

EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAAR

Examens in twee delen:
met en zonder hulpmiddelen

Hoe bereid je leerlingen voor op de onder-
zoeksvraag in het examen havo wiskunde A?

Wiskunde voor dichters, denkers en doeners

Wiskundige formules in
natuurwetenschappen en wiskunde

NR.6



Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

JAARGANG 99 MEI 2024

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 99 NR 6

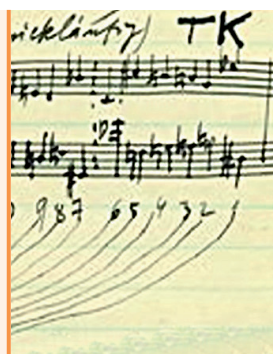


IN DIT NUMMER

EXAMENS IN TWEE DELEN:
EEN VERKENNING

Irene van Stiphout,
Sjaak Kamerling

4



WITJE: DUCCI-RIJTJES

7

HOE BEREID JE LEERLINGEN HAVO
WISKUNDE A VOOR OP DE
ONDERZOEKSVRAAG IN HET
EINDEXAMEN?

Susan Hollander

8

WISKUNDE EN POËZIE

Michiel Doorman

12



WISKUNDIGE FORMULES IN NATUUR-
WETENSCHAPPEN EN WISKUNDE

Peter Kop,
Harrie Eijkelhof

16

KWADRAATSOM $\times$ KWADRAATSOM =
KWADRAATSOM?

Martin Kindt

20

UIT DE PRAKTIJK

WAT IS DAT

EEN STANDAARDAFWIJKING?

Thijs Hamstra

25



UITDAGENDE PROBLEMEN

FOUTEN MAKEN EN HET MALFATTI-PROBLEEM

Jacques Jansen

26

WIS EN WAARACHTIG

30



PRACHT EN KRACHT VAN WISKUNDE
DEEL 2: HET HYPERBOLISCH VLAK EN
HYPERBOLISCHE MEETKUNDE

Paul Igodt

32

EEN BOL IN GELIJKE STUKKEN
VERDELEN

HET NUT VAN DERDEMACHTS-
VERGELIJKINGEN

Jens de Groot

36

Afbeelding voorkant: Trap in Castelo de Tomar, Portugal
Foto: Eelke Muller

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

WORTEL TREKKEN
Sjef van Dongen

40

ROEST RUST (NIET)
EEN OBSERVATIE DIE MAAR DOOR HET
HOOFD BLEEF CIRKELEN
Ab van der Roest

44

PUZZEL
Lieke de Rooij
Wobien Doyer

45

SERVICEPAGINA

46

Ledenenquête NVvW

De NVvW organiseert allerlei activiteiten voor de leden, zoals de jaarlijkse studiedag, online meet-ups rond thema's en de uitgave van *Euclides*. Ook behartigt de NVvW de belangen van wiskundeleraars en komt de vereniging op voor goed wiskundeonderwijs. Heel graag willen we weten wat je van de verschillende activiteiten van de vereniging vindt, zodat we nog beter kunnen inspelen op de behoeften van de leden. Ook zijn we benieuwd naar je mening over *Euclides*. Welke artikelen lees je graag? Over welke onderwerpen zou je meer artikelen willen?



We zijn benieuwd naar jullie antwoorden!
<https://nvvw.nl/vragenlijst>



Kort vooraf

Vorig weekend was het finaleweekend van de wiskunde Olympiade. Teams uit Nederland, Japan, Kroatië, Duitsland en Denemarken

hebben zich twee dagen gebogen over een opdracht. Je kent het fenomeen vast wel, dit was alweer de 35^e editie, en de WiTjes, zie bladzijde 7 in deze *Euclides*, zijn gebaseerd op o.a. deze opdrachten. Ik had een mooi gesprek met een Deens team. Ze vertelden dat ze ervaring hadden met dit soort grote onderzoeksopdrachten als voorbereiding op hun landelijke eindexamens. Want dat bestaat uit een kort deel, waar geen rekenmachine of ict bij gebruikt wordt, en een langer deel waarvoor een computeralgebrasysteem (cas) nodig is. En die opdrachten leken wel een beetje op de Olympiade opdrachten, vonden ze. Gaat dat er hier ook van komen, zo'n tweedeling? De mogelijkheid wordt verkend: het cito heeft daar al prototypes voor ontworpen en is er voorzichtig mee aan het experimenteren. Zie het openingsartikel van Irene van Stiphout en Sjaak Kamerling.

In het vorige Kort Vooraf stond de oproep om voor de *Euclides* special, die in het kader van het eeuwfeest uitkomt, je mooiste les te beschrijven. En daar komt nog een oproep bij. Kijk eens om je heen, de eerstvolgende les die je in een specifiek wiskundelokaal geeft. Inspirerende omgeving? Maak dan een foto en stuur deze naar de redactie, daar gaan we dan een aantal bladzijden in de *Euclides* 100 special mee vullen.

Nog minder dan twee weken te gaan totdat de centraal schriftelijke eindexamens weer beginnen. Voor alle collega's met examen-kandidaten: veel succes met de laatste loodjes en hopelijk veel genoeg bij en met het corrigeren.

Tom Goris

Examens in twee delen: een verkenning

Het gebruik van de grafische rekenmachine, onder andere bij een examen, staat al jaren onder druk.

Een mogelijk alternatief is een examen in twee delen: een deel met en een deel zonder hulpmiddelen. Cito ontwikkelde twee prototypen van examens in twee delen, voor havo en vwo wiskunde

B. Welke kansen en belemmeringen deden zich voor tijdens de constructie van de examens?

Inleiding

De grafische rekenmachine (GR) heeft al sinds de invoering van de Tweede Fase eind jaren '90 een plek in het Nederlandse wiskundeonderwijs. In de loop der jaren ontstonden er problemen met de GR. Dit heeft onder meer geleid tot een verplichte examenstand. In 2018 heeft CvTE een veldraadpleging gehouden waarbij scenario's over de toekomst van het gebruik van ict bij wiskunde-examens zijn voorgelegd aan wiskundedocenten. Het scenario van een examen in twee delen, een deel met en een deel zonder ict en/of technologie, had de voorkeur van de deelnemers aan de veldraadpleging.^[1]

Een examen in twee delen komt ook voor in een aantal Duitse deelstaten, Scandinavische landen en in deelstaat Victoria in Australië. Uit eerder onderzoek van Cito is gebleken dat een examen in twee delen voor havo/vwo wiskunde A binnen de huidige syllabi geen haalbare kaart is, omdat in die vakken maar heel beperkt een beroep wordt gedaan op het handmatig uitvoeren van procedures. Dat betekent dat het deel zonder ict, waarin handmatige vaardigheden worden getoetst, wel heel klein zou zijn. Het ligt dus voor de hand om te kijken naar wiskunde B. Om deze weg verder te verkennen heeft Cito twee prototypen ontwikkeld van examens in twee delen: een voor havo wiskunde B en een voor vwo wiskunde B. Ook is nagegaan welke kansen en problemen er in de constructie van examens in deze vorm een rol spelen.

Achtergrond

Omdat een computeralgebrasysteem (CAS) veel meer opties heeft dan de GR, was de vraag op welke manier we gebruik wilden maken van die meerwaarde. Hiervoor bleek het model van Böhm et al.^[2] zinvol. Zij onderscheiden vijf categorieën CAS-opgaven ten aanzien van de mate waarin

CAS een rol speelt in (het vinden van) de oplossing. Later heeft Heugl^[3] daar nog een zesde categorie C-1 aan toegevoegd (vertaling IvS/SK).

- | | |
|-----|--|
| C-1 | CAS werkt belemmerend in het toetsen van de wiskundige vaardigheid. In plaats daarvan wordt omgang met CAS getoetst. |
| C0 | Traditionele vraag waar GR noch CAS behulpzaam zijn. |
| C1 | Traditionele vraag (ontwikkeld voor rekenmachine) die sneller kan worden opgelost of triviaal wordt door gebruik van grafische rekenmachine of spreadsheets. |
| C2 | Traditionele vraag (ontwikkeld voor rekenmachine) die sneller kan worden opgelost of triviaal wordt door het gebruik van CAS. |
| C3 | Vraag die ontstaat door een traditionele vraag uit te breiden tot een CAS-vraag door bijvoorbeeld een parameter toe te voegen of realistische data te gebruiken. |
| C4 | Vraag die moeilijk of tijdrovend is op te lossen zonder CAS of die alleen maar is op te lossen met behulp van CAS. |

De ambitie was om prototypen op te leveren met vragen uit categorie C4: daarin gaat het echt om de meerwaarde van het gebruik van CAS. De lat lag daarmee hoog. Onderzoek van Heugl^[3] naar vragen over algebra en analyse in de examens van Australië, Denemarken, Duitsland, Noorwegen en Oostenrijk laat zien dat er maar weinig vragen zijn in categorie C4. De meeste opgaven van de onderzochte examens vallen in categorie C2.

De verkenning van mogelijkheden voor het gebruik van CAS deden we niet lichtzinnig. We beseffen dat het

gebruik van CAS een grote verandering zou betekenen en een doordenking zou vragen van het hele curriculum. Het gebruik van CAS heeft immers consequenties voor opvattingen van leerlingen en docenten over waar wiskunde over gaat, wat het betekent om wiskunde te doen, op welke wijze leerlingen wiskunde leren en wat hiervoor nodig is en wat de rol van de docent hierin precies is. Al deze aspecten spelen een rol in de relatie tussen onderwijs, toetsing, de toegestane hulpmiddelen en de congruentie daarvan.

Constructie

Voor de constructie van de prototypen zijn zes constructeurs geworven. Iedere constructeur kreeg de opdracht om twee opgaven te maken van ieder ongeveer vier vragen. Daarnaast was de opdracht aan constructeurs om bij te houden waar ze tegenaan liepen in de constructie. Waar liggen kansen en mogelijkheden, waar is het lastig of moeilijk om vragen te bedenken?

Prototypen

De constructie heeft geleid tot twee prototypen van examens in twee delen: een voor havo wiskunde B en een voor vwo wiskunde B. Voor de herkenbaarheid is besloten om de prototypen wat betreft omvang, aantal scorepunten, opzet van een paar vragen binnen een bepaalde context, en onderwerpen aan te laten sluiten bij de huidige examens.

De prototypen zijn gemaakt met de computeralgebra-omgeving van GeoGebra. De reden hiervoor is pragmatisch: constructeurs en toetsdeskundigen waren bekend met GeoGebra. Het gaat hier niet om een principiële keuze; we willen geenszins andere CAS-mogelijkheden uitsluiten.

Het deel zonder CAS is echt zonder ict, dus ook geen gewone rekenmachine. De reden hiervoor is dat ook gewone rekenmachines (wat daar dan ook onder verstaan moet worden) steeds meer kunnen. Denk bijvoorbeeld aan meerregelige displays, het kunnen maken van tabellen, scrollen op het scherm et cetera waardoor het verschil tussen gewone rekenmachines en meer geavanceerde rekenmachines minder helder wordt.

Een van de vragen die we hadden was of het mogelijk is om CAS-vragen te stellen binnen ieder domein. Daarom zijn de opgaven in het CAS-deel verspreid over alle domeinen (uitgezonderd domein A Vaardigheden). Voor opgaven in het deel zonder CAS is om pragmatische redenen gebruikgemaakt van bestaande examenopgaven. Het opsplitsen van de examens wiskunde B in twee delen vraagt om een andere manier van organiseren van

examens dan we tot nu toe gewend zijn, zowel praktisch als inhoudelijk. Mocht worden besloten om over te gaan naar examens in twee delen, dan ligt hier nog flink wat denk- en uitzoekwerk. Dat gaat bijvoorbeeld over de vraag of beide delen op één dag moeten worden afgenomen, hoe er dan gewisseld wordt, hoe het cijfer tot stand komt, hoe met herkansingen moet worden omgegaan, et cetera. Ook zijn er inhoudelijke vragen die in dit onderzoek onbeantwoord blijven. Een voorbeeld hiervan is wat er van leerlingen wordt verwacht over het vastleggen van het gebruik van CAS. Is een screenshot genoeg? Hoe wordt dat ingeleverd? Geplakt in een document? Deze vragen zijn **niet** meegenomen in het ontwerp van de prototypen.

Kansen en belemmeringen

Gedurende de constructie hebben de constructeurs de kansen en belemmeringen die ze tegen zijn gekomen in kaart gebracht.

Omgaan met CAS: het gebruik van CAS in GeoGebra is wennen en kost dus tijd (nu geldt dat, wellicht in mindere mate, voor leren omgaan met de GR). Daarnaast is het CAS-scherm van GeoGebra gebruiksonvriendelijk. Zo raakt bijvoorbeeld het beeldscherm gauw vol waardoor je moet scrollen. Ook is de syntax nu nog ingewikkeld, is het zoeken naar een geschikt commando, en is de output niet zoals leerlingen gewend zijn. Wel is het aantal commando's dat nodig is in CAS heel beperkt. Op de korte termijn is het leren werken met CAS een belemmering: het kost docenten en leerlingen tijd om hiermee om te leren gaan. Op de langere termijn zou de CAS-module wellicht meer ontwikkeld en vriendelijker kunnen worden. Het gebruik van CAS kan een kans zijn in het overzichtelijk noteren van uitwerkingen en in het houden van overzicht daarin.

Constructie van opgaven: vragen bedenken voor het CAS-deel vraagt meer van constructeurs. Dat komt omdat de grens tussen een knoppencursus CAS en een betekenisvolle vraag die met CAS kan worden opgelost een dun lijntje is. CAS kan rekenwerk uit handen nemen, maar het is oppassen dat het niet te veel invulwerk wordt. Een voorbeeld van rekenwerk uit handen nemen is een afgeleide vragen die handmatig net boven de examenstof ligt of een limiet vragen die daar net boven ligt. Een belemmering kan zijn dat CAS technieken uit handen neemt, terwijl het huidige onderwijs wiskunde B juist grotendeels gaat over technieken.

Rekenwerk in deel zonder CAS: het deel zonder ict vraagt meer van leerlingen. In het domein meetkunde bijvoorbeeld >

moeten berekeningen mooi uitkomen zodat leerlingen deze zonder gebruik van een rekenmachine kunnen doen. Een andere mogelijkheid is dat wordt afgesproken genoeg te nemen met een antwoord voor een lengte van een zijde van de vorm $17 \cdot \sin(35^\circ)$ zonder dat dit verder benaderd moet worden.

Algoritmisch denken: het gebruik van CAS vraagt van leerlingen om hun oplossingsstrategie te overzien. Zo biedt CAS een krachtige meerwaarde in het algoritmisch denken: je moet eerst goed nadenken hoe je een probleem aanpakt voor je het kunt uitbesteden aan de computer. Daarnaast zullen leerlingen moeten nadenken over welke invoer CAS dan precies nodig heeft.

Conclusie

De constructie van de examens in twee delen was pionieren: niet eerder zijn er in Nederland examens in deze vorm ontwikkeld. Van de constructeurs die aan dit project hebben meegewerkt, hebben we veel gevraagd. Zij moesten buiten de gebaande paden denken, zich verdiepen in de mogelijkheden van CAS en tegelijkertijd zicht houden op hun eigen leerproces door kansen en belemmeringen in beeld te brengen. De opbrengst mag er zijn, vinden we. Er liggen nu twee prototypen van examens in twee delen, passend bij de huidige vorm van examens van contexten met vragen. De vragen die we hebben ontwikkeld, categoriseren we veelal in categorie C4, vragen dus die moeilijk of tijdrovend zijn op te lossen zonder CAS of die alleen maar zijn op te lossen met behulp van CAS. De inzet van CAS is hiermee veelal betekenisvol, zie het voorbeeld in figuur 1 (opgave) en 2 (correctievoorschrift). In onze ogen vraagt de inzet van CAS van leerlingen dat ze zicht hebben op het oplossingsproces als geheel en dat ze helder moeten krijgen op welk punt in het proces ze CAS moeten inzetten. Van de constructeurs vraagt het bedenken van CAS-vragen een andere manier van naar wiskunde kijken. Juist omdat er meer mogelijkheden zijn wat betreft het rekenwerk kan dieper worden ingegaan op onderliggende wiskundige concepten.

Discussie

We beseffen dat de keuzes die zijn gemaakt, onderwerp kunnen zijn van kritiek. We noemen een paar discussiepunten.

Als eerste willen we opnieuw benadrukken dat het gebruik van CAS gevolgen heeft voor de hele leerlijn en verder gaat dan de keuze van toegestane hulpmiddelen bij de examens. De inzet van computeralgebra vraagt ook van leerlingen dat ze de beschikking hebben over een device waar een CAS op kan draaien. Dat geldt dan voor alle

Driehoek met twee cirkels

Gegeven is driehoek P_1P_2Q met hoekpunten $P_1(-1,0)$, $P_2(1,0)$ en $Q(0,q)$, met $q > 0$. De punten P_1 en P_2 liggen dus op de x -as en het punt Q ligt op de positieve y -as.

Cirkel c_1 raakt elke zijde van driehoek P_1P_2Q .

Cirkel c_2 gaat door elk hoekpunt van driehoek P_1P_2Q .

In de figuur zijn voor een waarde van q de driehoek en de twee cirkels weergegeven.

In deze figuur zijn ook de middelpunten $M(0,m)$ van c_1 en $N(0,n)$ van c_2 aangegeven.

Punt M heeft gelijke afstand tot elke zijde van de driehoek. Hieruit volgt:

$$m = \frac{-1 + \sqrt{q^2 + 1}}{q}$$

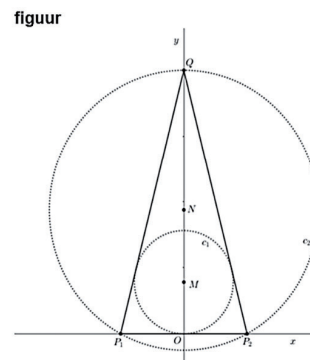
sp 1 Toon aan met behulp van CAS dat

$$\text{inderdaad } m = \frac{-1 + \sqrt{q^2 + 1}}{q}.$$

Punt N heeft gelijke afstand tot elk hoekpunt van de driehoek. Met behulp van deze eigenschap kan ook de y -coördinaat n van N in q worden uitgedrukt.

De posities van M en N zijn afhankelijk van de positie van Q . De oppervlakte van beide cirkels is dus afhankelijk van q . Er is één waarde van q waarvoor geldt dat de oppervlakte van c_2 twee keer zo groot is als de oppervlakte van c_1 .

sp 2 Bereken met behulp van CAS deze waarde van q . Geef als eindantwoord de exacte waarde die CAS geeft.



figuur 1 Toelichting. Deze opgave is bedoeld voor vwo wiskunde B en heeft betrekking op domein E Meetkunde met coördinaten. In vraag 1 moet de y -coördinaat van punt M worden bepaald. Leerlingen zouden dit ook met de hand kunnen, maar dat dat is moeilijk en tijdrovend. De nadruk ligt nu op het proces van oplossen. De berekening in vraag 2 is voor leerlingen niet te doen zonder CAS. Beide vragen zijn geclassificeerd in de categorie C4. De CAS-activiteiten gaan over het berekenen van afstanden en het oplossen van vergelijkingen.

havo- en vwo-leerlingen met wiskunde B. Dit vraagt om een zorgvuldige inbedding om bijvoorbeeld kansen-ongelijkheid te voorkomen. De praktische organisatie van een examen in twee delen is niet meegenomen in dit onderzoek. De haalbaarheid van een examen in twee delen zal in belangrijke mate afhangen van de praktische organiseerbaarheid in scholen. Hierbij kan Nederland leren van de organisatie in onder meer de Scandinavische landen en Duitsland waar afname van examens in twee delen al jaren de praktijk is. De keuze om het deel zonder ict echt zonder enig hulpmiddel te doen, dus ook zonder een gewone rekenmachine, vraagt misschien wel te veel van leerlingen. Handmatig rekenen krijgt op deze manier wellicht een te groot aandeel in het centraal examen. De vraag is ook of alle domeinen wel in beide delen aan de orde moeten komen. In de prototypen hebben we dit gedaan omdat we wilden onderzoeken of vragen in beide delen (CAS en deel zonder ict) kunnen voorkomen. Dat kan, dat laten we zien. Dan is vervolgens de vraag of, en zo ja in hoeverre, dat wenselijk is.

Driehoek met twee cirkels			
1 maximumscore 5			
•	1	$y = q \cdot x + q$ $\rightarrow y = q \cdot x + q$	1
•	2	Afstand((0,m), y=q*x+q) $\rightarrow \sqrt{\frac{(-m+q)^2}{(-q)^2+1}}$	1
•		Deze afstand moet gelijk zijn aan m	1
•	3	Oplossen(S2 = m, m) $\rightarrow \left\{ m = \frac{-\sqrt{q^2+1}-1}{q}, m = \frac{\sqrt{q^2+1}-1}{q} \right\}$	1
•		Een toelichting waaruit volgt dat $m = \frac{-\sqrt{q^2+1}-1}{q}$ niet voldoet	1
2 maximumscore 5			
•		$d(N, Q) = d(N, P_1)$ geeft $q - n = \sqrt{1+n^2}$	1
•	4	Oplossen(q-n=sqrt(1+n^2), n) $\rightarrow \left\{ n = \frac{q^2-1}{2q} \right\}$	1
•		Er moet gelden: $n = \sqrt{2} \cdot m$	1
	5	yM=Rechterlid(Element(S3, 2)) $\rightarrow yM := \frac{\sqrt{q^2+1}-1}{q}$	
	6	yN=Rechterlid(Element(S4, 1)) $\rightarrow yN := \frac{q^2-1}{2q}$	
•	7	Oplossen(yN=sqrt(2)*yM) $\rightarrow \left\{ q = -\sqrt{4\sqrt{-\sqrt{2}+2}-2\sqrt{2}+5}, q = \sqrt{4\sqrt{-\sqrt{2}+2}-2\sqrt{2}+5} \right\}$	1
•		Dus $q = \sqrt{4\sqrt{-\sqrt{2}+2}-2\sqrt{2}+5}$	1

figuur 2

Tot slot

Het complete onderzoeksverslag met de prototypen zijn te vinden op <https://cito.nl/centrale-toetsen-en-examens/ontwikkelingen/onderzoek-over-het-toekomstig-gebruik-van-ict-bij-wiskunde-examens>.

