Puzzel 99-2 **Wobien Doyer**
Zijn alle getallen maakbaar? **Lieke de Rooij**

Wellicht is het Collatz vermoeden bekend. Daar stop je een willekeurig getal in een “machientje” die dan volgens recept een nieuw getal uitspuugt. Door het proces te herhalen ontstaat een rij getallen die altijd op 1 lijken te eindigen. Het recept is simpel: Een even g wordt $g/2$ en een oneven getal g wordt $3g$ +1. Vooralsnog is dit niet bewezen en dat gaan wij ook niet proberen. Onze puzzel gaat over iets dergelijks, met een ander recept waar echter wel keuzemogelijkheden in zitten.

De vraag die we aanvankelijk stellen is: Kan je vanuit een gegeven geheel positief startgetal *s* alle positieve gehele getallen *n* maken? In dat geval noemen we alle getallen *n* maakbaar vanuit *s*.

We noteren het resultaat met een rij $h(0)$=*s*, $h(1)$, $h(2)$,....,*n*.

We kiezen voor de eerste 4 opgaven voor $h(0)$=***s*=4.**

Recept A: van *s* naar *n* met getal *h*(*i*) naar *h*(i+*1*) met keuzemogelijkheden.

a) $h(i+1) = h(i)/2$ mits $h(i)$ even is..

b) $h(i+1) = h(i) * 10$ dus plak een 0 achter $h(i)$.

c) $h(i+1) = h(i) * 10 + 4$ dus plak een 4 achter $h(i)$.

Je mag steeds kiezen uit a), b) of c), hoewel a alleen kan als het getal even is.

Een voorbeeld met *n*=51: 4, 2, 20, 204, 102, 51 maar ook bijvoorbeeld 4,40,20,204,102,51.

We zeggen dat *n* **maakbaar** is als het bereikbaar is met dit recept. Het getal 51 is dus maakbaar en ook alle andere getallen in die rijtjes. En wij beweren dat alle getallen maakbaar zijn. En we vragen dat te bewijzen.

Stelling: Elk positief geheel getal *n* is maakbaar met startgetal *s*=4.

Eerst wat proberen:

Opgave 1: Onderzoek of *n*=38 en *n*=99 maakbaar zijn. Zo ja hoe?
Uitwerking opgave 1:

38: 4, 2, 24, 12, 6, 60, 30, 304, 152, 76, 38.
99: 4, 2, 20, 10, 5, 50, 504, 252, 126, 1264, 632, 316, 158, 1584, 792, 396, 198, 99.

Om te onderzoeken of een getal *n* maakbaar is kan het handig zijn de omgekeerde route te volgen.

Voor *n*=51 kan je dan krijgen: 51,102, 204, 20, 2, 4, of bijvoorbeeld 51,102, 204, 20, 40, 4.

We noemen die rijtjes: $t(0)$=*n*, $t(1)$, $t(2)$,.....,*s*? (Niet *h* van heenweg, maar *t* van terugweg.)

Om de stelling te bewijzen kunnen we eerst aantonen dat je vanuit elk positief geheel getal $n > 4$ altijd een omgekeerd rijtje kan maken waarin een getal verschijnt dat kleiner is dan n.

Omgekeerd recept:

Recept B:van *n* naar *s* met getal *t*(*i*) naar *t*(*i*+1) met keuzemogelijkheden:

a) $t(i+1) = t(i) * 2$. Dat mag altijd.

b) Als $t(i)$ op een 0 eindigt: $t(i+1) = \ t(i)/10$.

c) Als $t(i)$ op een 4 eindigt: $t(i+1) = \{\ t(i) - 4\}/10$, behalve als $t(i)=4$, want we willen alleen positieve getallen.

Dus ook hier zijn keuzemogelijkheden.

Lemma: Voor elke $n > 4$ kan je in het rijtje $t(i)$ met recept B altijd een getal krijgen dat kleiner is dan n.

Voor het bewijs van het lemma gebruiken we recept B .

Opgave 2a: Laat zien dat elk getal $t(i)>4$ (dus ook $t(0)=n$) dat eindigt op 0, 2, 4, 6 of 8, met recept B altijd een getal kan opleveren kleiner dan $t(i)$.

