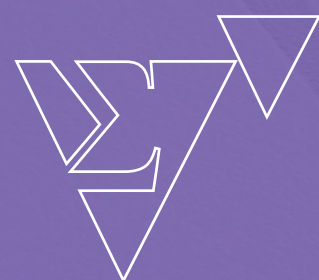


# EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELEERAAR

Wiskunde begrijpen met Teaching Through Problemsolving

Rekenen met breuken: helpt het geven van een context?

In memoriam Joop van Dormolen

Building thinking classrooms: leerlingen maximaal in de leerstand zetten

ChatGPT en het wiskundeonderwijs

NR. 4

JARGANG 99 FEBRUARI 2024



Nederlandse Vereniging  
van Wiskundeleraren



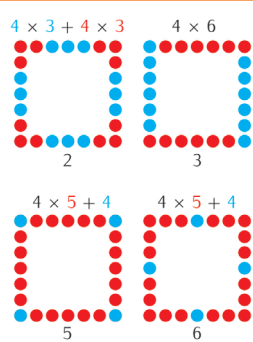


### IN DIT NUMMER

WISKUNDE BEGRIJPEN  
MET TEACHING THROUGH  
PROBLEMSOLVING

Gerrit Roorda  
Sibren Stienstra  
Paul Durenkamp

# 4



PIZZA OF GEEN PIZZA?  
HELPT HET GEVEN VAN EEN CONTEXT  
BIJ HET REKENEN MET BREUKEN?

Terry Mostert  
Marian Hickendorff

# 10

IN MEMORIAM JOOP VAN DORMOLEN  
ERELID VAN DE NEDERLANDSE  
VERENIGING VAN  
WISKUNDELERAREN

Bert Zwaneveld



JOOP VAN DORMOLEN  
MIJN INSPIRATOR

Anne van Streun

# 14 & 17

TANGENT EN SUBTANGENT  
Martin Kindt

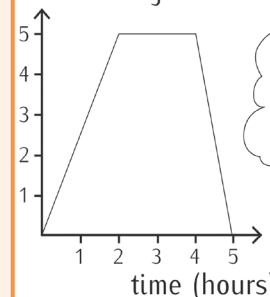
# 22

WAT BEDOELEN ZE TOCH  
MET ... MISCONCEPTIES (2)

Jeanine Daems  
Theo van den Bogaart

# 26

The Country Walk



BUILDING THINKING  
CLASSROOMS

Maarten Müller

# 28



UITDAGENDE PROBLEMEN  
WAT GAAT CHATGPT AAN HET  
WISKUNDEONDERWIJS VERANDEREN?

Jacques Jansen

# 32

WIS EN WAARACHTIG

# 36

ALS ER ÉÉN A OVER DE DAM IS...

Benne de Weger

# 37

Afbeelding voorkant: Sporen in de sneeuw  
Fotograaf: Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING  
VAN WISKUNDELERAREN

ROEST RUST (NIET)  
PLAATSNAMEN  
Ab van der Roest

41



PUZZEL  
Lieke de Rooij  
Wobien Doyer

43

WITJE: HITTE IN DE STAD

45

SERVICEPAGINA

46

Aantal op dezelfde plaats	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Hoe vaak kwam dat voor	1	2	6	5	3	4	2	0	0	0	1

tabel Top 2000

## X-je: Ondertitelen

Een aantal van mijn mbo-studenten is geanimeerd in gesprek. Het is een vrolijk gesprek en ik verbaas me erover hoe vaak het woord f\*\*king valt. Ik loop op ze af en vraag of ik even mag ondertitelen. Dat vinden ze een goede grap. Ik herhaal wat er gezegd is, maar dan zonder krachttermen. De les gaat verder en als ik de klas in loop stoot ik me heel hard aan een hoek van een tafel. Er ontglipt mij een sh\*t. Het groepje reageert meteen: 'Mogen wij even ondertitelen mevrouw?'

Liesbeth Coffeng

Heb je ook iets leuks meegemaakt in de les? Stuur je tekst van max. 100 woorden op naar [L.coffeng@nvww.nl](mailto:L.coffeng@nvww.nl)



## Kort vooraf

De laatste week van 2023 heb je kunnen genieten van de 25e editie van de Top2000. Halverwege de stemperiode wezen mijn Excel trendlijntjes al op

een doemscenario: alle noteringen van de Top10 zouden wel eens op dezelfde plaats kunnen blijven staan. Gelukkig is er dan wiskunde om van geen nieuws groot nieuws te maken. Boze tongen beweren wel eens dat die Top2000 ieder jaar hetzelfde is, maar is dat ook zo? In de Top10 kunnen uiteraard tien titels op dezelfde plaats (ten opzichte van het jaar ervoor) blijven staan. In de tabel hiernaast zie je het aantal titels dat op dezelfde plaats blijft staan en hoeveel jaar dat na de editie van '99 voorkwam.

In 2002 en 2013 bleven er zes titels op dezelfde plaats staan ten opzichte van 2001 en 2012. Dat was het record tot nu toe. Nog niet zo heel lang geleden, in 2021, bleef er zelfs geen enkele plaat op dezelfde plaats staan. Dat standvastige karakter van de Top10 lijkt dus mee te vallen. Een poging tot kwantificatie: stel dat het aantal nummers dat op dezelfde plaats blijft staan Poisson verdeeld is met een gemiddelde van 3,46. Dan is de kans op een volledig identieke Top 10 heel klein: 0,0021. Ik weet niet helemaal zeker of ik de persvoorlichter van de NPO daar helemaal mee heb gerustgesteld. Hij werd in ieder geval blijer van de ontdekking dat er een recordaantal Nederlandse producties in de lijst stond. Mocht je zelf (of je leerlingen) zin hebben om dit soort feitjes op te sporen: de jubileumeditie van het Excel-bestand met alle noteringen en de nodige 'tags' staat op de website.

Veel genoeg met deze eerste *Euclides* van 2024, op naar de jubilea die zelfs 25 edities van de Top2000 doen verbleken: 100 jaar NVvW en 100 jaar *Euclides*.

Tom Goris

# Wiskunde begrijpen met Teaching Through Problemsolving

Akihiko Takahashi is expert op het gebied van TTP (Teaching Through Problemsolving) en Lesson Study, waar hij demolessen over verzorgt. Gerrit Roorda, Sibren Stienstra en Paul Durenkamp woonden drie opeenvolgende lessen bij en delen hun ervaringen en reflecties. Dit artikel is een inkortende versie van een eerder artikel in het magazine *Didactiek voor vak en beroep* 2023.

## Akihiko Takahashi en de TTP-didactiek

De naam Akihiko Takahashi is sterk verbonden met Lesson Study.<sup>[3]</sup> Takahashi is leider van het Lesson Study Immersion programma in Japan. Dit programma is erop gericht reken- en wiskundedocenten vanuit de hele wereld ervaring te laten opdoen met, of beter gezegd onder te dompelen in, Japanse Lesson Study. In 2016 nam Gerrit deel aan dit programma.<sup>[4]</sup>

Naast Lesson Study was er veel aandacht voor een specifieke didactiek die wordt aangeduid met TTP. Kenmerken van de aanpak zijn dat leerlingen betrokken worden in wiskundelessen door het oplossen van problemen; dat de docent de leerlingen naast de kennis over wiskunde ook lessen wil leren zoals durf, doorzetten, volhouden bij problemen en strategieën om problemen aan te pakken, en dat in het klassengesprek oplossingen van leerlingen uitgebreid worden besproken om tot een gemeenschappelijk begrip te komen.



figuur 1 Akihiko Takahashi

## Demolessen

Takahashi was in Kopenhagen om drie demolessen te geven. Eén klas, in dit geval een Deense 'brugklas', kreeg lessen van dr. T, zoals hij zich door de leerlingen liet noemen. We maakten deze drie lessen mee, met voor- en nagesprekken. Het wiskundige thema van de lessen was de overgang van het rekenen met getallen naar algebra. Dit gebeurde aan de hand van 'stippensommen'; verderop meer daarover.<sup>[5]</sup>

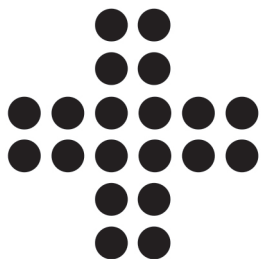
Takahashi hecht eraan om aan één en dezelfde klas drie demolessen te geven. Hij wil niet in één les een soort trucje voordoen, maar hij wil laten zien dat je met de leerlingen een situatie kunt creëren waarin ze wennen aan een andere 'klassencultuur', waarin je met elkaar gericht bent op het begrijpen van wiskunde. In drie lessen laat Takahashi ook zien hoe je de input van de ene les gebruikt om in de volgende les daarop voort te bouwen. Dit kan enerzijds gaan over de inhoud: de docent kan in een les ontdekken hoe de leerstof door de verschillende leerlingen wordt begrepen en waar mogelijk nog misconcepties zitten. Anderzijds kan het gaan over de aanpak van opdrachten in de les. Leerlingen moeten namelijk aan het eind van een TTP-les een reflectie schrijven over wat ze geleerd hebben. Door reflecties van de vorige les te bespreken bij de start van een nieuwe les kan de docent laten zien wat belangrijke punten waren in de vorige les.

## De eerste les

Een TTP-les kent normaal gesproken een opbouw in vijf stappen: als eerste wordt eventuele voorkennis opgehaald, vervolgens presenteert de docent het probleem dat in de les centraal staat, de leerlingen werken enige tijd aan het probleem, daarna worden ideeën en oplossingen van leerlingen klassikaal besproken en ten slotte is er tijd voor een samenvatting.



In les 1 werd, na een korte introductie, aan leerlingen gevraagd het aantal stippen in een eenvoudig stippenpatroon te vinden, zie figuur 2. Het werd daarbij voor de leerlingen duidelijk dat je op verschillende manieren naar een stippenpatroon kunt kijken.



figuur 2 Stippenpatroon van les 1

Om het aantal stippen te berekenen, bedachten de leerlingen zes berekeningen. De eerste vijf waren:  $2 \times 10$ ;  $10 \times 2$ ;  $5 \times 4$ ;  $4 \times 5$  en nogmaals  $4 \times 5$  (op een andere manier). Veel nadruk legde dr. T op het verschil in betekenis tussen  $2 \times 10$  en  $10 \times 2$ . In het eerste geval heb je twee groepen van tien stippen, in het tweede geval tien groepen van twee stippen. Probeer zelf maar eens of je bij de vijf berekeningen de perspectieven kunt bedenken om naar het stippenpatroon te kijken; de ideeën van de leerlingen vind je aan het eind van dit artikel (figuur 8). Eén leerling, zeg Jan, had nog een zesde berekening, namelijk  $5/9 \times (6 \times 6)$ . Interessant was dat geen van de aanwezige docenten in de voorbereidingsbespreking deze aanpak had bedacht. Ook voor dr. T zelf was de berekening een verrassing, maar hij besloot deze aanpak met de klas te bespreken. Daarbij zagen we mooi hoe dr. T het klassengesprek organiseerde. In kader 1 volgt een stukje vraag-antwoord-patroon, met toelichting.

T: *Wat zou Jan hebben gedacht. Kan iemand zijn gedachten lezen?* [dr. T vraagt niet aan Jan of hij het kan uitleggen, maar schakelt de klas in om Jans denkwijze te reconstrueren].

Klas: ... (het blijft stil)

T: *Ziet iemand in de figuur  $6 \times 6$ ?* [dr. T vereenvoudigt de vraag, maar geeft zelf geen antwoord]

Klas: ..... [geen reactie]

T: *Ziet iemand waar  $6$  vandaan zou kunnen komen?* [een verdere vereenvoudiging van de vraag]

Ludwig: *Ja, ik zie het, en ik zie ook  $6 \times 6$ .*

T: *Kun je het uitleggen?*

Ludwig: *Als je de figuur in de hoeken aanvult met stippen, dan zijn er  $6 \times 6$  stippen.*

T: *Klopt dat, Jan, bedoel je dat met  $6 \times 6$ ?* [De check of dit inderdaad Jans denkwijze was]

Jan: *Ja.*

T: *Iedereen akkoord?* [Het gaat om een gemeenschappelijk begrip]

K: [er wordt wat geknikt]

T: *Anke, kun je dan nog eens zeggen wat  $6 \times 6$  precies is?* [Als iedereen akkoord is, vraagt dr. T. vaak aan iemand om het nog eens toe te lichten]

Anke: *Als je in de hoeken er stippen bijzet krijg je een vierkant met 36 stippen.*

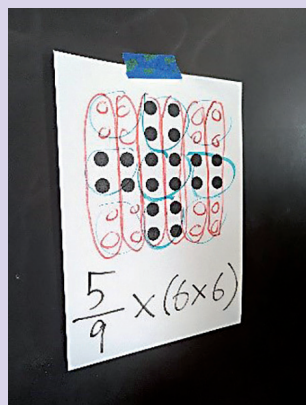
T tekent nu in de figuur de extra stippen. [soms laat T de leerling zelf tekenen, maar nu niet].

