

EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERaar

Waar is de ruimtemeetkunde gebleven?!

Herkenning en heuristieken
bij meetkunde problemen

Draadmodellen bouwen

Onderzoekend leren met functies

Pracht en kracht van wiskunde

NR.5



Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

JAARGANG 99 MAART 2024

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 99 NR 5



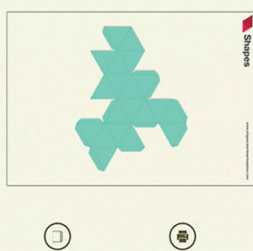
IN DIT NUMMER

WAAR IS
DE RUIMTEMEETKUNDE
GEBLEVEN?!

Henk Mertens

4

Print Preview



HERKENNING EN HEURISTIEKEN
BIJ MEETKUNDEPROBLEMEN

Ruben Loef

11

TEGELIJKERTIJD AANKOMEN
IN DE KORTST MOGELIJKE TIJD

Hans van Bemmelen

16

MATH BETWEEN US
FUNCTIONS FOR EVERYONE:
THREE CLASSIC TASKS
TO ROUND OFF
A (SCHOOL) YEAR

Jana Dean

22

Approximate volume in ml
1250 300



PRACHT EN KRACHT VAN WISKUNDE

DEEL 1: POINCARÉ, ARNOLD EN DE KAT-AFBEELDING

Paul Igodt

26

CIEAEM 74 MALMÖ

Carla de Wit
Milou De Block

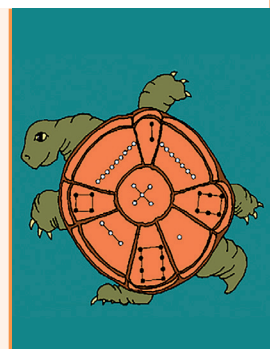
30



ROEST RUST (NIET)
MAGISCH ZO'N VIERKANT

Ab van der Roest

33



EEN SCHEVE PARABOOL

Jan Otto Kranenburg

34

PUZZEL

Esther Bod

39

Afbeelding voorkant: Lichtinstallatie For Paula Modersohn-Becker van Jenny Holzer. (2004). Paula Modersohn-Becker museum, Bremen.
Zie www.projects.jennyholzer.com/
Fotograaf: Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

WIS EN WAARACHTIG

40

SAMEN MEETKUNDIGE
DRAADMODELLEN BOUWEN
VERSLAG VAN EEN WORKSHOP
OP NWD 2023
Alik Palatnik

42



SERVICEPAGINA

46



Kort vooraf

Het openingsartikel van deze *Euclides* brengt ons eigenlijk al meteen in de stemming van de komende 100^e jaargang. Daarin gaan we gebeurtenissen, personen en fenomenen koppelen

aan ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs, eventueel geïllustreerd met teksten uit het omvangrijke *Euclides*-archief. *Waar is de ruimtemeetkunde gebleven?!* vraagt Henk Mertens zich af. Ik neem de proef op de som, tik 'ruimtemeetkunde' in de zoekmachine van het archief in en open de oudste *Euclides* waar het woord ruimtemeetkunde in voorkomt. Prachtig, ik beland in nummer 24-6 uit 1949, midden in een heftige discussie tussen prof. Freudenthal ('De beschrijvende meetkunde is een waardeloos vak, dat niet thuis hoort op een middelbare school') en dr. Beth ('Naar mijn mening handelt iemand, die ruimtemeetkunde onderwijst zonder beschrijvende meetkunde nodig te hebben, als iemand, die in de eerste klasse hbs planimetrie-onderwijs zou geven zonder figuren te tekenen.'). Bladzijden lang gaat deze felle discussie door. Toen ook al, in 1949.

Onze correspondent in de VS, Jana Dean, beschrijft een van haar mooiste lessen in de rubriek *Math between US*. Die had ze ook kunnen insturen naar mooisteles@nvw.nl. Want zoals je vast al in de NVvW-nieuwsbrief hebt gelezen: in het kader van ons eeuwfeest zijn we op zoek naar jouw mooiste les. Dit is de oproep uit de nieuwsbrief:

'Wij doen mooie en bijzondere dingen in de klas, proberen werkvormen uit en motiveren leerlingen. [...] Wat is het jammer dat buiten onze leerlingen niemand al die bijzondere, mooie lessen ziet. Daarom willen we jullie vragen om een mooiste les te beschrijven en naar ons op te sturen. Al deze mooie lessen gaan we bundelen in een *Euclides*-special. Zo kunnen we zelf laten zien wat voor mooie lessen wij geven en daarnaast kunnen we collega's inspireren om nog meer mooie lessen te geven.

Veel genoeg met *Euclides* 99-5!
Tom Goris

Waar is de ruimtemeetkunde gebleven?!

Na 22 jaar afwezigheid uit het wiskundeonderwijs stuitte ik bij mijn 'comeback' op de verdwijning van veel onderwerpen uit wiskunde A en B. Het meest opvallend: de ruimtemeetkunde bij vwo wiskunde B. Wie eigentijds onderwijs wil, moet zo nu en dan het programma aanpassen. Er rijst echter de vraag of elke wijziging ook een verbetering is. Is mijn gemis van de ruimtemeetkunde slechts nostalgie naar de jaren '90 of is met de afschaffing ervan het spreekwoordelijke kind met het badwater weggegooid?

A en B in de jaren '90 en 2023: een vergelijking

Wie wiskunde A en B eind jaren '90 vergelijkt met nu, ziet dat veel geschrapt of tot keuzeonderwerp geworden is.

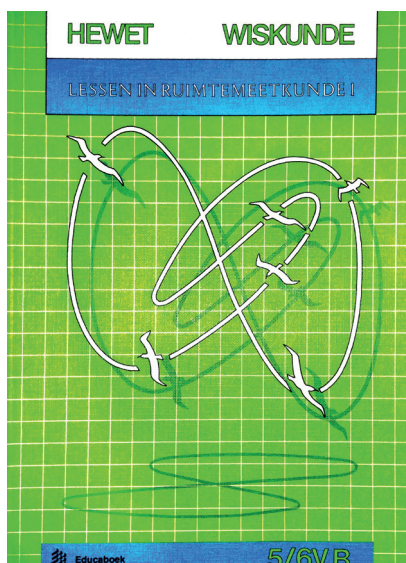
Bij A: grafentheorie, overgangsmatrices, lineair programmeren, trendbewegingen, het prooi-roofdier-diagram en de variantie. De ketting- product- en quotiëntregel

(formuleblad) en $\sigma = \sqrt{\frac{(x-\mu)^2}{n}}$ hoeven niet meer

gememoriseerd te worden en de stochast heet tegenwoordig 'toevalsvariabele.'

Bij B is verdwenen: functies met twee onafhankelijken, functieonderzoek, het functievoorschrift, differentiaalvergelijkingen, de substitutiemethode, partieel integreren (beide keuzeonderwerp) en de ruimtemeetkunde.

In de woorden van Shakespeare's Demetrius: *'Villain, what hast thou done!?'*



figuur 1 Hewet boek uit de begintijd van wiskunde B

Tijdsgeest en het onderwijs

Volgens Ernest^[1] weerspiegelen ontologie en epistemologie van het onderwijs de ideologieën en bijbehorende paradigma's van een maatschappij. Hij ziet in Engeland een tweedeling tussen 'elites' en 'working class.' In het onderwijs duidt hij de weerspiegeling hiervan in 'public' en 'private schools.'

De publieke scholen volgen de criteria van het GCSE (General Certificate of Secondary Education) die worden aangepast aan de arbeidsmarkt met een nadruk op technologie en toepassingen. De privéscholen daarentegen maken een eigen curriculum. Zij volgen de grondslagen van het klassiek humanisme waarin waarde wordt gehecht aan tradities, eruditie en specifiek voor de wiskunde: euclidische meetkunde en wiskunde zonder context. Interessant is hoe het Nederlands wiskundeonderwijs ook paradigmaweerspiegeling laat zien en welke invloed deze heeft gehad op de ruimtemeetkunde. In Nederland zien we vanaf de naoorlogse periode een sterke verschuiving in ideologie en paradigma's. In de jaren '80 en '90, de hoogtijdagen van de ruimtemeetkunde, bevond Nederland zich volgens Verhaeghe^[2] in de transitie van een sociaal-christelijke ideologie naar de huidige neoliberale.

Van sociaal-christelijk naar liberaal

In de sociaal-christelijke ideologie was er sprake van een verzuilde standenmaatschappij met een lage sociale mobiliteit. In het lager onderwijs doceerde de schoolmeester op positivistische wijze onder meer de memorisatie van alle hoofdsteden, de belangrijke jaartallen van de 80-jarige oorlog, hoofdrekken en schoonschrift. Hij verwees schoolverlaters naar theoretisch onderwijs (zoals de hbs of het gymnasium) of naar een vak- of huishoudschool (bijvoorbeeld de Ondergrondse Vakschool (in Limburg), mulo of mms). Op de hbs en het gymnasium

maakten vaak paters de dienst uit. In het onderwijs genoten kennis, eruditie en welbespraaktheid aanzien en stond autoriteit op een voetstuk. De maatschappij beschouwde de leraar als iemand die goed wist welke materie in een vormend schoolcurriculum thuishoorde. In het wiskunde-curriculum stonden rekenen, algebra en meetkunde centraal en waren inhoud en didactiek positivistisch.

In de neoliberale ideologie heersen paradigma's als meritisme, efficiëntie en de return-of-investment idee.

De sociale mobiliteit is aanzienlijk toegenomen en het aanzien van autoriteit daarentegen afgenomen.

Kijkend door de bril van de kennisgebieden van Van Der Heijden^[3] blijkt er een grote verschuiving te zijn van declaratieve en procedurele kennis naar conceptuele en metacognitieve kennis. Opmerkelijk aan het wiskunde-curriculum is dat het net als in Ernests Engeland een duidelijke weerspiegeling laat zien van paradigma's: efficiëntie en de return-of-investment idee. Deze zijn in het onderwijs samengebond in de term relevantie. De huidige tijdsgeest ziet graag wiskunde die relevant is voor vervolgoopleidingen en beroepen, hetgeen een zuiver argument lijkt.

Er kleeft echter een vergelijkbaar nadeel aan zowel de ideologische paradigma's aan hun onderwijsvariant. Bij efficiëntie en return-of-investment wordt wenselijkheid afgemeten aan financiële consequenties en algemeen nut. Zo is er flink gesneden in het cultureel bestel, want het 'levert niets op', moeten steunkousen in 9 minuten worden aangetrokken en is de financiering voor baanbrekend onderzoek bijna onmogelijk zonder resultaatgaranties. In het wiskundecurriculum zien we hetzelfde denken terug. Wanneer we het over relevantie hebben, dan bedoelen we eigenlijk meetbare obstructieve relevantie of met andere woorden: 'Wat je moet kennen voor je vervolgstudie zodat je niet vastloopt.' Het gevolg: analyse en statistiek komen op een voetstuk te staan. De eerdergenoemde lijst met andere onderwerpen, waaronder de ruimtemeetkunde, moet het onderspit delven.

Bloei en neergang van de ruimtemeetkunde

In de periode 1945-1969 was het motto in de wiskunde: 'Algebra is om vlijt aan te kweken, meetkunde is om het verstand te scherpen!'^[4] Met de Mammoetwet komt er in 1969 uitbreiding met meer analyse en combinatoriek. In de eindexamens van wiskunde II in de jaren '70 zien we een analytische ruimtemeetkunde zoals in de examen-opgave van figuur 2.

Gegeven zijn de punten $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $C(0,1,0)$ en $D(0,0,1)$. Deze punten zijn de hoekpunten van de kubus $OABC.DEFG$. Het midden van de ribbe BF is M .

- Een lijn / door O die in het vlak $x_3 = 0$ ligt, maakt gelijke hoeken met de lijnen CM en EM . Stel een vectorvoorstelling op van /
- Kies een punt van lijn AF . Bereken de coördinaten van K , als de oppervlakte van driehoek BGK minimaal is.
- Vlak V gaat door O en snijdt de lijnen DG , DM en DA achtereenvolgens in de punten P , Q en R . Vierhoek $PQRO$ is een parallellogram. Stel een vergelijking van het vlak V op.

figuur 2 (1974) VWO wiskunde II, 2^e tijdvak

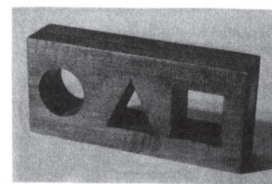
Onder invloed van Piagets constructionisme en sociaal-constructivisme en IOWO's RME (Freudenthal instituut) ontstond er eind jaren '70 en begin jaren '80 een nieuwe kijk op wiskundeonderwijs. Daarnaast was van invloed dat er in de jaren '80 werd geklaagd door een drietal technische universiteiten dat het ruimtelijk inzicht van de studenten onderontwikkeld was.^[5] Als gevolg van bovenstaande brak een gouden tijd voor een contextrijke ruimtemeetkunde aan en verschenen er HEWET- en HAWET-boekjes met opgaven als in figuur 3 en 4.

Extra opgave

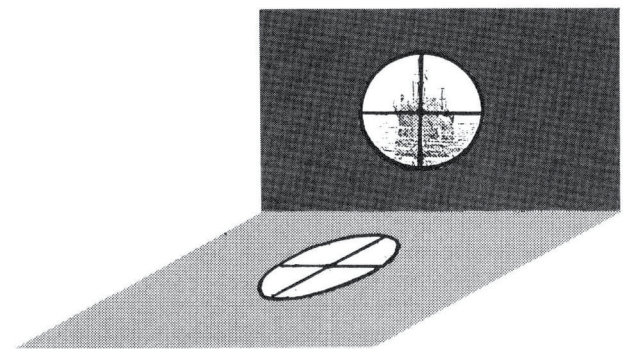
In een houten plank zijn drie gaten gemaakt in de vorm van een cirkel, een gelijkbenige driehoek en een vierkant.

De middellijn van de cirkel, de basis en hoogte van de driehoek en de zijde van het vierkant hebben alle dezelfde lengte.

Een kurk is zo gesneden dat hij in elk van de drie gaten past en elk gat geheel kan verduisteren. Hoe ziet zo'n kurk eruit?



figuur 3 Lessen in ruimtemeetkunde 1. OW & OC

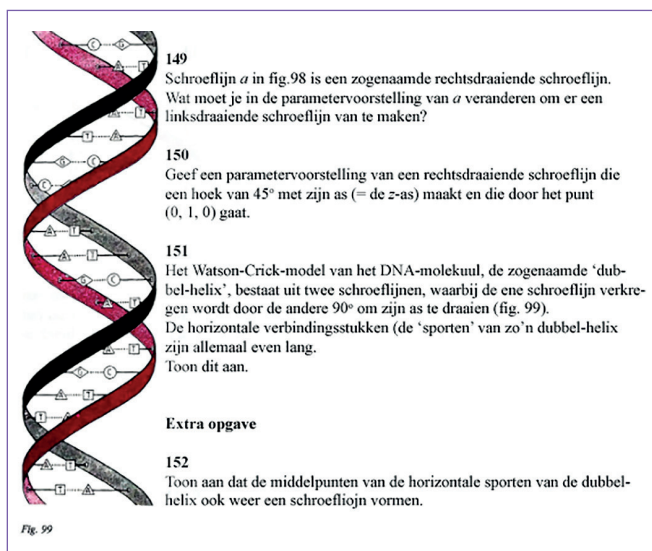


De schaduw van de 'patrijspoort' op de grond is een zgn. ellips. De hoogte van de zon is 30° , dat betekent dat de zonnestralen de aarde treffen onder een hoek van 30° .

- Hoe verhouden zich de lengten van de beide tralies in het schaduwbeeld?
- De schaduw van de patrijspoort kan ook een cirkel zijn! Hoe hoog moet de zon dan staan?

figuur 4 Lessen in ruimtemeetkunde 2. OW & OC

In de eerste HEWET-boekjes is er een afwisseling tussen context en pure wiskunde die zich, variërend per onderwerp, verhoudt als 1 : 8 tot 1 : 2. Een imposant scala aan onderwerpen passeert de revue waaronder: projecties, perspectief, ruimteconstructies, paralleliteiten, afstanden, doorsneden, krommen in de ruimte, spiegelingen, rotaties, raakvlakken, cilinder- en kegelsneden. Vanaf 1985 nam volgens Van Hoorn^[4] de contextwiskunde een vlucht. In HEWET *Lessen in ruimtemeetkunde 1 en 2* van Educaboek is de hoeveelheid context aanzienlijk toegenomen met opgaven als in figuur 5.



figuur 5 *Lessen in ruimte meetkunde 2. Educaboek*

Met de komst van wiskunde A en B in de jaren '80 maakte de ruimtemeetkunde een kwart(!) van het lesprogramma uit.

In de jaren '90 valt op dat de ruimtemeetkunde vooral op details is veranderd. Zo worden de termen 'ruimteconstructies' en 'scheluw' anders verwoord en krijgt de vectormeetkunde meer aandacht. In 2000, het laatste jaar van dit curriculum, treffen we helaas de laatste ruimtemeetkundige opgave in het wiskunde B-examen, zie figuur 6. Vanaf 2001 volgen de examens die het gevolg zijn van de woelige onderwijsontwikkelingen in de jaren 1998–2006.

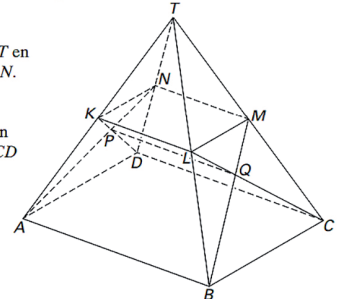
De jaren rond de millenniumwisseling

1998–2006 was een periode met veel vernieuwing in het wiskundeonderwijs. Het studiehuis en de tweede fase werden in recordtempo ingevoerd. Het vakkenpakket werd vervangen door een profielkeuze met wiskunde $A_{1,2}$ of $B_{1,2}$ en de docent werd tijdelijk een te raadplegen 'toezicht-houder' in het met een kort leven beschoren studiehuis.

Opgave 3

In figuur 2 hiernaast en in figuur 1 op de bijlage is de regelmatige vierzijdige piramide $TABCD$ getekend. De middens van de ribben AT , BT , CT en DT zijn achtereenvolgens K , L , M en N . P is het snijpunt van AN en DK . Q is het snijpunt van BM en CL . Gegeven is verder dat $AB = BC = 6$ en dat de afstand van T tot het vlak $ABCD$ ook gelijk is aan 6.

figuur 2



9 Bereken de inhoud van het lichaam $ABCD.KL$.

10 Arceer in figuur 2 van de bijlage de loodrechte projectie van het lichaam $KLMN.PQ$ op het grondvlak $ABCD$.

11 Bereken de afstand van de lijn MN tot het vlak ABT .

De bol met middelpunt T en straal TK snijdt de zijvlakken van de piramide volgens een aantal cirkelbogen.

12 Onderzoek door een berekening of de weg van K naar M via deze cirkelbogen langer is dan de weg via de cirkel door K , L en M .

figuur 6 (2000), VWO B, 1e tijdvak

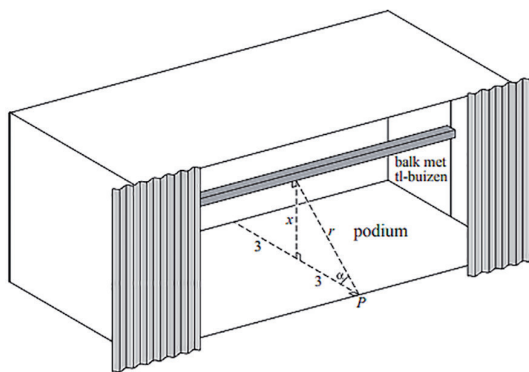
Terwijl de examenkandidaten van 2000 ruim $\frac{1}{3}$ van de lestijd ruimtemeetkunde hadden, was dit voor het cohort erna nagenoeg nul. Wat overleefde bleef in het domein $G(b)$ 'voortgezette meetkunde' waren aanzichten en eenvoudige doorsneden. De ruimtemeetkunde was de facto geschrapt wegens gebrek aan relevantie.

Rond de millenniumwisseling zoemde er een nieuwe gedachte door Nederland. In de periode 1998–2000 werd het hebben van een internetaansluiting gemeengoed en was een bepaald dedain over intellectualiteit in opmars. Niet alleen kon je op elke expertmening een meer bevalend alternatief van een andersdenkende beterveter googelen, je kon ook regelmatig in de media zinnen horen zoals: 'Je hoeft in de toekomst niets meer te kennen, je hoeft het alleen te kunnen opzoeken', '...graag in Jip-en-Janneke-taal...' of 'Een diploma is overgewaardeerd.' Mogelijk verklaart dit het besluit om een hoeveelheid kennis te vervangen door een formuleblad, met als gevolg het 'lieve-Maria'-protest.^[6] Het bleek dat wiskunde $B_{1,2}$ een matige voorbereiding op het toelatingsexamen van technische universiteiten was.^[7] Voortschrijdend inzicht leidde tot meer lestijd voor de analyse: de pleitbezorgers voor herinvoering van de ruimtemeetkunde kregen wederom nul op het rekest.

Incidenteel komt er daarna nog een examenopgave met 'iets ruimtelijks' voorbij, bijvoorbeeld het optimaliseren van de inhoud van een pizzadoos of de opgave over podiumbouw van figuur 7. Deze opgaves gaan echter niet meer over ruimtemeetkunde.

Een podium is 6 meter diep. Midden boven het podium hangt een balk met tl-buizen. De verlichtingssterkte op het podium is het kleinst aan de rand, bijvoorbeeld in punt P . De afstand van P tot de balk is r meter, de hoogte van de balk boven het podium is x meter en de hoek die het kortste verbindingslijnstuk van de balk en punt P met het podium maakt is α radialen. Zie figuur 1.

figuur 1



De verlichtingssterkte op het podium in punt P noemen we V (in lux). V is omgekeerd evenredig met r en evenredig met $\sin \alpha$. Dus $V = c \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin \alpha$, waarbij de evenredigheidsconstante c afhangt van het lichtvermogen van de tl-buizen. Voor deze balk met tl-buizen geldt: $c = 650$ (lux·m).

$$\text{Er geldt: } V = \frac{650x}{9+x^2}.$$

figuur 7 (2007) VWO,, 1e tijdvak

Wiskunde A, B, C en D

In 2010 werd de schoolwiskunde in het vwo verrijkt met de vakken wiskunde C en D. Wiskunde C werd in 2018 uitgebreid met 'vorm en ruimte' met daarin een kleine hoeveelheid ruimtemeetkunde.