Uitwerking opgave 2a.
Voor elk even eindcijfer kiezen we een passende serie bewerkingen vanaf $t(i)>4$ en noemen het resultaat *p.* We gebruiken daarbij niet alle mogelijkheden uit recept B: we gebruiken a) alleen als het niet anders kan. Daarmee zijn er dus geen keuzemogelijkheden meer. Het zal blijken dat in (bijna) alle gevallen dan geldt: $p < t(i)$.
De “passende bewerkingen” bestaan dan uit al of niet een aantal keren a) , gevolgd door één keer ofwel b) ofwel c). We noemen dit een traject beginnend bij $t(i)$ en eindigend bij opvolger p.
In onderstaande tabel vind je in de de kolommen achtereenvolgend:
- een even eindcijfer,
- het startpunt $t(i)$,
- het aantal keren d dat je moet verdubbelen voordat het eindcijfer 0 of 4 is, dus $t(i) \cdot 2^d$
- het getal $t(i+d)$ na d maal verdubbelen,
- het eindpunt ofwel $p = \frac{t(i+d)}{10}$ ofwel $p = \frac{t(i+d)-4}{10}$,
- de verhouding $\frac{p}{t(i)}$
- en het aantal stappen d+1 dat nodig was.

Uit de één na laatste kolom is direct af te lezen dat voor elk even begincijfer het eindgetal kleiner is dan dat begingetal.

Eind-cijfer	$t(i)$	d	$t(i) \cdot 2^d$	$p = \frac{t(i+d)}{10}$	$p = \frac{t(i+d)-4}{10}$	$\frac{p}{t(i)}$	Aant. stappen $= d+1$
0	$10k+0$	0	$10k$	k		$\frac{1}{10}$	1
2	$10k+2$	1	$20k+4$		$\frac{20k}{10} = 2k$	$\frac{2k}{10k+2} < \frac{1}{10}$	2
4	$10k+4$	0	$10k+4$		k	$\frac{k}{10k+4} < \frac{1}{10}$	1
6	$10k+6$	2	$40k+24$		$\frac{40k+20}{10} = 4k+2$	$\frac{4k+2}{10k+6} < \frac{2}{5}$	3
8	$10k+8$	3	$80k+64$		$\frac{80k+60}{10} = 8k+6$	$\frac{8k+6}{10k+8} < \frac{4}{5}$	4

Merk op dat bij eindcijfers 0, 2 en 4 onzin ontstaat als k=0: bij eindcijfer 0 zou het startgetal 0 zijn, en bij eindcijfer 2 en 4 zou het eindgetal 0 zijn. Vandaar de restrictie $t(i)$>4.

Opgave 2b: Idem voor eindcijfers 1,3,5 en 7.

Uitwerking opgave 2b.
We gebruiken dezelfde aanpak als in opgave 2a:

Eind-cijfer	$t(i)$	d	$t(i) \cdot 2^d$	$p = \frac{t(i+d)}{10}$	$p = \frac{t(i+d)-4}{10}$	$\frac{p}{t(i)}$	Aant. stappen $= d+1$
1	$10k+1$	2	$40k+4$		$\frac{40k}{10} = 4k$	$\frac{4k}{10k+1} < \frac{2}{5}$	3
3	$10k+3$	3	$80k+24$		$\frac{80k+20}{10} = 8k+2$	$\frac{8k+2}{10k+3} < \frac{4}{5}$	4
5	$10k+5$	1	$20k+10$	$\frac{20k+10}{10} = 2k+1$		$\frac{2k+1}{10k+4} < \frac{1}{5}$	2
7	$10k+7$	1	$20k+14$		$\frac{20k+10}{10} = 2k+1$	$\frac{2k+1}{10k+7} < \frac{1}{5}$	2
9	$10k+9$	4	$160k+144$		$\frac{160k+140}{10} = 16k+14$	$\frac{16k+14}{10k+9} < \frac{16}{10}$	5

Ook hier geldt weer: als $t(i) > 4$ dan is er voor de eindcijfers 1, 3, 5 en 7 een opvolger $p < t(i)$.

Bij eindcijfer 1 geeft k=0 onzin: p wordt dan 0, dus ook hier: $t(i) > 4$.
We hebben, in verband met opgave 3 eindcijfer 9 er ook in gezet. We zien hier alvast: 9 is het enige eindcijfer dat er **niet** voor zorgt dat $\frac{p}{t(i)}$ kleiner is dan 1.

Dus voor n met eindcijfer 9 is het lastiger.

Opgave 3a: Toon aan dat je toch met recept B n=249 kleiner kan maken en tenslotte eindigt op 4.