T: *OK, akkoord?*

Klas: knikt.

T: *Dan moeten we nu nog bedenken waarom  $5/9$ .*

[In deze beschrijving geven we het vervolg van deze conversatie niet weer. De  $5/9$  heeft te maken met het feit dat er, na aanvulling tot een  $6$  bij  $6$  vierkant, negen groepjes van vier stippen zijn ontstaan, waarbij vijf van de negen groepen het gegeven stippenpatroon vormen, zie figuur 3].



figuur 3

kader 1 Deel van het klassengesprek  
(op basis van notities observator)

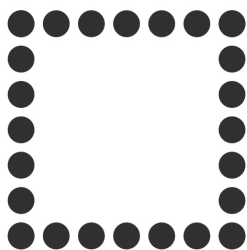
De les sluit af met reflectieve vragen. De algemene vraag: wat heb je geleerd? Maar ook bijvoorbeeld: welke aanpak van een klasgenoot vond je goed?

Dat is een mooie vraag, omdat je gedwongen wordt na

te denken over de aanpakken van andere leerlingen. Met les 1 heeft dr. T de sfeer gecreëerd: je mag je eigen ideeën genereren. Je kunt verschillende aanpakken gebruiken voor een opdracht. Je kunt luisteren naar elkaars ideeën en je kunt de ideeën van anderen, soms na enige tijd, ook zelf uitleggen. Je kunt door samen na te denken een moeilijke berekening als  $5/9 \times (6 \times 6)$  toch begrijpen.

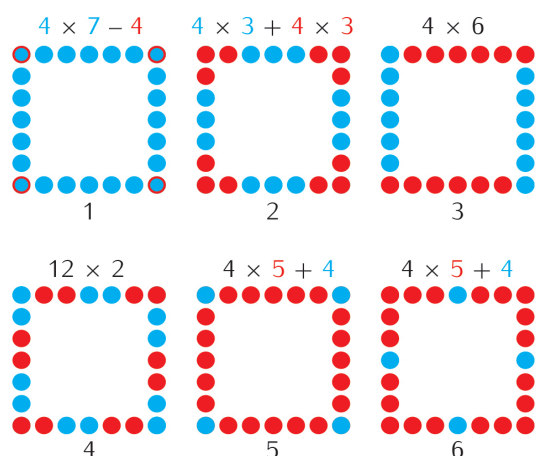
## De tweede les

De tweede les start met het voorlezen van enkele 'les-1-reflecties'. Vervolgens wordt het volgende probleem gepresenteerd, weer een stippenpatroon, zie figuur 4: hoeveel stippen staan er in de volgende figuur? Schrijf een wiskundige berekening op voor het aantal stippen.



figuur 4 Stippenpatroon les 2

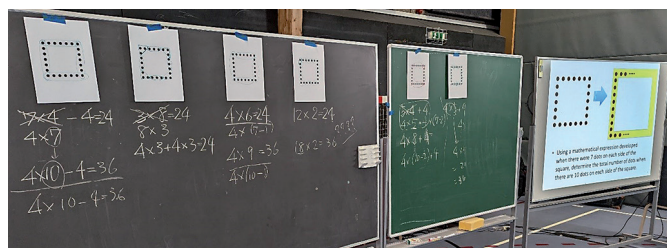
Na enige tijd individueel en vervolgens in duo's te hebben gewerkt. Komen de volgende ideeën, zie figuur 5:



Steeds wordt de relatie gelegd tussen de berekening en het stippenpatroon. De leerlingen lijken het interessant te vinden dat er zoveel verschillende manieren zijn om naar hetzelfde patroon te kijken. Ook is er veel interesse in de denkwijzen van andere leerlingen.

Nu vraagt Takahashi om een berekening voor dezelfde figuur met  $10 \times 10$  stippen te maken, zie figuur 6 (onder).

Essentieel bij de 'generalisatie' van zeven naar tien stippen is dat duidelijk is wat er 'verandert' en wat 'gelijk' blijft. Neem bijvoorbeeld berekening nummer 3: als de figuur verandert van  $7 \times 7$  naar  $10 \times 10$ , verandert alleen de 6. Het inzicht dat de 6 hier geschreven moet worden als  $(7 - 1)$  maakt generalisatie naar  $10 \times 10$  mogelijk: Er zijn  $4 \times (10 - 1)$  stippen; de 4 verandert niet, die staat immers voor de vier zijden. Dit is de *essentie* om te snappen hoe je tot een formule zou kunnen komen voor het aantal stippen, dus de abstractiestap van een berekening met getallen, naar een berekening met 'letters'. Als docent zouden we het nu wel willen 'uitleggen': 'Kijk leerling, zie je dat je er een formule voor kunt maken'. Er gebeurt echter iets bijzonders in deze les. We zien als observatoren dat Takahashi veel tijd besteedt aan de generalisatie van uitwerking 2. Die generalisatie zou moeten zijn, in wiskundige termen  $4 \times 3 + 4 \times (\text{zijde} - 4)$ . Wij vinden dat het langzaam gaat, we vragen ons af waarom zoveel tijd voor uitwerking 2, we merken dat de aandacht van de leerlingen wat wegzakt. Takahashi besluit het klassengesprek af te breken, en vraagt leerlingen nog de berekening op te schrijven voor hetzelfde patroon met  $100 \times 100$  stippen. Hij sluit niet af met de gebruikelijke samenvatting en reflectie, maar complimenteert de leerlingen en zegt: 'we gaan morgen verder'.



figuur 6 Afbeelding van het bord

## Het vervolg van de tweede les

In het nagesprek met observatoren legt Takahashi uit waarom hij besloot de les af te ronden. Hij legt uit dat hij bij het rondlopen en in het klassengesprek nog te veel reacties kreeg van leerlingen waaruit bleek dat ze de essentie nog niet begrepen. Dit is een belangrijk onderdeel van de TTP-didactiek: het monitoren van de leerlingen. Ze zijn daarmee volgens Takahashi nog niet allemaal toe aan de abstractiestap naar een formule. In les 3 neemt Takahashi de tijd om alsnog terug te komen op de vorige les. Alle ideeën van les 2 zijn netjes op een rij op het bord gehangen, zie figuur 6. Bij uitwerking 1, 3, en 5 zie je dat de stap naar  $10 \times 10$  is opgeschreven. Er volgt een mooi klassengesprek, waarin Takahashi specifiek leerlingen inschakelt die het moeilijk vonden, zoals uit berekeningen op hun werkblad was gebleken.

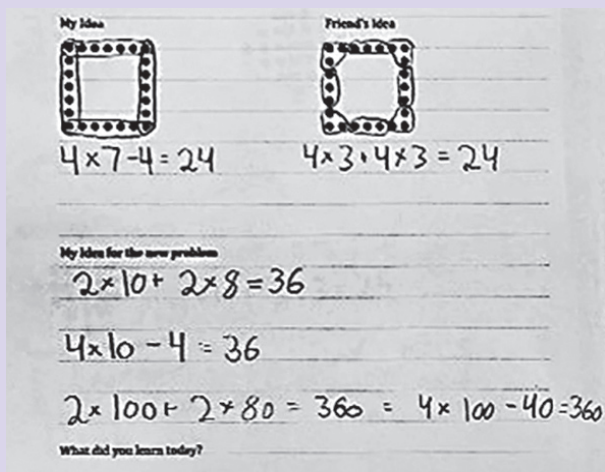


Als observatoren zou je denken: mooi, de regel lijkt nu duidelijk, gauw naar de volgende som. Maar Takahashi zegt dat hij nog één uitwerking wil bespreken. Hieronder weer een kleine interactie.

weggumt, maar netjes doorstreept, en de verbetering eronder schrijft. Je kunt dan later weer zien wat je denkwijze is geweest en hoe je je denkwijze hebt verbeterd om tot een oplossing te komen.

Kader 2

T: Carla, kun je vertellen welke berekening je hebt gemaakt om het aantal stippen te berekenen in een  $100 \times 100$  figuur? [dr T. weet dat de berekening niet klopt.]  
 C: Ik weet al wat ik fout heb gedaan.  
 T: Heel goed, maar wat was je berekening? [loopt naar de tafel] Ik zie dat je hem al hebt weggegomd. Weet je nog wat er stond?  
 C:  $2 \times 100 + 2 \times 80 = 360$  (zie figuur 7).



figuur 7

T: Kan iemand bedenken wat Carla gedacht heeft? [Ook bij een onjuiste aanpak kun je nadenken over de denkwijze van een leerling].  
 [....., leerling L steekt een vinger omhoog]  
 L: Als de figuur  $10 \times 10$  is, kun je het aantal tellen door  $2 \times 10 + 2 \times 8$ . Misschien heeft Carla er een nul achter gezet.  
 T: Klopt dat Carla?  
 C: Ja, maar dat mag niet, want het zijn meer dan 80.  
 T: Hoeveel stippen zijn er dan over als je eerst twee zijanten van 100 hebt geteld?  
 C: 98, je moet  $100 - 2$  doen.  
 T: Wat betekent de 2 dan precies?  
 Iemand anders: De hoekjes heb je al geteld, dus die hoef je niet weer te tellen.  
 T: Akkoord? Goed dat je dat zelf hebt ontdekt Carla. Het lijkt me een goed idee dat je je vergissing niet

## Reflecties

Het onderwerp TTP heeft al langere tijd onze aandacht. De website <sup>[6]</sup> maakt duidelijk dat er allerlei TTP-materialen en ideeën ontwikkeld zijn in het project. Ondanks alle ervaringen tot nu toe, maakte het bijwonen van de demolessen dat we nieuwe perspectieven kregen op de TTP-didactiek. Hieronder wordt een aantal thema's besproken.

### Tempo en differentiatie in de les

We merkten dat Takahashi veel tijd nam om alle leerlingen mee te krijgen en samen te begrijpen wat iedereen bedacht had. Toen hij in les 2 merkte dat leerlingen nog niet mee waren, nam hij de tijd om in les 3 door te gaan met het voorbeeld van les 2. Meerdere aanwezigen vroegen zich af of 'betere leerlingen' wel voldoende werden uitgedaagd. Volgens Takahashi leren de betere leerlingen veel van de verdieping die ontstaat door hetzelfde probleem van alle kanten te doorgronden. Ze leren veel van het onder woorden brengen van alle soorten oplossingen. Wij, als deelnemers met een andere achtergrond, zijn er nog niet helemaal uit. Het zou toch goed zijn om betere leerlingen tussendoor meer uit te dagen? Hoe past dit nu binnen de ideeën over differentiatie in onze wiskundelessen? Maar we zien ook dat het waardevol is om één en hetzelfde probleem echt goed te doorgronden, in plaats van snel te schakelen naar volgende 'sometjes', wat in het Nederlandse wiskundeonderwijs vaak gebeurt.

### Klassencultuur

Het was mooi om te zien dat Takahashi er in de loop van de drie lessen in slaagde om de leerlingen te laten merken dat allerlei dingen die ze bedacht hadden ertoe doen. Leerlingen zullen gevoeld hebben: fouten mag je maken, we kunnen leren van elkaars ideeën. De interacties bevatten vrijwel geen 'waardeoordelen' van de docent, zoals dat een oplossing 'mooi', 'goed' of juist 'fout' was. Vaak was de reactie juist: 'Zijn jullie het ermee eens? Kun je het toelichten?' Het is duidelijk dat TTP zowel een vakdidactische als een pedagogische aanpak is. De boodschap was: we kunnen leren van elkaar; probeer

# Gratis software voor docenten



Combineer de rekenmachines van Texas Instruments met TI-computersoftware. Download de gratis software en breng wiskunde tot leven in de klas!



Lessen thuis  
klaarzetten

Berekeningen op  
het digibord tonen

Leerlingen door  
opdrachten leiden

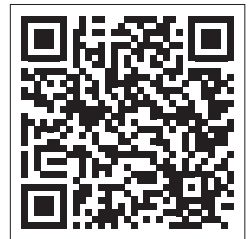


## Download de software hier!

Kies uit software voor wetenschappelijke of grafische rekenmachines.

**Ga je van klas naar klas?**

Je kunt ook een gratis USB-stick met TI-SmartView™ CE-T Emulatorsoftware aanvragen!



[bit.ly/46A65IT](https://bit.ly/46A65IT)

[education.ti.com/nl](https://education.ti.com/nl)



ideeën van anderen te begrijpen; je mag feedback geven op ideeën van anderen. Dit zal voor Nederlandse schoolklassen nog een uitdaging worden: hoe creëer je een sfeer waarin ieder zijn ideeën durft te noemen?