We zijn zeer geïnteresseerd in wat je vindt van deze prototypen en nodigen je dan ook van harte uit om je mening per mail met ons te delen.

Noten

- [1] CvTE. (2018, 23 oktober). Geraadpleegd op 12 februari 2024, van Uitkomsten enquête 'ICT bij het centraal examen wiskunde havo/vwo' | Examenblad.nl
- [2] Böhm, J., Forbes, I., Herweyers, G., Hugelshofer, R. & Schomacker, G. (2004). The case for CAS. T3 Europe.
- [3] Heugl, H. (2017). The use of CAS in exams. A lecture at the T3 conference in Chicago.

Over de auteurs

Irene van Stiphout en Sjaak Kamerling zijn toetsdeskundigen bij Cito. E-mailadressen: irene.vanstiphout@cito.nl, sjaak.kamerling@cito.nl.

Witje: Ducci-rijtjes

Wiskunde in
teams



WiTjes zijn korte modelleer- of onderzoeksopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Olympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

Begin met een rijtje van vier gehele positieve getallen, bijvoorbeeld 3, 7, 2, 7. Maak een volgend rijtje door de absolute verschillen te nemen, bijvoorbeeld $|3 - 7|$, $|7 - 2|$, $|2 - 7|$, $|7 - 3|$, oftewel 4, 5, 5, 4. Je kunt dat nogmaals doen, dan krijg je 1, 0, 1, 0. Neem je nogmaals het verschil, dan krijg je 1, 1, 1, 1, gevolgd door 0, 0, 0, 0. In het algemeen, gaat een rijtje a_1, a_2, a_3, a_4 onder de *verschilstap* over in het rijtje $|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, |a_3 - a_4|, |a_4 - a_1|$. Deze rijtjes heten *Ducci-rijtjes*, genoemd naar de Italiaanse wiskundige Enrico Ducci (1864 - 1940).

Onderzoek wat er gebeurt voor andere rijtjes van vier getallen bij het herhaald toepassen van de verschilstap, en formuleer een vermoeden. Het vermoeden in het algemeen bewijzen is best een uitdaging! Kijk eerst eens naar rijtjes met alleen nullen en enen.

Je kunt ook rijtjes van drie getallen bekijken:

4, 5, 8 $\rightarrow$ 1, 3, 4 $\rightarrow$ 2, 1, 3 $\rightarrow$ 1, 2, 1 $\rightarrow$ 1, 1, 0 $\rightarrow$ 0, 1, 1 $\rightarrow$ 1, 0, 1 $\rightarrow$ 1, 1, 0. Deze rijtjes geraken in een lus.

Onderzoek wanneer rijtjes uitdoven en wanneer ze in een lus raken.

Bron: Wiskunde B-dag 2023

Hoe bereid je leerlingen havo wiskunde A voor op de onderzoeksvraag in het eindexamen?

Sinds 2015 is de onderzoeksvraag een vast onderdeel van het eindexamen wiskunde A. Deze vraag valt in de categorie wiskundige denkactiviteiten. Voor veel docenten is het voorbereiden van hun leerlingen op dit onderdeel geen standaardonderdeel van hun lespraktijk. Bovendien is het niet altijd duidelijk op welke wijze dit kan worden gedaan. Na tegenvallende resultaten bij dit onderdeel van het examen in mijn klas was dit reden om hier praktijkonderzoek naar te doen. Hoe kunnen leerlingen worden voorbereid op de onderzoeksvraag in het eindexamen havo wiskunde A?

Lesmethode

In de zoektocht naar een juiste aanpak ligt het voor de hand eerst naar de gebruikte lesmethode te kijken, en dat is op mijn school de methode *Getal & Ruimte*. De methode *Getal & Ruimte* is van oudsher een degelijke methode die vaardigheden traint. In editie 12 zijn de begin- en eindopdrachten toegevoegd om leerlingen voor te bereiden op de onderzoekopgave van het eindexamen. Volgens de auteur van *Getal & Ruimte* die ik heb geïnterviewd, als eerste stap in mijn praktijkonderzoek, is het gebruiken van deze opgaven de manier om de leerlingen goed voor te bereiden. Deze opdrachten maken de leerlingen dan in willekeurig samengestelde groepjes van drie, waarbij de docent weinig hulp geeft. Op deze manier leren ze vanzelf wat ze moeten doen.

Begeleiding geven

Zo gesteld lijkt het uitermate eenvoudig: de begin- en eindopdrachten opgeven, even de groepjes aselekt indelen en als docent weinig hulp bieden. Inderdaad wordt vaak gesteld dat leerlingen wiskundige denkactiviteiten het best kunnen leren door in groepjes samen te werken en de problemen helemaal zelf uit te zoeken, waarbij de docent het beantwoorden van vragen zoveel mogelijk vermijdt, zodat met de geboden hulp niet de complexiteit of de uitdaging van de opdracht teniet gedaan wordt. Het niet beantwoorden van vragen en het niet geven van hulp kan echter ook leiden tot frustraties en misconcepties bij leerlingen.^[1] Als docent zou ik mijn leerlingen wel hulp willen kunnen bieden zónder dat het denkproces stopt.

Small Group Scaffolding

Docenten ondervinden vaker moeilijkheden in de ondersteuning van groepjes leerlingen bij het leren van wiskunde. Calor e.a.^[2] hebben daarom een tool ontwik-

keld om docenten te ondersteunen bij het scaffolden van kleine groepjes: de *Small-Group Scaffolding Tool*. Bij iedere vraag die leerlingen aan de docent stellen over de opdracht die ze moeten oplossen, bepaalt de docent met de tool of er moet worden geholpen met het weer op gang brengen van het oplossingsproces door samenwerking, of door het geven van inhoudelijke hulp wanneer de leerlingen echt blijken te zijn vastgelopen. Na gebruik van deze tool in mijn praktijkonderzoek bleek deze eenvoudig toepasbaar. Ik voelde mij als docent meteen zelfverzekerd in de begeleiding van mijn leerlingen die in groepjes problemen oplosten. Maar naast het geven van de juiste proceshulp en inhoudelijke hulp aan de groepjes, vroeg ik mij toch af of er daarnaast hulp kon worden gegeven voor het leren van probleemoplossende vaardigheden.

Probleemoplosvaardigheden

Om de onderzoeksvraag van het eindexamen goed te kunnen beantwoorden moeten er verschillende stappen worden gezet. De leerling moet de grote hoeveelheid gegeven informatie goed lezen en precies snappen wat er moet worden onderzocht. Vervolgens moet de leerling duidelijk laten zien wat er moet worden uitgezocht en berekend om het juiste antwoord te kunnen geven. Dit antwoord moet vervolgens volledig zijn gegeven, dus ook in de juiste eenheid en afronding. Leren de leerlingen dit aan elkaar door te oefenen in groepjes en hoe dan? Als docent wil ik dan ook weten of dit proces nog verder gestuurd kan worden, en op welke wijze ik dat kan doen. Hoewel de positieve effecten van samenwerkend leren voor het leren probleemoplossen worden onderkend, is er nog geen duidelijkheid onder welke omstandigheden dit kan worden bereikt. Uit onderzoek^[3] is gebleken dat er veel effect kan worden bereikt wanneer de interacties binnen de groep worden gestructureerd met cognitieve

of metacognitieve instructie. Voor het oplossen van een complexe taak en om leerlingen hogere-orde-denken zoals probleemoplossen aan te leren kan een *scaffold* een goed hulpmiddel zijn.^[4]

Metacognitieve vaardigheden

Het principe dat scaffolds kunnen worden gebruikt om metacognitieve vaardigheden te trainen bij wiskunde, is gebruikt in de Meta-methode.^[5] Hier worden Meta-kaarten gebruikt bij het leren van wiskunde voor verschillende onderwerpen zoals telproblemen, goniometrie en exponentiële functies. Hierbij worden op basis van de heuristische methode voor het oplossen van problemen van Pólya vier fasen onderscheiden: oriënteren, begrijpen, plannen en monitoren en evalueren. In een grote driehoek met daarin vier kleinere driehoeken worden bij de verschillende fasen passende metacognitieve vragen gesteld bij een specifiek wiskundig domein. De Meta-kaart lijkt goed aan te sluiten bij het idee om leerlingen ondersteuning te bieden bij het oplossen van de onderzoeksvraag in het eindexamen. De verschillende fasen van het probleemoplossen zitten immers besloten in de vier driehoeken. De vragen binnen de driehoeken zijn gericht op het bewust maken van de leerlingen over in welke fase zij zitten in het onderzoek. Ook leren de leerlingen om zichzelf bepaalde vragen te stellen op het moment dat ze zijn vastgelopen en welke strategieën ze kunnen inzetten. Ten slotte leren ze zich af te vragen of ze succesvol zijn geweest in het oplossen van het probleem door terug te kijken.

Toepassing Meta-kaart bij de onderzoeksvraag

In navolging van de Meta-methode heb ik voor de onderzoeksvragen Woningtekort (examen 2022 2^e tijdvak, zie figuur 1) en Fijnstofemissie (examen 2021 1^e tijdvak, zie figuur 3) een Meta-kaart gemaakt. Het is goed om een nieuw gemaakte kaart een keer aan een collega voor te leggen en zelf uit te proberen om te kijken of er onduidelijke of nutteloze vragen in staan, en de kaart vervolgens aan te passen. Voor mijn praktijk-onderzoek heb ik de kaart ook voorgelegd aan expert en grondlegger van de META-methode: Plonie Nijhof.^{[5], [6]} Toen ik echter de door mij gemaakte kaarten uitprobeerde in mijn 6 vwo wiskunde A-leerlingen kwam een ander probleem naar voren: het is helemaal niet vanzelfsprekend voor de leerlingen om de META-kaart (goed) te gebruiken. Sommigen willen dit uit principe niet, omdat ze hun eigen manier willen gebruiken, anderen bevragen liever leerlingen in hun groepje dan dat ze de kaart raadplegen bij het oplossen van de onderzoeksvraag.

Woningtekort

In het rapport 'Cijfers over wonen en bouwen 2016' van het Ministerie van Binnenlandse Zaken staan voorspellingen van de **woningbehoefte** en de **woningvoorraad** in Nederland.

Volgens deze voorspellingen zal in 2025 de woningbehoefte gelijk zijn aan 8 334 000 woningen.
De woningvoorraad is in 2025 gelijk aan 8 148 000 woningen.

Er is in 2025 dus een woningtekort van 186 000 woningen. Als je berekent hoe groot dit tekort is als percentage van de woningvoorraad, dan krijg je het **relatieve woningtekort**. In 2025 is dit gelijk aan 2,3%, want:

$$\frac{8\,334\,000 - 8\,148\,000}{8\,148\,000} \cdot 100\% = 2,3\%$$

In de tabel zie je ook voorspellingen voor het jaar 2030.

tabel		
	2025	2030
woningbehoefte	8 334 000	8 511 000
woningvoorraad	8 148 000	8 335 000
woningtekort	186 000	176 000
relatieve woningtekort	2,3%	2,1%

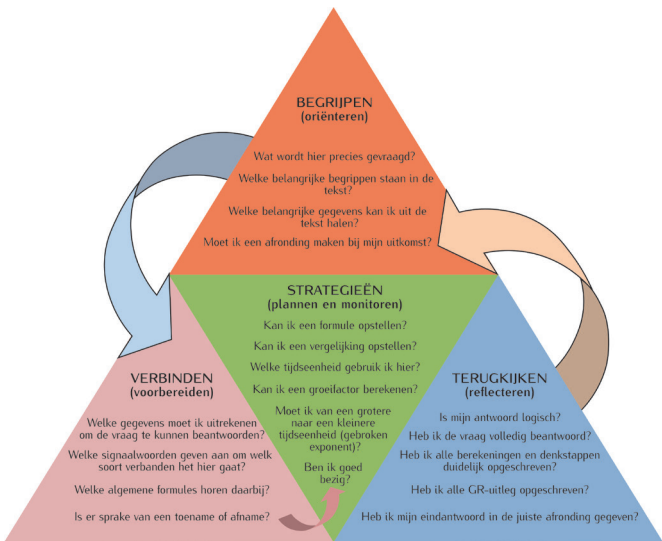
Veronderstel dat men het woningtekort wil terugdringen, zodat in het jaar 2040 het relatieve woningtekort 1% is.

Neem het volgende aan:

- De woningbehoefte groeit van 2025 tot 2030 jaarlijks met een vast percentage. Na 2030 blijft dit met hetzelfde percentage doorgroeien.
- De woningvoorraad neemt vanaf 2030 toe met een constant aantal woningen per jaar.

Bereken met welk constant aantal woningen per jaar de woningvoorraad vanaf 2030 moet toenemen zodat het relatieve woningtekort in 2040 gelijk is aan 1%. Geef je antwoord in gehele duizendtallen.

figuur 1 Woningtekort (havo wiskunde A 2022 II)



figuur 2 META-kaart onderzoeksvraag Woningtekort (havo wiskunde A 2022 II)

Fijnstofemissie

In het rapport Transport en Mobiliteit 2016 van het Centraal Bureau voor de Statistiek staat informatie over de fijnstofemissie (dit is de hoeveelheid fijnstof die vrijkomt) door het vervoer over de weg, uitgesplitst naar personenvervoer en goederenvervoer. Deze hoeveelheid wordt bepaald door het aantal gereden kilometers te vermenigvuldigen met de fijnstofemissie per gereden kilometer.



In 1990 was het aantal gereden kilometers door het personenvervoer 103 200 miljoen en door het goederenvervoer 16 800 miljoen. In 2014 is het aantal gereden kilometers voor het personenvervoer twee keer zo groot geworden als in 1990 en het aantal gereden kilometers voor het goederenvervoer drie keer zo groot. Ondanks de toename van het aantal gereden kilometers is de totale fijnstofemissie door het wegvervoer in 2014 aanzienlijk minder dan in 1990. Dit komt vooral door het gebruik van betere motoren.

Er moet worden onderzocht met hoeveel procent de totale emissie van fijnstof door het wegvervoer in de periode 1990 tot en met 2014 is gedaald. Daarvoor moeten bovenstaande gegevens over het aantal gereden kilometers en onderstaande aannames over de fijnstofemissie per gereden kilometer worden gebruikt.

In 1990 kwam er gemiddeld genomen bij het personenvervoer per gereden kilometer 0,08 gram fijnstof vrij. Voor het goederenvervoer was dit toen 0,58 gram. In de periode 1990 tot en met 2014 daalde de fijnstofemissie bij het personenvervoer elk jaar met 0,003 gram per gereden kilometer. In dezelfde periode daalde de fijnstofemissie per gereden kilometer bij het goederenvervoer met 9% per jaar.

Onderzoek met behulp van bovenstaande gegevens en aannames met welk percentage de totale emissie van fijnstof door het wegvervoer in 2014 is gedaald ten opzichte van 1990. Geef je antwoord in hele procenten.

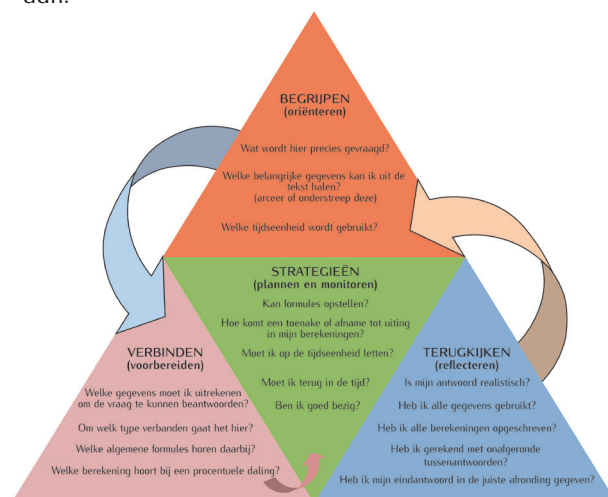
figuur 3 Fijnstofemissie (havo wiskunde A 2021 I)

De META-kaart geïntegreerd in de onderzoeksvraag

Om de leerlingen te helpen met het gebruik van de META-kaarten, heb ik een META-kaart geïntegreerd in de onderzoeksvraag. Op deze manier wordt het gebruik van de META-kaart een onderdeel van het oplossingsproces. Deze opdracht, met bijbehorende META-kaarten, is gemaakt bij de onderzoeksvragen *Autodiefstal* (2019 I), *Regenpijpen, dunne of dikke?* (2021 II) en *Fijnstofemissie* (2021 I). Deze onderzoeksvragen zijn onderscheidend in het type gegeven informatie, oplossingsstrategie en benodigde vaardigheden. De opzet van de opdrachten is dat leerlingen de volgende vijf taken uitvoeren om de onderzoeksvraag op te lossen met een META-kaart. De drie META-kaarten zijn nu niet meer direct herleidbaar aan de titel van de onderzoeksopdracht maar hebben alleen als benaming de letters A, B en C gekregen.

De in de opdracht uit te voeren taken zijn:

- 1 Lees de onderzoeksvraag grondig door. Bepaal waar de opgave over gaat en bedenk welke soort wiskundige vaardigheden hier worden gevraagd.
- 2 Bekijk de verschillende META-kaarten. Selecteer welke kaart het beste past bij het oplossen van de gegeven onderzoeksvraag.
- 3 Beantwoord de vragen in de driehoeken **BEGRIJPEN** en **VERBINDEN** op de META-kaart.
- 4 Los vervolgens de onderzoeksvraag op en beantwoord daarbij de vragen in de driehoek **STRATEGIEËN**.
- 5 Beantwoord de vragen in de driehoek **TERUGKIJKEN** op de META-kaart.
- 6 Pas eventueel het antwoord op de onderzoeksvraag aan.



figuur 4 Metakaart C t.b.v. onderzoeksvraag Fijnstofemissie (havo wiskunde A 2021 I)

De opdrachten heb ik vervolgens laten maken in mijn 5 havo wiskunde A klas, kort voor het te maken eind-examen. Taak 2, het selecteren van de juiste META-kaart bij de opdracht zorgde ervoor dat de leerlingen de onderzoeksopdracht eerst globaal en zoekend gingen lezen. Dit lukte zonder veel moeite in vier van de vijf groepjes. Vervolgens moesten de leerlingen de vragen in de driehoeken **BEGRIJPEN** en **VERBINDEN** beantwoorden, waarbij belangrijke informatie in de tekst van de onderzoeksvraag moest worden gearceerd en antwoorden op de metacognitieve vragen moesten worden opgeschreven. Allemaal voorbereidend werk voordat de onderzoeksopdracht werd uitgewerkt. In taak 4 konden de leerlingen de onderzoeksvraag daadwerkelijk gaan oplossen. Daarbij moesten de vragen in de driehoek **STRATEGIEËN** bij het oplossen worden betrokken en beantwoord. Na het oplossen van de onderzoeksvraag moest worden terug-

"ALS DOCENT WIL IK MIJN LEERLINGEN HULP KUNNEN BIEDEN ZÓNDER DAT HET DENKPROCES STOPT."

gekeken naar het antwoord en de uitwerking door het beantwoorden van de vragen in de driehoek TERUGKIJKEN in taak 5, waarna in taak 6 expliciet werd gevraagd naar het (eventueel) aanpassen van de uitwerking of oplossing. Het uitgebreid werken met de vragen op de META-kaart maakte dat een lesuur van 50 minuten niet toereikend bleek voor ieder groepje om de opdracht helemaal af te krijgen. Interessant was dat de leerlingen de vragen soms verschillend interpreteerden en daardoor ook verschillend beantwoordden. Dit maakt het denkproces van de leerlingen mooi zichtbaar. Bijvoorbeeld op de vraag op de META-kaart bij de opdracht *Fijnstofemissie* over welke type verbanden er voorkomen, zijn de antwoorden van twee groepjes verschillend, zie figuur 5:

Om welk type verbanden gaat het hier?

exponentieel, elke jaar neemt het zoveel af.

Om welk type verbanden gaat het hier?

aantal kilometer gereden ten opzichte van uitgestorte gram fijnstof

figuur 5 Verschillende interpretatie van de vraag op de META-kaart 'Om welke type verbanden gaat het hier?'

Uit het eerste antwoord blijkt dat leerlingen de vraag interpreteren zoals bedoeld. Ze noemen echter alleen het exponentiële verband maar niet het lineaire verband, dat ook gevonden had moeten worden. Het groepje dat het tweede antwoord opschreef heeft alleen gekeken naar de grootheden waartussen het verband bestaat en niet welk type verband dit is. Verschillend uitgewerkte vragen zijn natuurlijk een goede basis voor een klassengesprek wanneer de opdrachten worden nabesproken. Hierbij kan ook het metacognitieve proces worden besproken. Het is natuurlijk toeval dat mijn klas de onderzoeksvraag dit jaar in het eindexamen wel bovengemiddeld gemaakt had. De veelvuldig gearceerde teksten van de onderzoeksopgave in de achtergelaten examens waren zeker geen toeval, want ze hadden wel teruggedacht aan die lange les met de grote gekleurde driehoeken met de vele vragen.

Zelf META-kaarten toepassen?

Wanneer je zelf de metacognitieve vaardigheden van leerlingen wilt trainen in de wiskundeles kan de meeste opbrengst worden verwacht wanneer de training vaker wordt herhaald. Ook het nabespreken van de uitgewerkte opdrachten, inclusief de beantwoording van de metacognitieve vragen, is van grote toegevoegde waarde. Op termijn kun je leerlingen ook zelf een META-kaart laten maken bij een opdracht of onderwerp.

Noten

- [1] Kirschner, P., Sweller, J., & Clark, R. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential and inquiry-based teaching. *Educational psychologist*, 41(2), pp. 75-86.
- [2] Calor, S. M., Dekker, R., van Drie, J. P., & Volman, M. L. (2022). Scaffolding small groups at the group level: Improving the scaffolding behaviour of mathematics teachers during mathematical discussions. *Journal of the Learning Sciences*(31:3), pp. 369-404. doi:10.1080/10508406.2021.2024834
- [3] Mevarech, Z.R. (1999). Effects of metacognitive training embedded in cooperative settings on mathematical problem solving. *The journal of educational research*, 92(4), pp. 195-205. doi:10.1080/00220679909597597
- [4] Rosenshine, B., & Meiser, C. (1992, 4). The use of scaffolds for teaching higher-level cognitive strategies. Opgeroepen op 2 2023, van <https://www.formapex.com/telechargementpublic/rosenshine1992a.pdf>
- [5] Nijhof, P., & Ernst-Militaru, R. (2018). *Handreiking voor het gebruik van de META-methode*. Opgehaald van <https://www.nro.nl/sites/nro/files/migrate/Handreiking-META-methode.pdf>
- [6] Zie: META-Methode Ploni Nijhof, Rodica Ernst-Militaru, Joris Ghysels. *Euclides*, 92(6).