Uitwerking opgave 3a:

249 – 498 – 996 – 1992 – 3984 – 398 – 796 – 1592 – 3184 – 318 – 636 – 1272 – 2544 – 254 – **25** – 50 – 5 – 10 – 1 – 2 – 4.

Het lukt dus in 20 stappen, en na 14 stappen krijg je 25, het eerste getal <249, .
Minder voor de hand liggend is:
249 –498–996–1992–3984–7968–15936–31872–63744–6374–637–1274-**127**–294–29–58–116–232–464–64–32–16–8–4. Hierin krijg je na 12 stappen 127, het eerste getal <249. Maar het totale aantal stappen in ook hier 20.

We zagen dat 249 met recept B aanvankelijk groter wordt: hij stijgt naar 3984. Daarna komen er geen negens meer en daalt hij steeds verder. Maar de vraag is natuurlijk of dat altijd zo is, en of er niet opnieuw een eindcijfer 9 kan komen voordat je een getal krijgt dat dat kleiner is dan het begingetal.

Het antwoord is dat het inderdaad lukt om een getal te krijgen kleiner dan begingetal *n*.

We gaan nu het lemma bewijzen. Dan moet het dus, ook als *n* op een 9 eindigt en je dus aanvankelijk een (of meer) getallen krijgt groter dan *n*, altijd mogelijk zijn om daarna een getal te krijgen kleiner dan *n*.

Opgave 3b:

Laat zien dat ook als *n* op een 9 eindigt je met recept B altijd een rijtje $t(i)$ kan krijgen waarin een $t(i)$ kleiner is dan *n*.
Geef ook aan hoe lang het rijtje maximaal is vanaf *n* tot en met het eerste getal <*n* bij jouw oplossing van deze opgave.

Uitwerking 3b:

We zagen al in opgave 2a en 2b in de tabel:

Eind-cijfer	$t(i)$	d	$t(i+d) = t(i) \cdot 2^d$	$p = \frac{t(i+d)}{10}$	$p = \frac{t(i)-4}{10}$	$\frac{p}{t(i)}$	Aant. stappen $= d+1$
9	$10k+9$	4	$160k+144$		$\frac{160k+140}{10} = 16k+14$	$\frac{16k+14}{10k+9} < \frac{16}{10}$	5
8	$10k+8$	3	$80k+64$		$\frac{80k+60}{10} = 8k+6$	$\frac{8k+6}{10k+8} < \frac{4}{5}$	4

Als $t(i)$ op een negen eindigt kan $\frac{p}{t(i)}$ dus groter zijn dan 1. Maar als we nog eens kijken naar de uitwerking van opgave 2a hierboven, en met name de waarde van de opvolger p, dan zien we dat die p in in een aantal gevallen even is.

De enige uitzonderingen zijn de waarden van p bij het eindcijfer 0 en 4, waar we niet verdubbelen en waar geldt $p = k$, zodat we niet weten of het even of oneven is.

Dat betekent dat als *n* eindigt op 9, en er volgt verderop bij een zekere p_i opnieuw een eindcijfer 9, er onmiddellijk vóór die 2e 9 bij p_{i-1} een eindcijfer 0 of 4 was en waarvoor dus geldt $\frac{p_{i-1}}{p_{i-2}} = \frac{1}{10}$ of $\frac{p_{i-1}}{p_{xi-2}} = \frac{k}{10k+4}$, en dus in beide gevallen $\frac{p_{i-1}}{p_{i-2}} \leq \frac{1}{10}$.
Bij de nieuwe negen wordt dus p tien keer zo klein, en wordt dus zeker kleiner dan *n* .
Het tweede getal eindigend op een 9 is dus altijd kleiner dan het eerste.

We zoeken nog de maximale lengte van het rijtje tot en met het eerste getal $< n$.
Er zijn dan 3 mogelijkheden:

1) n eindigt op 9 en er volgt (de eerste 3 keer) geen eindcijfer 0 of 4. Dan komt na de 9 steeds het eindcijfer 2, 6 of 8. Daarvan is 8 de meest ongunstigste, met het grootste aantal stappen en het kleinste verschil tussen p en t_i.
   We zagen: Na het startgetal $t(i)$ eindigend op een 9 krijgen we na 5 stappen $p < \frac{16}{10}$. Als in het ongunstigste geval daarna nog m keer achter elkaar een eindcijfer 8 (elke keer 4 stappen) volgt krijgen we een getal kleiner dan $\frac{16}{10} \cdot (4/5)^m$ en dat is kleiner dan 1 voor $m \geq 3$. Dus maximaal $5 + 3 * 4 = 17$ stappen.
2) n eindigt op 9 en er volgt in de eerste 3 keer een eindcijfer 0 of 4.Volgens 1) .zijn er dan in het ongunstigste geval maximaal 2x4=8 stappen voordat het eindcijfer 0 of 4 verschijnt. Na het verschijnen van de 0 of 4 volgt nog één stap, dus maximaal 9 stappen.
3) n eindigt niet op 9. We zagen in opgave 2a en 2b dat het aantal stappen dan maximaal 4 is.

We hebben hiermee aangetoond dat het altijd mogelijk is om na maximaal 17 stappen een getal te krijgen < n. Dat is voldoende om het lemma te bewijzen.
We hebben dat gedaan door steeds alleen a) uit recept B kiezen als het niet anders kan en dus steeds maar één keuze te bekijken.

Enkele inzenders maakten een (veel) meer uitvoerige analyse en toonden aan dat het soms loont om als je een getal krijgt dat eindigt op 0 of 4 niet b) of c) kiest uit recept B, maar door gaat met verdubbelen tot je weer op een 0 of 4 als eindcijfer uitkomt.
Ze toonden aan dat het zo altijd mogelijk is om na 12 stappen een getal te krijgen < n

Dat wil overigens nog niet zeggen dat het hele traject in recept A van 4 naar het getal n dat moet aantonen dat n maakbaar is (en daar gaat het uiteindelijk om) ook korter wordt.

Als je opgave 2 en 3b kan aantonen is het lemma dat elk getal n kleiner kan worden gemaakt bewezen. Zo niet, dan mag je dat aannemen.

Opgave 4: Geef nu het bewijs dat elk getal n maakbaar is (dus ook 1, 2 en 3).

Uitwerking opgave 4.

We laten eerst zien dat 1, 2 en 3 maakbaar zijn vanuit 4:

1: 4, 2, 1
2: 4, 2
3: 4, 2, 24, 12, 6, 3

Nu aantonen dat elk getal >4 maakbaar is: Het lemma zegt: Voor elke n>4 kan je in het rijtje $t(i)$ met Recept B altijd een getal krijgen dat kleiner is dan n.

Je kan dus altijd met recept B het getal kleiner maken zolang het >4 is. Dat betekent dat je een getal $\leq$ 4 kunt krijgen.
Recept B levert nooit een getal <1, dus je krijgt 1, 2, 3 of 4. In alle gevallen eindig je dus

met een 4.
Als je de hele rij getallen uit recept B van *n* naar 4 omkeert dan heb je een pad van *4* naar *n*.

We gaan nu onderzoeken of we ook kleinere getallen *s* als startgetal kunnen gebruiken.

We weten nu (of nemen dat aan) dat met startgetal *s*=4 alle getallen maakbaar zijn, ook 1,2 en 3.

Als we dus vanuit 1,2 en 3 met recept A op 4 kunnen uitkomen hadden we ook 1,2 of 3 als startgetal kunnen kiezen.

Opgave 5: Toon aan dat *s*=2 , *s*=3 en *s*=1 ook startgetallen kunnen zijn, waarmee alle getallen maakbaar zijn.

Uitwerking Opgave 5

We moeten nu dus aantonen dat we met recept A vanuit 1, 2 en 3 alle getallen kunnen bereiken. Omdat we weten dat vanuit 4 met recept A alle getallen bereikbaar zijn is het voldoende als we aantonen dat vanuit 1, 2 en 3 met recept A 4 bereikbaar is. Dat is het omgekeerde van wat we in opgave 4 deden. Hier hebben sommige inzenders zich helaas in vergist.

Met *s* = 1 naar 4: 1, 10, 104, 52, 524, 262, 131, 1310, 13104, 6552, 3276, 1638, 16384, 8192, 4096, 2048, 1024, 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4

Met *s* = 2 naar 4: 2, 24, 12, 6, 64, 32, 16, 8, 4

Met *s* = 3 naar 4: 3, 30, 304, 152, 76, 38, 384, 192, 96, 48, 24, 12, 6, 64, 32, 16, 8, 4

Dus zijn ook met startgetal *s*=1, 2 of 3 alle getallen maakbaar.