### Probleemoplossen of wiskunde begrijpen

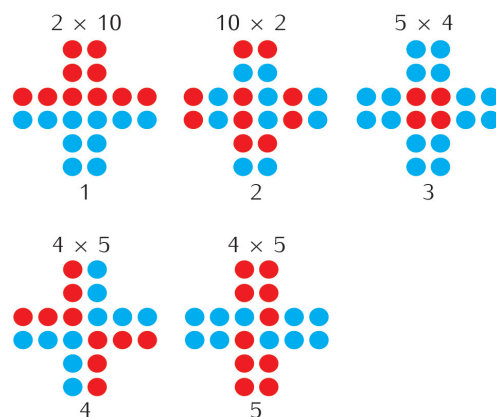
In het Nederlandse project <sup>[1]</sup> kozen we voor een focus op probleemoplossingsvaardigheden. We merkten dat deze demolessen meer gericht waren op het begrijpen van wiskunde dan op het probleemoplossen. Toch waren er zeker momenten waarop Takahashi probleemoplossingsvaardigheden expliciteerde, zoals het bevorderen van een probleemoplossende houding waar het maken van fouten niet erg is, maar juist tot leren leidt. De demolessen waren sterk centraal klassikaal georiënteerd. Het gaat dus niet om 'zelfontdekkend leren', maar om het, onder sterke begeleiding van een docent, leren van wiskunde vanuit de probleemoplossingsactiviteiten.

### Wat vraagt het van docenten?

Het geven van een TTP-les vraagt veel vaardigheden van de docent. Om er enkele te noemen: Takahashi wilde in deze lessen dat alle leerlingen de cruciale stap van abstractie zouden begrijpen. Als docent moet je precies voor ogen hebben wat de cruciale stap is, wat de essentie is van de wiskunde die in het probleem naar voren komt. In de voorbereiding van de les zul je daar als docent goed bij stil moeten staan. Ook het monitoren van de antwoorden en afsluitende reflecties is een vaardigheid die veel overzicht vraagt. Dit monitoren moet inzicht geven welke leerlingen de docent wil inschakelen tijdens het klassengesprek. Tegelijkertijd is een mooi aspect van het monitoren dat het een sterk formatief karakter heeft. Verder bleek in het project <sup>[1]</sup> dat het voeren van een 'niet-antwoordgericht' klassengesprek ook een lastige vaardigheid kan zijn. Het lijkt waardevol om daarover te leren in een team van docenten, bijvoorbeeld door middel van Lesson Study.<sup>[1],[2]</sup>

### Wat levert dit de leerlingen op?

Onderwijs gaat over het leren van leerlingen. Je kunt je afvragen wat leerlingen nu precies leren van lessen volgens de TTP-aanpak. Het meemaken van de demolessen, maar ook eerdere ervaringen met TTP-lessen, maakt duidelijk dat de TTP-aanpak zich richt op een brede wiskundige ontwikkeling, met een gerichtheid op concepten, procedures, strategieën, houding maar ook op hun ontwikkeling als mens in de maatschappij. We denken verder na over vervolgprojecten en ook onderzoek om meer gestructureerd te meten wat de opbrengsten voor leerlingen zijn.



figuur 8 Verschillende aanpakken om het aantal stippen te berekenen.

## Noten

- [1] Roorda, G., De Vries, S., & Smale-Jacobse A.E., (2023). *Teaching Through Problem-solving en Lesson Study*. Hoe ondersteunt TTP-LS wiskundedocenten om aandacht aan probleemoplossingsvaardigheden van leerlingen te besteden? Rijksuniversiteit Groningen.
- [2] Takahashi, A. (2021) *Teaching Mathematics through problem-solving. A pedagogical approach from Japan*. Routledge.
- [3] Takahashi, A., McDougal, T., Friedkin, S., & Watanabe, T. (2022). *Educators' Learning from Lesson Study: Mathematics for Ages 5-13*. Routledge.
- [4] zie: Roorda, G. & Goei, S. L. (2018). Lesson Study in Japan, *Euclides* 93-4, pp. 14-17.
- [5] Takahashi heeft eerder demolessen gegeven in andere landen, bijvoorbeelderland. De video's van deze Ierse lessen zijn geheel te bekijken. Les 1: <https://youtu.be/n6cvgp7QLvs>; les 2: <https://youtu.be/oskFIEceJv8> en les 3: [https://youtu.be/wz\\_J6FgLWHU](https://youtu.be/wz_J6FgLWHU).
- [6] zie [www.ttpwiskunde.nl](http://www.ttpwiskunde.nl)

## Over de auteurs

Gerrit Roorda is vakdidacticus wiskunde en lerarenopleider aan de Rijksuniversiteit Groningen en de Master Leraar Wiskunde, NHL Stenden Hogeschool. Paul Durenkamp is vakdidacticus wiskunde en lerarenopleider aan de Rijksuniversiteit Groningen en de bacheloropleiding Leraar Wiskunde, NHL Stenden Hogeschool. Sibren Stienstra is vakdidacticus wiskunde en lerarenopleider aan de bacheloropleiding Leraar Wiskunde, NHL Stenden Hogeschool. Contact e-mailadres: [g.roorda@rug.nl](mailto:g.roorda@rug.nl)

# Pizza of geen pizza?

## Helpt het geven van een context bij het rekenen met breuken?

Rekenen met breuken, met of zonder context. Terry Mostert en Marian Hickendorff onderzochten het effect van het gebruik van contexten in zowel het primair als het voortgezet onderwijs.

### Inleiding

Nadat Matthijs uit 1 havo zijn wiskundehuiswerk heeft afgemaakt, kijkt hij zijn antwoorden na. Tot zijn verbazing ziet hij dat zijn antwoord niet goed is. Bij de opgave  $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}$  antwoordde hij  $\frac{5}{9}$ , maar in het antwoordmodel staat  $1\frac{3}{20}$ . Hij snapt er niets van. 'Waarom moet ik dit leren, ik heb dit later toch niet nodig?', moppert hij.

Veel leerlingen uit het basis- en voortgezet onderwijs hebben moeite met het rekenen met breuken. Dat komt onder andere omdat zij dit abstract vinden. Zou het leerlingen helpen om kale opgaven als ' $\frac{6}{7} : 3$ ' in een context te plaatsen, zoals 'Teun verdeelt  $\frac{6}{7}$  pizza over 3 borden. Hoeveel pizza komt er op elk bord?' Of leidt de context juist af en zorgt het voor slechtere rekenprestaties? Dit hebben wij onderzocht bij ongeveer 500 leerlingen uit groep 8 en de eerste twee klassen van het voortgezet onderwijs.<sup>[1]</sup>

### Belangrijk, maar lastig

Het kunnen rekenen met breuken is belangrijk, omdat dit voorbereidt op vaardigheden als het volgen van een recept, het berekenen van kansen, maar ook op meer abstracte algebraïsche vaardigheden. Uit onderzoek blijkt dan ook dat het kunnen rekenen met breuken een belangrijke voorspeller is voor de algemene rekenwiskundige vaardigheden van leerlingen.<sup>[2]</sup> Rekenen met breuken komt aan het einde van het basisonderwijs aan bod, maar de leerlijn loopt door in het voortgezet onderwijs.

Matthijs is niet de enige leerling die moeite heeft met breuken. Veel leerlingen kunnen zich moeilijk iets voorstellen bij de berekeningen. Zo wordt een breuk niet altijd gezien als een deling. Net als Matthijs passen veel

leerlingen procedures voor bewerkingen, zoals optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, apart toe op de teller en noemer.<sup>[3]</sup> Ook vermenigvuldigen met breuken onder de 1 vinden leerlingen vaak lastig. Bij deze vermenigvuldigingen kan de uitkomst kleiner zijn dan één of beide factoren, zoals in  $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ , en dat is in tegenstelling tot wat zij gewend zijn van het vermenigvuldigen van hele getallen.

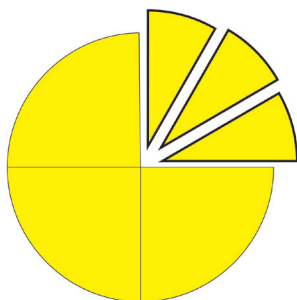
Wat rekenen met breuken verder moeilijk maakt, is dat de gekozen rekenstrategie afhangt van het soort bewerking (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen), de gelijknamigheid van de noemers en het soort breuk.<sup>[3]</sup> Ook de rekenprocedures zijn voor leerlingen lastig te begrijpen. Denk bijvoorbeeld aan de deelstrategie 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde'. Hoewel veel leerlingen de procedure kunnen uitvoeren, zullen zij moeite hebben om zich een voorstelling te maken bij deze bewerking en te begrijpen waarom deze procedure werkt. Een belangrijke sleutel in het overkomen van de obstakels die leerlingen ervaren bij het rekenen met breuken, zou wel eens kunnen liggen in het concreter maken van de abstracte breuken en rekenregels door ze in een realistische context te plaatsen.

### Contextopgaven

In het hedendaagse rekenonderwijs hebben realistische contexten een belangrijke rol. Dit soort contexten kunnen ervoor zorgen dat rekenopgaven meer aansluiten bij de belevingswereld van leerlingen en ook een ander soort oplossingsstrategieën uitlokken. Tegelijkertijd zou een context ook juist kunnen afleiden en een (te) groot beroep op de leesvaardigheden kunnen doen.



Voor het rekenen met hele getallen (zoals  $238 : 14$ ) is eerder gevonden dat Nederlandse leerlingen uit groep 8 opgaven met of zonder context even goed maakten.<sup>[4]</sup> Rekenen met hele getallen is voor leerlingen aan het eind van het basisonderwijs echter een stuk minder abstract dan het rekenen met breuken. Een context zou leerlingen kunnen helpen om meer betekenis te geven aan de breuken en een voorstelling van de berekening te maken. Het gebruik van mentale modellen, zoals het inbeelden van het delen van een cake, taart of pizza, zie figuur 1, kan hierbij mogelijk ook gestimuleerd worden en eventuele misconcepties of rekenfouten voorkomen. Daarnaast kan het in context plaatsen mogelijk leiden tot het gebruik van meer informele en intuïtieve strategieën. Hierdoor gaan leerlingen bijvoorbeeld bij het berekenen van  $\frac{4}{7}$  deel van een bioscoop met 210 stoelen, uit zichzelf eerst 210 door 7 delen en vervolgens vermenigvuldigen met 4.



figuur 1 Het mentale model dat kan helpen bij de opgave  $\frac{1}{4} : \frac{1}{12}$

## Het onderzoek

Ons vermoeden was dus dat contexten leerlingen kunnen helpen bij het rekenen met breuken. Om dat te onderzoeken hebben wij de prestaties van leerlingen onder-

zocht op breukenopgaven met een context, zoals 'Een voetbaltrainer maakt 6 liter limonade en vult daarmee flesjes van  $\frac{3}{4}$  liter. Hoeveel flesjes kan hij dan vullen?'. Deze prestaties hebben we vergeleken met die op vergelijkbare breukenopgaven in 'kaal' format, zonder context, dus ' $6 : \frac{3}{4} = \dots$ '. De 498 deelnemende leerlingen kwamen uit groep 8 van negen verschillende basisscholen en uit klas 1 en 2 van negen scholen uit het voortgezet onderwijs (vmbo-theoretisch tot en met vwo). Deze leerlingen maakten 24 verschillende breukenopgaven, waarvan twaalf in context en twaalf vergelijkbare 'kale' opgaven.

De opgaven varieerden in bewerking (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen), soort getallen (breuken of hele getallen) en gelijknamigheid (wel of niet). Om de breukentoets niet te lang te maken en goed vergelijkbaar qua complexiteit, zaten er geen gemengde getallen in de opgaven, zoals  $1\frac{3}{4}$ . Ook was het, bij correcte berekening, niet nodig het eindantwoord te vereenvoudigen. In tabel 1 en tabel 2 staan voorbeeldopgaven beschreven.