Wiskunde D bevat iets meer ruimtemeetkunde. Uit een methodevergelijking volgt dat dit slechts een fractie is van de ruimtemeetkunde uit de jaren '90. Omdat weinig leerlingen Wiskunde C of D kiezen, komt het gros niet in aanraking met de ruimtemeetkunde.

Argumenten voor de terugkeer bij B

Mijn belangrijkste argument voor de terugkeer van ruimtemeetkunde is dat het een schatkamer is voor de ontwikkeling van mathematiseren, probleemoplossende vaardigheden en bovenal ruimtelijk inzicht. Om Freudenthal te citeren: "Mathematiseren is in eerste aanleg het ordenen van de werkelijkheid met mathematische middelen, expres voor dit doel geschapen – de ruimtelijke verschijnselen meetkundig en hetgeen we de revue laten passeren, rekenkundig."

Tallose onderzoekers waaronder Markey^[8], Möhring^[9] en Buckley^[10] toonden middels longitudinale onderzoeken aan dat ruimtemeetkunde een enorme booster is voor ruimtelijk

inzicht en dat dit causaal gecorreleerd is aan bèta-wetenschappelijk potentieel. Het vroegtijdig ontwikkelen heeft een grote positieve uitwerking op prestaties voor alle bèta-vervolgstudies. Wanneer ruimtelijk inzicht voor het zestiende levensjaar wordt ontwikkeld, is het effect bovendien extra groot. Ook is het volgens Maier^[11] onmisbaar voor een lange lijst aan bèta-technische beroepen. In tegenstelling tot Nederland is ruimtemeetkunde in de Duitstalige landen een vast onderdeel van de 'gymnasiale Oberstufe' en in Oostenrijk is ruimtelijk inzicht zelfs een vakoverstijgend doel. In het Vlaamse ASO vult de ruimtemeetkunde een volledige pagina van het curriculum. Het verklaart mogelijk dat Nederland ten opzichte van bovengenoemde burens in de periode 2003–2013 flink achterblijft in probleemoplossende vaardigheden, zie tabel 1.

Performance in problem solving compared with performance in mathematics, reading and science (difference between observed and expected performance, in score points)

Nederland	-15,9
België	-9,9
Duitsland	-12,5
Oostenrijk	-4,9
OECD gemiddelde	-7,5

tabel 1

Ruimtelijk inzicht is volgens Uttal en Cohen^[12] een sterke indicator voor succesvol STEM-onderwijs. Ruimtelijk inzicht blijkt onontbeerlijk wanneer de lesinhoud van bijzonder uitdagend niveau is of de leerlingen niet de kennis hebben om hun gebrek aan dit inzicht te omzeilen. Wie vindt dat STEM-onderwijs de toekomst heeft, kan niet om de ruimtemeetkunde heen!

Een ander argument is de pluriformiteit van wiskunde B. Het huidige programma heeft een overmaat aan (een bepaalde soort) analyse, vectoren en vlakke meetkunde. Het is beduidend minder prikkelend voor de bèta-creativiteit. Ook is er een grote mate van schoonheid met de afschaffing van ruimtemeetkunde verloren gegaan. Deze vakschoonheid is zowel intrinsieke motivatie voor de leerling^[13] als plicht aan de maatschappij. Verder is de huidige meetkunde een anachronisme. Zij draaft niet alleen door in klassieke richting zonder oog voor bijvoorbeeld fractals, projectieve of inverse meetkunde,

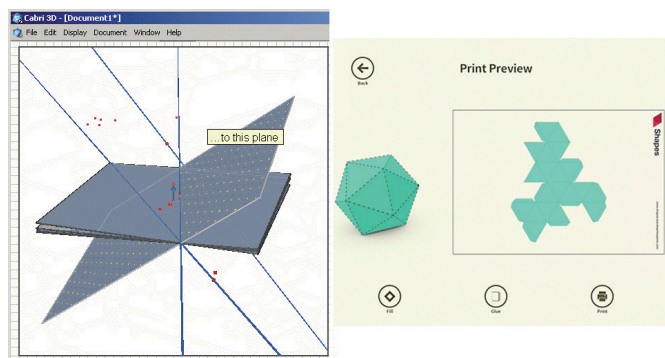
>

maar mist bovendien de brug naar de moderne tijd met technologieën zoals *spacial interfaces*, *virtual reality*, *additive printing* of *immersive projections*. Ook is de schoolmeetkunde zonder de derde dimensie simpelweg onvolkomen. Het supremum van de meetkunde is nu eenmaal de stereometrie: de wereld is niet plat!

Nieuwe 'tribride' ruimtemeetkunde

Klassiek. Vanwege de extra voordelen die ruimtemeetkunde onder het zestiende levensjaar oplevert, moet onderwijs al in de onderbouw starten met klassiek tekenen van aanzichten en ruimtelijke constructies met potlood en werkbladen. Wie schrijft en tekent, die onthoudt.^[14]

Voor de bovenbouw pleit ik voor gemoderniseerde leer-materialen uit de jaren '80 en '90 in het toekomstige B₁. *Ict.* Parallel aan het klassieke deel zouden leerlingen opdrachten met ict-middelen moeten maken. In tegenstelling tot de jaren '90 zijn er nu telefoonapps en browser-applicaties die een computerlokaal overbodig maken. Een geschikte Android/Apple compliant app is Shapes-3D, waarbij ruimtemeetkundige constructies kunnen worden gedraaid en uitgeslagen. Verder is Cabri-3D een meer uitgebreide app, die wat meer kennis vergt dan Shape-3D en geschikter is voor de bovenbouw, zie figuur 8.

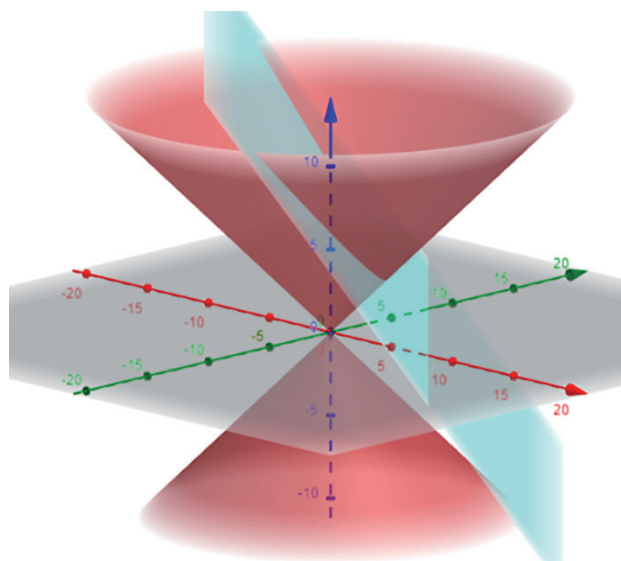


figuur 8

Daarnaast is Geogebra-3D buitengewoon geschikt wanneer het om analytische meetkunde of vectoren gaat. Figuur 9 toont $k: x^2 + y^2 - z^2 = 0 \cap v: x + y + z = a$, waarbij parameter a met een schuifknop kan worden gemanipuleerd.

Ook kunnen in Geogebra-3D interactieve werkbladen met invulvragen worden gemaakt. Met CLASS-VR en AR is het mogelijk om ruimtelijke objecten in virtual en augmented reality te bewerken ten bate van *embodiment* en *haptisch* leren.

Ontwerpen. Ten derde moet er een koppeling komen met



figuur 9

ontwerpen in een STEM/STEAM of O&O context, te toetsen middels een portfolio (zie toetsing).

Hybride toetsing

Summatief toetsen van ruimtemeetkunde vraagt om een andere toetsing dan die uit de jaren '90. Denkende vanuit de taxonomie (toetspiramide) van De Lange moeten de niveaus 'reproducen', 'wiskundig gereedschap kiezen' en 'generaliseren' zich in een schriftelijke toets verhouden als 3 : 2 : 1. Ruimtemeetkunde opgaven hebben echter vaak een probleemoplossend karakter en bevinden zich daardoor al gauw in de bovenste twee niveaus. Wie vanuit taxonomieën als RTTI, Bloom of Bloom-Anderson kijkt, stuit op dezelfde problematiek. Het reproductieve is bij ruimtelijk inzicht vaak een intern proces dat niet goed vast te leggen is op schrift, hetgeen validiteit bemoeilijkt. Het behoort, in de indeling van Cito-toets grondlegger Adriaan de Groot, tot de onderwijsdoelstellingen van het niet-meetbare type.

Daarnaast vraagt *constructive alignment*^[15] voor een toetsing die in het verlengde ligt van de 'tribride' didactiek. Daarom pleit ik voor hybride toetsing waarbij het klassieke deel schriftelijk getoetst wordt en het ontwerpen en de ict gebundeld worden in een portfoliobeoordeling. Bij dit laatste moeten er voor optimale betrouwbaarheid semi open en gesloten opdrachten worden ontworpen, dan wel onttrokken aan de omgeving (O&O).

Enkele voorbeelden:

1 semi open

Ontwerp een papieren koffiebeker in de vorm van een afgeknotte kegel. Er moet 250 ml koffie in kunnen en ruimte voor 15 mm melkschuim.

2 gesloten

Ontwerp met Cabri-3D een wenteltrap voor een etage van 3 meter. De afstand tussen de treden is 25 cm. Gebruik

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(at) \\ \sin(at) \\ t \end{pmatrix}$$



3 semi open

Herontwerp de kast in figuur 10 met twee schuine, niet parallelle elementen en maak een aanzichtontekening met alle maten.

figuur 10

4 semi open

Ontwerp een afbeelding voor een *immersive projection* op de voorgevel van Slot Loevestein, zie figuur 11.



figuur 11

5 open

Maak een vrij ontwerp waarin je gebruik maakt van de stelling van Dandelin of cilindereigenschappen.

Tot slot

Mijn conclusie is dat er met de verdwijning van de ruimte-meetkunde een ware parel uit de kroon der schoolwiskunde verloren is gegaan. Een herinvoering komt ten goede aan inzicht, bèta-creatief denken, resultaten bij technische vervolgstudies en beroepen, de eigentijdsheid van de schoolmeetkunde, succes bij STEM-onderwijs, de pluriformiteit van het vak en de beleving van de schoonheid van de wiskunde. Het in ere herstellen van de ruimte-meetkunde is slechts een kwestie van de knoop doorhakken en de mouwen opstropen. Waar wachten we nog op?

Noten

- [1] Ernest, P.(1991). *The philosophy of mathematics education*. Routledge and Falmer.
- [2] Verhaeghe, P. (2015), *Autoriteit*. De Bezige Bij.
- [3] Van der Heijden, B. (2002). Prerequisites to guarantee life-long employment. *Personnel Review*, 31(1), 44-61.
- [4] Hoorn, M. van (2007). *Het wiskundeonderwijs in Nederland*. Rijksuniversiteit Groningen.
- [5] Kindt, M. (2008). *Meetkunde op het VWO*. WiskundeE-brief, 456.
- [6] Van Mill, J. (2006). *Lieve Maria*. NAW, 5/7, 1, 2-3.
- [7] Craats, J. van de (2007). *Contexten en eindexamens*. Open source UVA.
- [8] Markey, S. (2009). *The relationship between visual-spatial reasoning ability and math and geometry problem-solving*. American International College ProQuest Dissertations Publishing.
- [9] Möhring, W. (2021). *Developmental trajectories of children's spatial skills: Influencing variables and associations with later mathematical thinking*. Elsevier Science Direct.
- [10] Buckley, J. et.al. (2019). *Investigating the use of spatial reasoning strategies in geometric problem solving*. *International Journal of Technology and Design Education*, 29, 341-362.
- [11] Maier, P.H. (1999). *Räumliches Vorstellungsvermögen*. Donauwörth Auer Verlag.
- [12] Uttal, D., & Cohen. C. (2012). Spatial thinking and STEM education: When, why, and how? *Psychology of Learning and Motivation*, 57(1), 147-181.
- [13] Frans, L. (z.d.). *Moet er in de wiskundendidactiek meer aandacht liggen op de schoonheid van wiskunde?*
- [14] Wijngaarden, M. (2019). Wil je iets onthouden? Pak een pen en schrijf het op. *EenVandaag*.
- [15] Biggs, J. (1996). Enhancing teaching through constructive alignment. *Higher Education*, 32, 347-364.

Over de auteur

Henk Mertens studeerde wiskunde, directie, compositie en klarinet. Hij is als dirigent verbonden aan een viertal orkesten, doceert wiskunde aan het VAVO Noord te Venlo en volgt een master aan Fontys Hogeschool Sittard. E-mailadres: henkmertens@hotmail.com

Welke grafische rekenmachine komt op de lijst voor de bovenbouw?



Deze grafische rekenmachines zijn door het CvTE toegestaan bij de wiskunde-examens havo t/m 2025 en vwo t/m 2026:

- » TI-84 Plus CE-T /
TI-84 Plus CE-T Python Edition
- » TI-Nspire™ CX II-T /
TI-Nspire™ CX II-T CAS
- » TI-Nspire™ CX

Door CvTE
toegestaan
bij examens
2024-2026

Goedgekeurd



Grafische rekenmachines:
gemaakt voor in het klaslokaal

bit.ly/3UhFr4K

education.ti.com/nl

Herkenning en heuristieken bij meetkundeproblemen

Leerlingen moeten in meetkundelessen standaardopgaven leren oplossen, maar ook niet-standaardopgaven. Zij hebben dan een probleemaanpak nodig. We hebben onderzocht hoe het model van probleemaanpak via herkenning en heuristieken hierbij gebruikt kan worden ter ondersteuning. Met dit model zetten leerlingen succesvolle stappen in hun probleemaanpak.

Inleiding

Hoewel wiskundige denkactiviteiten onderdeel zijn van de eindtermen, vinden leerlingen het lastig om niet-standaardopgaven op te lossen. Ze weten vaak niet hoe te beginnen. Leerlingen maken dan vaak opmerkingen als 'Ik snap het niet' of 'Ik weet niet hoe ik moet beginnen'. Wij, als experts, hebben daarentegen verschillende methodes tot onze beschikking om dit soort problemen aan te pakken. Hoe kunnen we deze expert-methodes leerlingen aanleren? In mijn lessen heb ik hiervoor een methode onderzocht op basis van het 'probleemaanpak via herkenning en heuristieken' (PAHH) model van o.a. Peter Kop^{[1],[2]} en Stefan Pouwelse^[3]. Het doel van deze studie was om te onderzoeken hoe dit model gebruikt kan worden om leerlingen te helpen bij het oplossen van lastigere meetkundige problemen, behorende bij *Getal & Ruimte* 12^e editie, vwo wiskunde B, hoofdstuk 7.

PAHH-model

In de praktijk worden al verschillende methodes toegepast om leerlingen te ondersteunen bij het oplossen van wiskundige problemen. Voorbeelden hiervan zijn heuristiekbomen^[4] en de meta-kaart.^[5] In het PAHH-model wordt probleemaanpak beschreven aan de hand van herkenning ('wat herkent de leerling al?') en heuristieken ('welke strategieën kan de leerling vervolgens gebruiken om verder te komen?'). In dit model wordt gebruik gemaakt van verschillende herkenningsniveaus: van complete herkenning, via opsplitsen in (standaard)deelp Problemen, tot geen herkenning. Per herkenningsniveau worden dan mogelijke heuristieken beschreven. Als leerlingen weinig tot niets herkennen, zal gebruik gemaakt moeten worden van algemene heuristieken, zoals bijvoorbeeld beschreven door Schoenfeld en Polya.^[6] Denk hierbij aan het herformuleren van de vraag, ordenen van beschikbare

gegevens of het maken van een tekening. Wanneer leerlingen het probleem deels of helemaal herkennen uit eerdere situaties, kunnen ze de kennis uit deze situaties gebruiken om het huidige probleem op te lossen.

Een belangrijk begrip is hier de standaardopgave (of probleemfamilie). Dit is een verzameling van soortgelijke problemen, die de leerling eerder gezien heeft en zou moeten beheersen. In terminologie van het RTTI-model, gaat het dan om R- en T1-opgaven. De oplostrategie die eerder gebruikt is, is wellicht ook toepasbaar op het huidige probleem.

Het PAHH-model is tot nog toe voornamelijk gebruikt om oplosstrategieën te analyseren^{[1],[2]}. Incidenteel is dit model ook ingezet om onderwijs te ontwerpen, bijvoorbeeld in een examentraining. In dit onderzoek hebben we leerlingen meetkundige problemen laten oplossen met een hulppkaart op basis van het PAHH-model. De hulppkaart bevat een kolom met verschillende herkenningsniveaus met daarbij heuristieken die gebruikt zouden kunnen worden, zie figuur 1 op de volgende pagina.

Een belangrijk element in deze aanpak is een repertoire van standaardopgaven die leerlingen moeten leren. Daarvoor is bij het doorwerken van het hoofdstuk over meetkunde met coördinaten (hoofdstuk 7 van *Getal & Ruimte* vwo Wiskunde B), samen met de leerlingen, een lijst met standaardopgaven gemaakt. Nadat het hoofdstuk volledig was behandeld, hebben we de lijst nogmaals besproken en, waar nodig, aangepast. Door de lijst samen met de leerlingen te maken, werden leerlingen gedwongen om zelf na te denken over het ordenen van de leerstof. In figuur 2 zie je de aldus verkregen lijst.

Figuur 1 en 2 samen vormden de hulppkaart die leerlingen kregen bij het maken van niet-standaardopgaven in de >

Niveau	Probleemherkenning (In hoeverre herken je de opgave?)	Aanpak (Welke vragen kun je jezelf en elkaar stellen?)
A	Je ziet gelijk hoe het probleem opgelost moet worden.	Los het probleem op!
B	Je herkent een standaardopgave in het probleem, maar je ziet niet gelijk hoe je het hele probleem kunt oplossen.	Kun je de (aangepaste) strategie voor de standaardopgave hier toepassen?
C	Je herkent verschillende onderdelen van het probleem, maar niet het gehele probleem. Je kunt het probleem opdelen in kleinere problemen.	Aan welke standaardopgaven doen de deelproblemen je denken? Hoe kun je de verschillende deelproblemen apart oplossen? Hoe kun je de deelproblemen combineren tot een eindoplossing?
D	Je herkent een paar kenmerken van het probleem.	Welke kenmerken herken je? Aan welke standaardopgave(n) doen deze kenmerken je denken? Of aan welke bekende theorie?
E	Je herkent bijna niets.	Stel jezelf of elkaar algemene vragen over het probleem. Bijvoorbeeld: Wat wordt er precies gevraagd? Hoe kan je de opgave anders formuleren? Welke informatie is er gegeven? Kun je een schets maken? Welke speciale situaties kun je bekijken?

figuur 1 Voorkant hulpaart met herkenningsniveaus en heuristieken

STANDAARDOPGAVEN

afstand tussen twee punten

Stelling van Pythagoras

lijn door punt

$k: y = ax + b$

midden van een lijnstuk bepalen

$M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$

richtingscoëfficiënt van loodrechte lijn

$rc_l \cdot rc_k = -1$

hoek tussen twee lijnen

$\tan(\alpha) = rc_k$
 $\tan(\beta) = rc_l$
 $\varphi = \alpha - \beta$

afstand tussen punt en lijn

$d(k, P) = \frac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$k: ax + by = c$

zijn lijnen l en k evenwijdig, snijden of hetzelfde?

vorm	$y = ax + b$
evenwijdig	$a_k = a_l; b_k \neq b_l$
vallen samen	$a_k = a_l; b_k = b_l$
snijden	$a_k \neq a_l$

opstellen cirkelvergelijking

$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$

omschrijven cirkelvergelijking in andere vorm

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

$$= r^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$\rightarrow$: haakjes wegwerken
 $\leftarrow$: kwadraat afsplitsen

afstand tussen twee cirkels

$d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2$

raaklijn door punt A op cirkel

$$k \perp AM$$

raaklijn door punt A buiten cirkel

1. parametervergelijking van lijn k door A
2. $d(k, M) = r$

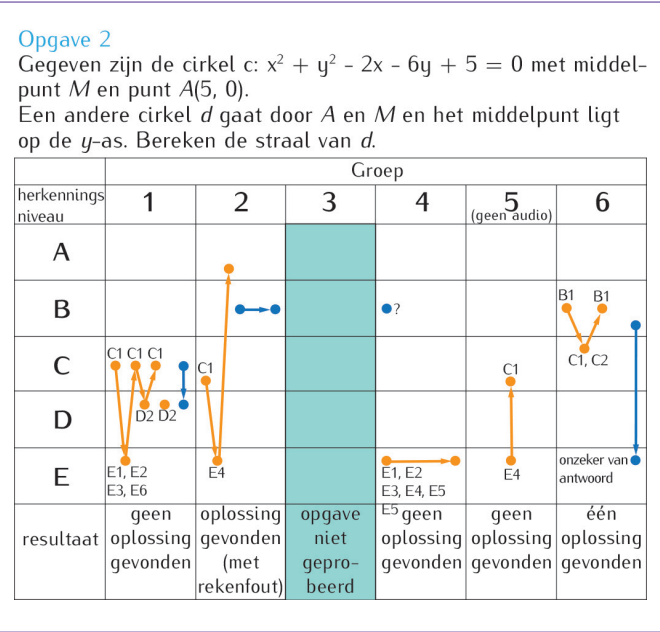
figuur 2 Achterkant hulpaart met standaardopgaven bij Getal & Ruimte 12e editie, vwo wiskunde B, hoofdstuk 7.

interventieles na het doorwerken van het reguliere hoofdstuk. De leerlingen gingen in tweetallen en drietallen aan de slag met een aantal niet-standaardopgaven die gebaseerd waren op de gemengde opgaven bij dit hoofdstuk. Een voorbeeld is te vinden in figuur 3.

De leerlingen hadden de opdracht meegekregen om hardop te overleggen en bij iedere opgave aan te geven welke herkenningsniveaus ze doorliepen. Op basis van audio-opnames en ingeleverd werk is geanalyseerd hoe de leerlingen het aangereikte hulpmiddel gebruikt hebben en of dit het beoogde resultaat had.

Gebruik hulpkaart

De leerlingen hebben per vraag zelf aangegeven welke herkenningsniveaus ze hebben doorlopen. Op basis van ingeleverd werk en geluidsopnamen is ook door mij bepaald welke herkenningsniveaus doorlopen werden en welke heuristieken leerlingen gebruikten om van het ene naar het andere herkenningsniveau te gaan. Een voorbeeld hiervan staat in figuur 3. In blauw de route die leerlingen zelf hebben aangegeven en in oranje de route op basis van audio-opnames en uitwerkingen. De gebruikte heuristieken zijn ook aangegeven. Hiervoor zijn de heuristieken gecodeerd volgens tabel 1.



figuur 3 Voorbeeld van een gebruikte opgave (boven) en de daar bijbehorende oplosstrategieën per groep leerlingen (onder).