Over de auteur

Susan Hollander is docent wiskunde op het Vellesan College in IJmuiden.

E-mailadres: s.hollander@vellesancollege.nl

Wiskunde en poëzie

Op het snijvlak tussen wiskunde en kunst worden vaak meetkundige patronen gezien: islamitische vlakvullingen, fractalen, onmogelijke figuren. Kortom: vooral raakvlakken met de beeldende kunst. Maar op het snijvlak tref je ook poëzie en muziek aan, zoals Michiel Doorman laat zien.

Inleiding

Veel onderwerpen binnen de wiskunde spreken een breder publiek aan dan alleen bèta's. Bekende voorbeelden zijn het begrip oneindig, de vierde dimensie en de gulden snede. Bovendien komen wiskundige thema's en methoden veelvuldig terug in andere disciplines, zoals kansrekening in rechtspraak, logica in taalwetenschappen, en statistiek in sociale wetenschappen. Wiskunde is een vakgebied met brede toepasbaarheid en wekt al eeuwenlang verwondering bij beoefenaren en andere geïnteresseerden. Dat is het romantische beeld van wiskunde.

Erasmus karakteriseert de wiskundige in *Lof der Zotheid* (1514) op minder romantische wijze:

'Zij zien laag neer op het oningewijde gemeen, als zij drie- en vierhoeken, cirkels en andere dergelijke meetkundige figuren, de een over de andere teekenen en als in een doolhof dooreen laten lopen, vervolgens letters als in slagorde scharen, die ze telkens en telkens weer nu eens op deze, dan weer op gene wijze rangschikken, om zoo onervarenen zand in de oogen te strooien.'

Wiskunde voor dichters, denkers en doeners

Op de Universiteit Utrecht bestaat het vak Wiskunde voor dichters, denkers en doeners dat juist ook die romantiek van de wiskunde aandacht wil geven in samenhang met de historische en culturele plaats van wiskunde in wetenschap en maatschappij. Dit vak is ooit bedacht door Jan van Maanen en bedoeld voor bachelorstudenten, veelal eerstejaars, die niet een bètarichting volgen. Jaarlijks komen hier zo'n vijftig studenten op af, vooral van de brede opleiding Liberal Arts & Sciences, die net wiskunde A hebben afgerond. Het vak bestaat uit een serie colleges, opdrachten en een eigen onderzoek (in groepjes). Eén van de opdrachten is om het artikel van Jeanine Daems over wiskunde en poëzie uit *Pythagoras* te lezen.^[1]

Jeanine geeft enkele voorbeelden hoe wiskunde een dichter kan inspireren. Het idee is dat de studenten daarmee ervaren dat wiskunde ook hun eigen creativiteit kan aanwakkeren, en dat ze achteraf kunnen reflecteren op de relatie tussen wiskunde en kunst. Jeanine noemt:

- 1 Wiskunde als onderwerp: gedichten over wiskunde; gebeurtenissen uit de geschiedenis van de wiskunde, grote ontdekkingen en stellingen worden in dichtvorm beschreven (Drs P, Marjolein Kool, Jan Beuving).
- 2 Wiskunde als beeldspraak/metafoor: beelden en associaties vanuit de wiskunde bij een heel ander thema, bijvoorbeeld de liefde (K. Schippers).
- 3 Wiskunde voor de vorm: met aantallen letters (om pi te onthouden), aantal lettergrepen (Fibonacci).
- 4 Wiskunde voor de constructie: vanuit een algoritme om een bepaald effect, ritme, balans, symmetrie te creëren (o.a. Gerrit Krol).

Na het lezen van dit artikel moeten de studenten zelf een wiskundig gedicht maken. In het vervolg staan enkele voorbeelden van het werk van deze studenten, en wellicht inspireert dat om eens te dichten met je eigen leerlingen. Daarmee worden wiskunde en kunst met elkaar in verband gebracht en geeft het aanleiding om te reflecteren op die verbinding.

Werk van studenten

Veel studenten laten zich inspireren door meetkunde. Het kan zijn dat het visuele element eerder uitnodigt tot een poëtische beschrijving. Het betreft hier dan ook vooral gedichten in de eerste categorie, waarbij de wiskunde zelf het onderwerp is. Hoewel, er zou ook sprake kunnen zijn van een metafoor...

Het Zerkje

Door: Joren la Roi

Naast de kerk daar stond een zerkje
In het groene gras
Dit zerkje haalde al zijn levensgeluk
uit het feit dat hij een rechthoek was

voor het zerkje stond een bloempje
zonder water weg te kwijnen
en net toen hij de geest wou laten
wees hij het zerkje op zijn lijnen
twee gelijke lijnen, lopen parallel naar beneden
boven en onder om ze te verbinden
zag het bloempje daar nog twee

Het riep: jij bent een vierkant!
Jij kan geen rechthoek zijn
Jij hebt 4 gelijke lijnen
Wat deed dit het zerkje pijn

Het zerkje wist wel beter
Want hij stond stevig in de aarde
En daar buiten het zicht van het bloempje
Was waar hij zijn onderkant bewaarde

Hij riep nog naar het bloempje
In de lengte ben ik groot
Maar het bloempje hoorde het niet meer
Het bloempje dat was dood

De Twee Zijden van een Vriendschap

Door: Isa Pihlajamaa

Op een dag liepen Balk en Kubus op het strand
Ik hoor toch bij jou, en jij toch bij mij?
Vroeg Balk naderhand
Wel helemaal niet, zei Kubus, hoe kom je daarbij?

Balk stamelde, en keek schuw naar de stenen
'We hebben beide zes zijden, en ook twaalf benen.'

Dat maakt ons niet bijzonder, riep Kubus luid.
Hoe vaak moet ik het zeggen, ik reik boven je uit.

'Maar onze zijvlakken zijn congruent, twee aan twee!
Dat feitje helpt toch wel mee?'

'Balkje, je alledaagsheid geeft helemaal niet
Ik ben een Kubus, dat maakt uniek.
Die rol is niet voor iedereen weggelegd
Jij komt vast wel op je twaalf benen terecht.
Niet het gelijk aantal zijden en gelijk aantal benen,
Maar de gelijke afmetingen, dat zal je verstenen.

Mijn zes zijden zijn elkaars gelijken
Iets waar bollen en cilinders compleet voor bezwijken,
Balkje, van jou kunnen we dat helaas niet zeggen
Er is niks wat dat feit zou kunnen weerleggen.

Al mijn zijvlakken zijn congruent
Dat maakt mij buitengewoon competent
Bovendien zijn al mijn ribben gelijk
Ontzettend handig in de praktijk.

Lachend liep Balk naast Kubus door het riet,
Ach Kubus, zonder mij bestond je niet.

Tijdens het vak behandelen we het algoritme om bij
een repeterend kommagetal de bijbehorende breuk te
vinden. Dat inspireerde Mette tot het volgende gedicht
'Algoritmisch'.

Algoritmisch

Door: Mette van Liempd

ik vroeg een kommagetal ten dans
op het eerste gezicht geordend naar kans
eindeloos...
enigszins intimiderend
toch intrigerend
geduldig gestap
van de trap
der decimale plaatsen
vormde de generale repetitie
waarna we, herhaling in hand
in hand
eindelijk in ons algoritme kwamen
we draaiden rond en rond en rond
tien, honderd, duizendmaal
en plaatsten klokslag middernacht
een punt

>

achter het prachtige patroon

tot slot, de allerlaatste wending
waar mijn getal haar transformatie onderging
een achterwaartse stap
op de staart streepte deze weg
en deling door de duizelende dans
plaatste het geheel op haar plek
de oneindige dans eindelijk stilgevallen
in een breuk van gehele getallen

Check zelf nog eens hoe en waarom het voorbeeld in figuur 1 ook voor andere breuken werkt. Voor deze studenten is het wonderlijk dat je zo kunt aantonen dat bij iedere breuk een repeterend kommagetal hoort en dat het omgekeerde dus ook geldt.

11/ 4,0 /0,36363636....

$$\begin{array}{r} 33 \\ 70 \\ 66 \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 100 \times 0,36363636... = 36,36363636... \\ 1 \times 0,36363636... = 0,36363636... - \\ \hline 99 \times 0,36363636... = 36 \end{array}$$

En dus: $0,36363636... = 36/99 = 4/11$

figuur 1

Bovenstaande poëzie en het artikel van Jeanine zijn vervolgens aanleiding om de relatie tussen wiskunde en kunst te bespreken. Deze studenten ervaren wiskunde vaak als het leren volgen van gegeven procedures. Heeft dat iets te maken met creativiteit? Is er een relatie tussen wiskunde en kunst die je aan de hand van zo'n activiteit kunt bespreken?

Wiskunde en kunst

De relatie tussen wiskunde en kunst krijgt al jaren aandacht bij Ars et Mathesis, waar nu een fraai online museum te bezoeken is.^[2] Een eerste poging om die relatie concreter te maken kan door wiskunde als volgt te definiëren:

Wiskunde is de vaardigheid van het beschrijven en onderzoeken van structuren en patronen in ruimte en hoeveelheid. Wiskundigen vergroten in hun werk kwantitatieve en meetkundige structuren uit om situaties en processen te kunnen beschrijven, construeren en voorspellen. Tijdens dat uitvergroten ontwikkelen wiskundigen hun eigen

(beeld)taal. Een taal die redeneren met zekerheid mogelijk maakt, maar waarin ook aspecten als eenvoud, elegantie en symmetrie een rol spelen.

Dit lijkt op de werkwijze van dichters en kunstenaars. Poëzie en beeldende kunst zijn ook een vervorming van de realiteit. Kunstenaars vergroten in hun werk dingen en fenomenen uit die hen opvallen in het werkelijke leven. Het ontwikkelen van een eigen beeldtaal zie je dan ook bij hen. Klassiek is het voorbeeld van Mondriaan (1872-1944), die eerst bomen heel figuratief tekende, maar zich steeds meer liet leiden door patronen in takken en vlakken. Rudi Fuchs beschreef dit heel mooi in één van zijn columns in de *Groene Amsterdammer* (2012, nr. 4):

'Dus terwijl hij tekende, heeft hij de boomkruin ontbladerd en zo als melodische vertakking van kronkelige lijnen gezien – omdat het hem ging om de ritmiek en het rijm ervan. Ook in andere werken uit die jaren werd een intuïtie van abstractheid geleidelijk merkbaar – en toen begon hij zo ook te kijken. (...) Daarbij, in zijn zorgvuldige kijken, zien we dat de ruimtes tussen de takken visueel steeds zelfstandiger worden. De takken van bomen werken als contourlijnen van open vlakken die weer een eigen dynamisch patroon vormen. Zo is het met de abstractie begonnen. Nu, honderd jaar later, is dat zo kijken een eigen, vruchtbaar idioom geworden.'



figuur 2 Henri Matisse, *Nature Morte Au Magnolia*, 1950

Zo is het ontwikkelen van een eigen beeldtaal een vorm van abstractie die herkenbaar is in het werk van kunstenaars. Matisse is daar een mooi voorbeeld van, zie figuur 2. Een retrospectief in het Stedelijk museum liet zijn ontwikkeling zien van ruimtelijke afbeeldingen naar een vlakke decoratieve stijl.^[3] Eén van de doelen is om

hierbij creativiteit niet te laten belemmeren door wat we herkennen en dat te kopiëren.

Ook bij het componeren van muziek zie je rond het begin van de vorige eeuw pogingen om te ontkomen aan een herkenning die verleidt tot oppervlakkige herhaling. Schönberg, Webern e.a. ontwikkelen in die periode een systeem voor seriële muziek die alle noten gelijk behandelt. Het voorbeeld in figuur 3 laat zien hoe een reeks noten (een zogenaamde *basic set*) gebruikt wordt in een compositie volgens tamelijk wiskundige regels.



figuur 3 Manuscript van *Komposition mit zwölf Tönen* (1949)

In de poëzie zie je in die tijd de Franse stroming met als doel literaire werken te maken die aan bepaalde voorwaarden of beperkingen onderhevig zijn: *littérature sous contrainte*. Deze beperkingen zijn niet alleen bedoeld als woord- en taalspelletjes, maar juist ook om de inspiratie en het vakmanschap van de auteurs aan te scherpen. In al die verschillende disciplines zie je dat een systematische werkwijze leidt tot tamelijk abstracte kunst. Een kunst die minder makkelijk te waarderen is als je de beeldtaal niet herkent. Net als bij wiskunde, zit het kunstenaarschap grotendeels in de zoektocht. Toeschouwers zien of horen alleen het eindproduct. Een goed begrip van het proces leidt tot een betere waardering van de kunst. Dat is ook een relatie met wiskunde! We proberen in het onderwijs te vermijden dat leerlingen wiskunde ervaren als een geïsoleerd en vervolmaakt systeem, en betrekken hen daarom bij de ontwikkeling van wiskundige taal, algoritmen en concepten. Bijvoorbeeld door eerst de haphmethode te behandelen en dan pas de staartdeling, eerst woordformules en dan $y = 2x + 3$, en eerst toenamediagrammen en dan pas grafieken van afgeleide functies. De geschiedenis van de wiskunde kan hier ook een bruikbare rol spelen om leerlingen mee te nemen naar de uiteindelijke notaties en werkwijzen en die daardoor beter te begrijpen en te waarderen.

Kortom, wiskunde en kunst kennen overeenkomsten in:

- vorm (esthetische waarde), zoals eenvoud, elegantie en symmetrie;
- betekenis (interpretatie), zoals het werken met analogieën, metaforen, generalisaties, verbindingen leggen en het leveren van inzicht;
- de zoektocht (proces vs eindproduct), als je niets van de zoektocht weet, dan is het moeilijk om het eindproduct te waarderen.

Slot

Wiskunde en kunst hebben iets met elkaar en die relatie gaat veel verder dan de voorbeelden die hier aan de orde kwamen. Hopelijk hebben deze voorbeelden (en zo'n creatieve activiteit als het zelf maken van gedichten) geïnspireerd om die relatie eens in de klas aan de orde te stellen.^[4] Mijn studenten vonden het erg leuk om op die manier over wiskunde te praten. En misschien kunnen we daarmee voorkomen dat we gezien worden als de dichters die Erasmus als volgt karakteriseert: 'wier eenig genot bestaat in het streelen van de ooren der dwazen en dan nog wel met loutere nietigheden en belachelijke verhalen.'

Noten

- [1] <http://www.jeaninedaems.nl/wp-content/uploads/2014/08/gedichtenuithetongerijmde.pdf>
- [2] https://nvvw.shapespark.com/ars_et_mathesis_virtueel_deel1/
- [3] <https://a-place-called-space.blogspot.com/2015/07/the-oasis-of-matisse.html>
- [4] Ben je geïnspireerd geraakt door die relatie tussen wiskunde en kunst? Zie dan ook de jaarlijkse Bridges conferentie die in 2025 in Eindhoven georganiseerd wordt: <https://www.bridgesmathart.org/future-bridges-conferences/>

Over de auteur

Michiel Doorman is medewerker van het Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.

E-mailadres: m.doorman@uu.nl

Wiskundige formules in natuurwetenschappen en wiskunde

Wiskunde wordt vaak aangeduid als taal van de natuurwetenschappen. Maar de afstemming tussen de schoolvakken wiskunde, biologie, natuurkunde en scheikunde is niet bevredigend. Dit betreft onder andere het rekenen en de omgang met formules. De problematiek van rekenen heeft in het recente verleden veel aandacht gekregen en in dit artikel focussen we op de omgang met formules in de genoemde vakken.

Inleiding

Bij de recente herziening van de binask-syllabi is aandacht besteed aan dit onderwerp, mede op aandrang van docenten uit het hoger onderwijs. Zij constateerden dat eerstejaars studenten formules vaak alleen als reken-tuig zien en niet als een uitdrukking van de relatie tussen grootheden, afhankelijke en onafhankelijke variabelen, parameters, constanten en eenheden. Wat ontbreekt is het kunnen lezen en interpreteren van formules, betekenis geven aan formules, zowel in natuurwetenschappelijke vakken als in wiskunde.

In dit artikel besteden we eerst aandacht aan de stand van zaken met formules in syllabi en eindexamens in Nederland. Bij de bespreking van internationale literatuur tonen we dat de kloof tussen het onderwijs in wiskunde en natuurwetenschappen niet een typisch Nederlands probleem is. Op basis hiervan doen we een aantal suggesties ter verbetering van de samenhang tussen de bètavakken op het gebied van formules.

Stand van zaken

De natuurkundesyllabi bevatten tientallen formules in vrijwel alle subdomeinen. In de huidige syllabi ligt hierin de nadruk op het kunnen rekenen. In de onlangs herziene natuurkundesyllabi wordt meer aandacht besteed aan het redeneren met formules.

De biologiesyllabi noemen alleen de wet van Fick maar die wordt niet in formulevorm beschreven. De term formule wordt meestal gebruikt bij molecuul- en structuurformules. In de herziene syllabi wordt, zonder voorbeelden, genoemd: het toelichten wat de invloed is van de verschillende variabelen in een gegeven formule op het daarmee beschreven biologische proces.

Ook de scheikundesyllabi gebruiken de term formule voornamelijk in de betekenis van structuur van moleculen.

Daarnaast worden in de herziene syllabi zes formules genoemd als 'relaties', zoals dichtheid en molair volume. In de wiskundesyllabi wordt veel aandacht gegeven aan algebraïsche vaardigheden. Hierbij wordt onderscheid gemaakt tussen wiskundige technieken en rekenregels (specifieke vaardigheden) en redeneren met formules over karakteristieken als stijgen/dalen en asymptotisch gedrag (algemene algebraïsche vaardigheden). Daarnaast zijn er subdomeinen getiteld formules en functies, standaardfuncties, en functies en grafieken.

Formules in de eindexamens

Analyse van de eindexamens van de bètavakken laat grote verschillen zien.

In de natuurkunde-examens spelen formules een belangrijke rol, waarbij de nadruk veelal ligt op de rekenkant van formules en minder op de aard en de interpretatie van formules.

De biologie-examens bevatten zelden formules. Sinds 2019 wordt drie keer aandacht besteed aan de wet van Fick, maar er wordt weinig tot geen redeneren met de formule gevraagd.

In de scheikunde-examens wordt vrij veel gerekend, maar in de correctievoorschriften wordt gesteld dat leerlingen geen formules hoeven te gebruiken.

In de wiskunde-examens spelen formules een grote rol, zowel in context als zonder context. Geregeld worden vooral biologische of natuurkundige contexten gebruikt. De gegeven formules hierbij zijn vaak gebaseerd op onderzoek en worden gebruikt om berekeningen te maken bij een probleemsituatie en/of om te manipuleren. De variabelen van een formule worden benoemd met de eenheden; de getallen en parameters worden vaak gepresenteerd als constanten, zonder eenheden.

Internationale literatuur

Ook in andere landen hebben veel leerlingen en studenten moeite om een verbinding te maken tussen de wiskunde in de wiskundelessen en wiskunde in de natuurwetenschappelijke lessen. In de literatuur wordt vooral aandacht besteed aan de volgende punten.

Aard van formules. In het wiskundeonderwijs worden formules vaak louter gezien als rekenmiddel, waarbij parameters en constanten worden uitgedrukt in getallen, zonder eenheden. Ook bij binask-vakken zien leerlingen een formule vaak enkel als rekenvoorschrift en niet als een uitdrukking van fundamentele relaties tussen grootheden, bijvoorbeeld een definitie, wet of experimenteel verband. In de wiskunde worden de variabelen in formules vaak aangeduid met x of t en y , functies met f en constante met a , b , enz. Bij formules met grootheden lijkt de keuze van de letters vaak willekeurig. Bij natuurwetenschappen worden veel verschillende letters gebruikt die in het Engels aansluiten bij de conceptuele betekenis, bijvoorbeeld F als kracht, T als temperatuur (of trillingstijd), en v als snelheid. De grootheden hebben ook specifieke eenheden. Er is weinig contact tussen de docenten wiskunde en natuurwetenschappen met als gevolg dat er weinig aandacht is voor de wijze waarop wiskunde in de wiskundelessen gegeven wordt en hoe dat in de natuurwetenschappelijke vakken gaat.

In recente internationale artikelen wordt aandacht besteed aan *blending* (bij elkaar brengen) van wiskundig en natuurwetenschappelijk denken, dat nodig is om wiskundige formules in natuurwetenschappelijke context te interpreteren. In wiskundelessen zou dan aandacht besteed kunnen worden aan het redeneren over het globaal verloop van de grafiek (*covariational reasoning*). In natuurwetenschappelijke lessen is dan naast deze wiskundige kijk op formules ook een *scientific sense making* nodig: wat zegt de formule over de natuurwetenschappelijke context. Op deze wijze worden wiskundig en natuurwetenschappelijk denken gekoppeld.

Conclusies

Het redeneren met formules in de lessen van bètavakken verdient meer aandacht. Mede door het feit dat veel disciplines in het hoger onderwijs meer wiskundig van aard worden. Inzicht in wederzijdse cultuurverschillen tussen wiskunde en natuurwetenschappen is belangrijk voor docenten, omdat het zonder deze bewustwording lastig is om samen te werken.

Bovenstaande punten zijn van belang voor curricula-vernieuwingen. Maar op korte termijn kan al aandacht besteed worden aan relevante aspecten:

- Onderscheid van afhankelijke variabele, onafhankelijke variabelen, parameters en constanten.
- Inzicht in de aard van formules, bijvoorbeeld definities, wetten/principes, experimentele verbanden.
- Dimensies en bijbehorende eenheden in wiskundige formules, in het bijzonder bij parameters en constanten.
- Expliciet maken van randvoorwaarden van experimentele formules en modelaannamen die gemaakt zijn.
- Bewust worden van verschillen tussen het gebruik van formules in de verschillende bètavakken, maar ook overeenkomsten zien.