## Resultaten

In het algemeen viel op dat leerlingen uit het basis- en voortgezet onderwijs op hetzelfde niveau presteerden. Er lijkt dus geen vooruitgang in het rekenen met breuken, terwijl de leerlijn nog wel doorloopt in het voortgezet onderwijs. Deze stagnatie is ook uit eerder onderzoek gebleken.<sup>[5]</sup> De leerlingprestaties op de breukenopgaven varieerden sterk tussen de typen opgaven. Het optellen of aftrekken van twee breuken ging veel leerlingen goed af, waarbij ze het op de kale versie wat beter deden dan op de contextversie, zoals te zien is in tabel 1.

	kaal	context
+	$\frac{2}{9} + \frac{5}{9}$	Na de verjaardag van Katja blijft van de chocoladecake $\frac{2}{9}$ deel over en van de citroencake blijft $\frac{5}{9}$ deel over. Hoeveel cake is er in totaal overgebleven?
	$\frac{1}{4} + \frac{3}{8}$	Levi schenkt $\frac{1}{4}$ liter water in een maatbeker met al $\frac{3}{8}$ liter water. Hoeveel liter water zit er dan in totaal in de maatbeker?
-	$\frac{5}{7} - \frac{2}{7}$	Sem doet mee aan een sprintwedstrijd en moet $\frac{5}{7}$ kilometer sprinten. Hij heeft al $\frac{2}{7}$ kilometer afgelegd. Hoeveel kilometer moet hij nog sprinten?
	$\frac{8}{9} - \frac{1}{3}$	Jesse heeft nog $\frac{8}{9}$ brood. Hij eet $\frac{1}{3}$ brood. Hoeveel brood is dan nog over?

tabel 1 Voorbeelden van breukenopgaven met optellen en aftrekken die zijn onderzocht. (Groen geeft de opgave aan waar leerlingen beter op presteerden. Als beide formats wit zijn betekent dat dat er geen significant verschil in prestaties was.

	kaal	context
×	$\frac{4}{7} \times 210$	In de bioscoop is $\frac{4}{7}$ deel van de 210 plaatsen bezet. Hoeveel plaatsen zijn dat?
	$9 \times \frac{1}{3}$	Johan koopt bij de bouwmarkt 9 houten planken van $\frac{1}{3}$ meter. Hoeveel meter is dat in totaal?
	$\frac{7}{10} \times \frac{3}{10}$	Van de kinderen in de klas speelt $\frac{7}{10}$ deel een instrument. Van de kinderen die een instrument spelen, speelt $\frac{3}{10}$ deel gitaar. Welk deel van de klas speelt gitaar?
	$\frac{1}{2} \times \frac{5}{9}$	Van de kinderen in de klas zit $\frac{1}{2}$ deel op een sport. Van de kinderen die sporten, zit $\frac{5}{9}$ deel op tennis. Welk deel van de klas zit op tennis?
:	$\frac{6}{7} : 3$	Teun verdeelt $\frac{6}{7}$ pizza over 3 borden. Hoeveel pizza komt er op elk bord?
	$6 : \frac{3}{4}$	Een voetbaltrainer maak 6 liter limonade en vult daarmee flesjes van $\frac{3}{4}$ liter. Hoeveel flesjes kan hij dan vullen?
	$\frac{4}{5} : \frac{2}{5}$	Voor een carnavalskostuum gebruikt Thirza $\frac{4}{5}$ meter touw. Ze knipt daar stukken uit van $\frac{2}{5}$ meter. Hoeveel stukken touw worden dat?
	$\frac{3}{4} : \frac{1}{8}$	Een boer heeft $\frac{3}{4}$ kilogram boter gemaakt. Hij verdeelt dat over pakjes van $\frac{1}{8}$ kilogram boter. Hoeveel pakjes boter worden dat?

tabel 2 Voorbeelden van breukenopgaven met vermenigvuldigen en delen die zijn onderzocht. (Groen geeft de opgave aan waar leerlingen beter op presteerden)

Bij vermenigvuldigen en delen zag het patroon er anders uit, zoals te zien is in tabel 2. Leerlingen hadden veel moeite met vermenigvuldigen van twee breuken en met delen van breuken. Kale breuken-deelopgaven werden door minder dan de helft van de leerlingen goed gemaakt. Daarentegen maakte ongeveer twee derde deel van de leerlingen de vergelijkbare contextopgaven wél goed. Een context helpt hier waarschijnlijk met het overkomen van het grote abstractieniveau van het delen van breuken. Ook bij enkele vermenigvuldigingsopgaven, zoals de opgave waarbij een breuk vermenigvuldigd werd met een heel getal, presteerden leerlingen beter op de opgaven met een context dan op de kale versie. Het lijkt er dus op dat een context vooral bij meer abstracte opgaven, zoals deelopgaven, helpend kan zijn. Het was wel opvallend dat bij vermenigvuldigingsopgaven

tegengestelde effecten zichtbaar waren. Bij een aantal opgaven werd de contextopgave beter gemaakt, terwijl bij andere opgaven juist de kale versie beter werden gemaakt. Het type context lijkt hierbij van belang te zijn. Bij sommige opgaven leek de context namelijk misleidend. Bij de 'breuk × breuk' opgave was het bijvoorbeeld waarschijnlijk voor een deel van de leerlingen niet duidelijk dat werd gevraagd om een deel van een deel en dat vermenigvuldigen nodig was. Het is dus vooral belangrijk dat de betekenis van de context en de gebruikte taal ook aansluiten bij het type bewerking en type breuken.

### Conclusie

Omdat veel leerlingen moeite hebben met breuken en de vaardigheid van leerlingen lijkt te stagneren na de basisschool, is extra aandacht voor het rekenen met breuken



in het voortgezet onderwijs nodig. Om een doorlopende leerlijn te waarborgen, is het van belang dat docenten in het voortgezet onderwijs goed op de hoogte zijn van wat er in het basisonderwijs al aangeboden wordt aan breukenonderwijs. Hoewel in het voortgezet onderwijs breukenopgaven vaak als kale rekenopgaven worden aangeboden, kan het helpen een breukenopgave in een realistische context te plaatsen. Dit geldt vooral bij opgaven die abstract zijn voor leerlingen, zoals delen. Het is wel belangrijk dat deze context goed aansluit bij de bewerking in de opgave. Ga dus zeker voor de pizza, maar wel met mate.

## Noten

- [1] Mostert, T. M. M. & Hickendorff, M. (2023). Pizzas or no pizzas: An advantage of word problems in fraction arithmetic? *Learning and Instruction*, 86. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2023.101775>
- [2] Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z., & Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction*, 37, 5–13. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002>

- [3] Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, 38, 201–221, <https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008>
- [4] Hickendorff, M. (2021). The demands of simple and complex arithmetic word problems on language and cognitive resources. *Frontiers in Psychology*, 12, 727761. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.727761>
- [5] Bruin-Muurling, G. (2010) *The development of proficiency in the fraction domain: Affordances and constraints in the curriculum*. Technical University Eindhoven, Nederland.

Een bewerkte versie van dit artikel is verschenen in *Volgens Bartjens*, jaargang 43, nummer 3.

## Over de auteurs

Terry Mostert is wiskundedocente op de Katholieke Scholengemeenschap Hoofddorp en docent onderwijswetenschappen aan de Universiteit Leiden. E-mailadres: [t.m.m.mostert@fsw.leidenuniv.nl](mailto:t.m.m.mostert@fsw.leidenuniv.nl)  
Marian Hickendorff is universitair hoofddocent onderwijswetenschappen aan de Universiteit Leiden. E-mailadres: [hickendorff@fsw.leidenuniv.nl](mailto:hickendorff@fsw.leidenuniv.nl)

# $\pi$ op de markt

Henk Rozenhart



Op de weekmarkt in mijn woonplaats maakte ik deze foto. De notenhandelaar vond het wel grappig dat ik zijn vrachtwagen interessant vond. Hij vertelde dat hij zich er natuurlijk van bewust was dat het Engelse woord 'peanut' was, maar wat uitspraak betreft toch hetzelfde. Hij vertelde dat het getal  $\pi$  hem altijd had geïntrigeerd en vandaar zijn keuze voor deze naam. Ook het feit dat 'nut' verwijst naar het feit dat je een beetje gek bent, vond hij goed bij zichzelf passen. Verder was  $\pi$  natuurlijk een getal waar geen eind aan komt, zei hij. Dat hoopte hij voor zijn zaak ook. Toch wel een leuk gesprek zo op maandagmiddag met een man die echt een verhaal bij zijn naamkeuze had.

# In memoriam Joop van Dormolen

Erelid van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



Joop van Dormolen (1928 – 2023)

## Didacticus

Joop van Dormolen is een van de belangrijkste wiskunde-didactici die Nederland heeft voortgebracht. Elders in dit nummer is een bijdrage opgenomen van Anne van Streun over de didactische impact van Joops werk.

Hij woonde sinds 1994 met zijn vrouw Noga in Israël, waar hij op 94-jarige leeftijd op 27 september jongstleden is overleden. Joop was geboren in 1928 in het huidige Indonesië. Hij kwam na de oorlog naar Nederland waar hij nog twee jaar naar de 'overbruggingschool' ging, de Dalton-hbs in Den Haag, om te zorgen dat hij in 1947 eindexamen hbs kon doen. Vervolgens ging hij de opleidingen volgen voor de akten K1 en K5 om wiskundeleraar te worden. Deze opleidingen zijn redelijk vergelijkbaar met wat nu nog wel bekend is onder de namen MO A

en MO B. Later haalde hij zijn doctoraal wiskunde. Eind jaren zestig van de vorige eeuw werd Joop wiskunde-didacticus en wiskundelerarenopleider aan de Universiteit Utrecht. Joop was van 1965 tot 1981 penningmeester van de NVvW.

## Didactiekcommissie

Ik leerde Joop kennen begin jaren zeventig, ik was toen een beginnende wiskundeleraar. Joop benaderde mij om twee redenen: ik had een verslag geschreven over de wijze waarop mijn toenmalige school in de onderbouw havo/vwo het wiskundeonderwijs had georganiseerd en wat de resultaten waren: *Rapport over een vorm van wiskundeonderwijs waarbij differentiatie naar tempo centraal staat* (1974). Als ik er nu naar kijk is het meer een didactische scriptie. Joop had er een exemplaar van gekregen en stelde voor mijn verslag onder alle leden van de NVvW te verspreiden. Want, zo zei hij, er speelde zoveel in het Nederlandse wiskundeonderwijs – de Mammoetwet was in 1968 ingevoerd – dat hij en Harrie Broekman, zijn collega in Utrecht, bezig waren een commissie op te richten die tot doel had de vakdidactische competentie van de Nederlandse wiskundedocenten een stevige professionele impuls te geven. Die commissie werd de Didactiekcommissie van onze Vereniging. Het tweede waarvoor Joop mij belde was de vraag of ik lid van die Didactiekcommissie wilde worden. Op beide verzoeken heb ik ja gezegd. In feite heb ik dus aan Joop het begin van mijn carrière als wiskunedidacticus te danken.

## Professionalisering

Het eerste grote project van de Didactiekcommissie was het opzetten van de A-cursus, *Leerstofordening en doelstellingen*: een soort startcursus professionalisering van de wiskunedocent. Centraal stond het didactisch



model waarbij, kort samengevat, een wiskundedocent de doelen van het onderwijs vaststelt (en dat dus niet overlaat aan de methode die de school gebruikt), uiteraard binnen het kader van het programma, zowel voor de korte als de lange termijn en daarop de activiteiten in de klas afstemt. Een ander centraal element in de cursus was het *OSaEV*-model voor het overdragen van begrippen, gebaseerd op het werk van de psycholoog Richard Skemp. De letters *OSaEV* staan voor oriënteren, sorteren, abstractie bereikt?, expliciteren en verwerken. Later gebruikte Joop de aanduiding *OOV*: oriënteren, ontwikkelen, verwerken. De A-cursus was een tweedaagse bijeenkomst, op vrijdag en zaterdag. De deelnemers waren in groepen van tien tot twintig verdeeld. In kleine groepen gingen zij aan de thema's van de cursus werken. De leden van de Didactiekcommissie traden als gespreksleider op. Zij werden door Joop en Harrie in speciale bijeenkomsten van te voren op hun rol en taak als gespreksleider voorbereid.

“Het opleiden van wiskunde-docenten was en bleef Joops hoofdtaak!”

### Voorkomen van tweedeling

Joop formuleerde waar het in de A-cursus om ging als volgt. 'Nu er een nieuwe inhoud voor het wiskunde-onderwijs is vastgesteld, in lijn met wat er internationaal eind jaren vijftig, begin jaren zestig was vastgesteld en onder de namen 'Moderne Wiskunde' en 'New Math' bekend is geworden, is het gevaar zeker niet denkbeeldig dat de zittende wiskundedocenten dat nieuwe programma niet of minder zouden accepteren en dat dit tot een ongewenste tweedeling onder de wiskundedocenten zou leiden.' Het voorkomen van die tweedeling was een belangrijk aspect van de A-cursus, maar ook van de erop volgende cursussen die de Didactiekcommissie organiseerde. Die vrees was om een aantal redenen terecht. De kern van de New Math was dat dat de oude indeling algebra/(euclidische) meetkunde werd losgelaten. Uiteraard verdween de algebra niet, maar kwam aan de orde als dat passend werd gevonden. En dat was bijvoorbeeld bij een nieuw onderwerp als lineair programmeren. Bij de meetkunde was de verandering veel groter. De axiomatische opbouw van Euclides verdween vrijwel volledig, centraal kwamen nu de meetkundige afbeel-

dingen als spiegelen, draaien en vergroten/verkleinen. Verder kregen vectoren een plaats in het programma. Dit was voor de docenten destijds een volkomen nieuwe aanpak. De vrees voor een tweedeling kwam ook door de oprichting van het I.O.W.O., nu het Freudenthal Instituut, waar het realistisch wiskundeonderwijs werd ontwikkeld dat zo mogelijk nog verder afstond van de toenmalige wiskundedocenten. De A-cursus was een groot succes zodat die heel wat keer herhaald is.