Herkenningsniveau	Heuristieken	Codering
gehele herkenning, de oplossing wordt direct herkend		
een standaardopgave wordt herkend; de oplossing is niet direct concreet aanwezig maar een vaste oplossingswijze is bekend	(Aangepaste) strategie voor de standaardopgave wordt toegepast.	B1
het probleem kan opgedeeld worden in een aantal familieproblemen	(Aangepaste) strategie voor de standaardopgave wordt toegepast op deelprobleem.	C1
	Deelproblemen worden gecombineerd tot eindoplossing.	C2
enkel een (relevant) kenmerk van het probleem wordt herkend	Op basis van de kenmerken wordt een deelprobleem herkend.	D1
	Op basis van de kenmerken wordt al eerder bekende theorie of vaardigheid herkend.	D2
er is geen herkenning, maar strategisch zoeken wordt gestart	Er wordt benoemd wat er precies gevraagd wordt.	E1
	Probleem wordt anders geformuleerd.	E2
	Beschikbare informatie wordt benoemd.	E3
	Er wordt een schets gemaakt.	E4
	Er worden speciale situaties bekeken.	E5
	Er wordt gezocht in lijst met standaardopgaven.	E6

tabel 1 Gebruikte codering in de oplosroutes van leerlingen

Als eerste viel op dat de herkenningsniveaus en daarbij behorende heuristieken door de leerlingen maar beperkt gebruikt zijn. De leerlingen geven zelf ook aan vooral de standaardopgaven gebruikt te hebben. De initiële inschattingen van het herkenningsniveau door de leerlingen komt goed overeen met inschalingen n.a.v. hardop denken protocollen. De leerlingen zijn zich echter niet bewust van hun bewegingen tijdens het oplossen van een probleem, zoals getoond in figuur 3. Na het bepalen van het herkenningsniveau, maakten leerlingen slechts sporadisch bewust gebruik van de daarbij behorende heuristieken, zelfs niet als zij echt vastliepen bij een opgave. Dit laatste lijkt in tegenspraak met figuur 3, waarin te zien is dat aangeboden heuristieken veelvuldig gebruikt worden. Het inzetten van deze heuristieken gebeurde echter onbewust, zonder bewust gebruik te maken van het hulpmiddel. De leerlingen maken bijvoorbeeld een tekening, herformuleren de opgave of verwijzen naar een opgave die ze eerder hebben gemaakt. De lijst met standaardopgaven op de andere kant, wordt door alle leerlingen gebruikt. De manier waarop dit gebeurde is afhankelijk van twee zaken: het herkenningsniveau bij de betreffende opgave en de beheersing van de betreffende standaardopgave. Hieronder wordt per initieel herkenningsniveau bekeken hoe de lijst met standaardopgaven gebruikt werd.

Hoog initieel herkenningsniveau

De leerlingen herkennen het probleem gelijk (grotendeels), volgens herkenningsniveau A en B op de hulpkaart. De leerlingen weten welke oplosstrategie gebruikt moet worden en passen deze toe. In alle gevallen wordt uiteindelijk een (deel van de) oplossing van het probleem gevonden. Het hulpmiddel wordt hooguit gebruikt als geheugensteuntje, ter bevestiging of om de juiste formule te vinden. Zo herkenden de leerlingen vaak dat de afstandsformule gebruikt moet worden, maar wordt de precieze formule opgezocht op het hulpmiddel. Het zou kunnen dat in deze situaties het probleem ook zonder hulpkaart zou zijn opgelost.

Middelmatig initieel herkenningsniveau

De leerlingen herkennen deelproblemen (herkenningsniveau C op de hulpkaart). Opvallend is dat de leerlingen in vrijwel alle gevallen, na initiële herkenning op herkenningsniveau C, minstens één herkenningsniveau omlaag gaan tijdens het oplosproces. De herkenning van het (deel)probleem lijkt er te zijn, maar leerlingen lopen vast op de uitvoering ('We weten wat we moeten doen, maar niet hoe.' of 'We kunnen dit allemaal berekenen, maar ik

kan de touwtjes niet aan elkaar knopen.'). Een mogelijke verklaring hiervoor is dat de standaardopgaven nog onvoldoende bekend zijn bij de leerlingen. De leerlingen herkennen vaak een (deel)probleem als een standaardopgave. De manier van oplossen lijkt echter niet bekend. De leerlingen gebruiken de hulpkaart hierbij als catalogus om te zoeken in de standaardopgaven om tot de juiste oplossing te komen. Aangezien bij het maken van de hulpkaart ervan uit was gegaan dat standaardopgaven bekend zouden moeten zijn, zijn de standaardopgaven slechts heel beknopt weergegeven. De aanname dat standaardopgaven bekend waren bij de leerlingen, is dus een punt van aandacht.

Laag initieel herkenningsniveau

De leerling herkent hooguit wat kenmerken van het probleem (herkenningsniveau D of E op de hulpkaart). Een veel gebruikte strategie is om dan in de lijst met standaardopgaven op zoek te gaan naar een standaardopgave die bij het probleem past. Alleen als een groep al herkenningsniveau D had, lukte het om m.b.v. de standaardopgaven van het herkennen van enkele kenmerken naar het herkennen van een (deel)probleem te gaan. Eerder gebruikte strategieën voor het oplossen van dit deelprobleem werden dan gebruikt om richting een (deel van de) oplossing van het hele probleem te gaan. Uiteindelijk lukt het een aantal leerlingen op deze manier ook een oplossing te vinden.

Wanneer het initieel herkenningsniveau lager is (herkenningsniveau E), leidt zoeken in de lijst met standaardopgaven geen enkele keer tot stijging in herkenningsniveau. De leerlingen kunnen dan geen verband leggen tussen de gegeven opgave en de standaardopgaven. Algemene heuristieken zouden hier waarschijnlijk succesvoller zijn. Het zou kunnen zijn dat leerlingen 'vergeten' algemene heuristieken te gebruiken, doordat zij in de lijst met standaardopgaven gaan zoeken. In dat geval zal de hier onderzochte methode eerder een negatief dan een positief effect hebben.

Conclusie

Er is onderzocht hoe het PAHH-model ingezet kan worden bij het oplossen van wiskundige problemen. Hiertoe is een hulpkaart gemaakt met aan de ene zijde een lijst met herkenningsniveaus en daarbij behorende heuristieken. Aan de andere zijde stond een lijst met standaardopgaven. De leerlingen gebruikten verschillende aangeboden heuristieken, maar niet altijd op basis van het hulpmiddel. De lijst met standaardopgaven werd veelvuldig gebruikt.

De manier van gebruik van de standaardopgaven was afhankelijk van het herkenningsniveau en de beheersing van de standaardopgaven. Bij goede beheersing van de standaardopgaven lukte het leerlingen (een deel van) de meetkundeproblemen op te lossen. Als de standaardopgaven minder goed bekend waren, werd zoeken door de lijst met standaardopgaven als extra heuristiek gebruikt. Dit was alleen succesvol bij een hoger herkenningsniveau.

De leerlingen zijn positief over de methode. Ze vinden het hulpmiddel overzichtelijk en in de meeste gevallen helpt het om stappen te zetten richting de oplossing van een meetkundig probleem. De interventie in huidige opzet heeft daarom een positieve invloed gehad.

Reflectie

Hoewel leerlingen en ikzelf positief zijn over de gebruikte methode, is er natuurlijk ruimte voor verbeteringen.

De lijst met standaardopgaven werd samen met leerlingen samengesteld. Het uitgangspunt was dat de leerlingen de standaardopgaven grotendeels beheersten. Daarom waren deze ook zeer beknopt weergegeven. Toch beheerste een deel van de leerlingen deze standaardopgaven niet. Ook bevatte de lijst geen standaardopgaven over eerdere hoofdstukken, waardoor leerlingen vastliepen op het niet ophalen van voorkennis. Een grotere lijst met verder uitgewerkte standaardopgaven en meer tijd en aandacht voor oplossen van deze opgaven had wellicht beter gewerkt.

Daarnaast hadden ten tijde van het onderzoek leerlingen nog weinig ervaring met het gebruik van de PAHH-methode bij het oplossen van problemen. De hulpkaart werd nu pas tijdens de interventieles uitgereikt. Het gebruik van herkenningsniveaus en heuristieken zou echter niet beperkt moeten worden tot één of meerdere lessen. Dit is iets waar leerlingen altijd profijt van kunnen hebben. Tijdens reguliere lessen kunnen leerlingen ook gewezen worden op wat ze al herkennen. De voorzijde van de hulpkaart zou de leerling altijd beschikbaar kunnen hebben.

Met extra training in het gebruik van de methode en met bovenstaande aanpassingen verwacht ik dat leerlingen nog succesvoller zullen zijn in probleemoplossen.^[7]

Noten

- [1] Kop, P. M. G. M., Janssen, F. J. J. M., Drijvers, P. H. M., & Driel, J. H. van (2021). Promoting insight into algebraic formulas through graphing by hand. *Mathematical Thinking and Learning*, 23(2), 125–144. <https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1765078>
- [2] Kop, P. M. G. M., Janssen, F. J. J. M., Drijvers, P. H. M., Veenman, M. V. J., & Driel, J. H. van. (2015). Identifying a framework for graphing formulas from expert strategies. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 121–134. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.002>
- [3] Pouwelse, S., Janssen, F., & Kop, P. (2022). *Teaching integral calculus using recognition and heuristic search*.
- [4] Bos, R., & van den Bogaart, T. (2022). Heuristic Trees as a Digital Tool to Foster Compression and Decompression in Problem-Solving. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 8(2), 157–182. <https://doi.org/10.1007/s40751-022-00101-6>
- [5] Ernst-Militaru, R., Ghysels, J., & Nijhof, P. (2017). The META-method: *An experimental evaluation of a three-sided didactical approach to reinforce metacognition among secondary school students*. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.25358.46409>
- [6] Polya, G., & Conway, J. H. (2004). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press. https://books.google.nl/books?id=z_hsbu9kyQQC
- [7] Het volledige onderzoek is te lezen in het repository van de Universiteit Leiden: Loef, R. (2023). *Herkenning en heuristieken bij complexe meetkunde problemen*. Universiteit Leiden (ICLON).

Over de auteur

Ruben Loef heeft jarenlang in de computerchip-industrie gewerkt. In 2021 heeft hij de overstap naar het onderwijs gemaakt als docent wiskunde. Dit onderzoek maakte onderdeel uit van zijn master Leraar Voorbereidend Hoger Onderwijs in de Bètawetenschappen.
E-mailadres: ruben@educatievespellen.nl

Tegelijkertijd aankomen in de kortst mogelijke tijd

Als drie meisjes twee kilometer willen afleggen van school naar de stad, maar ze hebben slechts één fiets, hoe kunnen ze er dan voor zorgen dat ze zo snel mogelijk gezellig samen aankomen? Hoe snel zijn ze er met één brommer? En met een groter aantal meisjes, wat is dan de minimumtijd?

Nee, er kan niemand op het stuur en er rijdt geen bus.

Een plan is dat A eerst met B achterop gaat fietsen, terwijl C wandelt. Op een bepaald punt zet A haar passagier B af en rijdt ze terug om C te halen. B wandelt verder en het is de bedoeling dat zij uiteindelijk tegelijk aankomt met de fietsende A, die nu C achterop heeft.

Flash forward: Als de wandelsnelheid v km/h is, het rijden gaat α keer zo snel als het wandelen, en het aantal personen bedraagt n , dan komen ze allemaal tegelijk aan

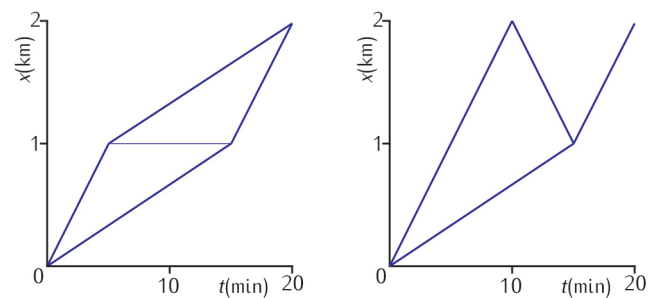
$$\text{in } t = \frac{2}{\alpha v} \left(\alpha - \frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{2n+\alpha-3} \right) \text{ uur.}$$

Dit behoeft toelichting. Voor mij duurde het uren vol rekenfoutjes en correcties voor ik hier was. Eigenlijk kostte het ruim twintig jaar. Deze opmerking is een uitdaging aan de lezer om dit nu even op een kladblaadje uit te rekenen. Wees gerust, de afleiding volgt.

Eerst een zak aardappelen

Dit verhaal kent een lange geschiedenis.^{[1], [2]} In 2001 vertelde Anne van Streun in zijn oratie 'Het denken bevorderen' over Heit en Kees die in de hongerwinter 's nachts een zak aardappelen vervoerden van het plateland naar Leeuwarden. De zak en de twee personen pasten niet samen op hun ene fiets. Heit vertrok fietsend van de boerderij met de kostbare vracht achterop, Kees wandelde. Heit liet halverwege de fiets met lading achter, en liep verder. Kees kwam bij de fiets en fietste verder. Ze kwamen tegelijk aan.

Die oratie blijft een aanrader, er staat veel in over wat zinvol onderwijs is. Er staat ook een handige tip in voor het vervoersprobleem: maak een grafische voorstelling. Ook stelt Van Streun een extra vraag: Helpt het als Heit de zak wegbrengt en daarna terugfietst om Kees te halen?



figuur 1

In de grafieken van figuur 1 zie je links het oorspronkelijke plan en rechts het wegbreng-en-terugfietsscenario, waarbij als wandelsnelheid 4 km/h is genomen en als fietssnelheid 12 km/h, net als in de oratie.

Als referentiewaarde de uitkomst van het allersimpelste plan: gewoon het hele eind samen lopen. Dan doe je dertig minuten over twee kilometer. Als Heit de fiets halverwege laat staan, dan leggen beide personen de helft van de afstand wandelend af en de helft fietsend. Met de gegeven getallen komen ze na twintig minuten tegelijkertijd aan.

Gegeneraliseerd: met wandelsnelheid v en fietssnelheid αv ,

$$\text{is de tijd } t = \frac{1}{v} + \frac{1}{\alpha v} = \frac{\alpha+1}{\alpha v} \text{ uur.}$$

Een natuurkundige kijkt naar de limietgevallen: voor $\alpha = 1$ is de tijd de dertig minuten die bij wandelen hoort, voor $\alpha = \infty$ is de uitkomst 15 minuten. Dat is puur wandeltijd, elke persoon legt de andere helft van de afstand in tijd nul minuten af.

Nu het andere scenario. Als Heit eerst de zak aardappelen wegbrengt, dan kost dat $t_1 = \frac{2}{\alpha v}$ uur.

Hoe groot is t_2 , de tijd van het terugfietsen? Op het moment dat Heit begint aan die terugweg, is Kees $\frac{2}{\alpha}$ kilometer ver. Kees' positie wordt gegeven door

$$x_K = \frac{2}{\alpha} + v \cdot t_2. \text{ De positie van Heit is } x_H = 2 - \alpha v \cdot t_2.$$

Ze ontmoeten elkaar als de posities aan elkaar gelijk zijn. Het oplossen van de lineaire vergelijking die je dan krijgt, levert $t_2 = \frac{2\alpha - 2}{\alpha(\alpha + 1)v}$.

Uiteindelijk fietst Heit met Kees achterop naar het eindpunt. Dat is dezelfde afstand als het stuk dat hij terug had gefietst, dus de bijbehorende tijd is gelijk aan t_2 . Merk op dat er allerlei aannames in het model zitten, zoals dat fietsen even snel gaat met Kees achterop, de zak aardappelen, of niets. Omkeren en achterop springen gaat in het model bliksemsnel.

De drie gedeeltes van de tocht samen duren

$$t = \frac{2}{\alpha v} \left(\frac{3\alpha - 1}{\alpha + 1} \right). \text{ De bijzondere waarden voor } \alpha \text{ leveren}$$

weer logische conclusies op: $\alpha = 1$ komt ook nu neer op de hele weg samen wandelen, en de uitkomst is dan $\frac{1}{2}$ uur = 30 minuten. Bij $\alpha = \infty$ is de uitkomst 0. De fiets is dan vervangen door een voertuig met oneindig hoge snelheid. Heit flitst heen, flitst terug, en samen flitsen ze naar het eindpunt zonder dat iemand ook maar een seconde heeft gelopen.

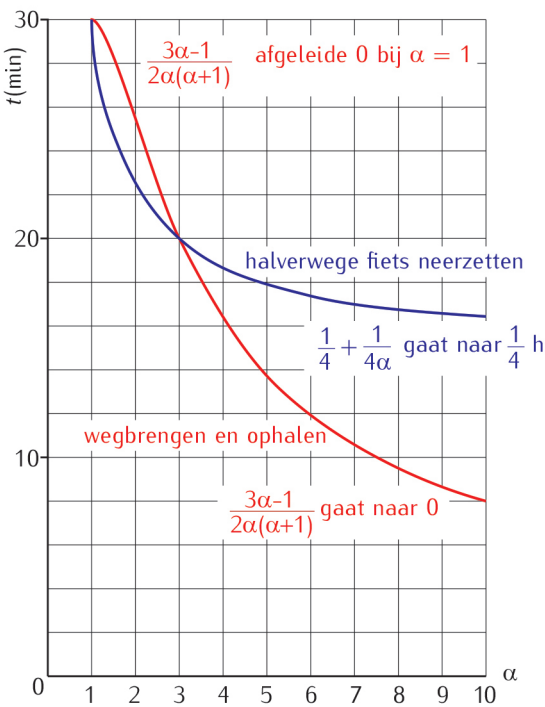
Wat is de snelste methode?

Als het voertuig heel snel gaat levert de eerste methode, waarbij Heit de fiets halverwege laat staan, minder tijdswinst op dan de laatste methode met het heen en weer fietsen. Is dat altijd zo? In tabel 1 staan de tijden voor beide methodes voor verschillende waarden voor α . Hierbij is als wandel-snelheid 4 km/h genomen. De waarde $\alpha = 3$ komt overeen met de fietssnelheid uit het oorspronkelijke verhaal.

Deze waarden staan uitgezet in de grafiek van figuur 2.

α	halverwege neerzetten		wegbrengen en ophalen	
	$t(\text{h})$	$t(\text{min})$	$t(\text{h})$	$t(\text{min})$
1	1/2	30,00	1/2	30,00
1,5	5/12	25,00	7/15	28,00
2	3/8	22,50	5/12	25,00
2,5	7/20	21,00	13/35	22,29
3	1/3	20,00	1/3	20,00
4	5/16	18,75	11/40	16,50
5	3/10	18,00	7/30	14,00
10	11/40	16,50	29/220	7,91
∞	1/4	15,00	0	0

tabel 1



figuur 2

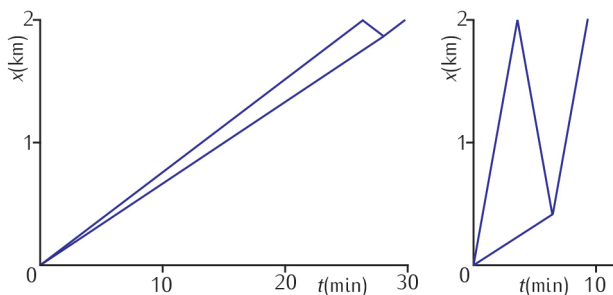
Wanneer de fietssnelheid niet zoveel groter is dan de wandelsnelheid is de halverwege-neerzetten-methode voordelig en bij hogere fietssnelheden de wegbreng-en-terugfietsmethode. De grens ligt toevalligerwijs precies bij een factor tussen fiets- en wandelsnelheid $\alpha = 3$, dus voor Heit en Kees zou er geen verschil zijn geweest.

Dit is nog een interessante exercitie: uitgaan van de twee formules voor de tijd en bekijken voor welke α de tijden

gelijk zijn. Dan geldt $\frac{\alpha+1}{\alpha v} = \frac{2}{\alpha v} \left(\frac{3\alpha-1}{\alpha+1} \right)$.

Hieruit volgt $\alpha+1 = \frac{6\alpha-2}{\alpha+1}$.

Beide zijden vermenigvuldigen met $\alpha + 1$ geeft $\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0$. De oplossingen zijn $\alpha = 1$ en $\alpha = 3$. Die eerste waarde is logisch, want in dat geval komen beide methodes neer op gewoon de hele afstand samen lopen. De andere hadden we al bij toeval gevonden. Als laatste punt over de zak aardappelen, voordat we overstappen op meisjes die bij elkaar achterop zitten, in figuur 3 een grafische voorstelling waarin je ziet waarom bij lage snelheden de tweede methode niet zo goed werkt en bij hoge snelheden wel.



figuur 3

Bij een klein snelheidsverschil ligt Kees niet zo ver achter op Heit. Die fietst na het afgeven van de vracht slechts een klein stukje terug en daardoor, en dit is het belangrijkste, profiteert Kees slechts over een kleine afstand van de hogere fietssnelheid. Hij wandelt veruit het langste stuk. Andersom geldt bij een heel hoge fietssnelheid dat Kees nog maar een klein stukje heeft gewandeld voordat hij wordt opgepikt. Bij een fietssnelheid van 12 km/h, overeenkomend met $\alpha = 3$, komen Heit en Kees elkaar precies halverwege tegen, op dezelfde plek als waar bij de andere methode de fiets stond. Daardoor zijn in dat geval de waarden gelijk.