Suggesties voor opdrachten

We eindigen met enkele voorbeeldopgaven waarin de interpretatie van formules gedaan wordt vanuit zowel wiskundig perspectief (in wiskundelessen (wi)) als vanuit natuurwetenschappelijk perspectief (in natuurwetenschappelijke lessen (nw)). In deze laatste lessen zou dan ook de *blending* van beide perspectieven moeten gebeuren.

Voorbeeld 1

(focus op redeneren met formules)

In het havo examen wiskunde B (2019-I)

wordt de geluidssnelheid in zeewater benaderd met de formule van Wilson:

$$v = 1449,2 + 4,623T - 0,0546T^2 + 1,391(Z - 35) + D/60,$$

met v de geluidssnelheid in m/s; T de watertemperatuur in °C; Z het zoutgehalte van het zeewater in promille; D de waterdiepte in m. Gevraagd worden drie berekeningen, waarbij geen rekening gehouden wordt met de randvoorwaarden van de formule:

$33\text{‰} < Z < 37\text{‰}$ en $-3\text{°C} < T < 30\text{°C}$. Er is helaas geen vraag om goed te kijken naar de inhoud van de formule. Redeneren met deze formule kan bevorderd worden door vragen als:

- Wat zijn de (on)afhankelijke variabelen? (wi, nw)
- Wat is de eenheid van 1,391 en van 60? (wi, nw)
- Welk concept zit verborgen in het getal 1449,2? (nw)
- Wat is de invloed van de verschillende onafhankelijke variabelen op de geluidssnelheid v ? Schets daarvoor de globale grafieken van $v - T$, van $v - Z$, en van $v - D$. (wi)
- De formule van Wilson kan ook geschreven worden in de vorm $v = -0,0546(T - \dots)^2 + \dots + 1,391(Z - 5) + 1/60 \cdot D$. Doe dat en vertel wat in deze vorm beter af te lezen is. (wi)

- Waarom kunnen mensen zich onder water minder dan boven water oriënteren op de richting waar het geluid vandaan komt? (nw)

Voorbeeld 2

(focus op consequenties van wisselen afhankelijke en onafhankelijke variabelen)

Atmosfeer (havo wiA, 2017-II)

De stratosfeer bestaat uit twee delen. In beide delen neemt de temperatuur toe naarmate je hoger komt.

Voor de temperatuur in het bovenste deel (tussen de 32 en 48 km) geldt de formule $T = 2,8 \cdot h - 134,1$, met de temperatuur T in °C en de hoogte h in km.

- Wat zijn de grootheden en eenheden die passen bij de getallen 2,8 en 134,1? (wi, nw)
- Je kunt deze formule herleiden tot $h = a \cdot T + b$. Laat deze herleiding zien en geef aan wat de waarden en eenheden zijn van a en b . (wi, nw)
- In welke omstandigheid is deze herleiding nuttig? (nw)

Voorbeeld 3

(focus op covariational reasoning en biologie)

Wet van Fick (gebaseerd op vwo-examen biologie 2006 & 2013). Cystic fibrosis (CF) wordt ook wel taaislijmziekte genoemd, omdat het slijm dat onder andere in de luchtwegen wordt afgescheiden abnormaal taai is. Daardoor wordt het moeilijker afgevoerd uit de longen en blijft er meer slijm achter in de longblaasjes en vermindert de uitwisseling van gassen. Dat leidt tot een voortdurend gevoel van benauwdheid.

Factoren die van invloed zijn op de snelheid van de gaswisseling zijn de diffusieconstante D , het diffusieoppervlak F , het concentratieverschil $c_1 - c_2$ en de afstand of diffusieweg A , zoals beschreven in de wet van Fick:

$V = D \cdot F \cdot \frac{c_1 - c_2}{A}$, waarin V de diffusiesnelheid is.

- Beredeneer aan de hand van de formule hoe via ieder van deze factoren (diffusiecoëfficiënt, diffusieoppervlak, concentratieverschil en diffusieafstand) de diffusiesnelheid aangepast kan worden. (wi)
- Geef via ieder van deze factoren een verklaring voor de benauwdheid van een CF-patiënt. (bio)

Onderzoek naar bevragen van formules en raamwerken

Met deze voorbeelden willen we illustreren hoe het redeneren met formules bij natuurwetenschappelijke contexten zowel de wiskunde als de natuurwetenschappelijke lessen kunnen verrijken. Het zou de samenhang tussen de vakken voor leerlingen kunnen vergroten. In de opdrachten hierboven zien we hoe de formule 'bevraagd' wordt vanuit wiskundig en vanuit natuurwetenschappelijk perspectief. In het onderwijs zouden de vragen die Romer^[1] zichzelf stelt om wiskundige formules te doorzien voor leerlingen behulpzaam kunnen zijn. Het gaat dan om vragen als:

- Wat is betekenis van de gebruikte symbolen, welke grootheden vertegenwoordigen ze?
- Wat is de aard van de formule? Is de formule een definitie, is de formule gebaseerd op waarneming of model op basis van andere formules?
- Wat gebeurt er met de afhankelijke variabele als een van de onafhankelijke variabelen groter of kleiner wordt en wat gebeurt er in grensgevallen ('wat als' vragen)?
- Welke grootheden zou je in deze formule verwachten? Welke benaderingen en/of idealisering worden gemaakt? Wanneer is deze vergelijking te gebruiken?
- Kloppen de eenheden in de formule?

Het verdient aanbeveling om deze vakdidactische benaderingen nader te onderzoeken in projecten met inbreng vanuit het voortgezet en hoger onderwijs (bijv. lerarenopleidingen). Wellicht vormen het Sci-Math Sensemaking Framework dat recent in de VS ontwikkeld is^[2], Duitse frameworks voor het interpreteren van wiskundige formules bij natuurwetenschappen^{[3], [4]} en de bevragsagenda van Romer^[1] aanknopingspunten voor verder onderzoek op het gebied van de samenhang van de bètavakken.

Een lijst met literatuur voor verdere verdieping staat op de site.



vakbladeeuclides.nl/996formules

Dit artikel staat ook in *NVOX*, het vaktijdschrift van 'zustervereniging' *NVON*, zie www.nvon.nl

Noten

- [1] Romer, R.H. (1993). Reading the equations and confronting the phenomena—The delights and dilemmas of physics teaching. *American Journal of Physics*, 61(2), 128–142. <https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article/61/2/128/1054270/Reading-the-equations-and-confronting-the>
- [2] Kaldaras, L., & Wieman, C. (2023). Cognitive framework for blended mathematical sensemaking in science. *International Journal of STEM Education*, 10(18). <https://doi.org/10.1186/s40594-023-00409-8>
- [3] Geyer, M.A., & Kuske-Janßen, W. (2019). *Mathematical representations in physics lessons*. In *Mathematics in physics education* (pp. 75–102). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04627-9_4

- [4] Uhden, O., Karam, R., Pietrocola, M., & Pospiech, G. (2012). Modelling mathematical reasoning in physics education. *Science & Education*, 21(4), 485–506. <https://doi.org/10.1007/s11191-011-9396-6>

Over de auteurs

Peter Kop is vakdidacticus wiskunde bij Iclon, Leiden en lid van vakvernieuwingscommissie wiskunde. E-mailadres: koppmgm@iclon.leidenuniv.nl. Harrie Eijkelhof is emeritus hoogleraar didactiek van de natuurkunde en gastmedewerker van het Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.

(advertentie)

Word opgeleid tot auteur Getal & Ruimte

Voor onze methode Getal & Ruimte VMBO-KGT zoeken we enthousiaste en ervaren docenten wiskunde die graag als auteur een bijdrage willen leveren aan goed (online) lesmateriaal.

Geef je les aan VMBO-KGT of heb je veel ervaring met VMBO-KGT? Vind je het leuk om actief met de didactische kant van jouw vak bezig te zijn? Word dan opgeleid tot auteur.

Wil je meer weten of heb je interesse?

Neem contact op met Aernout Pilot, uitgever Getal & Ruimte

✉ a.pilot@noordhoff.nl

getal
& ruimte



Noordhoff

Brengt je verder

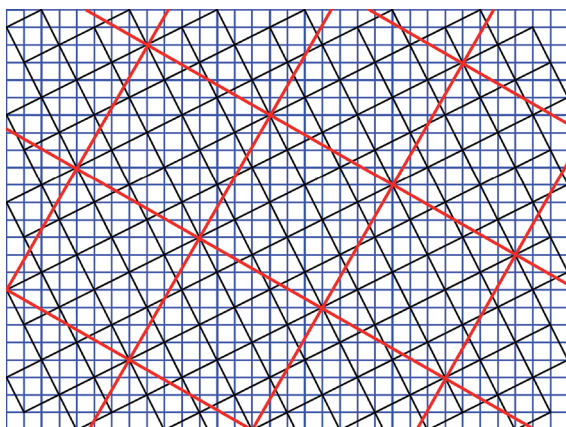
Kwadraatsom x kwadraatsom = kwadraatsom?

Diophantos wist dat het product van twee getallen die elk de som van twee kwadraten zijn, weer een som van twee kwadraten is. Maar hoe zit het met langere kwadraatsommen?

Een klassiek voorbeeld

Met de term *kwadraat* bedoel ik hier kwadraat van een positief-geheel getal. Ieder positief-geheel getal is de som van ten hoogste vier kwadraten, zoals Euler (1707 - 1783) aantoonde.^[1] Bij sommige getallen kun je volstaan met twee kwadraten. Op zulke getallen richt ik nu eerst de aandacht.

Diophantos (ca 200 - 284) merkt in zijn werk *Arithmetica* op dat 5 en 13 beide op één manier te schrijven zijn als som van twee kwadraten, namelijk als $1^2 + 2^2$ en $2^2 + 3^2$ en dat dit bij hun product, dus 65, op twee manieren lukt: $65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$. Bij sommen van twee kwadraten denk ik al gauw aan Pythagoras en dan met name aan de oppervlakten van scheve vierkanten op roosterpapier. In figuur 1 zijn op een blauw en rechtstandig vierkantjes-rooster twee scheve roosters getekend.



figuur 1

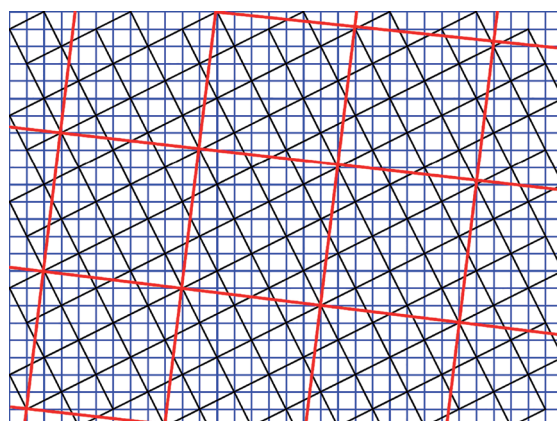
Het zwarte gedraaide rooster is bepaald door het getallenpaar (2, 1). De oppervlakte van elk zwart vierkantje is dus $2^2 + 1^2 (= 5)$ keer zo groot als de oppervlakte van een blauw vierkantje. Het rode rooster is ten opzichte van het

zwarte rooster bepaald door (3, 2). Dus de oppervlakte van elk rood vierkant is $3^2 + 2^2 (= 13)$ keer zo groot als de oppervlakte van een zwart vierkant en vandaar $13 \times 5 = 65$ keer de oppervlakte van een blauw vierkantje! Ten opzichte van het blauwe basisrooster is het rode rooster bepaald door het getallenpaar (4, 7).

Dit alles maakt de identiteit

$$(2^2 + 1^2) \times (3^2 + 2^2) = 4^2 + 7^2$$

aanschouwelijk! Diophantos merkte ook op dat $4^2 + 7^2$ gelijk is aan $1^2 + 8^2$. En ja, er is een tweede rooster van vierkanten dat past in het basisrooster en waarvan de vierkanten even groot zijn als in het (4, 7)-patroon, zie figuur 2.



figuur 2

Merk op dat de twee rode roosters elkaars spiegelbeeld zijn ten opzichte van een diagonaal in het zwarte onderliggende rooster.

Met lineaire algebra

Generaliseren is een kernactiviteit in de wiskunde die best wat vaker door leerlingen zou mogen of moeten

worden beoefend. Daar immers is algebra voor uit-
gevonden! Laat ten opzichte van een rechtstandig basis-
rooster van eenheidsvierkantjes een scheef vierkanten-
rooster V bepaald zijn door een willekeurig paar
positief-gehele getallen, zeg (a, b) .

De oppervlakte van elk roostervierkant in V is dan gelijk
aan $a^2 + b^2$ eenheidsvierkantjes.

Ik neem nu V als nieuw basisrooster en het rooster W zij
nu ten opzichte van V bepaald door het paar positief-
gehele getallen (A, B) .

Door welk getallenpaar wordt rooster W bepaald ten
opzichte van het oorspronkelijke rooster van eenheids-
vierkantjes? Een kwestie van lineaire algebra!

Het basisrooster wordt opgespannen door de vectoren
 $(1, 0)$ en $(0, -1)$.

Het rooster V wordt dan opgespannen door de vectoren
 (a, b) en $(-b, a)$.

Eén van de basisvectoren van het rooster W is
 $A(a, b) + B(-b, a) = (Aa - Bb, Ab + Ba)$.

De oppervlakte van een W -vierkant is enerzijds gelijk aan
 $(A^2 + B^2)(a^2 + b^2)$, maar anderzijds ook aan
 $(Aa - Bb)^2 + (Ab + Ba)^2$.

De identiteit van wie?

De identiteit

$$(A^2 + B^2)(a^2 + b^2) = (Aa - Bb)^2 + (Ab + Ba)^2$$

die natuurlijk ook met elementaire algebra te verifi-
eren valt, en een goede oefening in schoolalgebra kan
zijn, draagt verschillende namen. Niet zelden wordt zij
vernoemd naar de Indische wiskundige Brahmagupta
(ca 598 - 668), maar ook de naam van Fibonacci (ca 1170
- 1250) wordt wel aan deze identiteit gekoppeld, terwijl
de eer misschien toch wel aan Diophantos zou mogen
toekomen.

Ik vernoem de identiteit hier dan maar naar Brahmagupta,
als hommage aan zijn bewijs verderop in dit artikel.

Normen en waarden

In de wiskunde van nu manifesteert bovengenoemde
identiteit zich als eigenschap van complexe getallen. Er
geldt:

$$(A + Bi)(a + bi) = (Aa - Bb) + (Ab + Ba)i.$$

Brahmagupta's regel zegt dat het product van de *normen* [2]
van twee complexe getallen gelijk is aan de norm van hun
product. Een andere interpretatie is te vinden in de matrix
rekening.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa - Bb & Ab + Ba \\ -Ba - Ab & -Bb + Aa \end{pmatrix}$$

De determinanten van deze drie matrices zijn achtereen-
volgens gelijk aan: $A^2 + B^2$, $a^2 + b^2$ en
 $(Aa - Bb)^2 + (Ab + Ba)^2$.

En ja; de determinant van het product is gelijk aan het
product van de determinanten.

Merk op dat deze twee interpretaties isomorf zijn.

De 2×2 -matrices met onderling loodrechte en even
lange kolomvectoren vormen een lichaam M , waarvan de
elementen dan lineaire combinaties zijn van twee matrices
die ik nu E en I noem.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = aE + bI$$

E is de eenheidsmatrix en de matrix I levert met zichzelf
vermenigvuldigd het tegengestelde van die eenheidsmatrix
op: $I^2 = -E$

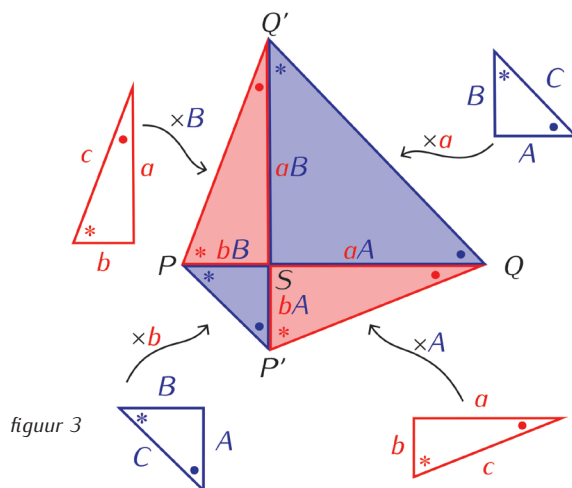
Dit legt de isomorfie met het lichaam van de complexe
getallen duidelijk bloot.

Mooie meetkunde

Aan Brahmagupta, befaamd ook om zijn meetkundige
werk over koordenvierhoeken, wordt een fraai geometrisch
bewijs van de naar hem genoemde identiteit toegedicht.^[3]
Hij zou zijn uitgegaan van twee verschillende recht-
hoekige driehoeken met zijden respectievelijk a, b, c en
 A, B, C , waarbij c en C staan voor de lengten van de
schuine zijden.

Hij vermenigvuldigde de abc -driehoek twee keer: met A en
ook met B en net zo de ABC -driehoek met zowel a als b ,
zie figuur 3.

Dan paste hij de zo verkregen vier nieuwe driehoeken
aan elkaar rondom een punt S . De zo ontstane vierhoek
 $PP'QQ'$ is nu een koordenvierhoek.



figuur 3

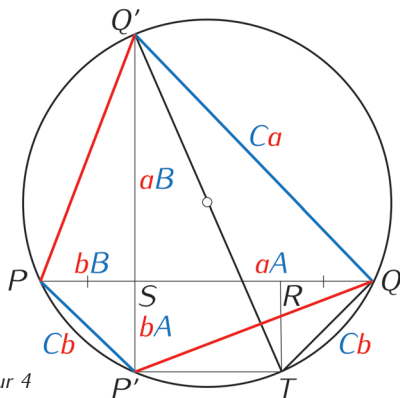
Kijk naar de hoeken in figuur 3. Er geldt:

$$\bullet + * = 90^\circ = \bullet + *$$

Hieruit volgt dan eenvoudig dat

$$\angle P'PQ' = \angle P'QQ' = 180^\circ$$

en dus liggen de punten P, P', Q en Q' op één cirkel,
zie figuur 4.



figuur 4

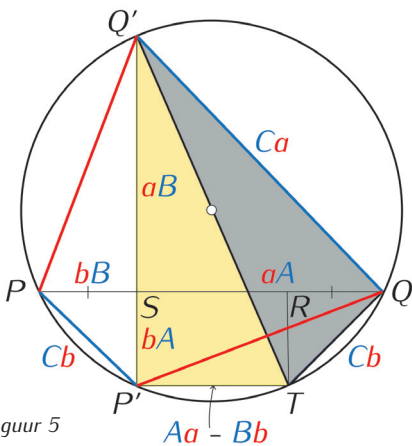
T ligt op de omgeschreven cirkel van $PP'QQ'$ zodat TQ' een middellijn van die cirkel is.

Door T te verbinden met P' en Q ontstaan dan de rechthoekige driehoeken $P'QT$ en $QQ'T$ die $Q'T$ als gemeenschappelijke hypotenusa hebben. Dit als gevolg van de stelling van Thales!

Uit $PQ \perp P'Q'$ volgt verder $P'T \parallel PQ$. Dus zijn de koorden PP' en TQ aan elkaar gelijk, en weet ik dat $|TQ| = Cb$. Uit T is dan nog de loodlijn TR neergelaten op de lijn PQ en uit de gelijkheid van de koorden PP' en TQ volgt dat het lijnstuk RQ even lang is als PS , dus de lengte Bb heeft, waaruit dan weer volgt:

$$|P'T| = |SQ| - |RQ| = Aa - Bb$$

Nu is het nog een kwestie van Pythagoras in stelling brengen in de rechthoekige driehoeken $P'QT$ en $QQ'T$!



figuur 5

Enerzijds:

$$|Q'T|^2 = (Ab + Ba)^2 + (Aa - Bb)^2$$

en anderzijds:

$$|Q'T|^2 = (Ca)^2 + (Cb)^2 = (A^2 + B^2)(a^2 + b^2) \text{ waarmee de identiteit van Brahmagupta langs meetkundige weg is aangetoond.}$$

Ja, die goeie ouwe meetkunde, verzuchtte Frederik van der Blij ooit (februari 1977) in de die goeie ouwe *Wiskrant*, en ik zeg het hem na. Voor menig wiskundige uit vroegere

jaren was 'geometrie' ('plani' en/of 'stereo') op school een inspiratiebron om wiskunde te gaan studeren. We krijgen binnenkort weer een nieuw curriculum, maar een revival van de meetkunde zit er, ondanks de beschikbaarheid van een prachtig werktuig als GeoGebra niet in. Blijven zuchten dus maar.

Langere kwadraatsommen

De identiteit van Brahmagupta garandeert dat de verzameling sommen van kwadraten van twee positief-gehele getallen *gesloten is voor vermenigvuldiging*, zo drukten we dat uit in de bloeitijd van de New Math.

Een natuurlijke vraag is of die geslotenheid ook geldt voor kwadraatsommen met een andere lengte, zeg n .

Volgens een stelling van Hurwitz uit 1898 geldt dit alleen voor $n = 1, 2, 4$ en 8 , zie [3].

Voor $n = 1$ is de geslotenheid triviaal.

Voor $n = 3$ geldt de geslotenheid voor vermenigvuldiging van kwadraatsommen inderdaad niet. Eén tegenvoorbeeld zegt genoeg: $(1^2 + 1^2 + 1^2)(2^2 + 3^2 + 4^2) = 3 \times 29 = 87$, maar 87 zelf is geen som van drie kwadraten zoals eenvoudig kan worden nagegaan.

Voor $n = 4$ toonde Euler de geslotenheid aan als aanloop voor zijn bewijs dat elk natuurlijk getal te schrijven is als de som van ten hoogste vier kwadraten.^[1]

Hij poneerde dat het product

$$(A^2 + B^2 + C^2 + D^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

gelijk is aan de som van de kwadraten van achtereenvolgens

$Aa + Bb + Cc + Dd$, $Ab - Ba - Cd + Dc$, $Ac + Bd - Ca - Db$ en $Ad - Bc + Cb - Da$.