### Opleiden van docenten

Op de A-cursus volgde de B-cursus, *Samenwerken*, over samenwerken in de klas, vooral tussen leerling en docent, de C-cursus, *Verschillen tussen leerlingen* en de D-cursus. Deze cursussen waren afgeleiden van wat in Utrecht bij de opleiding van wiskundedocenten werd gedaan. Dat opleiden van wiskundedocenten was en bleef Joops hoofdtaak. Het was min of meer traditie dat de vakdidacticus in Utrecht een centrale, landelijke rol had bij het opleiden van nieuwe wiskundedocenten. Een van de initiatieven van Joop in die rol was het oprichten van *Vadiwulo: vakdidactici wiskunde van de universitaire lerarenopleidingen*. Geregeld kwamen en komen (nog steeds) die opleiders bij elkaar om hun gemeenschappelijke zaken te bespreken.

### Handboek

Die landelijke rol bracht Joop er ook toe twee andere activiteiten te beginnen: het schrijven van het boek *Didactiek van de Wiskunde* (1974), dat ook in het Duits vertaald is, en in samenwerking met de Didactiekcommissie het schrijven van een aantal brochures voor de leden van de Vereniging: *Voorbeeld van een lesvoorbereiding* (1975), *Vaardigheden, 1001 redenen waarom leerlingen geen goede routine hebben* (1975), *Handelen om te begrijpen, een werkwijze om leerlingen naar goede vaardigheden te wijzen* (een coproductie van Joop en mijzelf, 1977), *Instappen en toepassen* (eveneens een coproductie van Joop en mijzelf, 1979). Joop was ook actief als (mede-)auteur van leerboeken voor wiskunde. Zo verscheen begin jaren tachtig de twee leerboeken met als titel *16-*, een methode waarbij systematisch wiskunde ontwikkeld werd aan de hand van alledaagse situaties. Het grootste werk van Joop in de jaren zeventig was zijn boek *Didactiek van de wiskunde* (1974) waarin hij alles wat van belang is voor wiskundedocenten heeft opgeschreven. Het was het standaardwerk van de opleidingen tot wiskundedocent. Het heeft 38 jaar geduurd tot er een vervolg is verschenen: *Handboek wiskundedidactiek* (2012) waarin Joop het voorwoord heeft geschreven. >

Heel bijzonder was dat Joop het eerste exemplaar in ontvangst nam. In 1982 promoveerde Joop. De titel van zijn proefschrift luidt: *Aandachtspunten, de a priori analyse van leerteksten voor wiskunde bij het voortgezet onderwijs*. Deze titel geeft aan dat Joop altijd veel belangstelling had voor rol en betekenis van de wiskundetaal in het onderwijs.

“Joop had altijd veel belangstelling voor de rol en de betekenis van de wiskundetaal in het onderwijs.”

### Internationaal

Vanaf de jaren tachtig ging Joop zich steeds meer op het internationale toneel van het wiskundeonderwijs bewegen. Hij begon zijn internationale carrière als co-auteur van twee publicaties van het internationale samenwerkingsverband van didactische onderzoekers, *Basic Components of Mathematics Education*. Daarna was hij twaalf jaar *executive secretary* van de *International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME, 2015)*. Het *Handbook of Mathematics Education (1996)*, waarvan hoofdstuk 5 over *Space and Shade* door Joop, Rina Hershkowitz and Bernard Parzysz is geschreven. Opmerkelijk hierbij is dat als zijn affiliatie wordt genoemd Technion Institute of Technology, Israël. Maar wellicht wordt dit begrijpelijk door de eerder gemelde verhuizing naar Israël.

### Handelen om te begrijpen

Wat absoluut zeker over Joop gemeld moet worden is dat hij een zeer beminnelijk mens was, voor mij persoonlijk een goede vriend. Ik zal nooit vergeten dat in november 1975 Joop opeens bij ons voor de deur stond. Joop en ik zaten midden in het schrijfproces van *Handelen om te begrijpen*. Hij kwam mij en mijn vrouw feliciteren met de geboorte van ons eerste kind. Over het schrijfproces van *Handelen om te begrijpen* moet hier ook vermeld worden dat we, of liever ik, op een gegeven moment vastzat(en). Joop bood aan om het af te maken. Het zou redelijk zijn geweest als Joops naam als eerste auteur vermeld zou worden. Maar hij stond erop dat dit mijn naam werd.

### Literatuur

- Dormolen, J. van (1974). *Didactiek van de wiskunde*. Oosthoek.
- Dormolen, J. van (1975). *Vaardigheden*. NVvW.
- Dormolen, J. van. (1975) *Voorbeeld van een lesvoorbereiding*. NVvW.
- Dormolen, J. van & Zwaneveld, B. (1977). *Handelen om te begrijpen*. NVvW.
- Dormolen, J. van & Zwaneveld, B. (1979). *Instappen en toepassen*. NVvW.
- Dormolen, J, van (1982). *Aandachtspunten*. Bohn, Scheltema, Holkema.
- Drijvers, P. & Streun, A. van & Zwaneveld, B. (2012). *Handboek wiskundedidactiek*. Epsilon.
- Hershkowitz, R. & Parzysz, B. & Dormolen, van J. (1996). *Shape and Shade*. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde (Eds). *International Handbook of mathematics Education*, 161-204. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Smid, H.J. (2015). *Zestig jaar hart voor wiskundeonderwijs. Een geschiedenis van het Nederlandse wiskundeonderwijs in 10 portretten*. NVvW.
- Zwaneveld, B. (1974). *Rapport over een vorm van wiskundeonderwijs waarbij differentiatie naar tempo centraal staat*. NVvW.

### Over de auteur

Bert Zwaneveld is emeritus hoogleraar van de Open Universiteit.

E-mailadres: [bert.zwaneveld@ou.nl](mailto:bert.zwaneveld@ou.nl).

# Joop van Dormolen mijn inspirator

In 1974 treed ik toe tot het gilde van wiskundendidactici als lerarenopleider. Bevoegd en bekwaam als wiskundeleraar met tien jaar leservaring, maar onbekwaam als wiskundendidacticus, achteraf gezien. In hetzelfde jaar verschijnt het eerste leerboek ooit over wiskundendidactiek van Joop van Dormolen.<sup>[1]</sup> Bijna veertig jaar later verschijnt in 2012 de opvolger van dat standaardwerk het *Handboek wiskundendidactiek* <sup>[2]</sup>, waarvan ik een hoofdauteur ben en Joop van Dormolen (toen inmiddels 83 jaar) het voorwoord schrijft.

## De terugblik van Joop zelf

In het voorwoord van het *Handboek wiskundendidactiek* vertelt Joop dat hij, toen hij een jaar of tien leraar was, bezoek kreeg van een vertegenwoordiger van de uitgever van Prismaboeken. Die liet hem het boekje *Psychology of mathematics learning* van Richard Skemp (1971) zien met de vraag of in Nederland belangstelling bestond voor een vertaling. Die vertaling is er met tientallen herdrukken gekomen: *Wiskundig denken*.<sup>[3]</sup>

Enkele citaten uit de terugblik van Joop:

*Bij het lezen van Skemp's boek voelde ik een mengeling van blijdschap en boosheid. De boosheid kwam omdat ik het gevoel kreeg dat ik veel van mijn problemen bij het lesgeven had kunnen vermijden als ik eerder met de ideeën van Skemp had kennis gemaakt. Toen ik begon als leraar was er immers geen didactische opleiding voor eerstegraads leraren. Maar de blijdschap had toch de overhand, omdat ik eindelijk vond wat ik door ervaring eigenlijk al wist zonder het me bewust te zijn.*

Hij sluit het voorwoord bij het *Handboek* af met de aanbeveling:

*Ook leraren in functie zullen dit boek kunnen gebruiken en er wellicht nog iets uit leren. Mensen die veel ervaring met een bepaald vak hebben, worden toch dikwijls verrast en geholpen als hen iets getoond wordt wat zij eigenlijk allang weten, maar zich niet hadden gerealiseerd. Een soortgelijke herkenning als ik had bij het lezen van Skemp's boek wens ik velen toe.*

## Mijn kennismaking met *Didactiek van de wiskunde*

De impact van het werk van Joop op het wiskundeonderwijs kan moeilijk worden overschat. Bert Zwaneveld schrijft daarover in dit nummer van *Euclides*. Laat ik het illustreren met mijn ervaringen. In 1974 spreekt mijn voorganger aan de RUG, dr. Albert Koldijk, hoofddocent



figuur 1

wiskunde aan de NLO Ubbo Emmius, mij aan: 'Weet je dat Joop van Dormolen een boek heeft geschreven over de didactiek van de wiskunde? Ik begrijp er niet veel van. Kunnen we met een aantal collega's een studiegroep vormen om het te bestuderen?' Dat gebeurt. In mijn rudimentaire 'lerarenopleiding' omstreeks 1964 heeft de wiskundendidacticus dr. L. Bunt mooie verhalen verteld over de komende modernisering van het leerplan, over Papy, over zijn leerboek *Statistiek voor gymnasium alpha* en over Pólya. In het werk van de laatstgenoemde heb ik mij als wiskundeleraar verder verdiept en daarmee mijn meetkundeonderwijs op een hoger niveau gebracht. Over het leren van wiskunde, over hoe de kennis van leerlingen veelal verbrokkeld en onsamenhangend in het geheugen wordt opgeslagen, over het belang van leerstofordening, daar had ik zelden iets over gelezen. Net als bij Joop toen hij voor het eerst van Skemps werk kennisnam, had ik het gevoel dat ik dit allemaal veel eerder had willen weten! Kenmerkend voor Joops stijl in heel zijn werk is dat hij de lezer of toehoorder zelf aan het denken wil zetten. Zie het voorbeeld in figuur 2 over leerdoelen.

>

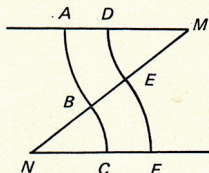


### Doelstellingen

Vraag 7. Met onderstaande drie vragen wordt kennis van dezelfde leerstof getoetst, maar vanuit verschillende doelstellingen. Welke leerstof en welke doelstellingen?

a Bewijs dat de lengte van een cirkelboog, waarvan de straal  $R$  is en de bijbehorende middelpuntshoek  $a^\circ$ , gelijk is aan  $\frac{2\pi aR}{360}$ .

b  $AB$  en  $DE$  zijn cirkelbogen met middelpunt  $M$ ;  $BC$  en  $EF$  zijn cirkelbogen met middelpunt  $N$ .  $AM$  en  $NF$  zijn evenwijdig.



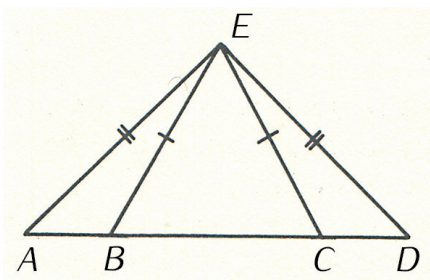
Bewijs dat de gebogen lijnen  $ABC$  en  $DEF$  even lang zijn.

c Een cirkelboog heeft een straal 3 en de bijbehorende middelpuntshoek is  $50^\circ$ . Bereken de lengte van de boog.

figuur 2

## Onderwijzen op basis van kennisnetwerken of cognitieve schema's

Van Dormolen heeft het in zijn publicaties vaak over begrijpen versus klakkeloos imiteren, voordoen-nadoen-oefenen, opsplitsen van leerstof in afzonderlijk te trainen minivaardigheden enzovoort. In navolging van Skemp en anderen spreekt hij over schema's als samenhangende kennisnetwerken rondom centrale begrippen of thema's. Begrijpen is het koppelen van iets nieuws aan een al opgebouwd schema in het geheugen van de lerende. In de opgave van figuur 3 is de vraag om te bewijzen dat de hoeken bij  $A$  en  $D$  gelijk zijn.



figuur 3

Van Dormolen schrijft dat deze opgave verschillende schema's in het geheugen kan oproepen, namelijk het schema van congruente driehoeken, van spiegelen of van vectoren.

Van Dormolen betoogt dat het opsplitsen van de leerstof in kleine hapklare brokken wel succes heeft op korte termijn, maar leidt tot het opslaan in het geheugen van kleine, onsamenhangende schema's. Deze verbrokkeling heeft mede tot gevolg dat leerlingen denken dat ze iets begrijpen (assimileren in een bestaand schema), terwijl het

schema onvolledig is. Een bekend voorbeeld is het trainen op het oplossen van elk type eerstegraads of tweede-graads vergelijking, een gebruikelijke strategie in schoolboeken. Zonder aandacht voor de gemeenschappelijke concepten en methoden leidt dit echter tot verbrokkelde schema's. Het verraderlijke van dit type inprenten van specifieke oplossingsmethoden bij specifieke typen opgaven is dat het op korte termijn, bij de toets over dat type opgaven, succes heeft. De wendbaarheid van deze kennis in het gebruik voor afwijkende typen opgaven is nihil en op den duur lopen al die typen opgaven in het geheugen door elkaar en treedt klontering op.<sup>[4]</sup>

Het produkt van twee machten van eenzelfde grondtal, b.v.  $a^3 \times a^2$ , vinden we als volgt:

$$a^3 \times a^2 = (a \times a \times a) \times (a \times a) = a \times a \times a \times a \times a = a^5.$$

Evenzo vinden we  $a^5 \times a^7 = a^{12}$

In het algemeen:  $a^m \times a^n = a^{m+n}$ .