Drie meiden met één fiets

Als de zak aardappelen wordt vervangen door een derde persoon, dan ontstaat een nieuwe mogelijkheid: A brengt B weg tot een punt x. Dan loopt B verder en A fietst terug tot ze C tegenkomt en haar oppikt. Het is de kunst het afzetpunt x zo te kiezen dat iedereen tegelijk aankomt. Eerst even met wandelsnelheid 4 km/h en fietssnelheid 12 km/h. De tijd t_1 die het duurt om tot x te fietsen is $x / 12$. Degene die eerst ging lopen, is op het moment dat de fietsster omkeert op positie $x / 3$. Zij blijft verder lopen, de ander fietst terug, ze komen elkaar een tijd t_2 later tegen als de posities gelijk zijn. Dat is als

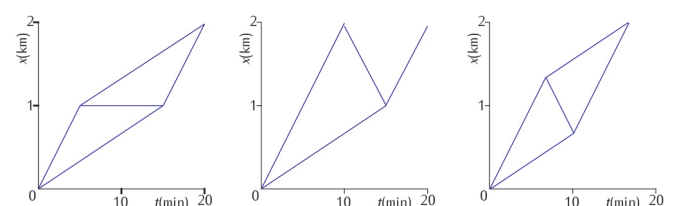
$$\frac{x}{3} + 4t_2 = x - 12t_2. \text{ Hieruit volgt: } t_2 = \frac{x}{24}.$$

Nu moet het zo zijn dat de fietsster op dat moment op afstand x van het eindpunt is. Alleen dan zitten beide personen die een deel achterop zitten over dezelfde afstand achterop, lopen ze dus ook dezelfde afstand, en zijn hun totaal tijden gelijk. De totaal tijd van de fietsster is

$$t_{\text{fiets}} = \frac{5x}{24}.$$

De tijd van iemand die een deel achterop zit en een deel loopt, is: $\frac{x}{12} + \frac{2-x}{4}$

Als je die tijden gelijkstelt, dan vind je $x = 4/3$ km en $t = 5/18$ uur. Dat is 16 minuten en 40 seconden, aanzienlijk sneller dan de tijd die hoort bij de andere methodes, die was 20 minuten!



figuur 4

In de grafieken van figuur 4 zie je het verschil tussen halverwege wachten met de fiets (links), de passagier helemaal wegbrengen en terugfietsen om nummer drie te halen (midden) en de passagier eerder afzetten en laten doorlopen, en zelf terugfietsen om de derde persoon op te halen (rechts). De eerste twee scenario's zijn gelijk aan wat je met een zak aardappelen kunt doen.

Dit kun je nadoen met snelheden v en αv . Dat is een beetje gedoe met gelijknamig maken van breuken met letters, maar ook hier noem je de 'wegbrengpositie' x;

bereken je na hoeveel tijd de terugrijdende persoon is aangekomen bij degene die liep, moet de laatste fietsafstand gelijk zijn aan x omdat anders niet iedereen gelijk aankomt, en eis je ten slotte dat de totale fietstijd gelijk is aan de tijd van iemand die een deel achterop zat en een deel liep. De fietstijd tot x is $\frac{x}{\alpha v}$, voor het terugfietsen geldt $\frac{x}{\alpha} + vt_2 = x - \alpha vt_2$.

De oplossing voor de laatste tijd is $t_2 = \frac{1}{\alpha v} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right)$.

De fietsster is een tijd $\frac{2x}{\alpha v} + \frac{1}{\alpha v} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right)$ onderweg, dit moet gelijk zijn aan $\frac{x}{\alpha v} + \frac{2-x}{v}$. Je vindt $x = \frac{2(\alpha+1)}{\alpha+3}$ en

$$t = \frac{2}{\alpha v} \left(\alpha - \frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{\alpha+3} \right) = \frac{2(3\alpha+1)}{v\alpha(\alpha+3)}.$$

De laatste vorm is het eenvoudigst, de een na laatste vorm laat goed zien wat de tijdwinst is ten opzichte van met zijn allen wandelen.

In tabel 2 staan de tijden voor $v = 4$ km/h in de laatste kolom, naast de al bekende tijden van de andere methodes.

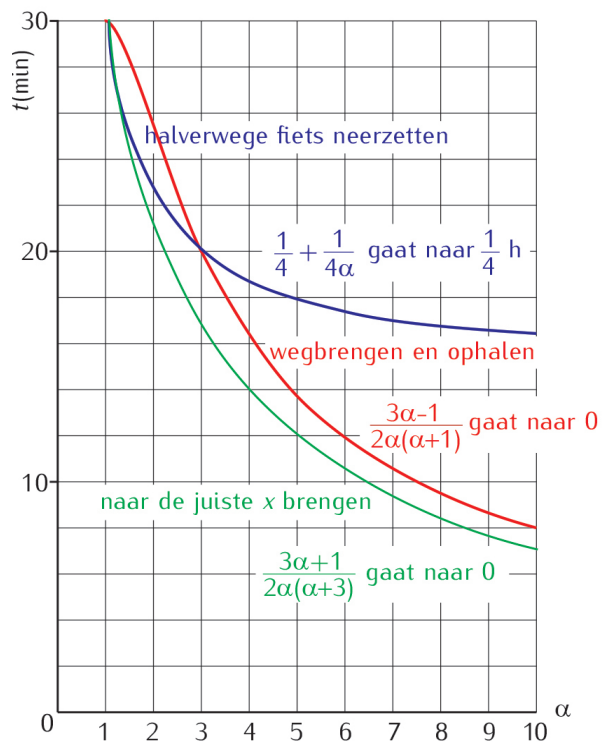
α	halverwege wachten		wegbrengen en ophalen		Afzetten op x , verder laten lopen, derde persoon ophalen	
	$t(h)$	$t(min)$	$t(h)$	$t(min)$	$t(h)$	$t(min)$
1	1/2	30,00	1/2	30,00	1/2	30,00
2	3/8	22,50	5/12	25,00	7/20	21,00
3	1/3	20,00	1/3	20,00	5/18	16,67
4	5/16	18,75	11/40	16,50	13/56	13,93
5	3/10	18,00	7/30	14,00	1/5	12,00
10	11/40	16,50	29/220	7,91	31/260	7,15
∞	1/4	15,00	0	0	0	0

tabel 2

Alle waarden staan uitgezet in de grafiek van figuur 5. De nieuwe methode is altijd de snelste.

De hele club

De laatste uitdaging is te bedenken in hoeveel tijd n personen de afstand kunnen afleggen met een fiets. Er zijn allerlei mogelijke tactieken. De eerste methode is dat iedereen wacht tot hij helemaal wordt weggebracht. Degene die rijdt, rijdt eerst een keer heen om de eerste die meerijdt af te zetten, en dan nog $n-2$ keer terug en heen. Dat lijkt dom, maar het is wel wat er gebeurt bij



figuur 5

de shuttlebus tussen de parkeerplaats buiten Leiden en het centrum. Voor 2 kilometer en met een voertuig dat 12 km/h gaat, is het aantal minuten $10 + 20(n-2)$. Een andere simpele tactiek is dat iedereen gaat wandelen. Dat kost 30 minuten. Figuur 6a geeft beide methodes weer. Wat ook kan: de eerste helemaal wegbrengen, terugrijden en de tweede oppikken die met de rest is begonnen met wandelen, die helemaal wegbrengen, dan de derde, enzovoorts. Dit scenario is uitgebeeld in figuur 6b. Het wegbrengen van de eerste kost 10 minuten. Daarna kost het 5 minuten om terug te rijden tot de helft, waar de anderen dan ook aankomen. De tweede persoon wegbrengen kost 5 minuten, waarna je 2,5 minuut terugfietst. Weer 2,5 minuten later heb je de derde persoon afgeleverd. De situatie is steeds vergelijkbaar, met steeds de halve afstand en een persoon minder die nog moet worden weggebracht. De tijd die nodig is, is

$$t = 10 + 10 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right).$$

Dit convergeert naar 30 minuten, wat logisch is, want als je oneindig veel mensen moet vervoeren zit de laatste oneindig kort achterop. De tijdwinst ten opzichte van de 30 minuten die lopen kost, is $\frac{10}{2^{n-3}}$ minuten, met n

het aantal personen inclusief fietsster.

>

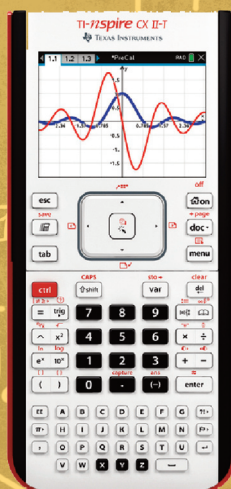
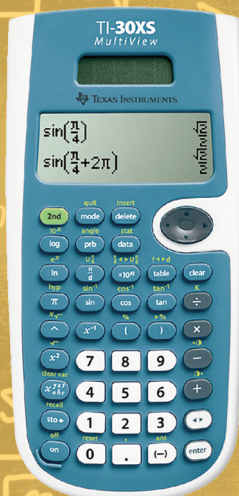
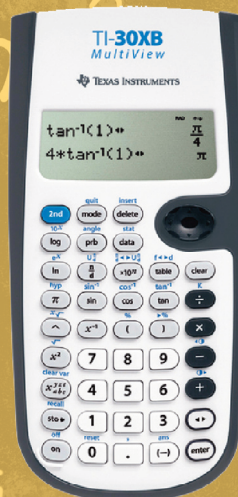
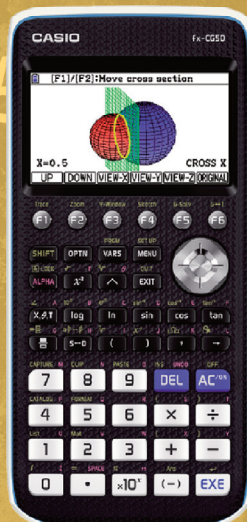
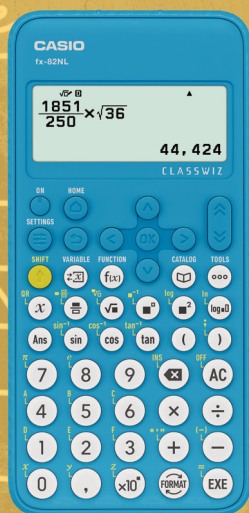
“Als het gaat om goed rekenen, kunnen wij veel voor u betekenen!”

Preferred partner van:

CASIO



TEXAS INSTRUMENTS



Beste service, beste prijs?

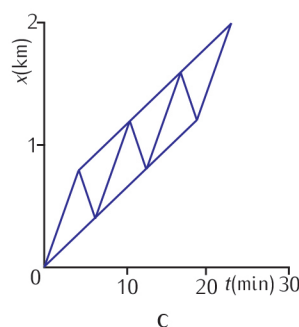
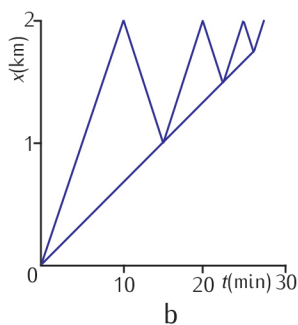
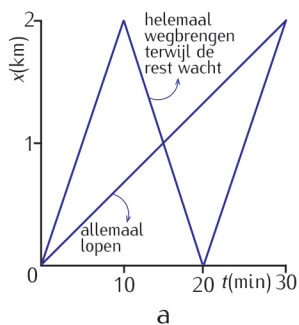
Neem dan contact met ons op voor een passend aanbod. Wij leveren op school of rechtstreeks thuis bij de leerlingen.



Scan mij

Tel. 0512 53 83 53
info@rekenmachines.com
www.rekenmachines.com

SCHEEPSTRA
REKENMACHINES



figuur 6

achterop neemt tot bij degene die als eerste was afgezet en die verder is gaan lopen, en zo verder totdat alle n personen tegelijkertijd aankomen. Dit komt overeen met het schema in figuur 6c.

De methode gaat helemaal volgens de lijnen die zijn beschreven voor drie personen. Twee dingen zijn nog belangrijk. Het eerste is dat niet alleen de eerste die wordt weggebracht een afstand x achterop zit, dit geldt ook voor de tweede en elke volgende achteropzitter. Anders zijn de tijden niet gelijk. Ook elk stuk terugfietsen duurt even lang. Ga maar na: steeds als de fietsster x vooruit is gegaan, zijn de achtergebleven loopsters x/α vooruit gegaan. Steeds is de afstand die de fietsster terug moet gelijk. Het enige wat verandert ten opzichte van de situatie met drie personen, is dat de fietsster $n-1$ maal een afstand x heen aflegt en $n-2$ maal terugrijdt.

Dus nu moet $\frac{(n-1)x}{\alpha v} + \frac{(n-2)(\frac{x}{\alpha})}{\alpha v}$ gelijk zijn aan $\frac{x}{\alpha v} + \frac{2-x}{v}$.

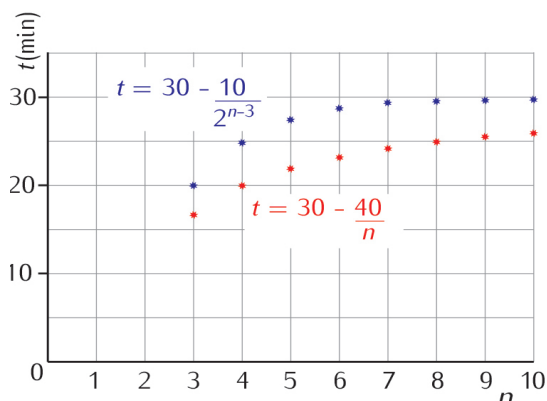
Nou, dat klopt als $x = \frac{2(\alpha+1)}{2n+\alpha-3}$.

De totale tijd is dan $t = \frac{2}{\alpha v} \left(\alpha - \frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{2n+\alpha-3} \right)$.

Merk op dat het bij $\alpha = \infty$ in een flits is gebeurd, ongeacht n , en dat bij $n = \infty$ en eindige α de gewone wandeltijd nodig is. Logisch, want dan zit iedereen oneindig kort achterop. In de grafiek van figuur 7 staan de tijden voor de verschillende methodes als functie van n , voor wandel- en fietstempo 4 respectievelijk 12 km/h.

De grote formule

Nu het *piece de resistance*: de formule die ik aan het begin van dit artikel aankondigde. De formule voor de tijd die het kost als je de eerste persoon wegbrengt tot een te bepalen positie x , terugrijdt, de volgende oppikt en



figuur 7

Slotwoorden

Is dit allemaal nuttig in het echte leven? Misschien voor het treintje dat rijdt op het lange wandelpad naar Fort Pannerden. Dat kan best op allerlei punten stoppen en ervoor zorgen dat iedereen ook een beetje gebruik maakt van zijn eigen wandelsnelheid en niet gaat staan wachten. Zoals een tweedeklasser zei tegen een medeleerling die had geopperd dat je iemand een eind zou kunnen wegbrengen en dan de derde bij het beginpunt ophalen: 'Het kan niet zo zijn dat iemand stilstaat.' Een inzicht.

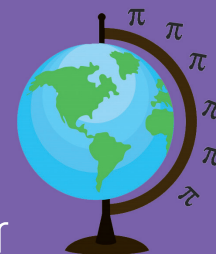
Dit artikel is een bewerking van het tweeluik 'Tegelijkertijd aankomen in de kortst mogelijke tijd' dat eerder verscheen in *NVOX* december 2022 en januari 2023. Met dank aan de auteur en aan hoofdredacteur Anneke Thurlings.

Noten

- [1] Streun, A van (2001). *Het denken bevorderen*. Rijksuniversiteit Groningen. Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen.
- [2] Streun, A. van (2018). Hoofdstuk 1: Leren en Onderwijzen van Wiskunde. In Drijvers, P, Streun, A. van, Zwaneveld B. (red). (2018). *Handboek wiskundendidactiek*. Epsilon Uitgaven.

Over de auteur

Hans van Bommel is vier dagen in de week docent aan het Stedelijk Gymnasium Leiden, vooral in de natuurkunde, met een paar klassen wiskunde. De rest van zijn tijd besteedt hij aan schrijven: de lesboeken *Newton* (onderbouw) en *Nova* (bovenbouw), stukken in *NVOX* en columns in het *Nederlands Tijdschrift voor Natuurkundedidactiek*. In 2019 kreeg Hans de Minnaertprijs voor natuurkundedidactiek. Een bundeling van zijn columns over onderwijs zal dit jaar verschijnen bij uitgeverij Gist.



Functions for Everyone: Three Classic Tasks to Round Off a (School) Year

In deze column vertelt Jana Dean over haar ervaringen als wiskundeleraar en haar experimenten op een middelbare school in Washington State, USA.

Introduction

Where I live, the last month of school always seems to last a month too long. We don't break for summer in my small northern town until June 22 when it isn't dark until 11 and the light comes back around 3:30. Everyone is perpetually tired. This means math class needs to be even more fun and worthy of curiosity than ever. In this article

I share three classic investigations that got us through that month of summertime fatigue. All three address graphing functions and provided practice for my eighth-grade students still working on the relationship between input and output while challenging others to apply what they knew to messy real-world contexts.

All year, students had been working with functional relationships. They'd been graphing, making tables, writing equations, and working with manipulatives to find patterns in the relationships between variables. Most of the functions they had seen were linear, exponential or quadratic. I knew that many of them still had soft spots in their understanding of the connection between a graph and a situation. Yet others would be able to write equations for cubic functions. In choosing the three investigations that follow, I hoped to provide rich enough contexts that everyone could grow, no matter their starting point.

“They began to see the graph of a function not as a picture of the situation but rather as a relationship between variables.”

Filling Vases

Functions and Volume of Vases^[1] in the magazine *Mathematics Teaching in the Middle School* had sat on my shelf for more than a decade. I finally chose to have my eighth-grade students do the tasks because the messy real world context would challenge them to deepen their understanding of graphing functions, after a year of working with tidier relationships. I also knew it would uncover important soft spots in their understanding of measurement. In this activity, students predict graphs

relating volume (input) to the height (output) of the water in a vase and then test their predictions by filling the vases a bit at a time. As they fill, they measure the height and graph their results.

Once I had gathered vases from other staff members, I placed five-gallon buckets of water against the four walls of our classroom and lined the vases up against the whiteboard, see figure 1. I also borrowed beakers from the science teacher next door and found a syringe that would work for the filling the smallest bud vase.

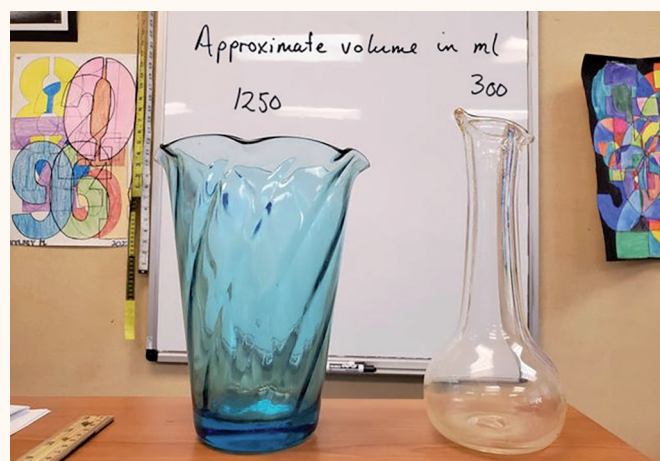


figure 1

I taught the lesson as described in the article but added some meaningful practice with measurement at the beginning. Margins of error in measurement can cause some people to persevere on details rather than appropriately attending to accuracy^[2], so I wanted to surface the inherent variation in measurement from the get-go. The class began by predicting vase volumes from smallest to largest, then proceeded to find volume in milliliters for each of the vases. Each group measured three vases of their own choosing until the class had measured each vase at least three times.

As the class looked at our data, students identified measurements that seemed too far off and discussed the sources of error. Andrew popped up and demonstrated that he had noticed that it depends on how you look at your beaker. 'Look here,' he said, 'if I look down from the inside it looks like less than 100 milliliters, but if I look from the side, it's just right.'

Andrew had given us a chance to talk about how, as a class we would ‘read’ volume in the beakers. Farris, another student, pointed out that maybe some tables were stopping below the rim of the vase so as not to spill. Amy followed by sharing that she had discovered that especially with the vases with a small rim, the water would bulge above the rim when full. When she pointed this out, most tables tried it for themselves by sticking a finger or a hand in nearly full vases. Indeed, everyone could make the same thing happen. While not in my plan at the outset, we ended that session with a discussion of surface tension that results in a curved surface where the water met the air.

When the time came to predict height of water as a function of volume. Sarah still wondered about surface tension. She asked, ‘Would that make a difference in our predictions?’ ‘Experiment,’ I said. ‘See what you find out.’

As students predicted what the graphs of volume to height of water would look like, many of them created representations that looked like the shape of the vases themselves; that is, if the vase bulged at the bottom, so did the graph. If the vase had narrowed near the top, so did the graph. Students were about to discover that narrow sections of vases fill more quickly, and thus graph steeper than wide sections. This results in graphs that do not look like vases at all.

After filling and plotting height as a function of volume, most students had graphs that were very different from their vase-like predictions. Several tables that had measured accurately were deciding to start over again because they thought they had made a measurement mistake when their predictions were the problem. I decided to interrupt. ‘Can anyone help all of us?’ I asked. Noah offered. They had selected a tiny vase, one so small that they needed a syringe to measure the water, see figure 2. ‘Ours filled really fast,’ they offered, and showed a graph in which the height increased almost linearly and very quickly. ‘What if you used this syringe to fill that really fat one? It would take forever, and your line would be almost flat.’

As students continued the cycle over the next few days: predict, and then measure and graph, they began to see the graph of a function not as a picture of the situation but rather as a relationship between variables. I knew, however, they would need multiple experiences graphing inputs and output from a real-world situation not to continue to make the graph a picture of the situation.

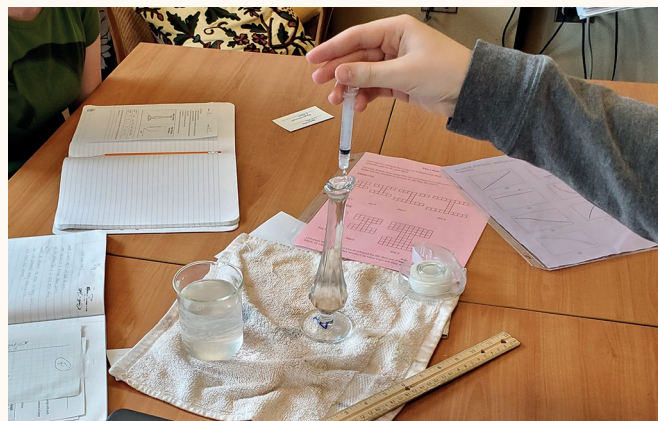


figure 2 Filling a vase with a syringe

Graphing Stories

Dan Meyers *Graphing Stories*^[3] provided important additional experience with predicting and verifying graphs from a real world situation. These short video stories depict relating time as the input to a visible output, such height, length or weight. I opened class with a graphing story most days of this end-of-year unit. Students watched the stories, and followed the same routine as with the vases. They predicted the graph, then watched again, made adjustments and checked their results against a graph laid over the scene. Initially, as with the vases, students’ predictions were sketches of the scene that did not relate the input and output. Over time, day by day, they got better and better at attending to the output in its relationship to the input rather than seeing the graph as a picture of the story. Once most of them were understanding that a graph shows a relationship, not a picture of the scene, I wanted to bring them to another hands-on experience with height and volume.