Bedenk hier dat bij het kwadrateren van de laatste vier vormen er 24 'dubbele producten' ontstaan, die elkaar twee aan twee neutraliseren!

Zoals de stelling van Hurwitz voor $n = 2$ verbonden is aan een eigenschap van de complexe getallen, zo is die voor $n = 4$ gelieerd aan een eigenschap van de *quaternionen* van Hamilton (1805 - 1865).

Quaternionen zijn 'getallen' van de vorm $a + bi + cj + dk$ met a, b, c, d als reële getallen en waarbij i, j, k verschillende 'imaginairen' zijn met $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k$, $j \cdot k = i$ en $k \cdot i = j$.

Dat in dit 'hypercomplexe systeem' de commutativiteit van vermenigvuldiging verloren is, volgt bijvoorbeeld uit:

$$j \cdot i = j \cdot j \cdot k = -k = -i \cdot j.$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de associativiteit van vermenigvuldigen.

Bekijk tabel 1 voor het product van twee willekeurige quaternionen, $a + bi + cj + dk$ en $A + Bi + Cj + Dk$, waarbij $a, \dots, d, A, \dots, D$ reëel zijn.

$\times$	a	bi	cj	dk
A	Aa	Abi	Acj	Adk
Bi	Bai	$-Bb$	Bck	$-Bdj$
Cj	Caj	$-Cbk$	$-Cc$	Cdi
Dk	Dak	Dbj	$-Dci$	$-Dd$

tabel 1

De reële coëfficiënten van het product zijn nu $Aa - Bb - Cc - Dd$, $Ab + Ba + Cd - Dc$, $Ac - Bd + Ca + Db$ en $Ad + Bc - Cb + Da$.

Een iets andere verdeling van de mintekens dan bij Euler, maar ook hier komt alles op zijn kwadraat-pootjes terecht. De *norm* van een quaternion $a + bi + cj + dk$ is per definitie de som van de kwadraten van de reële cofactoren a, b, c, d .

De stelling van Hurwitz voor $n = 4$, zegt nu dat de norm van het product van twee quaternionen gelijk is aan het product van de normen van de beide factoren en dat stemt tot tevredenheid.

Net als in het geval van de complexe getallen, kunnen quaternionen ook worden gerepresenteerd door 2×2 matrices, namelijk door lineaire reële combinaties van **E**, **I**, **J** en **K**.

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{E} & \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \end{matrix}$$

Dat **I**, **J** en **K** voldoen aan de voorwaarden van Hamilton is snel duidelijk.

Met de afspraak dat de determinant van $a\mathbf{E} + b\mathbf{I} + c\mathbf{J} + d\mathbf{K}$, namelijk $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, de norm is van zo'n matrix-quaternion volgt dat de norm van het product van twee quaternionen gelijk is aan het product van hun normen.

De stelling van Hurwitz voor $n = 8$, houdt verband met de constructie van *octonionen*, een hypercomplex systeem met zeven imaginaire grootheden. In dat systeem is de vermenigvuldiging net als bij de quaternionen niet commutatief,

maar hier raken we ook nog eens de associativiteit van de vermenigvuldiging kwijt. Quaternionen en octonionen zijn typisch wiskundige hersenspinsels, waarvan later toepassingen bedacht of gevonden zijn in natuurkunde, techniek en meetkunde.

Dat laatste is niet gek als je terugdenkt aan het complexe vlak waarin met name transformatiemeetkunde zich elegant laat behandelen door middel van complexe functies. Bij quaternionen kun je natuurlijk denken aan 4-dimensionale meetkunde.

Voor Hamilton was de 'mooie nieuwe meetkunde' dé drijfveer om tot zijn constructie van de quaternionen te komen, zie [5].

Algebra en meetkunde, je zou het een Siamese tweeling kunnen noemen!

Noten

- [1] Zie Smith, D.E. (1929). *A source book in mathematics*. McGraw Hill Book Company.
- [2] De *norm* van een complex getal $a + bi$ is gelijk aan $a^2 + b^2$, ofwel het kwadraat van zijn absolute waarde.
- [3] Zie: Lorey, W. (1933-1934). Didaktische und historische Bemerkungen über eine von Gauss zum numerischen rechnen benutzte identität, *Euclides*, (9)5, 198-210.
- [4] Op internet vond ik dit artikel: Brown, E. & Rice, A. (2021). *Cayley-Dickson Construction for Beginners: An Accessible Proof of Hurwitz's Sums of Squares Theorem*. <https://personal.math.vt.edu/brown/doc/Brown-Rice-DicksonHurwitz-0708.pdf>
- [5] Noort, V. van der. Waarom de vierdimensionale ruimte de mooiste van alle ruimtes is: quaternionen. In *Symmetrie. Vakantiecursus 2011* (pp 67-76). CWI. https://www.platformwiskunde.nl/wp-content/uploads/2017/09/Syllabus_VC2011.pdf

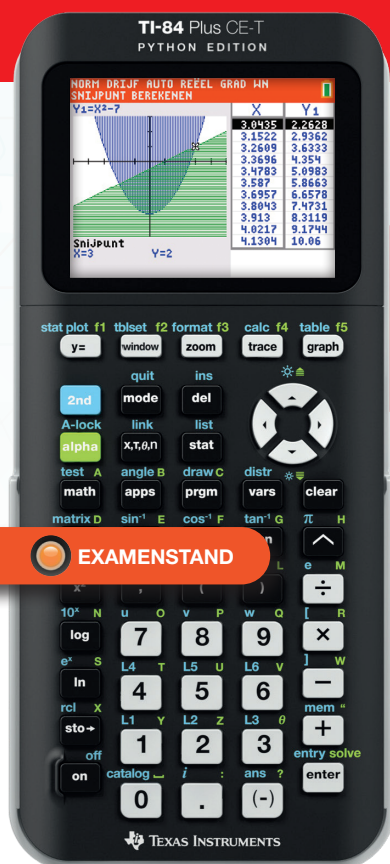
Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

Speciale actie voor leerlingen!



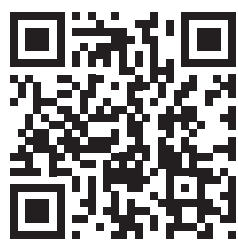
Sluit
naadloos
aan bij het
Nederlandse
curriculum



€10 korting!*

TI-84 Plus CE-T Python Edition

- » Lichtgewicht én krachtig
- » Kleurrijke grafieken die inzicht geven
- » Oplaadbare batterij
- » Goedgekeurd voor toetsen en examens



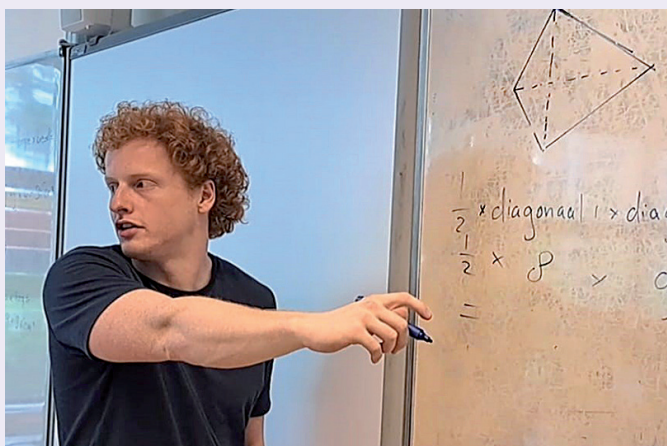
Bekijk hier de
verkoopadressen

* De distributeurs die deze grafische rekenmachine verkopen zijn verantwoordelijk voor het uitvoeren van de kortingsactie en de voorwaarden. De korting bedraagt € 10, inclusief btw. De korting is geldig van 1 maart tot en met 30 september 2024.

education.ti.com/nl

Wat is dat, een standaardafwijking?

Wat komen beginnende docenten tegen? Thijs Hamstra staat sinds kort voor de klas en werd verrast door een vraag van een leerling over het schatten van de standaardafwijking.



Thijs Hamstra

Sinds februari 2023 volg ik de masteropleiding Science Education and Communication in Utrecht, met als specialisatie de 'Teacher Track' voor wiskunde. Zelf heb ik in 2016 eindexamen gedaan in Wiskunde A, met daarna nog een certificaat Wiskunde B zodat ik een technische studie kon volgen. Samen met de kennis die ik heb opgedaan tijdens mijn bachelor aan de Universiteit Twente en een aantal alom geliefde vakken van wisk4all – het zijnstroom-traject voor de eerstegraads bevoegdheid – meende ik uitermate goed voorbereid te zijn op de vakinhoudelijke kant van het schoolvak wiskunde.

Dankzij het toenemende lerarentekort zie ik nog wel eens kans om bij te klussen naast mijn studie. Zo kwam het voor dat ik een drietal weken inviel bij een paar bovenbouwklassen op een school in Enschede. Over het algemeen is dat invalwerk erg prettig – geen zorgen op de lange termijn, gewoon een rustige en leerzame werksfeer creëren. Leerlingen moeten een plek hebben voor hun vragen en begeleid worden in hun leerproces, maar er is ook voldoende tijd voor een praatje en een lach.

Zo zat ik middenin een ravissant gesprek over scootertheorie – havo 4 wiskunde A – toen een leerling mij daadwerkelijk iets vroeg over wiskunde. 'Meneer, wat is

dat, een standaardafwijking?' Ze wees naar een vraag in de D-toets. 'Geef een schatting van de standaardafwijking. Kies uit 1°C, 4°C, 9°C en 16°C.' In 4 havo verwachtte ik niet snel een vraag waar ik het antwoord niet op wist, maar van deze werd ik toch benauwd. Want ja, wat is dat, een standaardafwijking?

Ik moest denken aan het staartje van de normaalverdeling, aan 68 procent van de waarnemingen. Tijdens mijn bachelor kende ik hem vooral van de `std()` functie in MATLAB, waardoor ik hem al jaren niet meer met de hand berekend had. Maar wat moest een leerling in 4 havo, tussendoor vooral bezig met Snapchat op haar laptop (leve het telefoonverbod!), weten over de standaardafwijking? Ik wist iets te brabbelen over een mate van spreiding, maar toen ik naar de vraag keek, liep ik al snel weer vast. Een schatting! Op basis waarvan moest deze leerling een schatting maken? Zouden ze eerder standaardafwijkingen hebben geschat? Of ook berekend?

“WAT HEEFT EEN HAVIST AAN WISKUNDE NODIG?”

Verwoed bladerde ik terug in het boek. Immers, als het in de D-toets zit, dan hebben ze het toch eerder gehad? Ik trof hem aan in een theorieblokje. Althans, zonder prachtige notatie inclusief sommatietekens, in plaats daarvan als een stappenplan met een lange tekst waar net niks in stond. Ja, vooral belangrijk was de opmerking dat de standaardafwijking toch eigenlijk altijd elektronisch berekend wordt. Maar nu moest ie toch geschat worden? Daar vond ik niks over terug. Het bleek toch de crux van mijn dure wiskundige achtergrond: wat heeft een havist aan wiskunde nodig?

Ik stond even te peinzen. Snapchat ging weer dicht. 'Maar meneer, als u het niet weet, dan hoeven wij het op de toets toch ook niet te weten?'

Uitdagende problemen

Fouten maken en het Malfatti-probleem

In 1803 loste Gian Francesco Malfatti het probleem op dat hij zelf had geformuleerd: teken de drie grootst mogelijke cirkels in een driehoek. De cirkels van zijn oplossing kregen zijn naam, Malfatti-cirkels. Maar 127 jaar later bleek zijn oplossing niet optimaal te zijn en nog eens 37 jaar later zelfs fout.

Inleiding

Het overkomt ons allemaal wel eens. Je maakt in de wiskundeles een misstap, een fout. Leerlingen doorzien het niet altijd. Wat doe je dan in de volgende les? Je komt erop terug en je herstelt de fout. De leerlingen zullen het waarderen. Maar niet alle gemaakte fouten in wiskundeland worden hersteld, soms kan het meer dan honderd jaar duren. Dat overkwam de Italiaanse wiskundige Gian Francesco Malfatti (1731– 1807).



figuur 1 Gian Francesco Malfatti (1731– 1807)

Wie was Malfatti en wat deed hij? We weten dat hij studeerde in Bologna. Hij richtte in 1754 in Ferrara een school voor wiskunde op en werd in diezelfde stad in 1771 professor aan de plaatselijke universiteit.

Het probleem van Malfatti

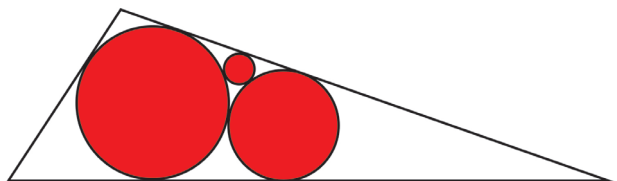
In 1803 stelde Malfatti de volgende vraag: wat is de grootste totale inhoud van drie cilindrische kolommen die je uit een wig marmer kunt halen? Als we die wig modelleren kun je uitkomen op een driezijdig prisma.

Zie bijvoorbeeld de houten sculptuur, te zien in museum Het Depot in Wageningen^[1], in figuur 2.



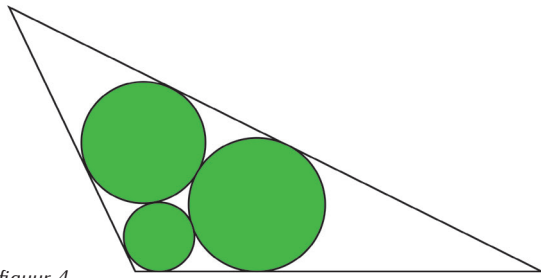
figuur 2 Arm, schouder, borst (1982). Sculptuur van Floris Brasser

We kunnen het probleem terugbrengen tot het plaatsen van drie cirkels in een driehoek zodat de gezamenlijke oppervlakte van de cirkels ten opzichte van de oppervlakte van de driehoek zo groot mogelijk is. Je zou het bijvoorbeeld kunnen doen zoals in figuur 3. De grote cirkel raakt alle zijden, een ingeschreven cirkel dus. De middelgrote cirkel raakt twee zijden. De kleinste cirkel raakt slechts een zijde. De drie cirkels raken elkaar onderling.



figuur 3

Maar Malfatti deed het zo, zie figuur 4.



figuur 4

Definitie Malfatti-cirkels

Hij meende het probleem opgelost te hebben als elk van de drie cirkels de eigenschap heeft de twee andere cirkels uitwendig te raken en twee zijden van de gegeven driehoek. Deze cirkels zijn naar hem genoemd: *Malfatti-cirkels*. Hij toonde analytisch het bestaan aan van deze cirkels maar in 1826 bedacht de Zwitserse wiskundige Jacob Steiner (1796 – 1863) een meetkundige constructie voor de Malfatti-cirkels.



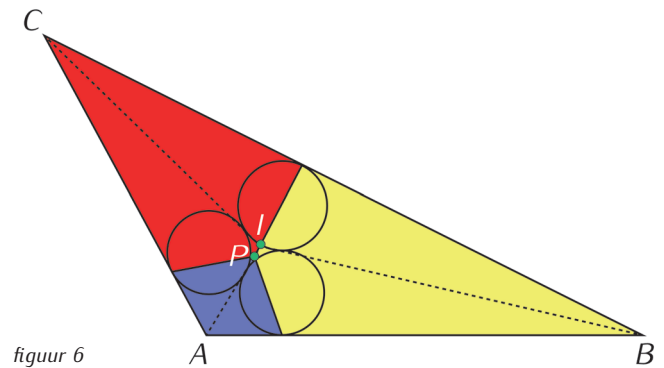
figuur 5 Jacob Steiner (1796 – 1863)

Zie hieronder zijn stappenplan.

Voor de leerlingen een hele goede exercitie om dit stappenplan in GeoGebra uit te voeren. Maar let op, de tweede stap is een uitdaging.

- 1 Construeer het middelpunt I van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC en de ingeschreven cirkels van de driehoeken ABI , ACI en BCI .
- 2 Elk tweetal van deze cirkels heeft een gezamenlijke raaklijn die gaat door het raakpunt van de derde cirkel met de betreffende zijde van driehoek ABC . Construeer deze gezamenlijke raaklijnen.
- 3 Deze drie raaklijnen gaan door een gemeenschappelijk punt P .
- 4 Dit punt P , de raakpunten van de drie ingeschreven cirkels met de zijden van driehoek ABC en de hoekpunten van driehoek ABC zijn nu de hoekpunten van drie raaklijnvierhoeken. De ingeschreven cirkels hiervan zijn de cirkels van Malfatti.

Zie figuur 6... en voor de lezer een uitdaging om na te gaan of er inderdaad Malfatti-cirkels in een gegeven driehoek zijn geconstrueerd.

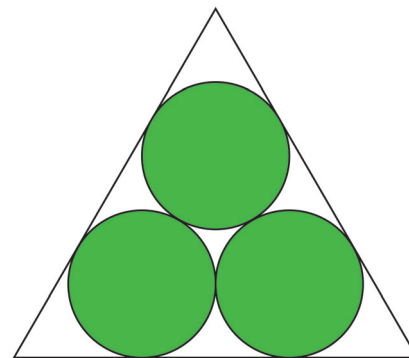


figuur 6

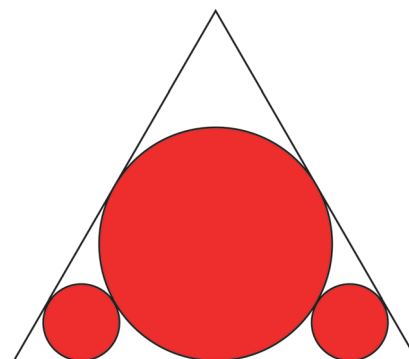
De weerlegging van het idee van Malfatti

Dat gebeurde niet na een wiskundeles of een college een dag later, maar na ruim honderdentwintig jaar en wel in 1930.

We bekijken daartoe een bijzonder geval van Malfatti-cirkels en wel in een gelijkzijdige driehoek met drie even grote cirkels, zie figuur 7. Maar ook de situatie in een even grote driehoek met een ingeschreven cirkel, zie figuur 8. Kan het totale cirkeloppervlak groter gemaakt worden?



figuur 7

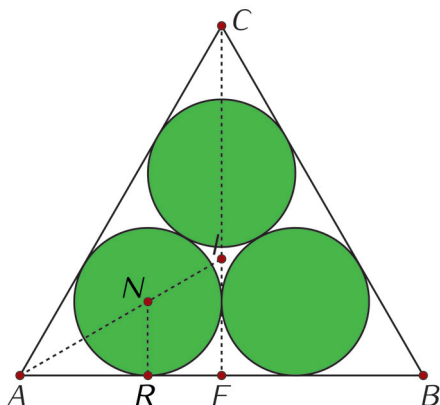


figuur 8

>

We nemen om reken- en technische redenen een gelijkzijdige driehoek waarvan de zijden 12 (cm) zijn. Je kunt makkelijk nagaan dat de oppervlakte van driehoek ABC gelijk is aan $36\sqrt{3}$.

Om de oppervlakte van een cirkel uit te rekenen, zie figuur 9, voeren we wat letters in. Punt I is het middelpunt van de ingeschreven cirkel. Punt F is het midden van zijde AB . Punt N is het middelpunt van de cirkel het dichtst bij hoekpunt A en punt R is het voetpunt van middelpunt N op zijde AB . De straal van deze cirkel noemen we r .



figuur 9

Beschouw $\triangle AFI$ en $\triangle ARN$. We gebruiken bewust geen goniometrie maar verhoudingen. Er geldt $\frac{NR}{FI} = \frac{AR}{AF}$.

Merk op dat $IF = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. We vullen in en krijgen

de relatie $\frac{r}{2\sqrt{3}} = \frac{6-r}{6}$. Kruislings vermenigvuldigen geeft:

$$6r = 2\sqrt{3}(6-r). \text{ Dat is te herleiden tot } r = \frac{12\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} \text{ en}$$

deel door $2\sqrt{3}$ tot $r = \frac{6}{1+\sqrt{3}}$. De totale oppervlakte van de drie even grote cirkels is.

De drie cirkels nemen afgerond 72,9% in van de gelijkzijdige driehoek.

Nu de situatie in figuur 8. Merk op dat de straal van de ingeschreven cirkel $2\sqrt{3}$ is. De oppervlakte van de ingeschreven cirkel is $\pi \cdot (2\sqrt{3})^2 = 12\pi$. De kleine cirkel dicht bij hoekpunt A is een ingeschreven cirkel van een gelijkzijdige driehoek waarvan de zijden 4 lang zijn. De straal van die cirkel is dan driemaal zo klein, ga dat na, als die van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC en dus $\frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3}$.

De oppervlakte is dus negenmaal zo klein: $\frac{12}{9} \cdot \pi$.

De totale oppervlakte van de drie cirkels is dan $12\pi + 2 \cdot \frac{4}{3}\pi = 14\frac{2}{3}\pi$.

De verhouding van de totale cirkeloppervlakten is

$$14\frac{2}{3}\pi : 3\pi \left(\frac{6}{1+\sqrt{3}} \right)^2$$

en dat is afgerond 1,014. Dat betekent een toename van 1,4%.

De drie cirkels nemen afgerond 73,9% in van de gelijkzijdige driehoek. Dat is toch 1% meer dan bij de drie congruente cirkels (72,9%) in figuur 7.

Tot slot

In 1967 kon Michael Goldberg (1902-1990) aantonen dat voor geen enkele driehoek de drie Malfatticirkels de oplossing van het probleem waren. Het is prima om leerlingen aan te zetten tot het maken van schetsjes of om uit te nodigen voor het maken van het volgende vraagstuk.

Opgave

In een rechthoekige driehoek, bijvoorbeeld met rechthoekzijden 15 en 3 – als het maar lang en dun is –, zijn de drie Malfatti-cirkels getekend. Zie figuur 10. In figuur 11 zijn de Malfatti-cirkels weggelaten maar is wel een ingeschreven cirkel getekend die natuurlijk groter is dan de grootste Malfatti-cirkel in figuur 10.



figuur 10



figuur 11

Teken nu in de driehoek van figuur 11 twee cirkels erbij zodat meteen zichtbaar is dat de oppervlakte van de drie rode cirkels groter is dan de oppervlakte van de drie groene Malfatti-cirkels tezamen.