Het produkt van twee machten van een zelfde grondtal is weer een macht van dat grondtal, waarbij de exponent gelijk is aan de som van de exponenten der factoren.

Met behulp van deze eigenschap kunnen we het produkt bepalen van twee willekeurige eentermen:

$$7ab^2c^3 \times 3a^2b^3c = 7 \times a \times b^2 \times c^3 \times 3 \times a^2 \times b^3 \times c = 7 \times 3 \times a \times a^2 \times b^2 \times b^3 \times c^3 \times c = (7 \times 3) \times (a \times a^2) \times (b^2 \times b^3) \times (c^3 \times c) = 21a^3b^5c^4.$$

We leiden nu nog enige eigenschappen van machten af.

$$(a^3)^4 = a^3 \times a^3 \times a^3 \times a^3 = a^{12}.$$

Op gelijke wijze vindt men:  $(a^5)^2 = a^{10}$ ;  $(p^7)^3 = p^{21}$ .

In het algemeen:  $(a^m)^n = a^{mn}$ .

Wanneer men een macht van een getal opnieuw tot een macht verheft, verkrijgt men een macht van datzelfde grondtal, waarvan de exponent gelijk is aan het produkt der exponenten.

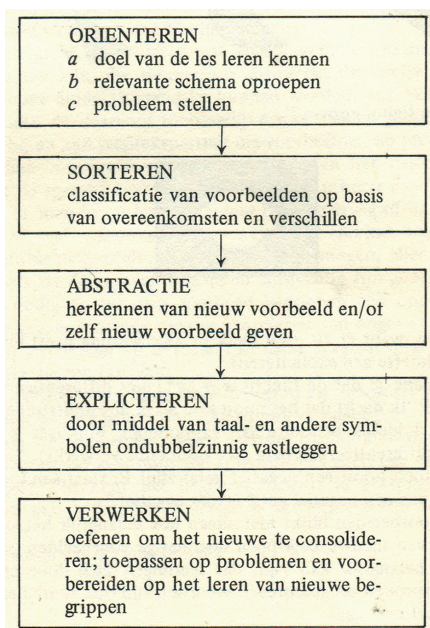
figuur 4

## Een anekdote uit de oude doos

Het door Van Dormolen in zijn standaardwerk beschreven model voor de ordening van de leerstof heeft veel invloed gehad op de lespraktijk en de manier waarop de leerteksten in de schoolboeken vorm hebben gekregen. Honderden wiskundeleraren hebben in nascholingscursussen met die manier van denken geoefend en dat in hun lespraktijk toegepast. In zijn proefschrift *Aandachtspunten*<sup>[5]</sup> heeft hij leerteksten in schoolboeken daarop getoetst. Voordat ik dat model bespreek is het wellicht verhelderend om een voorbeeld uit mijn eigen lespraktijk te geven, als contrast met wat dankzij Van Dormolen later gemeengoed werd.

In mijn eerste jaar (1964-1965) als beginnend parttime wiskundeleraar en student geef ik in klas 1 hbs les uit het gerenommeerde *Leerboek der algebra* van de auteurs Stoelinga en Van Tol. Zie het fragment waar mijn les over ging in figuur 4. Toevallig zit mijn rector dr. Jan Raat als

waarnemer achterin het lokaal. In een ongewoon stille klas vertel ik helder hoe het rekenen met machten in elkaar zit, met de nadruk op de vet gedrukte algemene regels. In de pauze spreekt Jan Raat mij aan en geeft mij een door hem getypt A4-tje waarin met veel voorbeelden de opbouw van het rekenen met getallen en letters, optellen-aftrekken, vermenigvuldigen-delen, machtsverheffen in een samenhangend schema langskomt. Voorzichtig zeg ik: 'Ja, zo kan het ook. Wij in de wiskunde doen het direct algemeen zoals in het boek staat, anders dan in de natuurkunde.' Jaren later wordt Jan Raat hoogleraar in de didactiek van de natuurkunde aan de TU Eindhoven. En heb ik intussen begrepen dat nieuwe kennis met voorbeelden verbonden moet worden met een al opgebouwd schema in het geheugen van leerlingen. Ook na de invoering van de modernisering van het wiskundeonderwijs in 1968 heeft een klassiek leerboek als *Sigma* dezelfde opbouw als bij Stoelinga en Van Tol. In het voorwoord voor de leerlingen staat dan ook in *Sigma*: 'Elk hoofdstuk begint met de theorie, maar misschien begrijp je die niet meteen. Ga dan de voorbeeldopgaven maar nadoen.'



figuur 5

## OSaEV, een model voor ordening van de leerstof

In de didactische verwarring na het nieuwe moderne leerplan van 1968 komt het goed onderbouwde en praktisch toepasbare model OSaEV voor ordening van de leerstof als geroepen, zie figuur 5. In het kader van dit artikel gaat het te ver om met Van Dormolens eigen voorbeelden alle aspecten van dit model te illustreren. Zelf kan ik mij nauwelijks voorstellen dat een wiskunde-

leraar zijn boek niet in de kast heeft staan, al zal het niet zo beduimd zijn als mijn exemplaar waar de illustraties uit zijn overgenomen.

Zijn proefschrift *Aandachtspunten* gaat theoretisch dieper in op leerteksten, meer voor de professionele leraren-opleider en auteur. Talloze teksten uit schoolboeken worden geanalyseerd vanuit het perspectief van de auteur, 'Wat heeft die bedoeld?' en van de leerlingen 'Wat kunnen die hiervan hebben begrepen?'

Ter gelegenheid van Joops pensionering in 1987 is een symposium gehouden en een bundel artikelen verschenen over leerstofordening met uiteraard allerlei kritische noten en verdere uitwerkingen van het model OSaEV.

## Relevantie voor ons wiskundeonderwijs nu

Voor mij ligt de relevantie van Joops werk op de koppeling die hij aanbracht tussen de schema's van wiskundige kennis die leerlingen in hun geheugen opbouwen, en het didactisch handelen van de wiskundeleraar in relatie tot de structuur van het schoolboek. Sinds de dissertatie *Het denken van de schaker* van mijn promotor A.D. de Groot in 1946 verscheen, heeft het psychologisch onderzoek onbetwistbaar laten zien hoe belangrijk voor het leerproces een adequate reeks ervaringen is die tot een rijk en wendbaar kennisnetwerk in het geheugen leidt. Het stoort mij nog altijd als ik uit allerlei verhalen, voorstellen of leerboeken kan opmaken dat de auteurs zelfs niet hebben nagedacht over de manier waarop die leerstof of kennis in het geheugen van de leerlingen kan of moet worden opgeslagen om vervolgens weer beschikbaar te komen. In het *Handboek* hebben wij geprobeerd bij allerlei wiskundige inhouden relevante centrale concepten of oplossingsmethoden als kern van een te ontwikkelen kennisnetwerk te formuleren. Zie daarover ook op YouTube het interview van Paul Drijvers met mij bij het verschijnen van het *Handboek*.<sup>[6]</sup>

Laat ik afsluiten met enkele voorbeelden en non-voorbeelden.

In mijn promotieonderzoek *Heuristisch Wiskundeonderwijs*<sup>[7]</sup> volgde ik ruim 400 leerlingen die volgens drie verschillende varianten van lesteksten onderwijs kregen in 4 vwo. In de terminologie van Van Dormolen hier enkele resultaten van dat onderwijsexperiment.

- Bouw je een wiskundig onderwerp op met alleen kale' wiskundige opgaven, dan kunnen de leerlingen nagenoeg onmogelijk toepassingen van die wiskunde koppelen aan die 'kale' wiskunde. In termen van Van Dormolen: De toepassingen assimileren niet in het gevormde cognitieve schema.

- Een opbouw met een rijke variatie aan contexten als *Oriëntatie* zonder een tijdige *Explicitering* van de wiskundige abstractie leidt bij de modale leerlingen tot een onvoldoende ontwikkeling van de centrale wiskundige concepten.
- In de fasen van *Oriëntatie* en *Sorteren* geeft een wisselwerking tussen contexten en wiskundige voorbeelden het beste uitzicht op een wendbaar schema.

Irene van Stiphout laat in haar dissertatie *The Development of Algebraic Proficiency* [8] zien dat de contextrijke *Oriëntatie* en *Sorteerfase* in de schoolboeken bij het onderwerp lineaire verbanden zonder een expliciete vertaling gevolgd wordt door een wiskundig ‘kale’ opbouw, zodat de kans groot is dat er eigenlijk twee los van elkaar ontwikkelde schema’s in het geheugen ontstaan. Gerrit Roorda heeft in zijn dissertatie *Ontwikkeling in verandering* [9] laten zien hoe moeilijk het is voor leerlingen om alle betekenissen van afgeleide te ‘begrijpen’ als die onsamenhangend worden onderwezen, zonder een brede *Oriëntatie* en *Sorteerfase*. Peter Kop geeft in de publicatie *Ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten onderbouw havo/vwo* [10] een uitwerking van

(advertentie)



HAN.NL/OPENAVOND

**1E-GRAADS  
BEVOEGDHEID  
HALEN?**

KIES VOOR DE DUALE MASTER  
LERAAR WISKUNDE AAN DE HAN!  
VIND MEER INFORMATIE OF VRAAG EEN  
ADVIESGESPREK AAN VIA HAN.NL/MLWI  
OF KOM NAAR DE (ONLINE) OPEN AVOND  
OP 13 MAART 2024

HAN UNIVERSITY  
OF APPLIED SCIENCES

een brede opbouw van het kennisnetwerk van lineaire verbanden uitgaande van één context, sponsorloop, waarin alle betekenissen en technieken langskomen. In dezelfde publicatie werk ik een opbouw van kwadratische verbanden uit gebaseerd op één centrale vraag, namelijk het onderzoek van de grafiek bij allerlei typen formules. Vergelijkingen worden ingebed in dat schema en de volgorde in de schoolboeken zal moeten veranderen.

## Een anekdote tot slot

Mijn kleinzoon is in 5 vwo in verwarring, halverwege het lange hoofdstuk over integraalrekening. ‘Opa, nu kan ik primitiveren, dat begrijp ik en nu beginnen ze over oppervlakte. Wat heeft dat er nu mee te maken?’ Tja, daar botsen twee schema’s om maar niet te spreken over de laatste paragraaf die ineens gaat over natuurkundige concepten. Daar kun je natuurlijk zo’n hoofdstuk ook mee beginnen om een brede oriënteringsbasis te leggen.

## Noten

- [1] Dormolen, J. van (1974). *Didactiek van de wiskunde*. Oosthoek.
- [2] Drijvers, P., Streun, A. van & Zwaneveld, B. (2012). *Handboek wiskundededictiek*. Epsilon.
- [3] Skemp, R.R. (1971) *Wiskundig Denken*. Spectrum 90e editie 2008.
- [4] Dormolen, J. van (1975). *Vaardigheden*. NVW
- [5] Dormolen, J. van (1982). *Aandachtspunten*. Bohn, Scheltema, Holkema.
- [6] zie: <https://www.youtube.com/watch?v=lle12DhDEqY>
- [7] Streun, A. van (1989). *Heuristisch wiskundeonderwijs*. Rijksuniversiteit Groningen.
- [8] Stiphout, I. van (2011). *The Development of Algebraic Proficiency*. TU Eindhoven.
- [9] Roorda, G. (2012). *Ontwikkeling in verandering*. Rijksuniversiteit Groningen
- [10] Streun, A. van & Kop, P. (2017). *Ontwerpen wiskundige denkactiviteiten onderbouw havo-vwo*. slo-website.

## Over de auteur

Anne van Streun is gepensioneerd wiskundeleraar, vakdidacticus wiskunde en hoogleraar aan de Rijksuniversiteit Groningen. E-mailadres: [avstreun@icloud.nl](mailto:avstreun@icloud.nl)



# Tangent en subtangent

*Tangent(e)* is in veel talen het woord voor raaklijn. *Subtangent* moet dus zoiets zijn als 'onder-de-raaklijn' en is een nagenoeg vergeten begrip uit de pre-calculus periode.

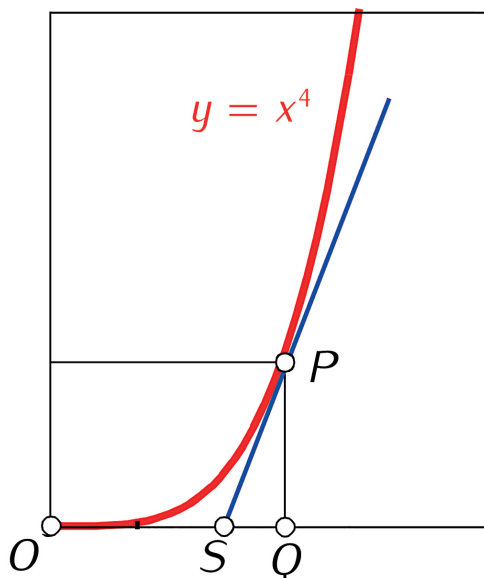
## Een mooie som

Het zou zo maar een eindexamensom uit de begintijd van de differentiaalrekening op school kunnen zijn geweest:<sup>[1]</sup>

Gegeven de kromme  $y = x^4$ .