Water Tank

This investigation first appeared in *The Language of Functions and Graphs*^[4]. (A version is also available here^[5]). *Water Tank* follows nicely on the vase investigation because the input and output variables are also height and volume, but with volume as a function of height rather than the other way around. This switch forces students to really think about the relationship between the shape of a vessel and how much it holds.

In this task, students build ‘water tanks’ from a pattern in which squares are cut from the corners of fixed 20 by 20 centimeter square paper, see figure 3. The size of the square removed determines the height of the tank.

>

As with the vase investigation, first the class predicted which tank would hold the most water. Based on their experience with fat vases holding a lot of water, many chose the tank with a height of one centimeter because it would have the largest base. As groups of four got underway with their tank-building, they soon found something strange happening. Volume increased as height increased until the height reached three centimeters, then it seemed to decrease gradually.

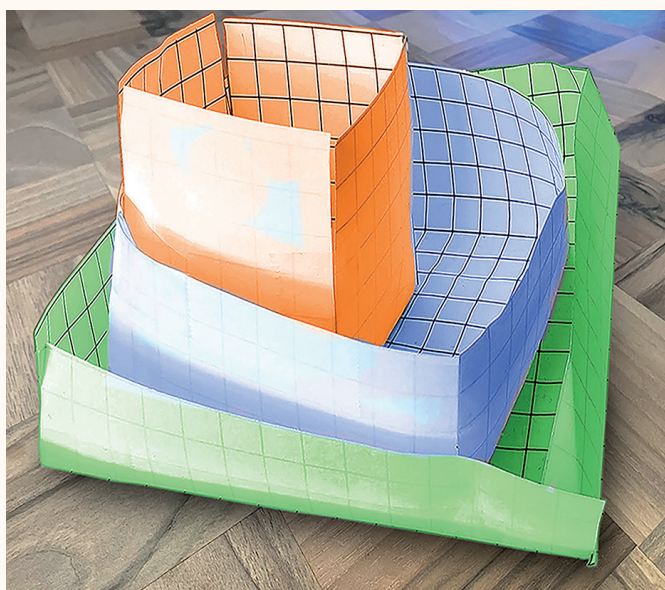


figure 3

I challenged them to graph their results to see if they could figure out a pattern and if possible, write an equation relating input to output.

While most students elected to do this on paper, a few, including Miguel and Viola pulled up the Desmos graphing calculator. I had not expected most eighth graders to write an equation for this cubic function, but a few of them did. Miguel determined that it made sense to start with the total area of the paper (400 cm^2) then subtract the area of the squares ($4x^2$) and the area of the four sides ($4(20 - 2x)(x)$). This series of moves gave the area of the base for each tank, which he then multiplied by the height (x). This resulted in the equation $y = x[20^2 - 4x^2 - 4x(20 - 2x)]$.

Viola thought about it differently, realizing the side length of each square base could be expressed as $(20 - 2x)$. As she worked out her equation, $(20 - x \cdot 2)^2 \cdot x$, she quietly grinned as she traced its apex not to 3 exactly, as the class had thought, but to $3 - \frac{1}{3}$, see figure 4.

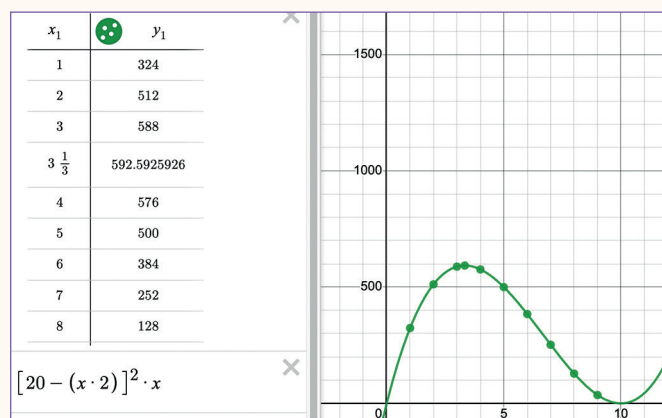


figure 4

Meantime, since Miguel was satisfied with his graph, I prompted him to think about paper of any size, which would introduce another variable. He knew about a third axis, but wasn't satisfied with any graphing calculator with three axes that he could find online, so he made a slider to replace the side length of the paper, see figure 5. Super-pleased with what he was seeing, he grinned, and said, 'I think a slider is a third dimension. Can I share this with the class?' Even though it was June, they had just enough curiosity left to marvel at Miguel's oscillating cubic function. Follow this link^[6] to see it in action.

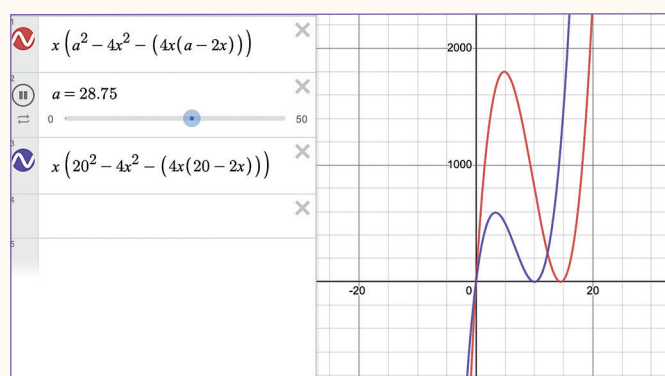


figure 5

Taken together, these three investigations in functions kept my tired and restless eighth graders engaged all the way to the summer solstice, and sent them off to high school knowing coordinate graphs communicate relationships in stories, not scenes from stories.

References

- [1] McCoy, A. C., Barger, R. H., Barnett, J., & Combs, E. (2012). Functions and the Volume of Vases, *Mathematics Teaching in the Middle School*, 17(9), 530-536. Retrieved May 30, 2022, from <https://pubs.nctm.org/view/journals/mtms/17/9/article-p530.xml>
- [2] Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM) (2010). National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.
- [3] Meyers, D. (2007, May 3). Graphing Stories. Dy./Dan. <https://blog.mrmeyer.com/2007/graphing-stories/>
- [4] Swan, Malcolm, & the Shell Centre Team (1999) *The Language of Functions and Graphs*. Shell Centre Publications.

- [5] Annenberg Learner, Part C; Designing a Water Tank, <https://www.learner.org/series/learning-math-measurement/measurement-relationships/part-c-designing-a-water-tank-35-minutes/>. Ret. Sept 3, 2022.
- [6] Zie: <https://www.desmos.com/calculator/2wvdtngmw?lang=nl>

About the author

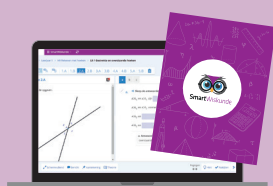
Jana Dean is a middle school teacher at Olympia School District 111, Olympia, Washington State, USA and a PhD candidate in Leadership Studies at Saint Martin's University (Lacey, Washington State). In 2019 Jana was a teacher-researcher at the Freudenthal Institute (Fulbright Distinguished Teacher Fellow 2019). See: www.mathbetweenus.org. Email address: jdean@reachone.com



SmartWiskunde

DÉ SLIMME BLENDED WISKUNDEMETHODE

- methode voor onderbouw vmbo basis, kgt en havo/vwo
- compact en compleet, opbouw in complexiteit
- herhaling, gemengde en verdiepende opgaven en toetsing
- grip op leren voor leerlingen: stapsgewijze hints en feedback
- grip op voortgang: inzicht in individuele leerprocessen en groepstrends



MEER WETEN

We sturen je graag een beoordelingsexemplaar met proeflicentie. Ga naar smartwiskunde.nl of scan de QR-code.



Pracht en kracht van wiskunde

Deel 1: Poincaré, Arnold en de Kat-afbeelding

De rondreizende tweede editie van de *Imaginary* tentoonstelling is alweer voorbij. Paul Igodt neemt ons mee naar de wiskunde achter een aantal van de fenomenen die te zien en te ervaren waren. Deze serie artikelen is een bewerking van de eerder verschenen versies in *Wiskunde en Onderwijs*, ons 'zustertijdschrift' van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars.

Inleiding

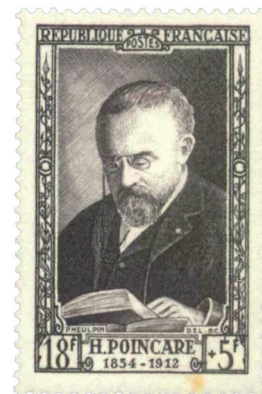
De tentoonstelling *Imaginary: pracht en kracht van wiskunde*, die vorig jaar door Vlaanderen en Nederland reisde, was hopelijk voor velen een stimulans om de schoonheid en kracht van wiskunde te ontdekken. Pracht en kracht gaan naar ons gevoel meestal samen. De kracht van een idee, de pracht van een veralgemening, de kracht van een toepassing, de onmiddellijk aansprekende pracht van een beeld, dit alles is moeilijk te rangschikken. Geïnspireerd door topics die in de tentoonstelling aan bod kwamen, selecteerden we enkele verhalen waar niet enkel visuele schoonheid en verwondering in aan bod komen, maar ook geschiedenis, veralgemening en praktische inzetbaarheid aandacht verdienen. Naar ons gevoel is elk van deze verhalen haalbaar in een klas gemotiveerde leerlingen van de bovenbouw vwo. Ook dat is een element geweest bij het kiezen ervan.

Wiskunde begrijpen kan volgens ons ook niet zonder een minimaal inzicht in de geschiedenis. Hoe problemen zich aangediend hebben, en hoe de wiskunde als één grote puzzel stevast uitbreidt door de inzet van velen. We houden van de *MacTutor History of Mathematics*, opgestart door vrienden en collega's van de University of St. Andrews. Beschouw alle historische verwijzingen als een uitnodiging om kennis te maken met historische figuren en hun traject.

In elk van de verhalen is er een duidelijke historische band. Het verhaal van de kat-afbeelding begint ruim een eeuw geleden, maar tegelijk zien we nu belangstelling hiervoor in cryptosystemen. Het traject naar hyperbolische meetkunde duurde maar liefst twee millennia; toepassingen in theoretische fysica en kosmologie en wiskunde zelf kunnen niet meer zonder.

Houd blijvend een oogje op de website^[1] van *Imaginary*. Er is reeds aardig wat educatief materiaal aanwezig.

Na afloop van de reisperiode, komen alle beelden van de tentoonstelling daar blijvend te bewonderen. Met heel wat topics die een verhaal vertellen.^[2]



Henri Poincaré



Henri Lebesgue



Vladimir Arnold



Constantin Carathéodory

figuur 1

Poincaré, Arnold en de kat-afbeelding

In een indrukwekkende publicatie^[3] stelt Poincaré (1854-1912) in 1890 dat heel wat dynamische systemen na verloop van tijd terugkeren in (of willekeurig dicht bij) hun begintoestand. De formulering is nogal technisch. Zijn bewijs werd beschouwd als niet helemaal rigoureuus. Pas enkele jaren later werd het vernieuwend werk van Lebesgue (1875-1941) in de maattheorie bekend. Dit bleek van groot belang en een echt rigoureuus bewijs voor Poincarés stelling, gebruikmakend van die technieken van maattheorie, volgt in 1919 door Carathéodory (1873-1950).^[4] Het resultaat is nu een klassieker, wereldwijd bekend als de Poincarés recurrentiestelling. Vele jaren later, in 1967, schrijven Vladimir Arnold (1937-2010) en André Avez (1930-2017) in een even indrukwekkende monografie^[5] opnieuw over dynamische systemen en ze geven vele voorbeelden. Voor een van die voorbeelden

werken ze met een dynamisch systeem op het oppervlak van een (tweedimensionale) torus. Ze gebruiken daarvoor een afbeelding van een poes, om de recurrentiestelling van Poincaré te illustreren. De 'kat van Arnold' was geboren.

Het 'kat van Arnold'-verhaal ligt zeker binnen het wiskundig bereik van heel wat leerlingen uit de bovenbouw. Het lijkt een van de betere illustraties van de stelling van Poincaré en leidt hoe dan ook tot enkele verrassende animaties en mogelijke actuele toepassingen.

We vertrekken met een eenvoudige lineaire transformatie $T_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ van het vlak, voorgesteld door de matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Een punt $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ wordt door T_A afgebeeld op

$T_A(X) = A \cdot X = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \end{pmatrix}$. Op zoek naar de eigenwaarden

en eigenvectoren van deze transformatie, berekenen we eerst de karakteristieke veelterm

$$\varphi_A(x) = \det \begin{pmatrix} x-2 & -1 \\ -1 & x-1 \end{pmatrix} =$$

$$(x-2)(x-1) - 1 = x^2 - 3x + 1.$$

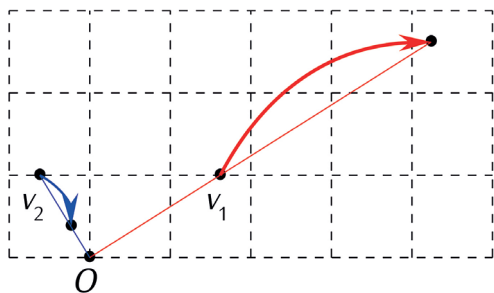
De nulpunten van deze veelterm zijn

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ en } \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Als bijhorende eigenvectoren kunnen we

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

nemen. Eigenvectoren worden door de transformatie in het eigen verlengde afgebeeld, zoals we laten zien in figuur 2.



figuur 2 In de richting van v_1 (rode vector) gebeurt een expansie, terwijl in de richting van v_2 (blauwe vector) een inkrimping plaatsvindt.

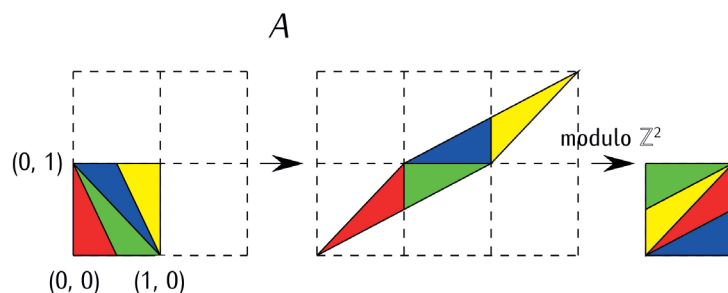
We expliciteren nog enkele vaststellingen, die allen hun belang hebben.

1. Matrix A heeft determinant gelijk aan $+1$ en is bijgevolg inverteerbaar. Ook de inverse matrix zal bestaan uit gehele getallen: dus $A \in GL(2, \mathbb{Z})$. Dit impliceert dat de transformatie T_A het rooster van de gehele getallen, $\mathbb{Z}^2$, (globaal) op zichzelf afbeeldt. Dit, alhoewel de individuele roosterpunten natuurlijk wel verplaatst worden. In figuur 3 zien we hoe de vier gekleurde driehoeken van het eenheidsvierkant eerst worden getransformeerd naar vier nieuwe driehoeken die samen een parallellogram vormen.

Nu geldt dat, als $X, Y \in \mathbb{R}^2$ punten van het vlak zijn zo dat $X - Y \in \mathbb{Z}^2$, ook:

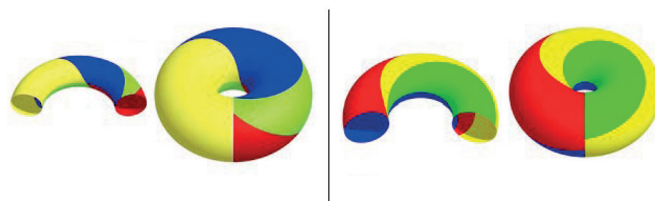
$$T_A(X - Y) = T_A(X) - T_A(Y) \in \mathbb{Z}^2.$$

We kunnen dus 'modulo $\mathbb{Z}^2$ ' werken. Dit betekent concreet dat je enkel het decimaal deel van de coördinaten onthoudt. In figuur 3 schuiven drie van de vier driehoekjes in tweede instantie netjes terug in het eenheidsvierkant, dat ze opnieuw helemaal opvullen.



figuur 3 In de eerste stap wordt het eenheidsvierkant omgevormd tot een parallellogram. In de tweede stap kijken we enkel naar het decimaal gedeelte van de coördinaten; we rekenen 'modulo' het geheel gedeelte.

Verder is $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ een algebraïsche manier om de tweedimensionale torus T voor te stellen. We besluiten dat de lineaire transformatie $T_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ een transformatie $\bar{T}_A: T \rightarrow T: X \mapsto T_A(X) \bmod \mathbb{Z}^2$ induceert, zie figuur 4.



figuur 4 Wanneer men in het vierkant de linker- en rechterzijde op elkaar plakt, en vervolgens in de cilinder die ontstaat, de eindcirkels op elkaar plakt, ontstaat de torus T . We laten de invloed van $\bar{T}_A$ op de torus zien: links de vertreksituatie, rechts na de transformatie.

(Met dank aan Jos Leys voor deze figuren).

2. De eigenwaarden zijn reëel. De ene is strikt groter dan 1, de andere strikt kleiner dan 1. Dit verklaart de combinatie van expansie en contractie, die we in de wiskunde ook kennen als de Anosov-eigenschap. De eigenvectoren zijn bovendien orthogonaal, omdat matrix A symmetrisch is.

3. Punten X in het vlak met rationale coördinaten worden afgebeeld op punten die ook rationale coördinaten hebben. Dat is evident. Veronderstel nu even dat X zo'n punt is. De coördinaten van X kunnen we dus schrijven als breuken, en na keuze van een kleinste gemeen veelvoud k van de noemers ($k \in \mathbb{N}$), kunnen we X noteren als $X = \frac{1}{k}Z$ met $Z \in \mathbb{Z}^2$. Laat ons nu even modulo k rekenen, en bedenken dat A zowel als de inverse matrix, A^{-1} , uitsluitend uit gehele getallen bestaan.

Ook voor een (2×2) -matrix zijn er, modulo k gerekend, maar eindig veel mogelijkheden. Het duivenhokprincipe leert dus dat niet alle machten A^r ($r \in \mathbb{N}$) van de matrix A , modulo k gezien, verschillend kunnen zijn. Er zijn, met andere woorden, natuurlijke getallen n en $m > n$ zó dat $A^n \equiv A^m \pmod{k}$. Hieruit volgt:

$$(A^{-1})^n A^n \equiv (A^{-1})^n A^m \pmod{k} \Rightarrow \mathbb{I} \equiv A^{m-n} \pmod{k}.$$

(De notatie $\mathbb{I}$ staat voor de eenheidsmatrix.) We besluiten dat er een natuurlijk getal $d = m - n$ bestaat zo dat $A^d - \mathbb{I} \equiv 0 \pmod{k}$ en dus volledig bestaat uit gehele getallen die k -vouden zijn.

Omdat $X = \frac{1}{k}Z$ volgt dat

$$(A^d - \mathbb{I})X = \frac{1}{k}(A^d - \mathbb{I})Z \in \mathbb{Z}^2.$$

Hieruit volgt dat, in $\mathbb{R}^2$:

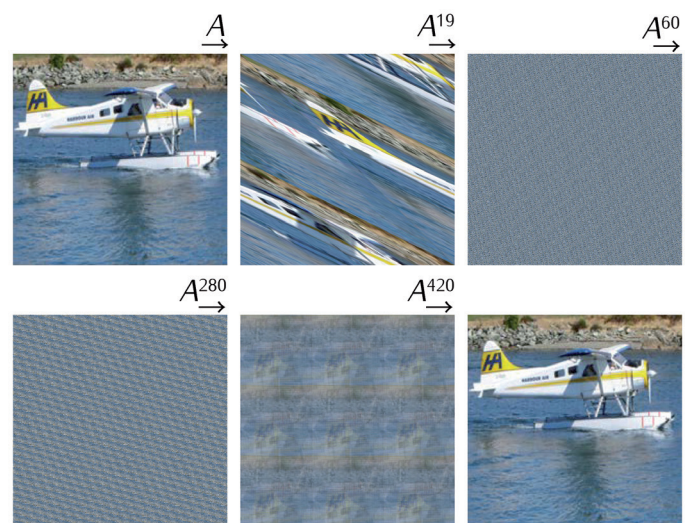
$$A^d X \equiv X \pmod{\mathbb{Z}^2}.$$

Dit betekent precies dat, als we op de torus T werken, voor punten X met rationale coördinaten geldt dat $A^d X = X$. De punten op de torus die rationale coördinaten hebben, worden dus na een voldoende aantal keren itereren van de transformatie $\bar{T}_A$ uiteindelijk terug op zichzelf afgebeeld. We noemen die punten daarom periodisch. De transformatie voldoende keer herhalen, levert terug het punt zelf op.

4. Je kunt ook aantonen dat, als een punt X op de torus periodisch is, het noodzakelijkerwijs rationale coördinaten moet hebben. Een mooie oefening alvast. Dit impliceert natuurlijk dat de verzameling periodische punten op de torus dicht is.

Juist dat periodisch zijn van alle punten met rationale coördinaten in het eenheidsvierkant (alias de torus T) biedt een heel bijzonder potentieel. Elke vierkante foto

kun je immers bekijken als een verzameling pixels die punten zijn uit het eenheidsvierkant. Pixels zijn bovendien punten met rationale getallen als coördinaten; en ze zijn per definitie eindig in aantal. Als we transformatie $\bar{T}_A$ itereren op de pixels van een vierkante foto kunnen we dus verwachten dat, na een voldoende aantal stappen, de foto opnieuw in originele staat zal verschijnen. Poincaré's recurrentiestelling geïllustreerd! De combinatie van expansie en contractie zorgt bovendien voor wat men chaotisch gedrag vertoont. De foto is reeds na een paar stappen amper nog te herkennen, zie figuur 5.



figuur 5

Het blijkt dat ieder rooster waarvan de punten rationale coördinaten hebben na verloop van tijd weer op zichzelf terugkeert. Dit is bij uitstek het geval met de pixels van eender welke foto. Het is best mogelijk dat je wat geduld moet hebben. Het aantal keer dat je de transformatie na elkaar moet uitvoeren, kan hoog oplopen. Maar, geduld zal beloond worden, dat kunnen wiskundigen aantonen. Echter, alhoewel er dus periodiciteit is op alle individuele punten met rationale coördinaten, is dat niet het geval op de punten met irrationale coördinaten. En alhoewel punten van het vierkant met rationale coördinaten een dichte deelverzameling vormen, is de periodiciteit van die volledige deelverzameling er ook niet. Wiskunde kent zo weer een van die bijzondere eigenaardigheden. Ruim vijftig jaar na de introductie door Arnold, zien we tegenwoordig meerdere publicaties waarbij chaos creërende transformaties (zoals de kat-afbeelding), gecombineerd met extra 'complicaties' bestudeerd en voorgesteld worden in een cryptografische context, bedoeld om informatie te beschermen.

