

# Olympiadepuzzel

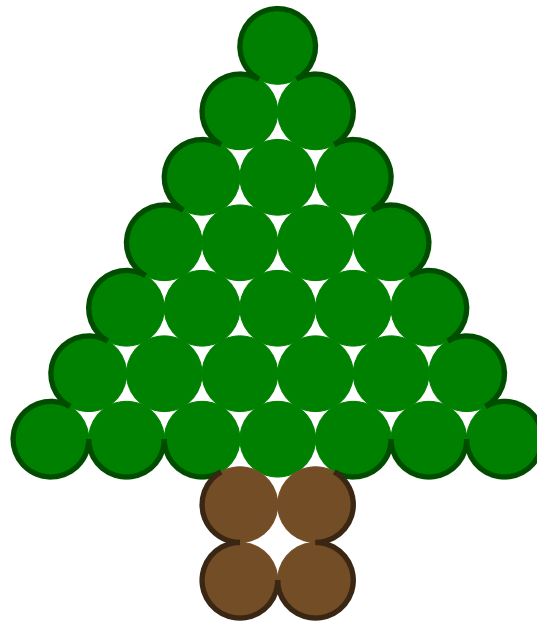
Euclides 99 nummer 3



## Kerstboom

### Opgave

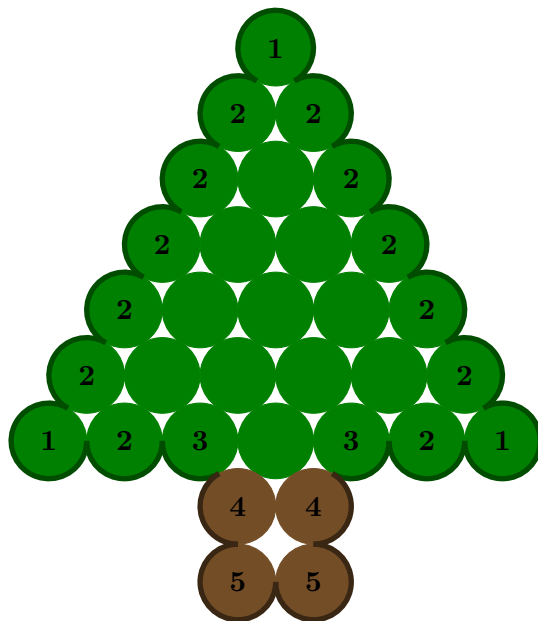
De kerstman maakt een kerstboom bestaande uit 32 rakende cirkels, zoals in onderstaande figuur. De cirkels hebben straal 1. Wat is de (buiten)omtrek van de boom?



### Uitwerking

Van de 32 cirkels liggen er 21 aan de buitenrand van de boom. We verdelen de cirkels in vijf types, afhankelijk van hun ligging ten opzichte van de aangrenzende cirkels. In onderstaande figuur is per cirkel het type aangegeven.

De groene cirkels zijn zodanig gerangschikt dat iedere cirkel aan de binnenkant van de boom omringd wordt door zes andere cirkels. De afstand tussen de raakpunten is steeds  $\frac{1}{6}$ e deel van de omtrek van de cirkel. De raakpunten verdelen daarmee de cirkelomtrek van  $2\pi$  in zes delen van elk  $\frac{\pi}{3}$ . Cirkels aan de rand van de boom raken aan minder dan zes cirkels. Bij een cirkel die aan  $n$  andere cirkels raakt, liggen  $n - 1$  delen van de omtrek aan de binnenkant van de boom. De overige  $6 - (n - 1) = 7 - n$  delen liggen aan de buitenkant en leveren een bijdrage van  $\frac{(7-n)\pi}{3}$  aan de omtrek van de boom.



We bepalen nu per type cirkel welk deel van de omtrek van de cirkel deel uitmaakt van de omtrek van de boom.

Een cirkel van type 1 raakt aan twee cirkels. De afstand tussen de beide raakpunten is  $\frac{\pi}{3}$ ; de overige  $\frac{5\pi}{3}$  van de omtrek van de cirkel maakt deel uit van de omtrek van de boom. Cirkels van type 2 raken aan vier andere cirkels. De helft van de omtrek, ofwel  $\pi$ , ligt dus aan de buitenkant van de boom. De cirkels van type 3 grenzen aan vijf andere cirkels en dragen elk dus  $\frac{2\pi}{3}$  bij aan de omtrek van de boom.

Cirkels van type 4 grenzen aan vier andere cirkels: een cirkel van type 3 en een cirkel van type 4, de cirkel daartussen, en een cirkel van type 5. Voor de eerste drie hiervan geldt hetzelfde als hierboven: de raakpunten liggen steeds op  $\frac{\pi}{3}$  van elkaar. De afstand tussen de raakpunten van de cirkels met type 4 en 5 is een kwart van de cirkelomtrek, ofwel  $\frac{\pi}{2}$ . In totaal ligt dus  $2 \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{6}$  van de omtrek van de cirkel aan de binnenkant van de boom. De overige  $\frac{5\pi}{6}$  ligt aan de buitenkant.

Bij de cirkels van type 5 maakt  $\frac{3}{4}$  van de omtrek van de cirkel deel uit van de omtrek van de boom. Dat gaat dus om  $\frac{3\pi}{2}$ .

Er zijn drie cirkels van type 1, twaalf cirkels van type 2 en twee cirkels van elk van de typen 3, 4 en 5. In totaal is de omtrek van de boom dus

$$3 \cdot \frac{5\pi}{3} + 12 \cdot \pi + 2 \cdot \frac{2\pi}{3} + 2 \cdot \frac{5\pi}{6} + 2 \cdot \frac{3\pi}{2} = \left( 5 + 12 + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + 3 \right) \cdot \pi = 23\pi.$$

### **Inzenders met de juiste oplossing**

Richard Boeken Kruger, Gé Groenewegen, Tanja Groenendaal (buiten mededinging), Hessel de Haan, Kenneth Halman, Mitchel van Heesch, Sjaak Kamerling, Jochem Koning, Hans Linders, Matthijs Schukking, Piet Smal, Ruud Stolwijk en Jacques Timmers

### **Winnaar van de cadeaubon**

Kenneth Halman