Voor de uitwerking van dit vraagstuk:



vakbladeuclides.nl/996malfatti

En voor wie meer wil lezen over dit onderwerp, zie [2].

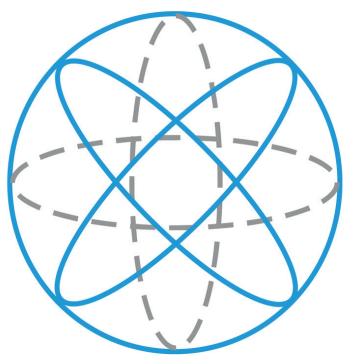
Noten

- [1] *Arm, schouder, borst (1982)*. Sculptuur van Floris Brasser.
Zie: <https://www.hetdepot.nl/fr/Kunstenaars/Floris-Brasser>
- [2] Wells, D. (1993). *Woordenboek van merkwaardige en interessante meetkunde*. Bert Bakker.

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde.
Hij is sinds 2014 met pensioen.
E-mailadres: jacques.jansen@wxs.nl.

(advertentie)



WISK 4ALL

Onderdeel van



Heb je zin om weer eens echt wiskundig bezig te zijn, om je vakkennis op te frissen of te verdiepen?

Dat kan bij *wisk4all*, een onderdeel van het landelijke project *beta4all*.

- Vakken op universitair bachelorniveau. Bijvoorbeeld: Analyse, Algebra en getaltheorie, Meetkunde, en Statistiek.
- *Blended* opzet van de vakken, grote component zelfstudie.
- Prijs: kosteloos voor (aspirant-)studenten aan Nederlandse universitaire lerarenopleidingen en zeer voordelig (administratiekosten €40) voor zittende docenten.

- Meer informatie?

www.wisk4all.nl of www.beta4all.nl

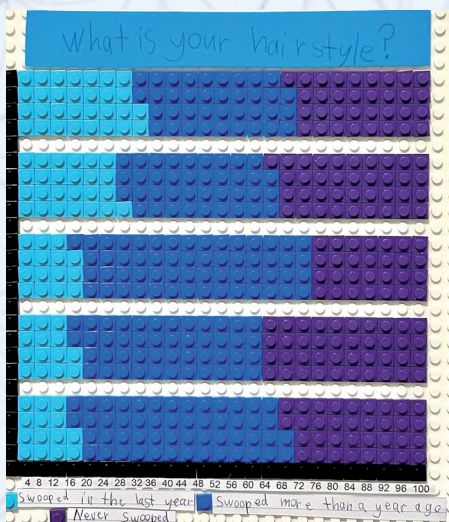
Achtjarige wint prijs voor wiskundeonderzoek

Een Australisch schoolmeisje van acht, Emma Glenfield, heeft afgelopen najaar de wetenschappelijke wereld verrast met een onderzoek dat ze voor school uitvoerde naar het aanvalsgedrag van de Australische ekster.



Emma Glenfield

Het begon bij haar school, waar ook Australische eksters broeden en regelmatig mensen aanvallen, onder wie Emma's vader. Het viel haar op dat een ekster het vooral op lange kale mannen gemunt leek te hebben. Emma vroeg zich af of dit voor alle eksters zou gelden. Toen haar onderwijzer afgelopen najaar de leerlingen vroeg om voor de wiskundeles zelf een onderzoek te bedenken en uit te voeren ging Emma aan de slag. Met hulp van haar moeder maakte ze een online vragenlijst die je met een QR-code kon invullen, over hoe vaak je door een Australische ekster werd aangevallen. Ze vroeg ook naar geslacht, lengte, gewicht en hoeveel haar je had.



De vragenlijst was bedoeld voor mensen in de buurt, maar ging viral. Zo'n 30.000 mensen vulden de enquête

in. Zoveel data over aanvallen van eksters hadden de Australische universiteiten nog nooit met één steekproef binnengehaald. Het was ook de eerste keer dat iemand ooit het verband tussen eksteraanvallen en uiterlijke kenmerken van mensen heeft onderzocht. Emma kon zelf nog geen spreadsheets maken en verwerkte de data in Lego-grafieken met blokjes in verschillende kleuren. Hierin is duidelijk te zien dat de mensen die het meest werden aangevallen, lange kale mannen waren, stevig of met overgewicht.

Bron: NRC, 17 januari 2024.

Al gaat voor goud bij vraagstukken WiskundeOlympiade

Onderzoekers van Google DeepMind hebben een kunstmatig intelligent systeem (AlphaGeometry) ontwikkeld dat meetkundige vraagstukken kan oplossen. Het AI-systeem is getest op dertig meetkundige problemen van de Internationale Wiskunde Olympiade tussen 2000 en 2020. AlphaGeometry wist er 25 op te lossen. Met die score verslaat de AI eerdere systemen. Die kwamen niet verder dan tien correcte antwoorden. Ook kan deze AI zich bijna meten met de gemiddelde Olympiade-winnaar. AlphaGeometry kreeg het zelfs voor elkaar om alle meetkundeproblemen van 2000 en 2015 correct, en op een voor mensen controleerbare wijze, op te lossen. Dat zou hem in die jaren een bronzen medaille hebben opgeleverd. Het oplossen van de Olympiade-vraagstukken is niet alleen een uitdaging voor mensen, ook AI-systemen hebben er moeite mee. Computers excelleren in rekenen, maar in logisch redeneren zijn ze niet erg goed. Daarnaast is er een gebrek aan trainingsdata: het aantal uitgewerkte vraagstukken van de WiskundeOlympiade is beperkt, elk jaar slechts zes opgaven waarvan slechts een deel meetkundig. Dit gebrek hebben de onderzoekers opgelost door die trainingsdata kunstmatig te produceren. Ze hebben de rekenkracht waarover Google beschikt gebruikt om 100 miljoen voorbeelden te generen van theorieën met bijbehorende, logisch beredeneerde bewijzen. Aan de hand daarvan leerde AlphaGeometry de basis van meetkunde, zonder door mensen geproduceerde voorbeelden.

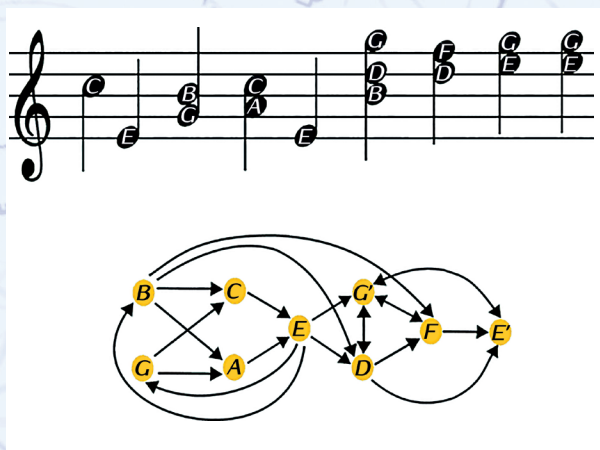
Bron: www.newscientist.nl

Muziek Bach geanalyseerd met informatietheorie

Johann Sebastian Bach wordt beschouwd als een van de grote componisten van de westerse klassieke muziek. Natuurkundige Suman Kulkarni van de Universiteit van

Pennsylvania in de Verenigde Staten en haar collega's hebben zijn muziek geanalyseerd met behulp van informatietheorie. Als eerste vertaalden zij elke compositie in een informatienetwerk. Dit deden ze door elke noot voor te stellen als een knooppunt en elke overgang tussen noten als een lijn die de knooppunten verbindt. Met behulp van dit netwerk vergeleken ze de hoeveelheid informatie in elke compositie.

Toccata's, die bedoeld waren om te entertainen en te verrassen, bevatten meer informatie dan koralen, die gecomponeerd waren voor meer meditatieve settings zoals kerkdiensten.



Een voorbeeld van een netwerk gebaseerd op een simpel muziekstuk. Elke noot is een knooppunt en elke overgang tussen noten is een lijn die de knooppunten verbindt. Beeld: Kulkarni et al., 2024.

Ook gebruikten zij informatienetwerken om te bepalen hoe goed Bachs composities informatie overdragen op luisteraars. Ze begonnen met een bestaand computermodel dat voorspelt hoe mensen informatie tot zich nemen. Met dit model creëerden ze een netwerk dat weergeeft hoe mensen een bepaald muziekstuk onthouden.

Dit netwerk komt zelden precies overeen met het netwerk dat direct op de compositie is gebaseerd. Door de verschillen tussen de twee netwerken te kwantificeren, konden de onderzoekers bepalen hoe goed de informatie in het muziekstuk wordt overgedragen.

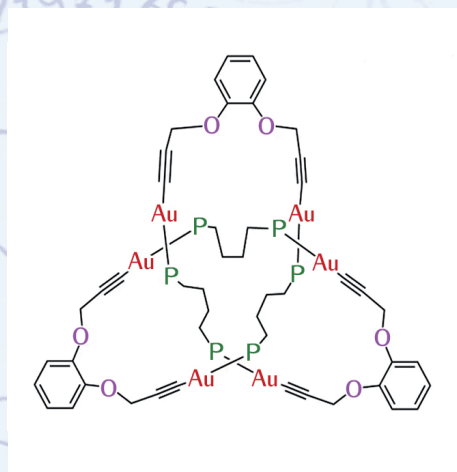
In dit geval waren de verschillen tussen de twee netwerken klein. Dat suggereert dat Bachs composities vrij effectief informatie overbrengen op luisteraars. Vervolgonderzoek moet nog uitwijzen of Bachs compositiestijl uitzonderlijk was in vergelijking met andere soorten muziek. 'Ik zou graag dezelfde analyse uitvoeren voor

verschillende componisten en niet-westerse muziek', zegt Kulkarni.

Bron: www.newscientist.nl

Scheikundigen leggen per ongeluk de kleinste en strakste knoop ooit

Een team van Canadese en Chinese scheikundigen heeft de kleinste knoop ooit gelegd. De knoop ontstond per ongeluk, toen de wetenschappers bezig waren atomen op volgorde te leggen. De knoop bestaat uit een reeks van 54 atomen. Ze zijn gelegd in de vorm van een klavertje drie, ook wel een klaverbladknoop genoemd.



Een schematische weergave van de structuur van de knoop

Het bijzondere aan de knoop is dat hij eigenlijk zichzelf gevormd heeft. De scheikundigen legden de reeks atomen wel op volgorde, maar de atomen hechtten zich vanzelf aan elkaar. Hoofdonderzoeker Richard Puddephatt: 'Deze knoop is een belangrijke stap in het onderzoek naar het herstellen van structuren.'

Wetenschappers zijn tot steeds kleiner niveau in staat om atomen te onderzoeken en herschikken. Dat kan helpen in het opnieuw opbouwen van moleculen, die uit atomen bestaan. En dat kan bijdragen aan bijvoorbeeld het herstellen van beschadigingen aan voorwerpen of zelfs een levend lichaam.

De knoop wordt officieel opgenomen in *Guinness World Records* als 'de kleinste en strakste knoop ooit'. Het vorige record stond op naam van Chinese wetenschappers, die in 2020 een reeks van 69 atomen in een knoop wisten te leggen.

Bron: www.nu.nl/wetenschap/

Pracht en kracht van wiskunde

Deel 2: Het hyperbolische vlak en hyperbolische meetkunde

De rondreizende tweede editie van de *Imaginary* tentoonstelling is alweer voorbij. Paul Igodt neemt ons mee naar de wiskunde achter een aantal van de fenomenen die te zien en te ervaren waren. Deze serie artikelen is een bewerking van de eerder verschenen versies in *Wiskunde en Onderwijs*, ons 'zustertijdschrift' van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars.

De tentoonstelling Imaginary laat bezoekers kennismaken met de schoonheid en pracht van wiskunde. De tentoonstelling is voorbij, maar op de website zijn de beelden blijvend te bewonderen. ^[1], ^[2] Ook is daar educatief materiaal te vinden.



figuur 1 Euclides

Euclidische meetkunde

Alhoewel er weinig duidelijk is over zijn leven, wordt de Griekse wiskundige Euclides algemeen beschouwd als een uiterst belangrijke grondlegger van wiskunde en meer in het bijzonder van meetkunde. Werkzaam te Alexandrië in de vierde eeuw voor Christus, schreef hij een indrukwekkend verzameld werk, bestaande uit dertien boeken:

De Elementen. In het eerste boek reeds formuleert hij vijf postulaten, waarop hij zijn *euclidische meetkunde* bouwt. Het zal ongeveer 2000 jaar duren vooraleer gedurfd abstract denken zal leiden tot een meer algemene kijk op

de axiomatische aanpak. We kijken hier in het bijzonder naar de situatie in dimensie 2, meer bepaald de 'vlakke meetkunde'.

De axioma's van Euclides hebben het over punten, rechten, lijnstukken, hoeken en cirkels. Ze typeren een aanpak die voorbeeldstellend mag genoemd worden voor wat wiskundigen al geruime tijd normaal vinden. We geven een kort overzicht, in een modernere taal dan die van Euclides, van de vijf axioma's die voor Euclides aan de grondslag van meetkunde liggen.

- 1 Door elke twee verschillende punten, gaat één rechte.
- 2 Elk lijnstuk kan oneindig verlengd worden tot een rechte.
- 3 Gegeven een lijnstuk, kan men een cirkel tekenen met dit lijnstuk als straal en een eindpunt van het lijnstuk als middelpunt.
- 4 Alle rechte hoeken zijn gelijk.
- 5 (Parallellenpostulaat) Door een punt buiten een gegeven rechte bestaat er slechts één rechte die de gegeven rechte niet snijdt (of alternatief: die evenwijdig is met de gegeven rechte).

Euclides kon op basis van deze axioma's bv. besluiten dat de hoeken in een driehoek optellen tot 180° (een *gestrekte hoek*).

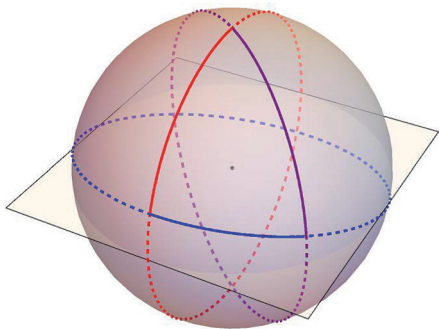


figuur 2 Hipparchus (ca 190 vChr – ca 120 vChr)

Twijfel over het parallellenpostulaat

In de Oud-Griekse tijd, zelfs al korte tijd na Euclides, was er heel wat kennis over driehoeken op een boloppervlak, onder meer in het werk van Hipparchus en geïnspireerd op waarnemingen in de sterrenkunde.

Dat de som van de hoeken in een boldriehoek groter is dan 180° , wist men. Toch zag men daarin niet bepaald een conflict met de euclidische meetkunde.



figuur 3 In elke driehoek op een boloppervlak is de som van de hoeken groter dan 180° . Bovendien zijn er geen evenwijdige rechten.

Het zou uiteindelijk duren tot de achttiende eeuw en een zoveelste discussie over het parallellenpostulaat in de aanpak van Euclides. Toen ondernam Giovanni Saccheri (1667-1733) een poging om de noodzaak van dat axioma aan te tonen.

Hij onderzocht of er een contradictie zou ontstaan door dat axioma te schrappen. Ondanks zijn grondige werk, ontdekte hij geen contradicties.



figuur 4 János Bolyai (1802-1860)

Niet-euclidische meetkunde

Bijna een eeuw later kwam er een grote doorbraak met het werk van János Bolyai (1802-1860). Hij ontdekte dat een consistente meetkunde mogelijk was op basis van de

axioma's van Euclides met uitzondering van het parallellenaxioma. János publiceerde zijn bevindingen in 1831. Vandaag kennen we die meetkunde als de hyperbolische meetkunde.

Toen János' vader Farkas, eveneens wiskundig gevormd, zijn vriend Gauss contacteerde over de doorbraak van zijn zoon kwam een verrassend antwoord. We citeren uit de brief van 6 maart 1832 van Gauss aan Farkas:

... to praise this work, it would amount to praising myself; for the entire content of the work, ... coincides almost exactly with my own meditations ...

Niemand minder dan Gauss zelf had zich hierop ook al toegelegd, maar beslist om het (nog?) niet te publiceren.



figuur 5 Nikolai Lobachevsky (1792-1856)

In 1848 ontdekt János Bolyai dat Nikolai Lobachevsky (1792-1856) in 1829, geheel onafhankelijk van hem, tot een zeer gelijkaardig resultaat was gekomen. Hij nam het werk van Lobachevsky met minutieuze zorg door en waardeerde het sterk.

Het was uiteindelijk Bernhard Riemann (1826-1866) die de axiomatische aanpak grondig bijstelde, niet langer beperkt tot kleine dimensies. Hij introduceerde ook de elliptische meetkunde als een niet-euclidische meetkunde. Als een onderdeel voor zijn habilitatie gaf hij een historische presentatie^[3] die enkel door de allergrootsten zoals Gauss ten volle werd begrepen. Bernhard Riemann, ongetwijfeld de meest invloedrijke student van Gauss, deed overigens ook baanbrekend werk in vele andere gebieden van de wiskunde.

De meetkunde op een boloppervlak, weliswaar tweedimensionaal, is een bijzonder geval van de elliptische situatie. Ze is in meer dan één opzicht niet-euclidisch. En om dat te zien volstaat het zelfs te kijken naar de situatie van het boloppervlak. Wanneer we 'rechten' interpreteren als lijnen van kortste afstand, dan blijken

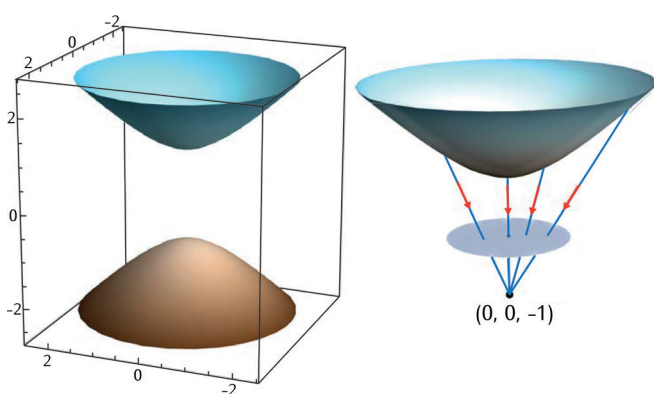
>

de rechten op een boloppervlak de *grote cirkels* te zijn. Dit wil zeggen, cirkels die het middelpunt van de bol als middelpunt hebben. 'Lijnstukken' zijn dan cirkelbogen op zo'n grote cirkel. En driehoeken worden gevormd door drie lijnstukken. Het is niet moeilijk om in te zien dat er door twee diametraal tegenover elkaar liggende punten op het boloppervlak (denk aan noord- en zuidpool) oneindig veel grote cirkels gaan. En dat twee grote cirkels elkaar steeds snijden. Zowel het eerste als het vijfde postulaat van Euclides zijn hiermee in tegenspraak. Dit geldt meer algemeen in de elliptische meetkunde. Het praktisch belang van elliptische meetkunde is opvallend zichtbaar in de luchtvaartsector. De kortste vliegroutes zijn nu eenmaal volgens de 'rechten' in die meetkunde. Piloten maken er dagelijks gebruik van.

Het hyperbolische vlak

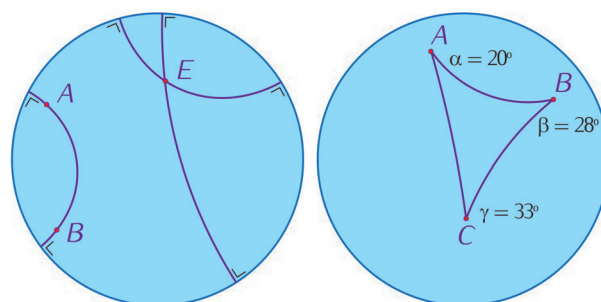
Het vergt een grotere inspanning om ons vertrouwd te maken met hyperbolische meetkunde. Er zijn daartoe ook verschillende modellen ontwikkeld om ons alvast de tweedimensionale hyperbolische meetkunde voor te stellen. Het Poincaré schijfmodel is er zo eentje, meer toegankelijk en daardoor aantrekkelijk. Laat ons dit even proberen duidelijker te maken.

Vertrekkend van een twebladige hyperboloïde beeldt een stereografische projectie het oppervlak van één van beide bladen isometrisch af op een cirkelschijf waarvan de cirkelrand ontbreekt. De cirkelschijf heeft de oorsprong als middelpunt. De stereografische projectie vertrekt vanuit het punt $(0, 0, -1)$, zie figuur 6.



figuur 6 De twebladige hyperboloïde $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ en de stereografische projectie vanuit het punt $(0, 0, -1)$ van het bovenste blad op de eenheidsschijf met middelpunt de oorsprong.

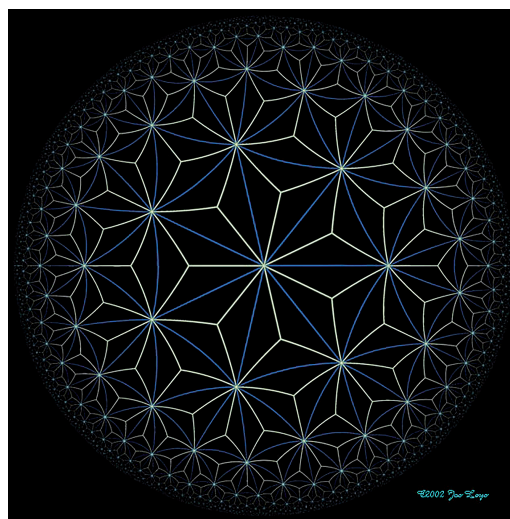
Omdat geodeten op de hyperboloïde gevonden worden als snijlijnen van de hyperboloïde met een vlak door de oorsprong, kun je je al wat beter voorstellen wat dit overeenkomstig betekent in het Poincaré schijfmodel. 'Rechten' (lijnen van kortste afstand) zijn in de Poincaré schijf gedeelten van cirkels die de randcirkel van de schijf loodrecht snijden, zie figuur 7.



figuur 7 Enkele voorbeelden van 'rechten' in de meetkunde van de Poincaré schijf links. Een hyperbolische driehoek met hoekpunten A, B en C en voorgeschreven hoeken in elk van deze punten rechts. De som van de hoeken is kleiner dan 180° .