Wie het zelf even wil uitproberen met een eigen foto kan dat hier^[6] online doen, hier^[7] kun je het zelfs uitproberen met andere matrices.

Noten

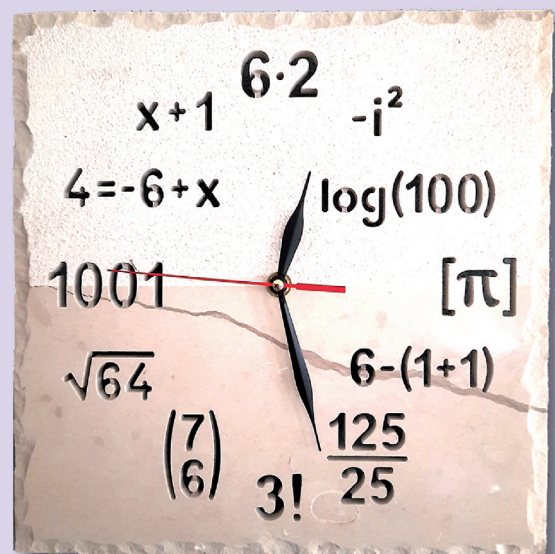
- [1] Zie: <https://www.imaginarymaths.be>
- [2] Illustratieverantwoording: alle beeldmateriaal met betrekking tot historische figuren is dankbaar ontleend aan de MacTutor website, die voor wat betreft de postzegelweergaves samenwerkt met de collectie van Jeff Miller. Zie: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>
- [3] Poincaré, H. (1890). Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica*, vol. 13, pp. 1-270.
- [4] Carathéodory, C. (1919). Über den Wiederkehrrsatz van Poincaré, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*.
- [5] Arnold V.I., Avez A. (1968). *Ergodic problems of classical mechanics*. The Mathematical Physics Monograph Series, pp. 1-286.
- [6] www.jasondavies.com/catmap/
- [7] http://www.gerdbreitenbach.de/arnold_cat/cat.html

Over de auteur

Paul Igodt is als emeritus gewoon hoogleraar verbonden aan het departement wiskunde van de KU Leuven en Campus Kulak. Hij is medeoprichter en coördinator van de Vlaamse Wiskunde Olympiade en coördineerde de Vlaamse stuurgroep die de reizende tentoonstelling 'Imaginary: pracht en kracht van wiskunde' organiseerde.
E-mailadres: paul.igodt@kuleuven.be

Wiskundeklok

Kees Rijke



Mijn kinderen waren deze zomer in Kroatië. En in een marktkraam zagen ze een klok. Een hele bijzondere en die hebben ze voor mij meegebracht. De ontwerper heeft zijn best gedaan om zoveel mogelijk wiskundige bewerkingen uit te beelden. Op de wijzerplaat zijn te herkennen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, worteltrekken, machtsverheffen, tegengestelde nemen, werken met haakjes, logaritme, faculteit, combinaties tellen, tweetallig stelsel, entierfunctie, π , vergelijking oplossen, substitueren en complexe getallen. De klok is met de hand gemaakt uit kalksteen afkomstig van Brač (Brazza). De bovenste helft is ruw, de onderste helft gepolijst, daar doorheen loopt een donkere nerf. Alle symbolen zijn uitgezaagd.

De fabrikant is de firma Martinic Promet, gevestigd aan het Narodni Trg (Volksplein) in Split.

CIEAEM 74 Malmö

Is het voor docenten (in opleiding) interessant om een wetenschappelijke wiskunde(didactiek) conferentie te bezoeken? Carla de Wit en Milou De Block wilden dat weten en komen tot een eensluidend antwoord op de vraag: ja!

Inleiding

Een internationaal wiskundecongres lijkt iets waar je nooit naar toe zult gaan. Wie gaat dat immers betalen en daar zul je wel niets te halen hebben, toch? Of toch niet? Dat vooroordeel wilden wij als masterstudenten van de Fontys lerarenopleiding Tilburg doorbreken. Internationalisering is immers een belangrijk, maar onvoldoende belicht aspect binnen het onderwijs. In deze globaliserende wereld is het belangrijk om verder te kijken dan onze landsgrenzen en te leren van andere culturen en andere benaderingen van onderwijs.



CIEAEM

Ons doel werd het bezoeken van een internationaal wiskundecongres met veel persoonlijke leerdoelen, maar waar we vooral wilden ervaren hoe het is om aan zo'n congres deel te nemen en te netwerken. Internationale contacten kunnen voor ons een rijke bron van informatie zijn. In samenwerking met onze docent Tom Goris zijn wij op zoek gegaan naar een geschikt congres en kwamen we uit bij de CIEAEM74^[1] conferentie in Malmö. Dit is een congres waar onderzoekers (in opleiding) hun onderzoek kunnen presenteren en waar wiskundedocenten van over de hele wereld aanwezig zijn. Gelukkig was de financiering voor deze studiereis snel rond dankzij de medewerking van Curio, het Beatrix College en Fontys Hogescholen. Een leuke bijkomstigheid was het feit dat de

Quality Class^[2], georganiseerd door Lambrecht Spijkerboer en Monica Matei, ook deelnam aan dit congres. Dit betekende dat er een groep van ongeveer twintig bachelor en master wiskundeleraren in opleiding uit verschillende landen hun bijdrage leverden. Dit zorgde voor een fijne dynamiek in de groep van congresdeelnemers. Het congres vond plaats op de universiteit van Malmö waar we hartelijk werden ontvangen door CIEAEM74 voorzitter Lisa Björklund Boistrup. Voor nieuwe deelnemers was er vooraf een informatiebijeenkomst waar je op een informele manier vragen kon stellen.

“De intuïtieve inbreng van leerlingen bij combinatoriek past niet altijd bij het lesmateriaal, maar kan wel een goede benadering zijn van het probleem.”

Werkgroepen

Het thema was *'Mathematics and practices: Actions for futures'* en dit werd uitgesplitst in vier deelthema's. Deze deelthema's vormden de rode draad van de vier werkgroepen waar je uit kon kiezen. Het was de bedoeling dat je een werkgroep koos en daarvan alle bijeenkomsten volgde. Tijdens deze bijeenkomsten presenteerden diverse onderzoekers hun onderzoek. De werkgroep gaf deze onderzoekers feedback die zij weer zullen nemen in het vervolg van hun onderzoek.

Een interessant onderzoek vonden wij *The funnel-effect in combinatorics teaching: preliminary results from a study involving Italian secondary teachers* door L. Lamanna en L. Branche. Zij gaven aan dat docenten het vaak erg ingewikkeld vinden om les te geven over combinatoriek en de neiging hebben om voorbij te gaan aan de intuïtieve inbreng van leerlingen die op het eerste gezicht niet in het lesmateriaal past, maar wel een goede benadering kan zijn van het probleem. Het resultaat van o.m. dit onderzoek was een levendige discussie waarin iedereen het erover eens werd dat er een leegte bestaat tussen aanleg bij leerlingen op het gebied van telproblemen en de abstracte theorie hierover in het voortgezet onderwijs. Deze leegte biedt een extra uitdaging voor de docent.

Het niveau van de presentaties was wisselend, maar in zijn geheel hebben we veel interessante en waardevolle discussies gevoerd. Aan het eind van het congres presenteerde elke werkgroep de bevindingen van de groepsdiscussies aan de andere werkgroepen, waardoor de kennisdeling compleet werd.



Forum of ideas

Plenaire lezingen, workshops en Forum of ideas

's Middags waren er diverse parallele workshops, gebaseerd op nog lopende, of reeds afgeronde en gepubliceerde onderzoeken. Deze waren allemaal ook erg interessant, wat het lastig maakte om te kiezen. En er was het 'ideeënforum' (*forum of ideas*), waarvoor de gemeenschapsruimte omgebouwd werd tot een kleine 'markt' waar een zestal onderzoekers in twee minuten hun onderzoek presenteerden om daarna op een informele manier, en onder het genot van een bakje koffie, ideeën uit te wisselen met de deelnemers aan het congres.

Iedere dag werd geopend met een plenaire sessie door gerenommeerde wetenschappers. Een van de meest opvallende daarvan, door Lisa Björklund Boistrup en Jöran Peterson, ging over het marktgeoriënteerde onderwijs in Zweden. Lisa vertelde zeer gepassioneerd over het feit dat

de scholen (inclusief universiteiten) in Zweden voorheen gratis waren. Zweden wordt steeds meer geraakt door neoliberalistische invloeden wat ertoe heeft geleid dat geprivatiseerde scholen en gemeentescholen naast elkaar bestaan en elkaar uit de markt proberen te concurreren. Er is een concurrentiestrijd ontstaan voor het aantrekken van het 'juiste' type leerling, ofwel de leerling zonder 'rugzakje'. Met allerlei negatieve effecten: ouders kiezen vaker een school die verder van huis ligt, er is een groeiend verschil in kwaliteit van de scholen en een groter verschil tussen hoog- en laagopgeleiden. Zweden is het enige land in de wereld met een dergelijk onderwijsstelsel en we kregen de gepassioneerde boodschap mee om ervoor te zorgen dat dit niet in ons land zou gaan gebeuren.

“De invoering van marktgeoriënteerd onderwijs in Zweden heeft allerlei negatieve effecten.”

En verder...

Deelname aan een meerdaags congres is natuurlijk inspirerend en leerzaam, maar ook erg intensief. Het was daarom fijn dat er halverwege het congres een congresdiner was. Dit diner was op een prachtige locatie in Malmö en na een heerlijke typisch Zweedse maaltijd was er een kleine pubquiz, waarna de discjockey klaarstond. De beentjes van alle deelnemers gingen al snel van de vloer en het feest was nu echt begonnen.

Dit informele samenzijn heeft wederom tot veel boeiende gesprekken geleid waarbij we weer nieuwe contacten hebben gelegd. Zo hebben we onder meer een heel informatief gesprek gehad met twee Italiaanse onderzoekers en met de Amerikaanse onderzoeker Abimbola Akintounde die zich heel veel zorgen maakt over het feit dat in Amerika het aantal aanmelding voor wiskundeopleidingen schrikbarend afneemt.

Conclusie

Wij zijn twee wiskundedocenten die werken voor verschillende doelgroepen. Milou werkt op het Beatrix College, een reguliere school voor voortgezet onderwijs in Tilburg en Carla werkt voor Curio op een school voor voortgezet algemeen volwassenen onderwijs (vavo) in Roosendaal en

>

Breda. Zowel vanuit professioneel als vanuit opleidingsperspectief hebben we veel gehad aan dit congres. We hebben onder meer zicht gekregen op het onderwijs (-systeem) in andere landen en de daarbij behorende politieke invloeden. Onderwerpen waar we over hebben gesproken zijn: inclusie in het (wiskunde-)onderwijs; de invloed van schoolboeken op het wiskundeonderwijs, het niveau van PhD-onderzoeken dat niet overal in de wereld even hoog ligt; de inzet van AI in wiskundelessen om leerlingen wiskunde te laten zien en om het kritisch denken van leerlingen te stimuleren; de ethische aspecten van AI; de rol van visualisatie in het wiskundeonderwijs; de brug die we moeten slaan tussen de natuurlijke aanleg voor combinatorisch denken en het abstracte van de formules binnen de combinatoriek en nog veel meer.

Wij nemen vooral mee dat we zelf kritisch moeten kijken naar ons eigen wiskundeonderwijs en onze invloed daarop, zodat we leerlingen beter kunnen begeleiden, waarbij inclusie en de *The danger of a single story*, zoals Chimamanda Ngozi Adichie heel mooi heeft verwoord in haar TED-Talk^[3], van belang zijn. Daarnaast is voor ons het belang van het interdisciplinaire karakter van het wiskundeonderwijs duidelijk geworden. Maatschappelijke aspecten zullen een rol gaan spelen in het wiskundeonderwijs. Dat zal het onderwijs verbeteren en verdiepen. Bovenal hebben we fantastische mensen ontmoet van wie we hopelijk nog veel gaan zien in het wiskundeonderwijs en met wie en in de toekomst hopen samen te werken.



Netwerken... (vlnr: Carla de Wit, Milou De Block, Stijn Jansen, Lambrecht Spijkerboer, Abimbola Akintounde, Teun Smit, Luuk van der Meulen en Hylke Post)

Noten

- [1] Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques International. (Commission for the Study and Improvement of Mathematics Education). zie: <https://www.cieaem.org/>
- [2] zie: <https://lambrechtspijkerboer.nl/quality-class/> en Thérout, F., Steenbakker, W. Dijk, F. van & Spijkerboer, L. (2020). Quality Class. *Euclides*, 95(5), 35–37.
- [3] zie: https://www.ted.com/talks/chimamanda_ngozi_adichie_the_danger_of_a_single_story

Over de auteurs

Carla de Wit is wiskundedocent bij Curio vavo, Roosendaal en Breda. Milou De Block is wiskundedocent bij het Beatrix College, Tilburg. Beiden volgen hun master opleiding bij Fontys Lerarenopleiding Tilburg. E-mailadressen: carla.dewit@student.fontys.nl en m.deblock@student.fontys.nl



CONFERENTIE OVER DUURZAAMHEIDSDIDACTIEK

LESSEN VOOR EEN HOOPVOLLE TOEKOMST

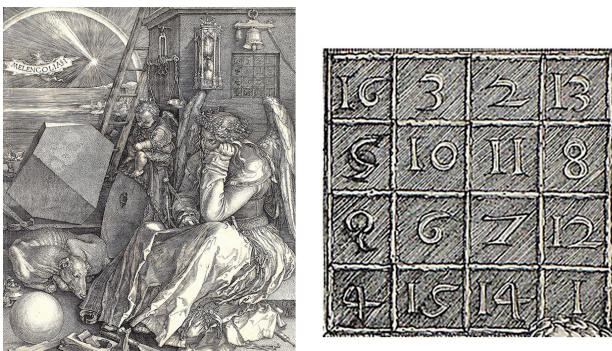
12 APRIL 2024 | HOGESCHOOL UTRECHT



duurzaamheidsdidactiek.nl

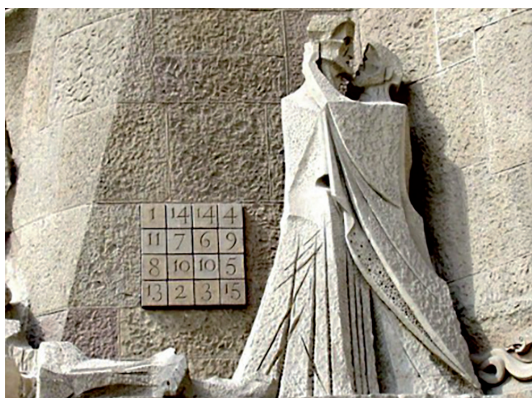
Magisch zo'n vierkant

In het *Nederlands Dagblad* van zaterdag 30 september las ik over het magisch vierkant van Pompeii. Als het over magische vierkanten gaat, denk je de bekendste wel te kennen: het vierkant van Dürer op de gravure *Melancholia*, zie figuur 1.

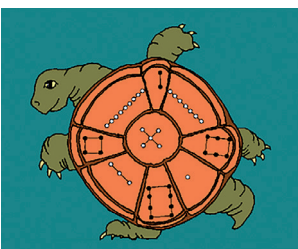


figuur 1

Of het magisch vierkant van Gaudí op de Sagrada Familia in Barcelona, zie figuur 2.



figuur 2



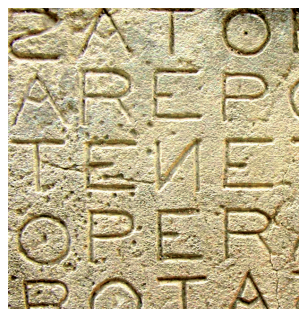
figuur 3

Of uit de Chinese legende van Lo Shu, zie figuur 3.

Dan gaan de herinneringen naar een rekenles in 2 vmbo. De rekenmethode was digitaal en leerlingen waren weinig enthousiast. Maar er moest gerekend worden.

Ik liet toen het magisch vierkant van Gaudí zien en vertelde erover. Ook dat het vreemd was dat er dezelfde

getallen opstonden om zo steeds de som 33, omdat Jezus waarschijnlijk 33 jaar oud was toen hij gekruisigd werd, te krijgen. Maar, vertelde ik, een 3×3 vierkant met de getallen 1 t/m 9 is niet zo moeilijk en ik daagde hen uit dit vierkant te maken. Met enige hulp van mijn kant ontdekten de leerlingen dat de somrij en de kolomrij en de diagonaalrij 15 moet zijn. Daarna was de oplossing snel gevonden. Het systematisch opdelen van 15 over drie getallen hadden ze snel in de gaten. Het was een mooie en voor de leerlingen een spannende les. Ongemerkt hebben ze gerekend.



figuur 4

En dan een magisch vierkant van Pompeii. Ik had er geen actieve herinnering aan en zocht snel op het internet hoe groot dat vierkant is en welke getallen erin staan. Toen herkende ik het toch. Het was geen magisch vierkant zoals ik het me voorstelde, maar een vierkant met woorden, zie figuur 4.

SATOR: de zaaier. In de christelijke traditie staat Sator voor de Schepper.

AREPO: op het veld, op de akker, op een lapje grond.

TENET: houdt vast (werkwoord tenere, derde persoon enkelvoud).

OPERA: door zijn arbeid. Binnen de alchemie staat het voor de Steen der Wijzen die gewoon metaal in goud verandert en de bron is van het Levenselixir.

ROTAS: de wielen. Het Wiel van de tijd of de seizoenen die steeds doordraaien.

Magische vierkanten hoorden voor mij bij de wiskunde, maar ik weet nu dat ik ze oneigenlijk toegeëigend heb.

Over de auteur

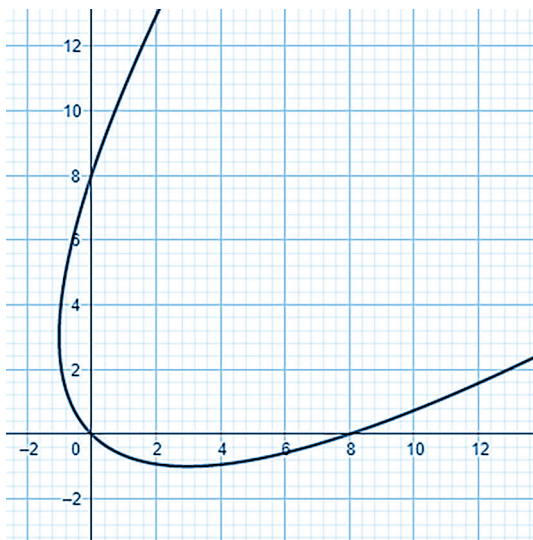
Ab van der Roest is docent wiskunde in ruste.

E-mailadres: a.b.vanderroest@ziggo.nl

Een scheve parabool

Aansluitend op de serie artikelen van Martin Kindt 'De parabool op school' gaat Jan Otto Kranenburg, naar aanleiding van een parameterkromme opgave in 5 vwo, op zoek naar een manier om vergelijkingen te vinden van 'scheve' parabolen. Ofwel: nog meer parabool op school.

Inleiding



figuur 1

Bij de bespreking van een toets in 5 vwo moesten de leerlingen de volgende parameterkromme onderzoeken:

$$\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$$

De figuur was hierbij gegeven. Mijn opmerking over deze figuur 'een scheve parabool' vormt eigenlijk de basis voor dit artikel. Want: wat betekent dat nu in feite? Is er sprake van een brandpunt en een richtlijn? En zo ja, hoe vind je die dan? En waaraan moet bijvoorbeeld een parameterkromme (of vergelijking) voldoen om een scheve parabool te zijn?

Wel of geen functie

Soms is het mogelijk om in een parametervoorstelling de variabele t te elimineren. Er ontstaat dan een vergelijking in x en y , met soms een functie als resultaat.

Dit wordt nu toegepast op bovengenoemde parameterkromme

$$P: \begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$$

Uit $x = t^2 + 2t$ volgt $t^2 + 2t - x = 0$,

$$\text{zodat } t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+x}.$$

Vul nu $t_1 = -1 + \sqrt{1+x}$ in y in, dan

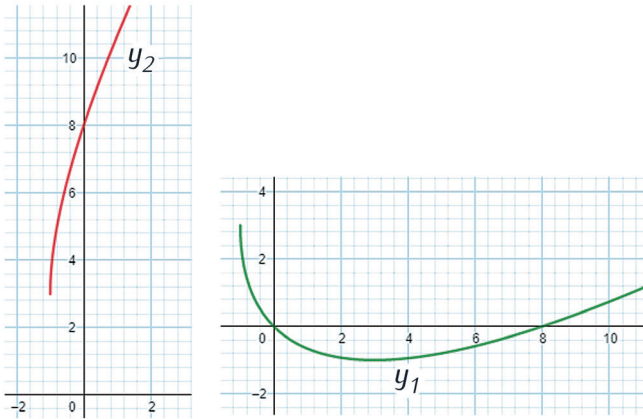
$$y_1 = (-1 + \sqrt{1+x})^2 - 2(-1 + \sqrt{1+x}) = 4 + x - 4\sqrt{1+x}.$$

En nu met $t_2 = -1 - \sqrt{1+x}$ volgt

$$y_2 = (-1 - \sqrt{1+x})^2 - 2(-1 - \sqrt{1+x}) = 4 + x + 4\sqrt{1+x}.$$

Beide formules van y zijn functies, en de twee delen sluiten elkaar voor $t = -1$ aan in het punt $(-1, 3)$.