Het punt  $P$  met positieve  $x$ -coördinaat  $p$  ligt op deze kromme. De loodrechte projectie van  $P$  op de  $x$ -as is  $Q$ . Bewijs dat de verhouding van de stukken waarin de raaklijn in  $P$  aan de kromme het lijnstuk  $OQ$  verdeelt, onafhankelijk is van de plaats van  $P$  op de kromme.

Oplossing:



figuur 1

Stel de raaklijn in  $P(p, p^4)$  aan de kromme snijdt de  $x$ -as in  $S$ . De helling van de raaklijn in  $P$  is enerzijds  $\frac{PQ}{SQ}$  en anderzijds  $4p^3$ .

Uit  $PQ = p^4$  volgt:  $SQ = \frac{p^4}{4p^3} = \frac{1}{4}p$  en  $OS = \frac{3}{4}p$  zodat  $OS : SQ = 3 : 1$ , onafhankelijk van  $p$ .

Ik vind dit een mooie opgave omdat die een meetkundige eigenschap van een machtsfunctie blootlegt. Zij kan iets pittiger worden gemaakt door de coördinaat  $p$  niet te noemen in de opgave. Deze eigenschap, algemeen geldig voor machtsfuncties, was al bekend aan Evangelista Torricelli (1608 - 1647), dus decennia vóór het verschijnen van Leibniz' artikel uit 1684, waarin de 'nova calculus' (de differentiaalrekening), werd geopenbaard. Na 1684 is wat ik hier de 'Torricelli-stelling' noem, eenvoudig aan te tonen via de gedifferentieerde van  $x^n$ , maar Toricelli moet een andere weg hebben bewandeld.<sup>[2]</sup>

## Raaklijn aan parabool en superparabool

De lijnstukken  $OQ$  en  $PQ$  (figuur 1) stonden bij wiskundigen in de 17<sup>de</sup> eeuw bekend onder de namen *abscis* en *ordinaat*.

Het deel van de abscis dat onder de raaklijn ligt, in figuur 1 dus het lijnstuk  $SQ$ , werd de *subtangent* genoemd. De Torricelli-stelling kan dan zo worden geformuleerd: *de raaklijn in een punt  $P (\neq O)$  van de kromme  $y = x^n$  verdeelt de abscis van  $P$  in stukken die zich verhouden*

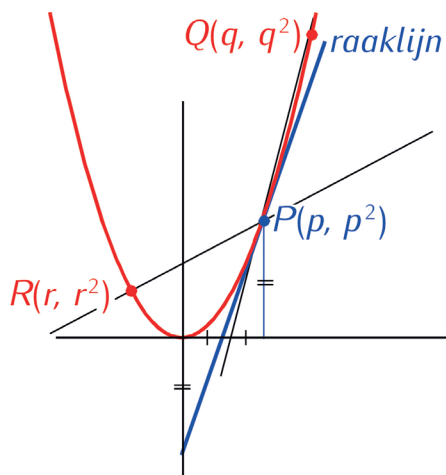
*als  $(n - 1) : 1$ .*

Of nog korter:

*de subtangent van een punt  $P (\neq O)$  op de kromme  $y = x^n$  is het  $n$ -de deel van de abscis van  $P$ .*

De vraag is hoe zonder differentiaalrekening de helling van de raaklijn aan een 'machtskromme' kan worden gevonden. Voor  $n = 3, 4, 5, \dots$  werd zo'n kromme in Torricelli's tijd wel *superparabool* genoemd.

Ik kijk eerst naar de huis-tuin-en-keuken parabool, ofwel de kromme  $y = x^2$ , zie figuur 2.



figuur 2

Neem nu een willekeurig punt  $P(p, p^2)$  op de rechterhelft van de parabool. Door  $P$  gaat een waaier van rechte lijnen. Lijnen die  $(p, p^2)$  met een punt  $(q, q^2)$  verbinden, waarbij  $q > p$ , hebben een helling  $> 2p$ .

Immers: 
$$\frac{q^2 - p^2}{q - p} = q + p > p + p = 2p$$

Net zo hebben lijnen die  $(p, p^2)$  verbinden met een punt  $(r, r^2)$ , links van  $P$ , zeg met  $0 < r < p$ , een helling  $< 2p$ . De 'q-lijnen' zijn lijnen die de parabool in  $P$  als het ware gaan overstijgen, terwijl de 'r-lijnen' in  $P$  door de parabool worden overstegen.

De lijn door  $P$  met helling gelijk aan  $2p$  is de *grenslijn* tussen deze twee lijnenfamilies en die heeft geen tweede punt met de parabool gemeen. Ook is duidelijk dat die lijn, afgezien van  $P$ , in het buitengebied van de parabool ligt en dat er tussen deze lijn en de parabool geen andere rechte lijn past.

Deze rechte sluit in  $P$  het best aan bij de parabool en verdient daarom de naam *raaklijn*.<sup>[3]</sup>

Deze 'lijnenwaaier-aanpak' vind ik didactisch aantrekkelijker dan het idee van 'het dubbele snijpunt' en dan de 'limiet-aanpak'. Deze 'lijnenwaaier-aanpak'<sup>[4]</sup> werkt ook voor superparabolen, maar het bewijs vereist wat meer algebra dan op school gangbaar is.

Laat  $P$  een punt met positieve  $x$ -coördinaat  $p$  zijn op de kromme  $y = x^n$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ). De punten  $Q$  en  $R$  met  $x$ -coördinaten  $q$  en  $r$  liggen respectievelijk rechts en links van  $P$  op de superparabool.

Uit  $q > p > 0$  volgt:

$$\begin{aligned} \frac{q^n - p^n}{q - p} &= q^{n-1} + q^{n-2}p + \dots + p^{n-1} \\ &> p^{n-1} + p^{n-2}p + \dots + p^{n-1} \\ &= n \cdot p^{n-1} \end{aligned}$$

De helling van de lijn die  $P$  verbindt met het punt  $Q$  ( $q, q^n$ ) is dus groter dan  $n \cdot p^{n-1}$ .

Net zo, als  $0 < r < p$ , is de helling van de lijn die het punt  $P$  verbindt met het punt  $R$  ( $r, r^n$ ) kleiner dan  $n \cdot p^{n-1}$ . De grenslijn (raaklijn) in  $P$  heeft blijkbaar de helling  $n \cdot p^{n-1}$ .

De subtangent bij het punt met abscis  $p$  op de kromme  $y = x^n$  is gelijk aan het quotiënt van ordinaat en helling, met als uitkomst  $p/n$ .

De generalisatie van de in het begin van dit artikel genoemde eigenschap kan dus zonder differentiaalrekening worden aangetoond! Als  $p = 0$  dan is de raaklijn horizontaal en kan de subtangent als 0 worden gerekend. Als  $p < 0$  reken ik de subtangent negatief en is het een kwestie van spiegelen in de  $y$ -as of in de oorsprong, al naar gelang  $n$  even dan wel oneven is, om de uitkomst  $p/n$  te krijgen.

Dit alles kan kort zó worden samengevat:

$$\text{Sub}(x^n) = x/n$$

waarbij *Sub* dus voor subtangens staat.

Deze formule hangt nauw samen met :

$$\text{Dif}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$$

met *Dif* voor 'gedifferentieerde van'.

Dit even onder de voorwaarde  $n = 2, 3, 4, \dots$

## Ook voor niet-natuurlijke exponenten

Dat deze formules ook voor niet-natuurlijke rationale exponenten gelden weten we uit de differentiaalrekening, maar kan ook via de lijnenwaaieraanpak worden aangetoond. Neem bijvoorbeeld de exponent  $-1$ .

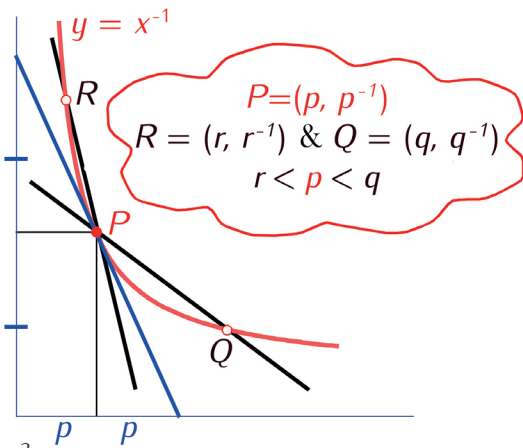
$$\text{helling } PQ = \frac{1/q - 1/p}{q - p} = -\frac{1}{pq} > -\frac{1}{p^2}$$

$$\text{helling } PR = \frac{1/r - 1/p}{r - p} = -\frac{1}{pr} < \frac{1}{p^2}$$

Conclusie:

helling raaklijn in  $P = -p^{-2}$  en bijgevolg:

$$\text{Sub}(x^{-1}) = -x$$



figuur 3

Via het 'merkwaardige quotiënt':

$$\frac{q^n - p^n}{q - p} = q^{n-1} + q^{n-2}p + \dots + p^{n-1}$$

kan nu ook worden gevonden dat:

$$\text{Sub}(x^{-n}) = -x / n$$

Voor  $n = 1, 2, 3, \dots$

Dat voor alle gehele getallen  $k \neq 0$  geldt

$$\text{Sub}(x^{1/k}) = kx$$

is vanuit meetkundig standpunt (spiegelen in de lijn  $x = y$ ) duidelijk.

Dat nu ook

$$\text{Sub}(x^{n/m}) = \frac{m}{n}x$$

voor  $m, n$  geheel en  $m \neq 0$ , vraagt nog wat 'subtieler' majoreer-en-minoreer-werk. Maar het klopt wel en komt overeen met de vondst van Torricelli dat de verhouding van subtangent en abscis bij de 'superhyperbool'  $x^m y^n = c$  gelijk is aan  $n : m$ .<sup>[3]</sup>

Deze stelling van Torricelli is een generalisatie van de opgave waarmee ik dit artikel begon. En net zoals bij de uitwerking van die opgave, kan dit worden gecontroleerd met behulp van differentiaalrekening. In de stijl van Leibniz wordt dit:

$$\begin{aligned} x^m y^n &= c \\ \downarrow & \\ \text{differentieer naar } x & \\ \downarrow & \\ mx^{m-1} \cdot y^n + x^m \cdot ny^{n-1} \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \downarrow & \\ my + nx \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{m}{n} \cdot \frac{y}{x} \\ \downarrow & \\ \text{subtangent} &= -\frac{n}{m} \cdot \text{abscis} \end{aligned}$$

## Spelen met subtangenten

Met onze kennis van de differentiaalrekening kunnen we gemakkelijk de subtangenten bij enkele standaardfuncties vinden.

Uitgaande van de regel

$$\text{Sub}[f(x)] = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

komt er bijvoorbeeld:

$$\text{Sub}[\sin(x)] = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

Dit klinkt toch grappig: *subtangent sinus is tangens*.

En om nog even bij goniometrische functies te blijven:

$$\text{Sub}[\cos(x)] = \cotg(x)$$

$$\text{Sub}[\tan(x)] = \sin(x) \cdot \cos(x)$$

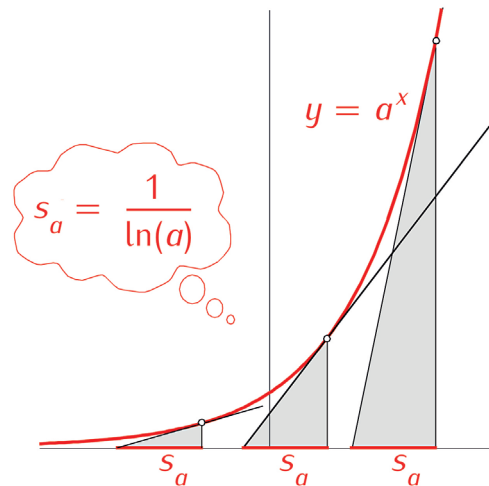
Echt mooi is het bij exponentiële functies:

$$\text{Sub}(a^x) = \frac{1}{\ln(a)}$$

met als klap op de vuurpijl:

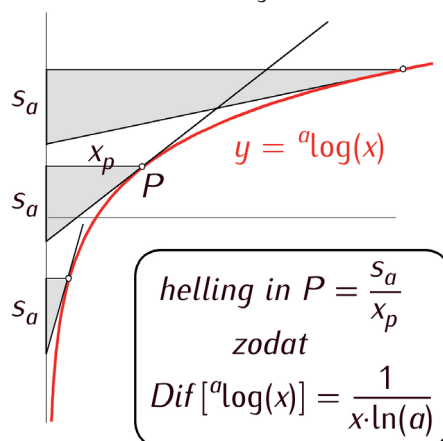
$$\text{Sub}(e^x) = 1$$

Daar hoort dan zo'n plaatje bij, zie figuur 4:



figuur 4

De 'raaklijn-ordinaat-subtangent-driehoeken' in figuur 4 hebben allemaal dezelfde basis! Spiegelning van de exponentiële kromme in de lijn  $x = y$  geeft meetkundig inzicht in de regel voor het differentiëren van logaritmische functies, zie figuur 5.



figuur 5



## De subtangens omgekeerd

Het omgekeerde van de subtangens van een functie  $f$  wordt ook wel de *relatieve afgeleide* van  $f$  genoemd:

$$\text{Rel}[f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

In de context van een groeiproces heeft dit de betekenis van 'groeisnelheid gerelateerd aan de op dat moment aanwezige omvang' van zeg maar, een zekere populatie. Alternatieve namen voor 'relatieve afgeleide' zijn: *proportionele afgeleide* en *logaritmische afgeleide*, de laatste naam houdt verband met de mooie eigenschap:

$$\text{Rel}[f(x) \cdot g(x)] = \text{Rel}[f(x)] + \text{Rel}[g(x)]$$

Dit is een onmiddellijk gevolg van de productregel voor het differentiëren!