Wil je zelf aan het tekenen slaan, dan is het Geogebra hyperbolisch canvas van Tibor Marciněk^[4] een aanrader.

Het is interessant om nu zelf te observeren dat alle axioma's van Euclides, met uitzondering van het parallel-len-postulaat effectief gelden in dit hyperbolische vlak (en meer algemeen in de hyperbolische meetkunde). Zoals je kunt zien in de linkse figuur 7, gaan er door het punt E meerdere 'rechten' die de gegeven rechte AB niet snijden.



figuur 8 Een hyperbolische vlakvulling uitsluitend bestaande uit driehoeken (Jos Leys)

Het euclidisch vlak, het boloppervlak en de éénbladige hyperboloïde zijn de standaardvoorbeelden van tweedimensionale oppervlakken met constante kromming: kromming nul voor het euclidisch vlak, constante positieve kromming voor het boloppervlak en constante negatieve kromming voor de éénbladige hyperboloïde. Alhoewel deze oppervlakken globaal gezien dus wezenlijk verschillend zijn, zien ze er voor een 'lokale bewoner' allemaal gelijk uit. Wij zouden als waarnemer in onze omgeving en wonend op een planeet met die globale vormen het onderscheid alvast niet eenvoudig zien.



figuur 9 Animatie van auto's in een hyperbolisch vlak (Jos Leys)

De chauffeurs van de autootjes die zich in het hyperbolische vlak bewegen, zoals in de animatie ^[5] in figuur 9 merken het beslist ook niet. Voor hen blijven hun voertuig evenals de af te leggen afstand immers even groot. Hyperbolische meetkunde, ook hogerdimensionaal, is inmiddels onmisbaar voor belangrijke toepassingen in de theoretische fysica en de kosmologie. Maar ook in de kunst vinden we regelmatig aansprekende hyperbolische visualisaties terug. Dit is onder meer het geval in het werk van Escher. Digitaal kun je heel wat beelden vinden op de homepage van Jos Leys.^[6]

Noten

- [1] Zie: <https://www.imaginarymaths.be>
- [2] Illustratieverantwoording: alle beeldmateriaal met betrekking tot historische figuren is dankbaar ontleend aan de MacTutor website, die voor wat betreft de postzegelweergaves samenwerkt met de collectie van Jeff Miller. Zie: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>
- [3] Riemann, B. *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, transcription by D.R. Wilkins, <https://www.emis.de/classics/Riemann/Geom.pdf>
- [4] zie: www.geogebra.org/m/e/Aw9rcQ
- [5] zie: <https://www.imaginarymaths.be/educatief.html>
- [6] zie: <https://www.josleys.com/index.php>

Over de auteur

Paul Igodt is emeritus gewoon hoogleraar verbonden aan het departement wiskunde van de KU Leuven en Campus Kulak. Hij is mede-oprichter en coördinator van de Vlaamse Wiskunde Olympiade en coördineerde de Vlaamse stuurgroep die de reizende tentoonstelling 'Imaginary: pracht en kracht van wiskunde' organiseerde.
E-mailadres: paul.igodt@kuleuven.be

De 'Kubuspoort'

Henk Rozenhart



Op deze plaats heb ik al vaker gewezen op kunstwerken, die de wiskundigen onder ons, een warm gevoel geven. Dit keer gaat het om een kunstwerk van Marijke de Goey. Geïnspireerd door de oude stadspoorten van Amsterdam, heeft Marijke de Goey de 'Kubuspoort' ontworpen, die toegang geeft tot de woonwijk de Aker in Osdorp. De poort is opgebouwd uit kubussen die een ongeregelde indruk geven door de manier waarop ze op elkaar gestapeld zijn. Wat ik er fijn aan vind is dat je met, wat wel de eenvoudigste driedimensionale ruimtefiguur wordt genoemd, op speelse wijze iets monumentaals kunt creëren. Wellicht kun je leerlingen met deze poort inspireren om ook kubussen op een creatieve manier te stapelen.

Een bol in gelijke stukken verdelen

Het nut van derdemachtsvergelijkingen

Een bol die gecentreerd is op de oorsprong kan op segmentale wijze triviaal in twee stukken verdeeld worden via een verticale snede op $x = 0$. Een interessante vraag is hier: is er een generieke formule om de locaties van alle x -coördinaten te bepalen als we een bol op segmentale wijze verdelen in n stukken met hetzelfde volume?

Opdeling van een bol in een even aantal gelijke segmenten

Een bol met straal r kan segmentaal opgedeeld worden in gelijke stukken. Laten we eerst eens kijken naar een bol die in een even aantal stukken wordt opgedeeld. In dit geval hoeven we alleen maar te kijken naar hoe we een halfrond in een bepaald aantal stukken opdelen. Het volume van een bolsegment van een bol gecentreerd rond de oorsprong kan worden bepaald door de volgende integraal:

$$\pi \int_0^p (r^2 - x^2) dx$$

Even een voorbeeld. Om het halfrond nu in twee gelijke segmenten te verdelen, moeten we de volgende vergelijking oplossen voor p :

$$\int_0^p (r^2 - x^2) dx = \int_p^r (r^2 - x^2) dx$$

Dit geeft:

$$\left[xr^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^p = \left[xr^2 - \frac{x^3}{3} \right]_p^r \Leftrightarrow$$

$$pr^2 - \frac{p^3}{3} = \frac{2r^3}{3} - pr^2 + \frac{p^3}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2p^3}{3} - 2pr^2 + \frac{2r^3}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$p^3 - 3pr^2 + r^3 = 0$$

Dit is de casus irreducibilis van derdemachtsvergelijkingen, waarbij $P = -3r^2$ en $Q = r^3$. Deze kunnen we oplossen met behulp van de formule van Cardano voor p :

$$p = \sqrt[3]{\frac{-r^3 + \sqrt{r^6 + \frac{4}{27}(-3r^2)^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-r^3 - \sqrt{r^6 + \frac{4}{27}(-3r^2)^3}}{2}}$$

Dit geeft:

$$p = r \left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}} \right)$$

De machinerie achter het oplossen van de derdemachtsvergelijking hier, laat zich als volgt gelden. We delen de coëfficiënt vóór het complexe deel door de coëfficiënt vóór het reële deel en nemen daar de boogtangens van, waardoor we een hoek krijgen:

$$\arctan(-\sqrt{3}) = \omega$$

$$= -r \left(\sqrt[3]{\cos(\omega) + i\sin(\omega)} + \sqrt[3]{\cos(\omega) - i\sin(\omega)} \right)$$

$$= -r \left(\cos\left(\frac{\omega}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\omega}{3}\right) + \cos\left(\frac{\omega}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\omega}{3}\right) \right)$$

Er zijn drie mogelijke oplossingen via rotatie van de eenheidscirkel op het complexe vlak. Deze oplossingen

zijn:

$$p_1 = -2r \cos\left(\frac{\omega}{3}\right) = -2r \cos\left(\frac{\arctan(\sqrt{3})}{3}\right) =$$

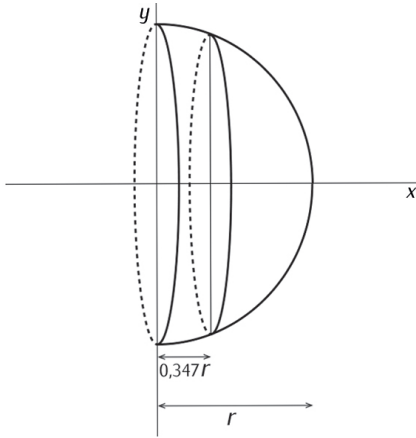
$$-2r \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) < 0 \Rightarrow p_1 \notin [0, r]$$

$$p_2 = -2r \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) > r \Rightarrow p_2 \notin [0, r]$$

$$p_3 = -2r \cos\left(\frac{13\pi}{9}\right) = 2r \cos\left(\frac{22\pi}{9}\right) =$$

$$2r \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) = 2r \sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \approx 0,3473r$$

p_3 geeft hier dus de enige reële oplossing. Om een halfrond op segmentale wijze in twee gelijke stukken te delen geldt dus dat het middelpunt van het snijvlak van het halfrond op een afstand ligt t.o.v. het middelpunt van de platte bodem van het halfrond. Deze afstand is een fractie van de straal van het halfrond die gelijk is aan $\varphi = 2\sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \approx 0,347$, zie figuur 1.



figuur 1

Kortweg zijn de x -coördinaten van de twee locaties, waarop beide halfronden in twee stukken worden verdeeld en de totale bol dus in vier stukken, gelijk aan $2r\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ en $-2r\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ (dit is een symmetrisch geval). Laten we nu het basisgeval generaliseren door een verzameling van x -coördinaten te bedenken, zodat:

$$S_n = \{p_k : k \in \{m : 1 \leq m \leq n-1\}\}$$

Vervolgens moeten we elke p_k zo kiezen dat er een fractie van het volume $\frac{k}{n}$ van het halfrond wordt gescheiden van het andere deel van het halfrond, $1 - \frac{k}{n}$. De verhoudingen tussen de twee ontstane delen is dan

$\frac{k}{n} : 1 - \frac{k}{n} = k : n - k$. Op deze manier kunnen we de x -coördinaten p_k bepalen die het halfrond in n gelijke stukken verdeeld, met $n-1$ sneden. Dan geldt voor de verhouding tussen de volgende twee integralen die het volume vertegenwoordigen van elk een segment:

$$\frac{\int_0^{p_k} (r^2 - x^2) dx}{\int_{p_k}^r (r^2 - x^2) dx} = \frac{k}{n-k} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{p_k} (r^2 - x^2) dx = \frac{k}{n-k} \int_{p_k}^r (r^2 - x^2) dx \Leftrightarrow$$

$$\left[xr^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^{p_k} = \frac{k}{n-k} \left[xr^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{p_k}^r \Leftrightarrow$$

$$r^2 p_k - \frac{p_k^3}{3} = \frac{2kr^3}{3(n-k)} - \left(\frac{k}{n-k} \right) r^2 p_k + \frac{kp_k^3}{3(n-k)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{n}{3(n-k)} p_k^3 - \frac{n}{n-k} r^2 p_k + \frac{2kr^3}{3(n-k)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$p_k^3 - 3r^2 p_k + \frac{2kr^3}{n} = 0$$

$$p_k = \sqrt[3]{\frac{-2kr^3}{n} + \sqrt{\left(\frac{2kr^3}{n}\right)^2 + \frac{4}{27}(-3r^2)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-2kr^3}{n} - \sqrt{\left(\frac{2kr^3}{n}\right)^2 + \frac{4}{27}(-3r^2)^3}} =$$

$$r \left(\sqrt[3]{\frac{-2k}{n} + \sqrt{\frac{4k^2}{n^2} - 4}} + \sqrt[3]{\frac{-2k}{n} - \sqrt{\frac{4k^2}{n^2} - 4}} \right)$$

Omdat $\frac{k^2}{n^2} < 1$ kunnen we dit weer vervangen door:

$$p_k = -r \left(\sqrt[3]{\frac{k}{n} + i\sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}} + \sqrt[3]{\frac{k}{n} - i\sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}} \right)$$

$$\arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}}{\frac{k}{n}}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{k}\right) = \arctan\left(\sqrt{\frac{n^2}{k^2} - 1}\right) = \omega$$

Dus, op dezelfde manier berekend als bij $n = 4$ (twee stukken per halfrond):

$$p_{k,1} = -2r \cos\left(\frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{n^2}{k^2} - 1}\right)}{3}\right)$$

$$p_{k,2} = -2r \cos\left(\frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{n^2}{k^2} - 1}\right) + 2\pi}{3}\right)$$

$$p_{k,3} = -2r \cos\left(\frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{n^2}{k^2} - 1}\right) + 4\pi}{3}\right)$$

Zodoende geldt dat

$$p_{k,m}^{(n)} = 2r \cos\left(\frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{n^2}{k^2} - 1}\right) + (2m+3)\pi}{3}\right), m \in \{0, 1, 2\}$$

En ook hebben we de voorwaarde dat $p_k \in (0, r) \rightarrow$

$$0 < \cos\left(\frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{n^2}{k^2} - 1}\right) + (2m+3)\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}$$

>

Dus

$$\frac{\pi}{3} < \frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{n^2}{k^2}-1}\right) + (2m+3)\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \quad \vee$$

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{n^2}{k^2}-1}\right) + (2m+3)\pi}{3} < -\frac{\pi}{3}$$

We weten ook dat $0 < \sqrt{\frac{n^2}{k^2}-1} < \infty$ en dat,

$$0 < \frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{n^2}{k^2}-1}\right)}{3} < \frac{\pi}{6}$$

Dus de enige oplossing waarvoor geldt dat $p \in (0, r)$, is de oplossing

$$p_k^{(n)} = \pm 2r \cos \left(\frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{n^2}{k^2}-1}\right) + \pi}{3} \right) \quad \forall k, n: 0 \leq k \leq n-1$$

Als we nu dus een hele bol op segmentale wijze in $2n$ stukken verdelen, dan hebben we de triviale snede die de bol precies in het midden in twee gelijke helften snijdt. Daarna kunnen we elke bolhelft opdelen in n gelijke stukken m.b.v. bovenstaande formule. Afhankelijk van welke helft wordt gekozen, kan + of - gelden.

Opdeling van een bol in een oneven aantal gelijke segmenten

Stel nu dat we de bol in een oneven aantal segmenten willen delen. Ook dan kunnen we gebruik maken van een halfrond van de bol. In dat geval delen we het halfrond op in n stukken. Echter, één van deze n stukken is de helft van de andere stukken. Daarom geldt dat het aantal stukken waarin het halfrond is gedeeld gelijk is aan $n - \frac{1}{2}$. Voor de verhouding tussen de twee integralen geldt dan:

$$\frac{\int_0^{p_k} (r^2 - x^2) dx}{\int_{p_k}^r (r^2 - x^2) dx} = \frac{k - \frac{1}{2}}{n - k} \Leftrightarrow$$

$$p_k^3 - 3r^2 p_k + \frac{2(k - \frac{1}{2})r^3}{n - \frac{1}{2}} = 0$$

In dit geval zijn de variabelen die we eerder zagen, k en n simpelweg vervangen door $k - \frac{1}{2}$ en $n - \frac{1}{2}$. We weten dus al dat de oplossing voor $p_k^{(n)}$ gelijk is aan

$$p_k^{(n)} = \pm 2r \cos \left(\frac{\arctan\left(\sqrt{\left(\frac{2n-1}{2k-1}\right)^2 - 1}\right) + \pi}{3} \right) \quad \forall k, n: 1 \leq k \leq n-1$$

Hierbij is n de helft van het totaal aantal sneden dat gemaakt moet worden om een bepaald oneven aantal aan gelijke stukken van de bol te krijgen. We voeren de sneden uit op dezelfde plek voor beide halfronden. Laten we nu zeggen dat $N = 2n$ als N even is en $N = 2n - 1$ als N oneven is. Als we de bol in een even aantal stukken N willen delen, dan hebben we de formule

$$p_k^{(n)} = \pm 2r \cos \left(\frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{n^2}{k^2}-1}\right) + \pi}{3} \right) \quad \forall k, n: 1 \leq k \leq n-1$$

We kunnen bovenstaande formules met elkaar verenigen door op te merken dat voor een even aantal stukken geldt dat

$$2r \cos \left(\frac{\arctan\left(\frac{n^2}{k^2}-1\right) + \pi}{3} \right) = 2r \cos \left(\frac{\arctan\left(\sqrt{\left(\frac{2n}{2k}\right)^2 - 1}\right) + \pi}{3} \right)$$

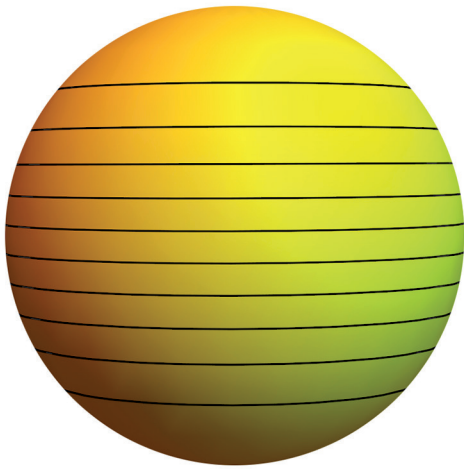
We kunnen de formules verbinden door gebruik te maken van de volgende definitie:

$$N \pmod{2} = N - 2\left[\frac{N}{2}\right]$$

Op die manier geldt voor de posities van de sneden $p_{\pm k}^{(N)}$, inclusief de triviale snede, strikt formeel dat

$$p_k^{(N)} = \pm 2r \cos \left(\frac{\arctan\left(\sqrt{\left(\frac{N}{2k - N + 2\left[\frac{N}{2}\right]}\right)^2 - 1}\right) + \pi}{3} \right) \quad \forall k \in \{N - 2\left[\frac{N}{2}\right], \left[\frac{N-1}{2}\right]\}$$

Hierbij is N het aantal gelijke segmenten waarin de bol wordt verdeeld, met $p_0 = 0$ als de triviale snede. Dergelijke formules kunnen worden gebruikt om maatstreepjes te plaatsen voor een bol of halfrond dat voor een strikt bepaald deel gevuld moet worden met een bepaalde vloeistof. In figuur 2 zie je een verdeling in elf gelijke segmenten.



Over de auteur

Jens de Groot is masterstudent Biomedische Wetenschappen en Biologie aan de Rijksuniversiteit van Groningen, met een interesse in de (elementaire) wiskunde. Hij heeft eerder een artikel gepubliceerd met Herman Bloem over meetkundige veelhoeken (*Euclides* 96-5).

E-mailadres: jensdegroot1998@gmail.com

figuur 2 Bol opgedeeld in elf exact gelijke segmenten, horizontaal weergegeven.

(advertentie)

www.epsilon-uitgaven.nl

NIEUW

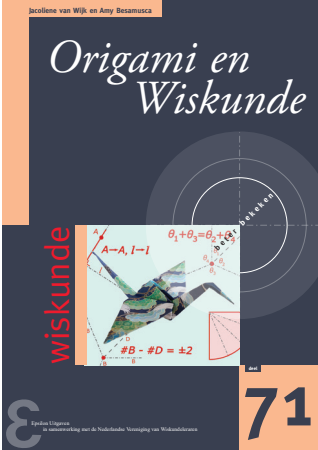
Giraf 5



Plusminus
Spelen met negatieve getallen
Paul Durenkamp



Zebra 71



Origami en Wiskunde
Jacoliene van Wijk en Amy Besamusca

ε

Epsilon Uitgaven

Giraf-reeks: € 7 per deel

Zebra-reeks: € 10 per deel

12% korting bij 5 delen of meer

Worteltrekken

Als bewerkingen consistent(er) gedefinieerd worden, dan zouden (brugklas)leerlingen wel eens minder moeite met algebraïsche rekenvaardigheden kunnen hebben. In dit laatste deel neemt Sjef van Dongen het worteltrekken en de rekenvolgorde onder de loep.

Inleiding

Worteltrekken, ofwel de wortel bepalen van een getal, is de laatste van de zeven rekenkundige bewerkingen in de 'brugklas-algebra'.^{[1], [2], [3], [8], [9]} Het is de eerste bewerking die soms wel en soms niet exact is uit te voeren.

In de onderbouw wordt worteltrekken direct in verband gebracht met kwadrateren. De bewerking 'worteltrekken' wordt bij de meeste wiskundemethodes geïntroduceerd als het tegenovergestelde doen van kwadrateren. De meeste leerlingen zijn de opdracht kwadrateren tegengekomen bij het berekenen van de oppervlakte van een vierkant. Kwadrateren is hetzelfde als vermenigvuldigen met twee gelijke factoren. Dit maakt kwadrateren tot een speciale vorm van machtsverheffen.^[3] De bewerking worteltrekken is daarmee het tegenovergestelde van de bewerking machtsverheffen.

Worteltrekken beperkt zich niet tot de kwadraten, maar strekt zich uit tot n -de machten, waarbij $n = 2, 3, 4, 5, \dots$

Wat is worteltrekken?

De n -de machtswortel bepalen van een getal wordt vaak genoemd de n -de machtswortel trekken uit een getal. De n -de machtswortel bepalen van een gegeven getal is een rekenopdracht, waarbij gezocht moet worden naar een speciaal getal: genoemd de n -de machtswortel van dat getal. De eis die aan dat speciale getal wordt gesteld is dat de n -de macht van dat speciale getal als uitkomst het gegeven getal oplevert.

Wat is de 2-de machtswortel van 49? De 2-de machtswortel van 49 is 7, omdat $7^2 = 49$.

Wat is de 3-de machtswortel van 64? De 3-de machtswortel van 64 is 4, omdat $4^3 = 64$.

Wat is de 5-de machtswortel van -32? De 5-de machtswortel van -32 is -2, omdat $(-2)^5 = -32$.

Het antwoord op de vraag: 'Wat is de 2-de machtswortel van 49?' zou naast 7 ook -7 kunnen zijn, immers $(-7)^2 = 49$. Een rekenkundige opdracht die meerdere uitkomsten kent is niet handig. Vandaar de aanvullende afspraak die bij even-machtswortel bepalen hoort: zijn er bij het worteltrekken twee antwoorden mogelijk, een positief getal en zijn tegengestelde, dan moet voor het positieve getal worden gekozen.

De opdracht 'bepaal de n -de machtswortel van X ' wordt als volgt gecodeerd, zie figuur 1:



figuur 1

De bovenstaande voorbeelden worden in gecodeerde vorm: Bereken: $\sqrt[2]{49}$. Antwoord: $\sqrt[2]{49} = 7$ omdat $7^2 = 49$ én $7 > 0$.

Bereken: $\sqrt[3]{64}$. Antwoord: $\sqrt[3]{64} = 4$ omdat $4^3 = 64$.

Bereken: $\sqrt[5]{-32}$. Antwoord: $\sqrt[5]{-32} = -2$ omdat $(-2)^5 = -32$

De 2-de machtswortel van een getal noemt men vaak de vierkantswortel of de wortel van het getal.