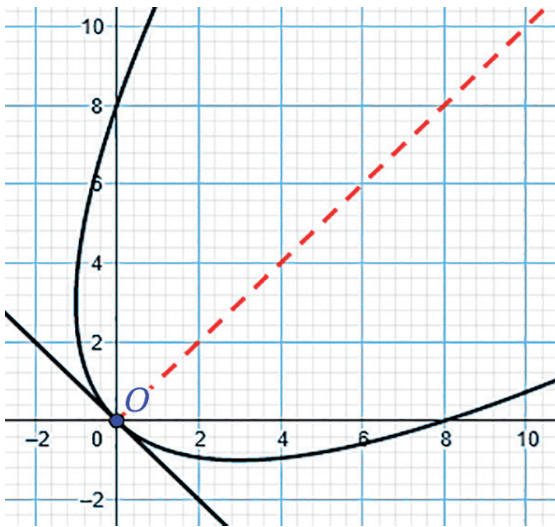
De vermoedelijke scheve parabool bestaat dus uit twee functies, zie figuur 2.



figuur 2

Een eerste onderzoek

Allereerst merk ik op dat de lijn $k: y = x$ een keurige as van symmetrie lijkt, waarop het brandpunt $F(p, p)$ zou moeten liggen, zie figuur 3.



figuur 3

En dat de richtlijn van de vorm $l: y = -x + c$ voor nog te vinden c moet zijn.

Dan zou voor elk punt P van de kromme moeten gelden dat $d(P, F) = d(P, l)$.

Uitgeschreven levert dat:

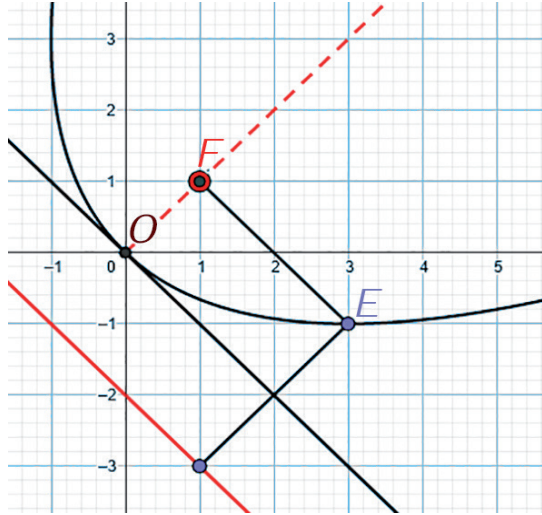
$$\sqrt{(t^2 + 2t - p)^2 + (t^2 - 2t - p)^2} = \frac{|2t^2 - c|}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

Door te proberen neem ik $F(1, 1)$ en $c = -2$ zodat de richtlijn $l: y = -x - 2$ wordt.

Dan blijkt dat de vergelijking (1) juist klopt vanwege

$$2\left(\left((t^2 - 1) + 2t\right)^2 + \left((t^2 - 1) - 2t\right)^2\right) = (2t^2 + 2)^2.$$

Ja, blijkbaar is P een (scheve) parabool, zie figuur 4.



figuur 4

Rotatie(s) en vergelijking(en)

Laat ik eerst een eenvoudig geval bekijken wat er met de standaardparabool $y = x^2$ gebeurt als die gedraaid wordt om O over φ , notatie $R_{O,\varphi}$.

$$\text{Nu is } R_{O,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix};$$

in het bijzonder is

$$R_{O,45^\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } R_{O,90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De standaardparabool $y = x^2$ heeft als brandpunt

$$F\left(0, \frac{1}{4}\right) \text{ en de richtlijn } l: y = -\frac{1}{4}.$$

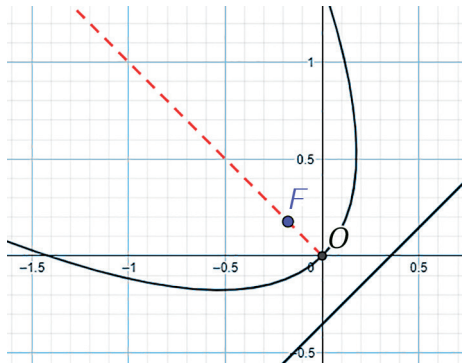
Een eenvoudige parametervoorstelling van

$$y = x^2 \text{ is } \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}.$$

Hierop wordt nu $R_{O,45^\circ}$ toegepast en we krijgen

de scheve parabool van figuur 5 met brandpunt $F\left(-\frac{1}{8}\sqrt{2}, \frac{1}{8}\sqrt{2}\right)$ en richtlijn $l: y = x - \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

$F(-\frac{1}{8}\sqrt{2}, \frac{1}{8}\sqrt{2})$ en richtlijn $l: y = x - \frac{1}{4}\sqrt{2}$, zie figuur 5.



figuur 5

De vergelijking van deze parabool krijg ik door weer $d(P, F) = d(P, l)$ voor $P(x, y)$ uit te rekenen:

$$x^2 + y^2 + 2xy + x\sqrt{2} - y\sqrt{2} = 0.$$

Of anders geschreven: $(x+y)^2 + \sqrt{2}(x-y) = 0$.
Ook voor enkele andere rotaties zet ik een en ander in een schema, zie tabel 1.

Nu probeer ik voor een willekeurige hoek φ de vergelijking te bepalen.

$R_{O,\varphi}$ toegepast op

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$$

levert de gedraaide parabool

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \cdot t - \sin\varphi \cdot t^2 \\ y = \sin\varphi \cdot t + \cos\varphi \cdot t^2 \end{cases}$$

Gebruikmakend van het geroteerde brandpunt

$F'(-\frac{1}{4}\sin\varphi, \frac{1}{4}\cos\varphi)$ en de gedraaide richtlijn

$l': y = \tan\varphi \cdot x - \frac{1}{4}\cos\varphi(1 + \tan^2\varphi)$ levert

(na heel vervelend rekenwerk) de vergelijking:

$$(x + \tan\varphi \cdot y)^2 + \sin\varphi(1 + \tan^2\varphi) \cdot x - \cos\varphi(1 + \tan^2\varphi) \cdot y = 0$$

Hierbij is $\varphi \neq \pm 90^\circ$.

In deze berekening is gebruikt dat $1 + \tan^2\varphi - \cos^2\varphi \cdot (1 + \tan^2\varphi)^2 = 0$.

Rotatie	Brandpunt	Richtlijn	Vergelijking
$R_{O,30^\circ}$	$(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\sqrt{3})$	$y = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot x - \frac{1}{6}\sqrt{3}$	$x^2 + \frac{1}{3}y^2 + \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot xy + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot y = 0$
$R_{O,45^\circ}$	$(-\frac{1}{8}\sqrt{2}, \frac{1}{8}\sqrt{2})$	$y = x - \frac{1}{4}\sqrt{2}$	$x^2 + y^2 + 2xy + x\sqrt{2} - y\sqrt{2} = 0$
$R_{O,60^\circ}$	$(-\frac{1}{8}\sqrt{3}, \frac{1}{8})$	$y = \sqrt{3} \cdot x - \frac{1}{2}$	$x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{3} \cdot xy + 2\sqrt{3} \cdot x - 2y = 0$
$R_{O,90^\circ}$	$(-\frac{1}{4}, 0)$ $x = \frac{1}{4}$	$x = \frac{1}{4}$	$x + y^2 = 0$
$R_{O,-45^\circ}$	$(\frac{1}{8}\sqrt{2}, \frac{1}{8}\sqrt{2})$	$y = -x - \frac{1}{4}\sqrt{2}$	$x^2 + y^2 - 2xy - x\sqrt{2} - y\sqrt{2} = 0$
$R_{O,-90^\circ}$	$(\frac{1}{4}, 0)$	$x = -\frac{1}{4}$	$x - y^2 = 0$

tabel 1

Rotatie	Vergelijking	'Nette' vergelijking
$R_{O,30^\circ}$	$(x + \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot y)^2 + \frac{1}{(\frac{3}{4})}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot y) = 0$	$(x + \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot y)^2 + \frac{2}{3}(x - \sqrt{3} \cdot y) = 0$
$R_{O,45^\circ}$	$(x + 1 \cdot y)^2 + \frac{1}{(\frac{1}{2})}(\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot x - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot y) = 0$	$(x + y)^2 + \sqrt{2}(x - y) = 0$
$R_{O,60^\circ}$	$(x + \sqrt{3} \cdot y)^2 + \frac{1}{(\frac{1}{4})}(\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot y) = 0$	$(x + \sqrt{3} \cdot y)^2 + 2(\sqrt{3} \cdot x - y) = 0$
$R_{O,90^\circ}$	$x + y^2 = 0$	$x + y^2 = 0$
$R_{O,-45^\circ}$	$(x - 1 \cdot y)^2 - \frac{1}{(\frac{1}{2})}(\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot x + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot y) = 0$	$(x - y)^2 - \sqrt{2}(x + y) = 0$

tabel 2

Dat is (eenvoudig) in te zien door de factor $1 + \tan^2 \varphi$ buiten haakjes te brengen. Of anders geformuleerd:

$$(x + \tan \varphi \cdot y)^2 + \frac{1}{\cos^2 \varphi}(\sin \varphi \cdot x - \cos \varphi \cdot y) = 0 \text{ met } \varphi \neq \pm 90^\circ. \quad (2)$$

In tabel 2 staan m.b.v. (2) de vergelijkingen van enkele rotaties in een andere vorm.

Parabolen met O als brandpunt met twee voorbeelden

Parabolen met O als brandpunt en l als richtlijn met vergelijking $ax + by + c = 0$. Voor een punt $P(x, y)$ moet dan gelden dat $d(P, O) = d(P, l)$.

$$d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ en } d(P, l) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Gelijkstellen en kwadrateren levert de volgende vergelijking op:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2abxy - 2acx - 2bcy - c^2 = 0.$$

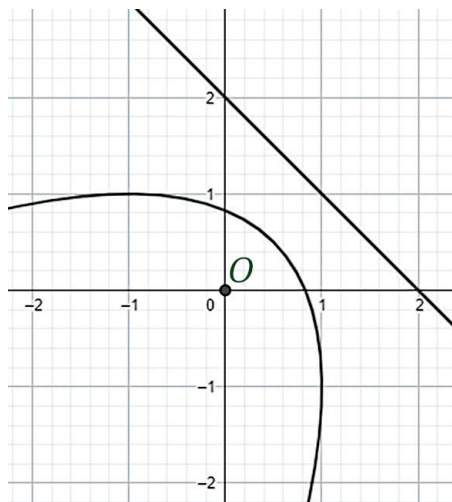
Of liever:

$$(bx - ay)^2 - 2c(ax + by + \frac{1}{2}c) = 0. \quad (3)$$

Neem nu als voorbeeld $a = b = 1$ en $c = -2$. De richtlijn is dan $x + y - 2 = 0$. De vergelijking van de scheve parabool wordt dan $x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 4y - 4 = 0$.

Of met behulp van (3) :

$$(x - y)^2 + 4(x + y - 1) = 0, \text{ zie figuur 6.}$$



figuur 6

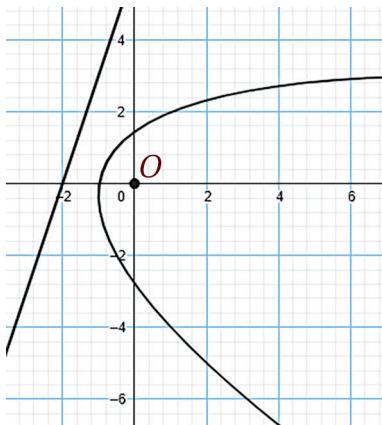
Neem $a = 3$ en $b = -1$ en $c = -6$. De richtlijn is dan $3x - y + 6 = 0$. De vergelijking van de scheve parabool wordt dan

$$x^2 + 9y^2 + 6xy - 36x + 12y - 36 = 0.$$

Anders:

$$(x + 3y)^2 - 12(3x - y + 3) = 0, \text{ zie figuur 7.}$$

>



figuur 7

Historie scheve parabool

Voor zover mij bekend is dit onderwerp zelden aan de orde gesteld. In examenjaar 2017 tijdvak 2 (Pilot) is er een opgave geweest over een scheve parabool. Het ging om

$$\begin{cases} x = at^2 + t + 1 \\ y = at^2 - t + 1 \end{cases} \quad \text{met } a > 0$$

waarbij de kandidaten twee vragen moesten beantwoorden.

Een vraag ging over een berekening over de minimale snelheid als $a = 3$ en de tweede vraag betrof de kwestie voor welke waarde van a het punt P zich op precies één tijdstip op de x -as zou bevinden.

Het zou in een examen te ver voeren om te bewijzen dat P een scheve parabool is; wel is makkelijk na te gaan dat er een kwadratisch verband tussen x en y bestaat:

$$a(x-y)^2 - 2(x+y) + 4 = 0.$$

Eerstgenoemde parabool

We keren terug naar de parabool P van het begin van dit artikel. Het is dus mogelijk om een vergelijking van P te maken:

Uit $y - (4+x) = \pm 4\sqrt{1+x}$ volgt

$$(y - (4+x))^2 = 16(1+x)^2.$$

Haakjes uitwerken geeft

$$x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y = 0.$$

Of in een andere vorm:

$$(x-y)^2 - 8(x+y) = 0. \quad (4)$$

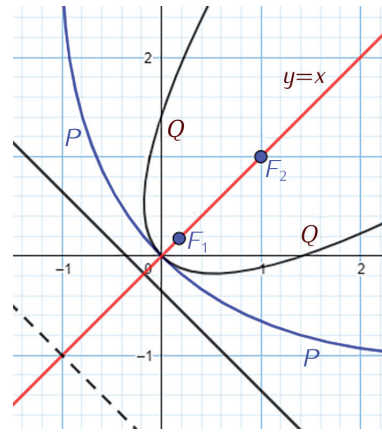
De vorm lijkt op de gedraaide (over -45°) standaardparabool die volgens het tweede schema de volgende vergelijking heeft:

$$(x-y)^2 - \sqrt{2}(x+y) = 0.$$

Noem deze parabool gemakshalve Q .

Blijkbaar is niet de standaardparabool gedraaid, maar wel een parabool die vanuit de x -as (of eventueel vanuit de

y -as) met een factor k is vermenigvuldigd. Reden waarom het interessant is te weten wat er met een parabool als $y = k \cdot x^2$ gebeurt als die gedraaid wordt om O over -45° , zie figuur 8.



figuur 8

De parabool

$$P_k: \begin{cases} x = t \\ y = k \cdot t^2 \end{cases}$$

heeft brandpunt $F_k(0, \frac{1}{4k})$ en richtlijn $l_k: y = -\frac{1}{4k}$.

Pas ik nu de rotatie $R_{O,\varphi}$ toe op P_k , dan wordt het brandpunt

$$F'_k(-\frac{1}{4k} \sin \varphi, \frac{1}{4k} \cos \varphi)$$

$$l'_k: y = \tan \varphi \cdot x - \frac{1}{4k \cdot \cos \varphi}.$$

De punten (x, y) die gelijke afstand tot F'_k en l'_k hebben, moeten voldoen aan:

$$(x + \tan \varphi \cdot y)^2 + \frac{1}{k \cdot \cos \varphi} (\tan \varphi \cdot x - y) = 0. \quad (5)$$

Neem nu $\varphi = -45^\circ$, dan voldoet (5) aan

$$(x-y)^2 - \frac{\sqrt{2}}{k}(x+y) = 0.$$

Vergelijk ik dit resultaat met (4) dan volgt uit $\frac{\sqrt{2}}{k} = 8$ dat $k = \frac{1}{8}\sqrt{2}$.

Dus is de parabool

$$\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = t^2 - 2t \end{cases}$$

ontstaan door $y = \frac{1}{8}\sqrt{2} \cdot x^2$ te draaien om O over -45° .

Over de auteur

Jan Otto Kranenburg was docent wiskunde op het Carolus Clusius College te Zwolle.

E-mailadres: jokranenburg@hotmail.com.

Olympiadepuzzel 99-5

Kralenkettingen

Esther Bod

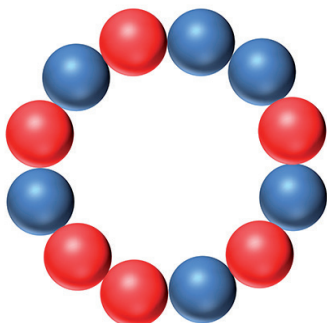


De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor leerlingen van havo en vwo. Alle leerlingen van klas 1 t/m 5 met

belangstelling voor wiskunde kunnen meedoen aan de eerste ronde. Deze wordt altijd in januari gehouden op alle deelnemende scholen. De speelse maar uitdagende opgaven testen je creativiteit en wiskundig inzicht. Meer informatie is te vinden op www.wiskundeolympiade.nl.



Renske wil een kralenketting maken van zes rode en zes blauwe kralen. Ze gebruikt alle twaalf kralen en zorgt ervoor dat er nergens drie kralen met dezelfde kleur naast elkaar zitten. Hoeveel verschillende kettingen kan ze maken?



figuur 1

De beide uiteinden van de ketting sluiten op elkaar aan. Ga ervan uit dat de ketting een perfecte cirkel vormt en dat alle opeenvolgende kralen op gelijke afstand zitten. Kettingen die in elkaar overgaan door de ketting te spiegelen (oftewel in de ruimte om te draaien) en/of alle kralen cyclisch door te schuiven, beschouwen we als gelijk.

Inzenden oplossingen

Stuur je oplossing uiterlijk 13 april naar euclides@wiskundeolympiade.nl. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een cadeaubon van € 20,-.

Terugblik puzzel nr. 99-3

In de opgave van vorige keer was een kerstboom van cirkels gegeven met daarbij de vraag om de omtrek van de boom te berekenen. Door te gebruiken dat alle cirkels in het inwendige van de boom precies zes andere cirkels raken, kan bepaald worden welke delen van de cirkels aan de buitenkant van de boom liggen. Maar pas op, er zit een addertje onder de kerstboom. De cirkels in het groene gedeelte van de boom grenzen aan elkaar in een zeshoekig patroon, maar de cirkels van de stam liggen in een vierkant patroon. Hierdoor zijn de cirkels op de overgang van stam naar boom anders dan de rest. Hiermee rekening houdend, blijkt de kerstboom een omtrek van 23π te hebben.

Met dank aan oud-olympiadedeelnemers Aimée Jacobs en Kati Overbeeke voor het nakijken van de inzendingen.

De juiste oplossing (inclusief toelichting) is te vinden op de website, samen met de namen van de dertien inzenders die deze oplossing gevonden hadden. De cadeaubon van deze editie gaat naar Kenneth Halman.



vakbladeuclides.nl/995olympiadepuzzel

De eerste ronde van de Wiskunde Olympiade heeft van 22 januari tot en met 2 februari plaatsgevonden op alle deelnemende scholen. Hierbij hebben de leerlingen hun tanden gezet in verrassende en uitdagende wiskundeopgaven, waar nauwelijks voorkennis voor vereist is.

Ongeveer 900 leerlingen hebben zich geplaatst voor de tweede ronde. Daarvoor zijn ze op 15 maart te gast op een van de twaalf universiteiten. Na afloop zijn de opgaven en uitwerkingen te vinden in het wedstrijdarchief op www.wiskundeolympiade.nl. Er zijn drie categorieën: onderbouw, vierde klas en vijfde klas. Per categorie zullen ongeveer veertig leerlingen uitgenodigd worden voor de finale in september. Wie deze winnaars van de tweede ronde zijn, wordt begin april bekend gemaakt.

Platform Wiskunde Nederland huldigt Wiskunde Olympiërs



V.l.n.r.: Lance Bakker, Daan de Groot, Hylke Hoogeveen, Jan Karel Lenstra, Mads Kok, Bas Capel

Tijdens de jaarlijkse prijsuitreiking van de Nederlandse Wiskunde Olympiade in november jl. heeft Jan Karel Lenstra namens Platform Wiskunde Nederland het succesvolle Nederlandse team gehuldigd. Alle leden van het team behaalden een medaille. Twee leden van het team, Hylke Hoogeveen en Mads Kok, schreven in nr. 3 over hun oplossing van een van de vraagstukken. Op de foto staat het Nederlands zestel met Jan Karel Lenstra in hun midden.

Bron: www.platformwiskunde.nl

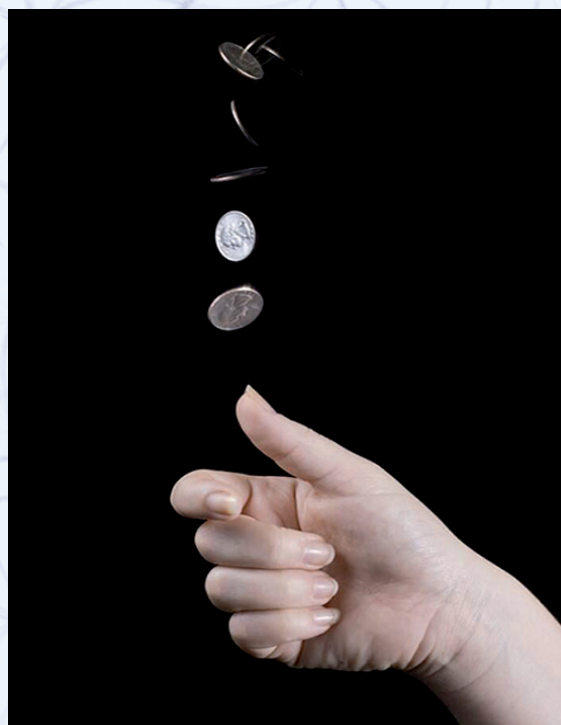
Kop of munt is niet helemaal eerlijk

Als je een muntje opgooit, is de kans op kop altijd 50 %, toch? Dat zou je denken, maar er is steeds meer bewijs voor dat dit in de echte wereld niet het geval is. In 2007 publiceerden onderzoekers een theorie over de toss. Wanneer je een munt opgooit, stelden ze, geeft je duim de munt een lichte wiebeling. Door die wiebeling is de munt in de lucht langer met één kant naar boven gericht. Dat vergroot de kans dat de munt ook met die kant boven neerkomt.

De onderzoekers voorspelden dat een munt ongeveer 51 % van de keren landt met dezelfde kant naar boven gericht als toen hij werd opgegooid.

Nu heeft statisticus František Bartoš van de Universiteit van Amsterdam met een team van 49 anderen de meest robuuste test van deze theorie tot nu toe uitgevoerd. Hij verzamelde tientallen vrienden en collega's voor een marathon-tossessie.

De tossers gooiden in totaal 350757 keer een muntje op.



Ze gebruikten munten van 46 verschillende munteenheden en waarden. Ze registreerden de oriëntatie van de munt voor en na het opgooien. Hun bevindingen bevestigden het oorspronkelijke vermoeden: in 50,8 % van de gevallen landde de munt op dezelfde kant als waarop die was begonnen.

