,-2)$, en de polynoom is deelbaar door $(x-2)$. En we plaatsen punten $A(1,0)$, $B(1,-6)$ en $C(-7,-6)$.







We tekenen het rode traject *OABC* en het blauwe *OPQ*, waarbij *C* en *Q* samenvallen.

Nu gaan we de polynoom uitbreiden tot graad n ($n=3$) door het laatste punt *C* te verplaatsen met een afstand t met de pijl in *B* mee. In het eerste voorbeeld is $t=4$, (fig. 4.2) dus *C* komt in $(-11,-6)$ en in het tweede voorbeeld is $t=-2$, (fig. 4.3) dus daar komt *C* in $(-5,-6)$. Vervolgens tekenen we de loodlijn op de lijn l_b in de nieuwe punten *C* en de nieuwe lijnen l_c. Die snijdt die lijnen in *R* en daar tekenen we ook het punt *D*, want nu moeten *D* en *R* samenvallen.

Omdat *OP* en $QR=QD$ evenwijdig zijn (door de haakse hoeken) geldt: de lengte van $CD/QC=OA/AP=s$. (driehoeken *OAP* en *QCR* zijn gelijkvormig) en dus geldt: de lengte $CD=ts$.

Wat is er nu veranderd aan de polynoom die het nieuwe traject *OABCD* voorstelt ten opzichte van $p(x)$?

In eerste instantie is de graad n nu met 1 verhoogd, dus $p(x)$ is met x vermenigvuldigd. Daardoor is hij nog steeds deelbaar door x-s. Vervolgens is er door de verplaatsing van *C* tx bij gekomen.
En ook de lengte van $CD=CQ=ts$ komt erbij, maar die gaat in het eerste voorbeeld tegen de pijl in *C* in, dus er gaat ts af (*CQ* is negatief).

Totaal in het eerste voorbeeld is de verandering dus $tx–ts=t(x-s)$. We zien dus dat door de uitbreiding de nieuwe polynoom nog steeds deelbaar is door (x-s) . En dat wilden we aantonen.

Ook in het tweede voorbeeld: t is negatief en CQ wordt positief, dus ook daar is de verandering deelbaar door $x–s$.

We kunnen vervolgens de polynoom van graad 3 analoog uitbreiden tot een polynoom van graad n=4, 5, enzovoort.

Doordat we s en t voor de uitbreidingen vrij kunnen kiezen zijn zo dus alle polynomen te maken die deelbaar zijn door $x–s$, dus met oplossing $x=s$ en voldoen aan het recept van de haakse-hoeken methode om die nulpunten te bepalen.