Belangrijke opmerkingen m.b.t. worteltrekken:

- 1 Is de wortel exponent 2 dan wordt het symbool $\sqrt{\quad}$ gebruikt in plaats van $\sqrt[2]{\quad}$.
- 2 Is de wortel exponent n een even getal én is het argument een negatief getal dan is de rekenopdracht onmogelijk uit te voeren. De even-macht van een getal is immers positief.

Ezelsbrug		Prioriteitenlijst – voorrangregels			
Horden *	Horden *	1	H	(...)	Haakjes
Moderne ** Weetgrage	Weetgrage ** Moderne	2	M W W M	$g^{\dots}$ $\sqrt{\quad}$ $\sqrt[n]{\quad}$	Machtsverheffen, Worteltrekken
Tieners	Tieners	3	T	- ..	Tegengestelde bepalen
Vinden Die	Die Vinden	4	V D D V	$\times \cdot$ $\div : /$	Vermenigvuldigen en Delen***
Oplossingen Aardig	Aardige Oplossingen	5	O A A O	$+$ $-$	Optellen en Aftrekken

tabel 1

*Een verlengd wortelteken $\sqrt{\dots\dots\dots}$ heeft hetzelfde effect als haakjes.

**Gaat worteltrekken voor machtsverheffen of omgekeerd? Dit is niet altijd even duidelijk.

Rekenmachines geven als uitkomst van $\sqrt[3]{(-9)^2}$ niet 'error' maar 9. Dit betekent dat hier machtsverheffen een hogere prioriteit heeft gekregen dan worteltrekken. In figuur 4 (links) is de codering gegeven van de opdracht: de 3de-machtswortel van het tegengestelde van het kwadraat van 27. $\sqrt[3]{-27^2} = -9$. Het minteken voor het getal 27 is de code voor de opdracht 'tegengestelde bepalen'. Het getal 27 lijkt betrokken bij de opdrachten 'machtsverheffen' en 'tegengestelde bepalen'. Machtsverheffen heeft een hogere prioriteit dus: $\sqrt[3]{-27^2} \equiv \sqrt[3]{-729}$. Verder is het vanzelfsprekend dat hierna eerst de bewerking 'tegengestelde bepalen' moet worden uitgevoerd. Om te kunnen worteltrekken moet immers een getal (het argument) bekend zijn. $\sqrt[3]{-729} = \sqrt[3]{(-729)} = -9$. Dit is een voorbeeld waarbij de prioriteit wordt bepaald door de volgorde van de gebruikte codes. Wat ook het geval is bij: $\sin^2(x) \equiv (\sin(x))^2$.

***De codes $/$ en $\div$, die gebruikt worden om de rekenopdracht delen aan te geven, zijn soms ook reden tot vergissingen.^[5] Zie figuur 4 (rechts).

Advies: gebruik bij twijfel altijd haakjes, of een verlengd wortelteken om de juiste rekenvolgorde te garanderen.

Rekenregels

Beperken we ons, bij de keuze van n , tot de positieve gehele getallen dan volgt uit de definities van machtsverheffen en worteltrekken dat deze rekenopdrachten



figuur 4

tegengestelde of inverse bewerkingen zijn. Wanneer de genoemde rekenopdrachten direct na elkaar worden toegepast zal de uitkomst gelijk zijn aan het getal waarmee gestart werd.

Regel I: $(\sqrt[n]{a})^n \equiv a$ én $\sqrt[n]{a^n} \equiv a$ als $a > 0$.

En verder gelden deze rekenregels:^[7]

Regel II: $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \equiv \sqrt[n]{a \times b}$ als $a \geq 0$ en $b \geq 0$

Regel III: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \equiv \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ als $a \geq 0$ en $b > 0$

Regel IV: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \equiv \sqrt[m \cdot n]{a}$, m en n zijn positieve gehele getallen en $a \geq 0$.

Conclusie

De bewerking worteltrekken is voor de leerling uit de onderbouw de eerste bewerking die leidt naar de irrationale getallen. Dit is hét moment om te accentueren dat het in de wiskunde gebruikelijk is om irrationele getallen d.m.v. een symbool aan te geven. Bijvoorbeeld als $\sqrt{11}$ of als π . De Chinese methode demonstreert dat irratio-

Verschenen

nale getallen zo nauwkeurig als gewenst kunnen worden benaderd. Met dit laatste artikel is, naar ik hoop, een consistente behandeling van de rekenkundige bewerkingen van de algebra en hun codering in de onderbouw afgerond.^{[1], [2], [3], [8], [9]}

Op de site vind je alle bewijzen uit dit artikel.

 vakbladeuclides.nl/996worteltrekken

Noten

- [1] zie: *Euclides* 96-6: Meer of minder minnen
- [2] zie: *Euclides* 97-7: Handig husselen met rekenopdrachten
- [3] zie: *Euclides* 98-3: Machten in de brugklas
- [4] zie: Kindt, M. (2022). Algoritmen met een staart, *Euclides*, (98)3.
- [5] zie ook: <https://nl.wikipedia.org/wiki/Bewerkingsvolgorde>
- [6] zie ook: <https://wiskunst.nl/index.php/wiskunde-is-leuk/nieuwe-artikelen/hoofdstelling-van-de-rekenkunde/>
- [7] zie de *Euclides* website voor alle bewijzen
- [8] zie: *Euclides* 98-4: De distributieve eigenschap
- [9] zie: *Euclides* 98-2: Van hoofdrekenen naar wiskunde

Over de auteur

Sjef van Dongen was jaren werkzaam in de elektrotechniek. Daarna was hij 30 jaar als wiskunde- en natuurkundedocent verbonden aan het 2College in Oisterwijk. Na zijn pensionering is hij enthousiast bijlesdocent.
E-mailadres: jjacvandongen@hotmail.com



Titel: Mijn vakdidactiek rekenen(-wiskunde)

Auteur: Geeke Bruin-Muurling

Uitgever: Uitgeverij Van Gorcum

ISBN: 9789023256632

Prijs: € 25,00 (336 pagina's)
(docentenexemplaren mogelijk)

Van de uitgever

Mijn vakdidactiek rekenen(-wiskunde) is een handleiding voor het (verder) ontwikkelen van je eigen vakdidactische kennis en denken. Het boek inspireert om vanuit die kennis en dat denken vaker eigen keuzes te maken in je onderwijs, in je lessen. Het geeft je inzichten waardoor je nog beter in kunt spelen op jouw leerlingen en daarbij, als dat nodig is, de lesmethode of methodiek meer of misschien zelfs wel helemaal los kunt laten.

Het boek start met de verschillende doelen voor rekenen en de overtuigingen die daarbij horen. Vanuit deze achtergrondkennis wordt ingezoomd op basisvaardigheden en wat van invloed is op de ontwikkeling daarvan. De rol van conceptuele kennis en leren toepassen van rekenvaardigheden krijgen daarbij extra aandacht. In het laatste deel van dit boek worden concrete handreikingen gedaan. Zo leer je een techniek om de rekenstof verder te doorgronden, als voorbereiding op je les. Ook leer je hoe je de wereld om ons heen meer de klas in kunt brengen. Het boek sluit af met een set dilemma's om jouw eigen onderwijsvisie verder aan te scherpen en te concretiseren.

Over de auteur

Geeke Bruin-Muurling is werkzaam als vakdidacticus in het basisonderwijs, voortgezet onderwijs en mbo.

Een observatie die maar door het hoofd bleef cirkelen



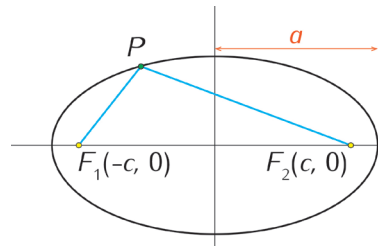
figuur 1 Het langste natuurpad van Nederland, Fontaine Uitgevers

Dit jaar wandelden mijn vrouw en ik het langste natuurpad. Een mooie lange afstandsroute van in totaal 455 km van Delfzijl naar Goirle. We liepen regelmatig een paar etappes en er was niet alleen natuur, maar ook architectuur, zoals op de foto in figuur 2 te zien is. Een bijzonder gebouw, cilindervormig met een schuin dak. Volgens mij moet de dakrand dan een ellips zijn.



figuur 2 Fluidwell gebouw, Veghel

En daar begint bij mij het gepieker. Waarom is dit zo? Bij een horizontaal dak is de rand duidelijk een cirkel. Dat is niet zo moeilijk, maar waarom hier een ellips. Zo'n vraag houdt me de rest van de wandeling bezig en ook de dagen daarna. Ik ben er niet continu mee bezig, maar dicht onder de oppervlakte blijft de vraag sluimeren. De ellips is een kegelsnede en de ellips verkrijgt je door twee vaste punten te nemen, de brandpunten, en die punten op te zoeken waarvan de som van de afstand tot die twee brandpunten constant is, zover rijkt mijn kennis wel en zelfs de algemene vergelijking kan ik nog wel afleiden (denk ik), zie figuur 3.



figuur 3

Het viel toch tegen, maar het lukte. Gebruik $PF_1 + PF_2 = 2a$ en $c^2 = a^2 - b^2$ dan volgt met de afstandsformule en wat algebra vrij makkelijk $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Maar dan heb je nog niet dat de doorsnede van de cilinder met een niet-horizontaal vlak een ellips is. Natuurlijk heb je de bollen van Dandelin, maar dan ben je wel bij de definitie maar nog niet bij de vergelijking. Toevallig kwam ik een bewijs tegen, terwijl ik er niet naar op zoek was. Het is een mooi bewijs.

Zet de cilinder zo, dat het middelpunt van de grondcirkel precies in de oorsprong van een assenstelsel valt. De cirkel ligt in het grondvlak. De ellips van het bovenvlak wordt geprojecteerd in het grondvlak en dat is precies de grondcirkel. De lengte a van de ellips blijft a , maar de lengte van b wordt a .

Dat geeft de volgende afbeeldingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{a}{b}y \end{cases}$$

De grondcirkel heeft vergelijking $(x')^2 + (y')^2 = a^2$.

Substitueer de afbeeldingsvergelijking en je krijgt

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2 \text{ en herleid dit tot } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En zo wandelt een gepensioneerd wiskundedocent door het leven en hij vindt het jammer deze kennis niet meer door te geven aan zijn leerlingen. Maar, dat is nu aan de lezers.

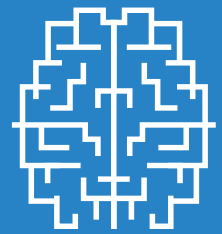
Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde in ruste.

E-mailadres: a.b.vanderroest@ziggo.nl

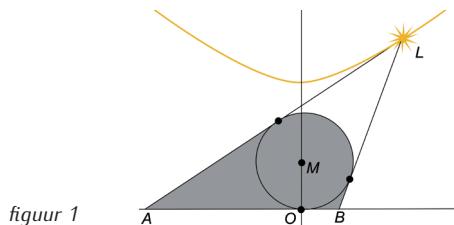
Puzzel 99-6

De schaduw blijft even groot



Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Wouter van As wees ons op een leuk meetkundig probleem waarvan onze puzzel een variatie is. Een cirkel met straal 1 raakt de x -as in de oorsprong $O(0, 0)$ van een assenstelsel. Middelpunt = $M(0, 1)$. Ergens in het xy -vlak boven de cirkel ($y > 2$) hangt een lampje L dat een schaduw van de cirkel werpt op de x -as. De lengte van die schaduw = $AB = 4$. Het lampje kan zich voortbewegen langs een baan boven de cirkel, zodanig dat de lengte AB van de schaduw altijd even lang blijft, dus hier lengte 4. De vraag is wat de baan (meetkundige plaats) van dat lampje is. We zullen in deze puzzel in tegenstelling wat we meestal doen, meer punten geven naarmate je oplossing eenvoudiger is.



Opgave 1a: Het lampje staat in het punt $(0, y)$ en $AB = 4$. Bepaal de y -coördinaat.

Opgave 1b: Idem als het lampje in $(-1, y)$ staat.

Opgave 1c: Het lampje kan in principe oneindig ver weg staan, zodat de schaduw AB nog steeds lengte 4 heeft. De raaklijnen aan de cirkel door A en B zijn dan evenwijdig. Bereken de hoek van die raaklijnen met de x -as.

We beweren dat de baan van het lampje een kegelsnede is. Dus een hyperbool, ellips, parabool of cirkel. Je kunt de baan van het lampje onderzoeken met een programma als Geogebra. Wij hebben dat al gedaan met figuur 1 als resultaat. Het lijkt op een tak van een hyperbool. Voor vraag 2a en b kun je verschillende methoden gebruiken, bijvoorbeeld analytische meetkunde, 'gewone' vlakke meetkunde, en/of goniometrie.

Opgave 2a: Kun je bewijzen dat de baan van het lampje een tak van een hyperbool is?

Voor vraag 2b mag je aannemen dat het om een tak van een hyperbool gaat.

Opgave 2b: Als je dat niet al hebt gedaan: bepaal de vergelijking van die hyperbool. Tip: hoewel het niet de handigste methode is kun je vijf mogelijke punten van de lamp bepalen. Daarmee ligt een kegelsnede vast. We gaan het nu wat meetkundiger bekijken, en het lampje

kan ook tussen de lijn $y = 2$ en de x -as staan. Er is dan geen sprake meer van een schaduw op de x -as, maar de raaklijnen van L aan de cirkel kunnen nog steeds een afstand $AB = 4$ bepalen op de x -as.

Opgave 3: Wat is de baan van L als hij ligt tussen de x -as en de lijn $y = 2$ of onder de x -as?

De vorm van de kegelsnede is afhankelijk van de lengte van AB . We gaan nu andere lengtes van AB kiezen.

Opgave 4a: Welke lengte moet AB minstens hebben wil het een hyperbool worden?

Opgave 4b: Idem voor een parabool. Bepaal ook de vergelijking.

Opgave 4c: Idem voor een ellips.

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kun je mailen naar liekewobien@hotmail.nl of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk. Er zijn 20 punten te verdienen en een boekenbon ter waarde van 20 euro voor de aanvoerder van de ladder. Inzendingen moeten uiterlijk op 19 juni 2024 binnen zijn.

Voor de uitwerking van puzzel 99-4:

 vakbladeuclides.nl/996puzzel

Voor de volledige ladderstand en de uitwerkingen van eerdere puzzels: <https://nvvw.nl/euclides/puzzel/>

We feliciteren Jos Remijn van harte met de ladderprijs.

Top 10 ladderstand t/m puzzel 99-4

1	J. Remijn	164
2	M. Schukking	125
3	H. Huisman	117
4	H. Bakker	116
5	B. Dopheide	97
6	S. Zondervan	95
7	R. Stolwijk	89
8	H. Linders	77
9	G. Groenewegen	76
10	L. Cizkova	61

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Hugo Duivesteijn, voorzitter
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck
Constantijn Tilanus

Inzenden bijdragen

Tom Goris,
Molenbochtplein 38, 5014 EJ Tilburg
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvww.nl

Voorzitter

Wim Caspers
E-mail: w.caspers@nvvw.nl

Secretaris

Els Franken
E-mail: e.franken@nvvw.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06 21 50 96 79 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau, Tel. 0345 531 324
E-mail: evers.rechtspositie@gmail.com
Vermeld bij je contact je lidnummer en telefoonnummer.

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt met ingang van 1 augustus 2023

- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 72,50
- leden, maar dan zonder Euclides: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 75,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen Euclides niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 90,00
Instituten en scholen: € 160,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkwijk 63, 3901 EC Veenendaal,
Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2024

Vr
23/08
Za
24/08

AMSTERDAM EN ANTWERPEN

Vakantiecursus wiskunde voor leraren

Thema: Banach-Tarski: hoe groepentheorie van één meloen er twee maakt

Organisatie: Platform Wiskunde Nederland

Vr
06/09
Za
07/09

Za
02/11

VEENENDAAL

NVvW jaarvergadering en studiedag

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook vakbladeuclides.nl

JAARGANG 99

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
7	19 juni 2024	22 april 2024

Ledenenquête NVvW

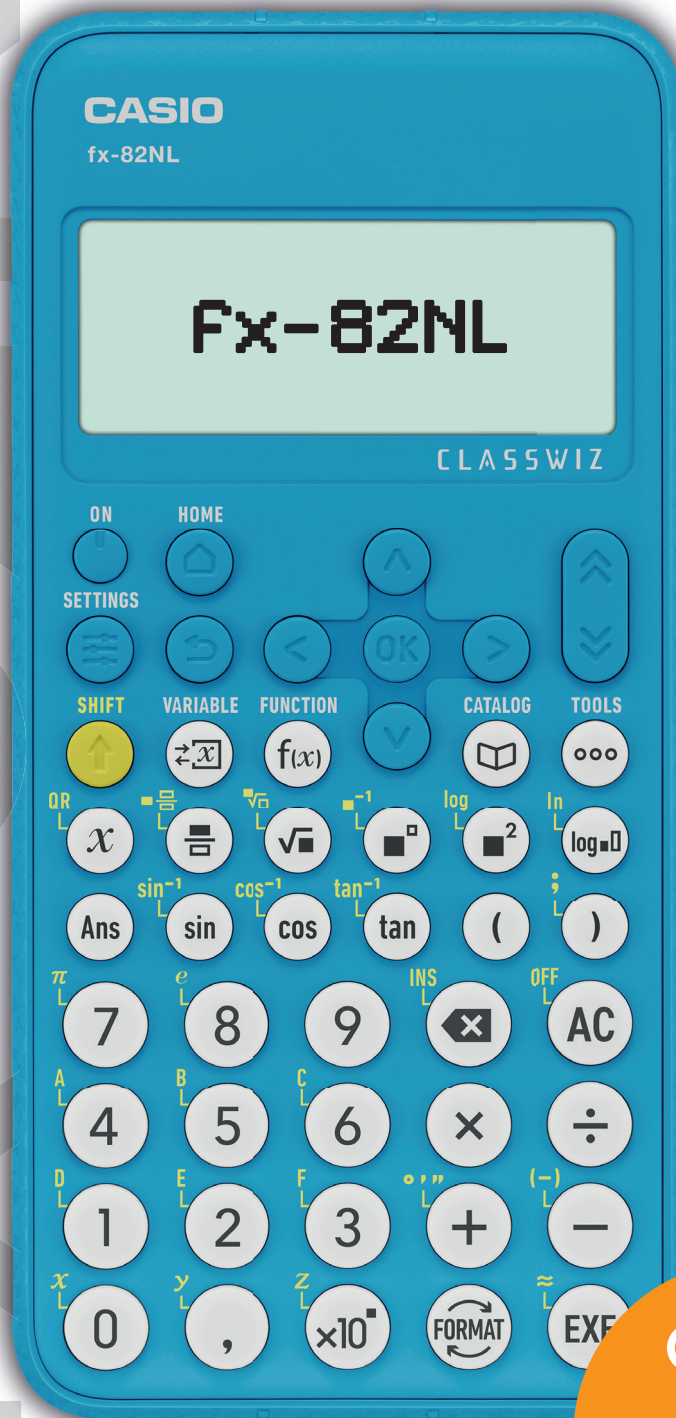
De NVvW organiseert allerlei activiteiten voor de leden, zoals de jaarlijkse studiedag, online meet-ups rond thema's en de uitgave van *Euclides*. Ook behartigt de NVvW de belangen van wiskundeleraars en komt de vereniging op voor goed wiskundeonderwijs. Heel graag willen we weten wat je van de verschillende activiteiten van de vereniging vindt, zodat we nog beter kunnen inspelen op de behoeften van de leden. Ook zijn we benieuwd naar je mening over *Euclides*. Welke artikelen lees je graag? Over welke onderwerpen zou je meer artikelen willen?

We zijn benieuwd naar jullie antwoorden!

<https://nvvw.nl/vragenlijst>



CASIO®



Opvolger van:
fx-82MS
fx-82EX

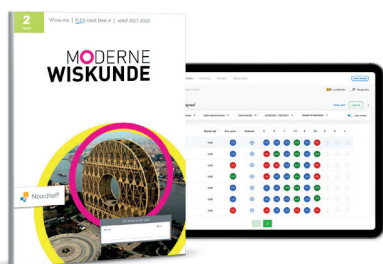
**Voor Nederlands
curriculum gemaakt**

Wiskunde bij Noordhoff: jij kiest!

Met wiskunde via Noordhoff kies je altijd voor de beste lesmethode wiskunde. Je bent verzekerd van een methode die aansluit bij jouw visie op het vak wiskunde. Je weet dat je kiest voor een heldere didactiek, de hoogste kwaliteit en zekerheid van klas 1 tot het eindexamen. Jij kiest!

Vernieuwde
vmbo bovenbouw
vanaf '24/'25!

MODERNE WISKUNDE



Leerlinggericht

Verkennen, verdiepen, oefenen en toepassen
Moderne Wiskunde brengt je begrip en inzicht bij.

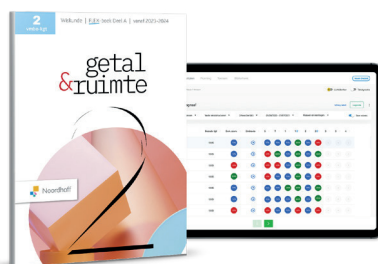
Didactiek

Het begrijpen en toepassen van wiskunde.
Moderne Wiskunde stimuleert kritisch denken en probleemoplossende vaardigheden.

Structuur

Structuur door de vaste omvang:
één paragraaf is één les van 50 minuten.

getal&ruimte



Leerlinggericht

Uitleggen, voordoen en oefenen
Getal & Ruimte biedt uitgebreide theorie en veel gericht oefenen.

Didactiek

Stapsgewijs aanleren van wiskundige vaardigheden en formules met veel aandacht voor oefenen en herhalen.

Structuur

Structuur door de vaste opbouw van de hoofdstukken en paragrafen.

	Hardcover	Flex-licentie
Leerling mag schrijven in het boek	Nee	Ja
Altijd up-to-date	Nee	Ja
Persoonlijke digitale leeromgeving met toetsen	Optioneel	Inclusief
Aanschafvorm	Eenmalige aanschaf boeken en jaarlijkse licentie digitale leeromgeving	Jaarlijkse licentie voor combinatie boek en digitale leeromgeving

Wil je meer weten of een gratis beoordelingspakket aanvragen?
Kijk op Noordhoff.nl/wiskunde



Noordhoff

Brengt je verder