Wel waren er grote verschillen tussen de opgooiers. Bij één persoon landde de munt in maar liefst 60,1 % van de gevallen op dezelfde kant als waarop die was begonnen. Bij iemand anders kwam de munt in slechts 48,7 % van de gevallen op deze manier terecht. Volgens de onderzoekers genereert elk persoon een andere hoeveelheid draaiing buiten de gewone draai-as. Meer draaiing zorgt voor meer wiebelen en een grotere kans dat de munt in de beginpositie eindigt.

Bron: www.newscientist.nl

Nieuwe expertisepunten voor rekenen-wiskunde en voor digitale geletterdheid

Demissionair minister Paul heeft op 17 november jl. het startsein gegeven voor het online Expertisepunt Rekenen-Wiskunde. Het expertisepunt moet de kwaliteit van het reken-wiskundeonderwijs bevorderen. Op 22 november volgde het Expertisepunt digitale geletterdheid. Als onderdeel van het Masterplan basisvaardigheden bieden de expertisepunten informatie, inspiratie en prakti-



sche tips om met deze leergebieden aan de slag te gaan. Ze zijn er voor primair, voortgezet en gespecialiseerd onderwijs, aan het mbo en aan (leraren)opleidingen. Kennisnet en slo ontwikkelden het Expertisepunt digitale geletterdheid samen

met verschillende onderwijspartners. Het Expertisepunt rekenen-wiskunde wordt uitgevoerd door het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en de vakinhoudelijke verenigingen voor wiskunde (NVvW) en rekenen (NVORWO).

Het Expertisepunt rekenen-wiskunde kent vier speerpunten: kennis koppelen, landelijke onderzoeksinfrastructuur, ondersteuning van de professional en ontwerponderzoek.

Meer weten of op de hoogte blijven? Zie onderstaande bron of <https://exprw.nl/contact/>

Bron: <https://www.vo-raad.nl/nieuws/nieuwe-expertisepunten-voor-rekenen-wiskunde-en-voor-digitale-geletterdheid>

Betere ondergrens bolstapelingen in hogere dimensies

Bollen stapelen in drie dimensies gaat het efficiëntst door eerst een laag neer te leggen in een honingraatvormig rooster, vervolgens een tweede laag door de bollen in de kuiltjes van de eerste laag te leggen en dit laag na laag te herhalen. De door de bollen ingenomen ruimte, de dichtheid, is ongeveer 74% (exact: $\pi/\sqrt{18}$). Johannes Kepler vermoedde dit al in 1611, pas in 1998 werd het bewijs geleverd door de Amerikaan Thomas Hales.

En in hogere dimensies? In vier dimensies kunnen bollen gestapeld worden met een dichtheid van bijna 62% ($\pi^2/16$), de bollen bevinden zich dan in een vierdimensionaal rooster. Een betere regelmatige stapeling bestaat niet, maar het is nog onbewezen of er een onregelmatig rooster bestaat met een dichtere *pakking*. Voor dimensies vijf, zes en zeven hebben de best bekende bolpakkingen dichtheden van ongeveer 47%, 37% en 30%. Ook nu is onduidelijk of het efficiënter kan. In dimensie 8 is dat wel bekend: in 2016 bewees de Oekraïense Maryna Viazovska dat

de beste stapeling een dichtheid heeft van ongeveer 25% ($\pi^4/384$). Voor nog hogere dimensies zijn alleen onder- en bovengrenzen bekend. Eenvoudig te bewijzen is de ondergrens $1/2^n$ voor elke dimensie n . In december jl. zetten Marcelo Campos, Matthew Jenssen, Marcus Michelen en Julian Sahasrabudhe een artikel online met een betere ondergrens: voor elke 'voldoende hoge' dimensie n bestaat een stapeling van even grote bollen met een dichtheid die 'een factor in de orde van grootte van de logaritme van n ' beter is dan de dichtheid die tot nu toe de beste ondergrens was.

Het artikel is nog niet beoordeeld, maar experts zijn enthousiast.

Bron: NRC 29 december 2023.

Wat je allemaal kunt doen met een Einstein

De ontdekking vorig jaar van de zogenaamde *Einstein* was voor het National Museum of Mathematics in New York en het United Kingdom Mathematics Trust in Londen reden om samen een wedstrijd te organiseren, waarbij het publiek gevraagd werd naar hun meest creatieve vertolkingen van een Einstein. Ze ontvingen 245 inzendingen uit 32 landen. Drie winnaars ontvingen ieder 5000 pond, negen overige finalisten kregen 1000 pond. David Smith, de ontdekker van de Einstein en een van de juryleden, was 'gefascineerd door de diversiteit en het hoge niveau van alle deelnemers'.

Onder de inzendingen onder andere een tweetal varianten op Tetris, ravioli, koekjes, sandwiches, origami-Einsteins van dollarbiljetten, quilt patchwork en keramiektegels.

Bron: www.nytimes.com/2023/12/10



Verslag van een workshop op NWD 2023

Samen meetkundige draadmodellen bouwen

Draadmodellen van wiskundige lichamen levensgroot en gezamenlijk construeren van meterslange rondhouten: levert dat een meerwaarde op voor het doorzien van deze ruimtefiguren? Een verslag van een workshop die Alik Palatnik hierover gaf op de vorige NWD.

Inleiding

Het bouwen van grootschalige structuren is een grote uitdaging voor mensen, getuige ook het verhaal over de toren van Babel. De geschiedenis van de bouwkunde laat echter ook zien dat we in staat zijn lering te trekken en hierin steeds beter te worden. Centraal in de workshop staat de vraag 'Hoe kunnen we het begrip van wiskunde stimuleren door samen te bewegen en te voelen?' Tijdens de workshop krijgen de deelnemers een bouwpakket met materialen die eenvoudig aan te schaffen zijn bij bouwmarkten, bestaande uit rondhout, flexibele slangetjes en tie wraps. De verbindingstukken kunnen vooraf worden gemaakt; snijd de flexibele slangetjes in stukken van minstens 10 cm en verbind drie stukken met een plastic tie wrap in het midden aan elkaar, zie figuur 1.



figuur 1 Het bouwpakket met gebruikte materialen: 32 stuks rondhout met een lengte van 90-100 cm en diameter 8-10 mm en 14 verbindingstukken

Constructie en verkenning

Er werken twee groepen van ongeveer tien docenten aan een activiteit met als titel 'Het mysterie van een verborgen (geometrisch) lichaam'. Zoals de meeste activiteiten van dit type ^{[1], [2]}, bestaat ook deze activiteit uit twee fasen. De eerste fase is gewijd aan de constructie van een model en de tweede aan de verkenning van het model.



figuur 2 Bouw en verkenning van het model op menselijke grootte

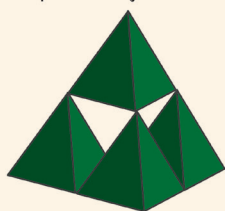
Constructiefase: De deelnemers krijgen in groepen een bouwpakket en een werkblad. Op basis van een beschrijving en een tweedimensionale bouwtekening van een geometrisch lichaam, moet een draadmodel op menselijke grootte worden gebouwd. Het werkblad zie je in figuur 3.

Jullie team moet met behulp van het bouwpakket een driedimensionaal model construeren van het volgende veelvlak. Het veelvlak heeft de volgende eigenschappen:

- Alle zijvlakken zijn gelijkzijdige driehoeken met dezelfde maat.
- Bij elk hoekpunt komen evenveel ribben samen.



Het veelvlak dat je hebt geconstrueerd is een tetraëder. Construeer een vergelijkbaar veelvlak met zijden die twee keer zo lang zijn dan het oorspronkelijke veelvlak, zoals in de afbeelding.



figuur 3 werkblad

Let op het contrast tussen afgedrukte tweedimensionale beelden, die klein en niet transparant zijn, en gemaakte 3d-modellen, die veel groter en transparant zijn. Dit samenspel van dimensies, medium, materiaal, grootte en transparantie stuurt de activiteit.

Verkenningfase: Nadat de constructie klaar is, gaan we verder met de verkenningfase. Wat levert de bouw van de 3d objecten op, welke wiskundige concepten komen aan de orde? De vragen die deze activiteit oproept, behoren tot verschillende gebieden van de wiskunde. Veel vragen gaan natuurlijk over de ruimtelijke meetkunde:

- Als je de volumes van de grote en de kleine tetraëders die je hebt gebouwd vergelijkt, wat is dan de verhouding van hun volumes? Hoe kun je het antwoord toelichten?
- De grote tetraëder bestaat uit meerdere kleine tetraëders. Kun je de driedimensionale vorm beschrijven die daartussen 'gevangen' zit?
- Als we het volume van een kleine tetraëder als volume-eenheid gebruiken, wat is dan het volume van deze 'vrijgemaakte' vorm?

Er zijn ook vragen die leerlingen kunnen richten op meer algebraïsche aspecten, bijvoorbeeld het genereren van reeksen:

- Hoeveel staven en 'hoekpunten' heb je gebruikt voor de kleine tetraëder? En voor de grotere?
- De eerste tetraëder die je hebt gebouwd heeft één niveau. De tweede heeft twee niveaus. Hoeveel staven en ringen zou je nodig hebben om een tetraëder van drie niveaus te bouwen? Kun je je antwoord generaliseren?

"Het perspectief op een meetkundig object kan verrassen."

Verrassende ontdekkingen

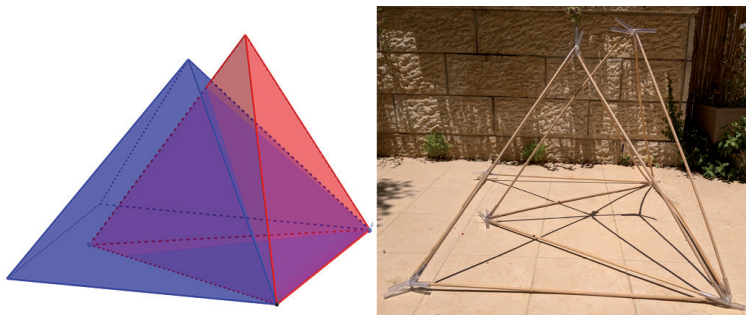
Laten we terugkeren naar de eerste reeks vragen. Deze hebben te maken met vorm, ruimte en volume. De verkenning levert de deelnemers aan de workshop in ieder geval twee verrassende ontdekkingen op. Ten eerste, in tegenstelling tot wat sommige deelnemers aanvankelijk dachten, is de vorm tussen de vier tetraëders geen extra tetraëder (die naar beneden wijst). Het is moeilijk om de vorm van de binnenruimte waar te nemen wanneer het model op zijn basis staat. De verborgen octaëder onthult zichzelf echter nadat deelnemers het model kantelen zodat het op de rand staat en ze het in deze positie vasthouden, zie figuur 4.



figuur 4 De binnenruimte 'ontmaskerd'

De tweede verrassing heeft te maken met het berekenen van het volume van de binnenste vorm. De deelnemers ontdekken twee manieren om het volume van de grote tetraëder te berekenen. Allereerst door acht keer het volume van de oorspronkelijke tetraëder te berekenen en vervolgens het volume van de vier tetraëders, die de vorm begrenzen, ervan af te trekken. Zo kom je tot de conclusie dat het volume van de octaëder vier keer het volume is van een tetraëder met dezelfde zijde. Hoewel de berekening nauwkeurig en ondubbelzinnig is, lijkt dit in tegenspraak met onze visuele intuïtie over volumes.

Daarna volgde een tweede manier. Door het probleem te reduceren tot het vergelijken van de volumes tussen regelmatige driezijdige piramide (tetraëder) en de regelmatige vierzijdige piramide, dit is immers de helft van een octaëder. Het blijkt nog steeds moeilijk om de verhouding van de volumes goed te schatten, zie figuur 5.



figuur 5 Vergelijken van volumes van regelmatig driezijdige en vierzijdige piramides

De verkenningsfase van de activiteit tijdens de workshop wordt gevolgd door mijn favoriete vraag: Welke andere vragen kunnen we stellen over dit veelvlak? De verscheidenheid aan problemen die deelnemers in dit stadium aan de orde stellen is enorm. De probleemstellingen variëren van wiskunde op middelbare schoolniveau, zoals de berekening van hoeken tussen verschillende vlakken en oppervlaktes, toegepaste problemen met betrekking tot de voorbereiding van het bouw pakket (bij benadering: wat is de totaal benodigde lengte pvc-pijp voor vier van dergelijke sets?) tot vragen op gevorderd niveau, waaronder mogelijke toepassingen van het principe van Cavalieri^[3] en de invariant van Dehn^[4] op de probleemstelling.

Gezamenlijk bouwen

Door de activiteit van het samen bouwen formuleren de docenten (en ook leerlingen) een gezamenlijk geformuleerd doel, nog zonder dat ze weten hoe ze het probleem moeten aanpakken. De activiteit heeft zowel wiskundige, materiële als sociale aspecten. Wanneer we gezamenlijk

iets bouwen, worden onze acties beïnvloed door individuele wiskundekennis en de wiskundekennis van de groep, en tegelijkertijd worden deze beperkt door de acties van anderen en de fysieke eigenschappen van het model. Het groeiend ruimtelijke model biedt deelnemers een steeds veranderend perspectief. Uit eerdere ervaring met leraren en studenten in Israël weet ik dat, om te slagen, deelnemers hun acties moeten coördineren en goed communiceren (de verschillende aspecten in het duiden van specifieke eigenschappen van het groeiend model moeten wederzijds goed worden verhelderd).

In de afsluitende discussie wordt besproken hoe ideeën achter deze activiteit in de klas gebruikt kunnen worden. Met elkaar wordt gebrainstormd over de oorspronkelijke vraag, namelijk: hoe kunnen we het begrip van wiskunde stimuleren door samen te bewegen en te voelen?

Suggesties en reacties van docenten

Op de vraag hoe deze activiteit aansluit op wat docenten gebruiken in hun eigen lessen kwamen de volgende voorbeelden:

- 'In mijn onderwijs gebruik ik observeren-voorspellen-uitleggen, wiskunde verbinden met de echte wereld, samenwerken, verschillende argumenten vergelijken'.
- 'Bouwen met echte materialen. Maar de materialen die ik gebruik zijn veel kleiner en alleen om aan de leerlingen te laten zien'.

Wat heeft verrast in deze workshop en heb je niet eerder gebruikt in je eigen lessen levert de volgende reacties op:

- 'Het perspectief op een meetkundig object kan verrassen.'
- 'Grote modellen maken wiskunde leuker! Tegelijkertijd maakt het het begrip van volumevergroting en oppervlakte als iets dat onderzocht kan worden in plaats van uitgelegd'.
- 'Meestal laat ik het op de computer zien, maar een actieve vorm is beter dan computersimulatie. Het stimuleert de hersenen ook op een andere manier.'

Tot slot stellen we aan de orde: op welke manier vormt deze activiteit een uitdaging op wat zijzelf verstaan onder wiskunde doen/leren:

- 'Ja, redeneren plus 'embodied wiskunde'. Ik ben geïntrigeerd door het probleem: ik wil een alternatief bewijs vinden voor de bepaling van het volume.'
- 'Ja, het zet je aan het denken over hoe vormen er eigenlijk uitzien in drie dimensies, en door de materialen is het gemakkelijk om ze te vervormen of om te draaien om het begrip van de ruimte te vergroten.'

Tot slot

De co-constructieactiviteiten voor het zogenaamde *embodied* leren van wiskunde ^[5] is een lopend internationaal ontwerpgericht onderzoeksproject. Ons team werkt graag mee aan suggesties voor nieuwe activiteiten, verhalen over het implementeren van deze en andere activiteiten in de klas en in professionaliseringsbijeenkomsten. Graag delen we onze activiteiten en bevindingen met docenten ook weer tijdens een volgende NWD. Met dank aan Joke Daemen en Anna Shvarts voor de vertaling.

Noten

- [1] Palatnik, A. & Abrahamson, D. (2022). Escape from Plato's cave: An enactivist argument for learning 3D geometry by constructing tangible models. In G. Bolondi, F. Ferretti, & C. Spagnolo (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*, pp.742 –749. Bolzano, Italy: ERME. <https://shorturl.at/EQRT0>.
- [2] Palatnik, A. (2022). Students' exploration of tangible geometric models: Focus on shifts of attention. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.). *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 275–282.
- [3] Twee objecten met dezelfde hoogte en met, op elke hoogte, een dwarsdoorsnede met dezelfde oppervlakte, hebben een gelijk volume. Weisstein, Eric W. "Cavalieri's Principle." From MathWorld – A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/CavalierisPrinciple.html>
- [4] Een veelvlak kan worden opgesplitst en samengevoegd tot een ander veelvlak, wanneer ze beide hetzelfde volume en dezelfde Dehn invariant hebben. Weisstein, Eric W. "Dehn Invariant." From MathWorld – A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/DehnInvariant.html>
- [5] Shvarts, A. (2022). Leer wiskunde zoals je leert fietsen: Een embodied benadering van onderwijstechnologieën. *Euclides*, 97(5), 48–52.

Over de auteur

Alik Palatnik is docent wiskunde en vakdidactiek aan de Shlomo (Seymour) Fox School of Education, Hebrew University Jerusalem. Daarvoor was hij veertien jaar docent wiskunde in het vo. E-mailadres: alick.palatnik@mail.huji.ac.il

Pi op onverwachte plaats

Henk Rozenhart



Wandelend in Almere en lopend over een brug boven een ondergrondse parkeergarage keek ik naar beneden en trof daar tot mijn verrassing het volgende beeld aan. Blijkt er een pad te zijn dat twee parkeergarages met elkaar verbindt. Niet verrassend is dat dat pad het Pi-pad heet. Maar waarom?



COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Hugo Duivesteijn, voorzitter
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck
Constantijn Tilanus

Inzenden bijdragen

Tom Goris,
Molenbochtplein 38, 5014 EJ Tilburg
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvbw.nl

Voorzitter

Wim Caspers
E-mail: w.caspers@nvbw.nl

Secretaris

Els Franken
E-mail: e.franken@nvbw.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06 21 50 96 79 E-mail: ledenadministratie@nvbw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau, Tel. 0345 531 324
E-mail: evers.rechtspositie@gmail.com
Vermeld bij je contact je lidnummer en telefoonnummer.

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt met ingang van 1 augustus 2023

- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 72,50
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 75,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 90,00
Instituten en scholen: € 160,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal,
Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2024

Do
21/03

LANDELIJK

Op de scholen: W4Kangoeroewedstrijd, wereldwijde wiskundewedstrijd
Organisatie: Stichting Wiskunde Kangoeroe

Wo
27/03

NIUWEGEIN

Conferentie Rekenen-wiskunde, overgang van PO naar VO
Organisatie: NVORWO, NVvW en SLO

Vr
05/04
Za
06/04

NOORDWIJKERHOUT

Nationale Wiskundedagen
Organisatie: Freudenthalinstituut

Vr
12/04

UTRECHT

Conferentie voor duurzaamheidsdidactiek.
Lessen voor een hoopvolle toekomst
Organisatie: Hogeschool Utrecht

Vr
23/08
Za
24/08

AMSTERDAM EN ANTWERPEN

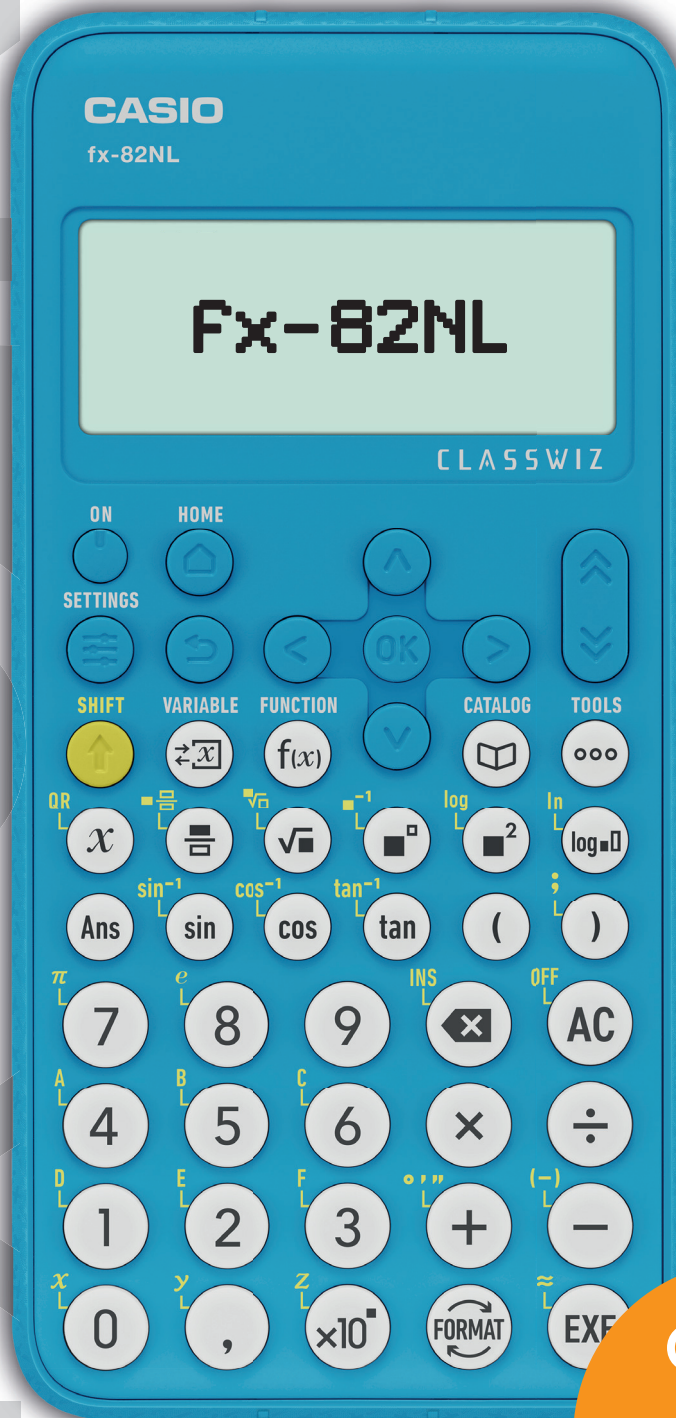
Vakantiecursus wiskunde voor leraren
Thema: Banach-Tarski: hoe groepentheorie van één meloen er twee maakt
Organisatie: Platform Wiskunde Nederland

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook vakbladeuclides.nl

JAARGANG 99

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
6	1 mei 2024	26 februari 2024
7	19 juni 2024	22 april 2024

CASIO®



Opvolger van:
fx-82MS
fx-82EX

**Voor Nederlands
curriculum gemaakt**

I  WISKUNDE

Kijk op ilovewiskunde.nl