Deze logaritmisch ogende regel is verwant aan een wet uit de foutenleer, namelijk:

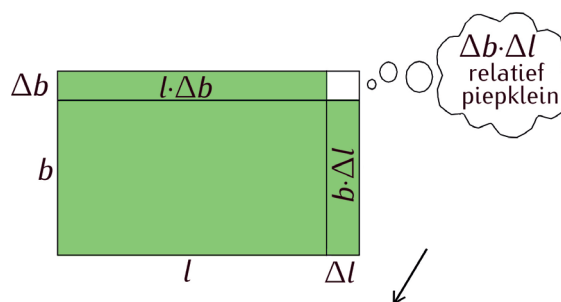
*de relatieve fout van een product is (bij benadering) de som van de relatieve fouten van de factoren.*

Ooit hebben we bij een van de leerplanprojecten<sup>[5]</sup> uit het verleden het idee gehad dat deze foutenwet een goede inleiding zou zijn op de productregel van het differentiëren, maar in de lespraktijk viel dat toen een beetje tegen. Dat neemt niet weg dat we ook in de wiskundeles best iets aan foutenrekening zouden kunnen (of moeten?) doen.

Een aardig voorbeeld kan worden gevonden in de afmetingen van voetbalvelden. De internationaal geldende standaardafmetingen van een voetbalveld zijn 105 bij 68 meter. De velden in de stadions van bijvoorbeeld Ajax, PSV en Feyenoord hebben juist deze afmetingen, maar bijvoorbeeld het veld in het stadion Galgenwaard (Utrecht) is te klein, want het meet 103 bij 67 meter. Echter, dit is wel binnen de door de voetbalbond toegestane foutenmarge.

De relatieve fouten van lengte en breedte van het veld van FC Utrecht zijn respectievelijk ongeveer 1,90 % en 1,47 %. De oppervlakte van het 'ideale' veld van 105 bij 68 m is 7140 m<sup>2</sup>, terwijl die bij de Utrechtse grasmat 6901 m<sup>2</sup> bedraagt, een afwijking van 3,35 %, ongeveer gelijk aan 1,90 % + 1,47 %.

Als gezegd houdt dit verband met de productregel voor differentiëren en ik denk ondanks de ervaring van destijds<sup>[5]</sup> dat een stukje foutenrekening bij de behandeling van deze regel wel functioneel is. De context van voetbalvelden geeft ook aanleiding tot een meetkundige illustratie, zie figuur 6!



figuur 6

$$\frac{\Delta(bl)}{bl} \approx \frac{b \cdot \Delta l + l \cdot \Delta b}{bl} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta b}{b}$$

Nog even terug naar de relatieve afgeleide. Als bij een groeiproces dat beschreven kan worden door een differentieerbare functie, de relatieve afgeleide van die functie constant, (maar niet 0) is, dan is het zeker dat we te maken hebben met exponentiële groei.

De definitie van dit type groei is juist dat de groeisnelheid op een willekeurig tijdstip evenredig is met de 'omvang' op dat tijdstip. In hedendaagse 'analyse-taal':

$$\text{uit } \frac{f'(t)}{f(t)} = k \text{ volgt } f(t) = ce^{kt}.$$

## Noten

- [1] In 1958 was de analyse eindelijk opgenomen in de eindexamenprogramma's van het vmo en de eerste opgaven op het CSE dateren van 1961.
- [2] Zie Boyer, C. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development*. Dover Publications.
- [3] Het idee dat een raaklijn aan een kromme in een punt  $P$  een lijn is die zo nauw bij die kromme aansluit dat er in het gebied tussen die lijn en de kromme geen andere rechte past, is te vinden in de *Elementen van Euclides* (boek 3, propositie 16) waarbij het de raaklijn aan een cirkel betreft.
- [4] De hier beschreven aanpak is ontleend aan Marsden, J & Weinstein, A. (1981). *Calculus Unlimited*. Benjamin Cummings Publ. Company.
- [5] Bedoeld is hier het project Profi (rond 1998), waarbij de programma's vwo-wiskunde voor NG en NT werden ontwikkeld en getest.

## Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: [M.Kindt@uu.nl](mailto:M.Kindt@uu.nl)

# Wat bedoelen ze toch met... misconcepties (2)

Bij hardnekkige fouten die leerlingen maken wordt vaak naar misconcepties verwezen.

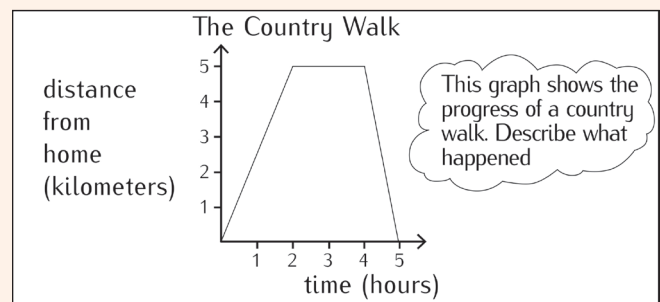
Misconcepties kunnen optreden bij alle onderwerpen en in alle leerjaren. Misconcepties kunnen het leren van nieuwe wiskunde in de weg staan en om die reden is het interessant om er eens wat beter naar te kijken. In deel 1 is het begrip misconceptie ingekaderd, in deel 2 kijken we naar wat er aan misconcepties te doen is.

## Nog meer soorten misconcepties

Wiskunde is een vakgebied met precieze definities. Die zullen bij leerlingen lang niet altijd bekend zijn. En zelfs als een definitie wel onderdeel is van het cognitieve schema van een leerling, zijn het nog steeds de intuïtieve beelden (*concept images*) die het denken leiden.<sup>[1]</sup> Daarom kunnen misconcepties ontstaan doordat leerlingen met *te eenzijdige voorbeelden* worden geconfronteerd. Als je alleen opgaven krijgt over scherphoekige driehoeken of convexe vierhoeken, zul je niet snel aan het stomphoekige of concave geval denken.

Dit gebeurt ook bij het wiskundige begrip piramide, juist omdat leerlingen al een beeld hebben van de Egyptische piramides. Om dat bestaande beeld uit te breiden is het belangrijk om er aandacht aan te besteden dat het grondvlak niet per se een vierkant hoeft te zijn, de top niet per se midden boven het grondvlak hoeft te liggen, en dat het grondvlak niet per se op de grond hoeft te staan. Over de vraag of een ruit ook een vierkant is, kunnen interessante klassengesprekken worden gevoerd. Bij het getalbegrip komt de misconceptie dat vermenigvuldigen altijd een groter getal oplevert (en delen een kleiner) ook voort uit eenzijdige voorbeelden. Maar daar is niet direct iets aan te doen: op het moment dat leerlingen leren vermenigvuldigen, werken ze alleen nog met positieve gehele getallen, en dan klopt dat idee bijna altijd. Maar als dit idee blijft bestaan op het moment dat er ook met niet-gehele of negatieve getallen gewerkt gaat worden, ontstaat een misconceptie. Er moet accommodatie plaatsvinden: in het cognitieve schema moeten de verbindingen die met vermenigvuldigen te maken hebben, worden aangepast op het moment dat andere soorten getallen aan bod komen. Sommige misconcepties hebben te maken met *abstractie-stappen*. Een misconceptie die veel voorkomt bij het variabelenbegrip is die van de letter als afkorting of als

ding. In onze opleiding krijgen studenten bij vakdidactiek als deel van een serie opgaven die ze snel moeten oplossen de vraag: 'Op een universiteit zijn er  $P$  professoren en  $S$  studenten. Per professor zijn er zes studenten. Druk het verband tussen  $S$  en  $P$  in een vergelijking uit.' Er zijn altijd studenten die opschrijven:  $P = 6S$ , want elke professor komt tenslotte overeen met zes studenten. De letter wordt als afkorting of eenheid gezien, niet als een aantal.<sup>[2]</sup> Het redeneren over drie appels en vijf appels die samen acht appels worden bij het leren optellen van gelijksoortige termen ( $3a + 5a = 8a$ ) werkt deze misconceptie in de hand.



figuur 1 Bron: Shell Centre (1985)

Ook bij het aflezen van grafieken komen misconcepties voor. Zo zien leerlingen een grafiek soms als een plaatje van de situatie in plaats van als een (toch wat abstract) schema dat het verband tussen grootheden uitdrukt. Een voorbeeld is een grafiek als in figuur 1, waarin de tijd is afgezet tegen de afstand tot thuis. Leerlingen beschrijven de wandeling die hierbij hoort soms als: 'De mensen lopen een steile heuvel op. Aan de andere kant liepen ze met grotere snelheid weer naar beneden.' Ook *overgeneraliseren* kan een oorzaak zijn van misconcepties. Leerlingen schrijven bijvoorbeeld regelmatig op: >

$\sqrt{x^2+9}=x+3$ . Misschien omdat het bij vermenigvuldigen wel klopt, of omdat het lijkt op termsgewijs haakjes uitwerken? Het is duidelijk dat het de leerling op zo'n moment niet zo goed lukt om betekenis te geven aan wat er gebeurt en hij gaat dan een procedure volgen die lijkt op een procedure die in andere situaties wel goed werkt. Hetzelfde gebeurt bij kwadrateren als leerlingen per term kwadrateren, iets dat bij het uitwerken van haakjes natuurlijk wel moet:  $(x+3)^2 = x^2 + 9$  klopt niet, maar  $2(x+3) = 2x + 6$  gaat wel per term. Idem voor fouten als  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ . Of als leerlingen bij het vermenigvuldigen van breuken opeens de noemers gelijknamig gaan maken. Of als bij het vereenvoudigen van breuken termen worden 'weggestreept' in plaats van factoren worden weggedeeld, zodat  $\frac{24-6y}{8-6y}$  gelijk wordt aan 3. Dit speelt ook een rol bij fouten als  $-1 + -2 = 3$ , want 'twee minnen worden een plus'.

Het is helemaal niet gek om zo te generaliseren, alleen moeten we leerlingen dus leren zich de vraag te stellen of dat in dit geval ook van toepassing is en waarom dan wel of niet. Soms weet de leerling eigenlijk wel dat hij het niet begrepen heeft, en dat uit zich in vragen als: 'Mag dit?' Dan is er nog geen sprake van een misconceptie, de leerling heeft nog geen verkeerde overtuiging.

### Aanpak van misconcepties

Het is belangrijk om alert te zijn op, en zelfs actief op zoek te gaan naar misconcepties bij leerlingen. Controlevragen kunnen een geschikt middel daarvoor zijn. Met name als leerlingen worden uitgedaagd te redeneren, in open vragen, kun je misconcepties herkennen. Maar het kan ook via gesloten vragen; Barton<sup>[3]</sup> gebruikt daar *diagnostic questions*<sup>[4]</sup> voor: meerkeuzevragen waarbij de afleiders *kunnen* wijzen op een misconceptie. We schrijven 'kunnen', want het hoeft niet altijd zo te zijn dat een fout wordt gemaakt door een misconceptie: in het geval van deze multiplechoicevragen zou een leerling die het gewoon niet weet ook maar wat kunnen gokken; dan is er wel sprake van onbegrip maar niet van een misconceptie. In figuur 2 vind je een voorbeeld.

Het spreekt voor zich dat als je misconcepties makkelijk kunt voorkomen, je dat ook moet doen. Daarom is het belangrijk om daar bij het introduceren van nieuwe concepten of methodes vooraf over na te denken. Bij het begrip 'kwadraat' bijvoorbeeld is het niet handig om als eerste voorbeeld  $2^2 = 4$  te gebruiken, omdat ook  $2 + 2$  en  $2 \times 2$  gelijk aan 4 zijn en daarmee kun je leerlingen op het verkeerde been zetten. Dat weer repareren is

Hoe reken je de oppervlakte van dit parallellogram uit?

**A**  $\frac{6 \times 5 \times 4}{2}$     **B**  $6 \times 5 \times 4$     **C**  $6 \times 5$     **D**  $5 \times 4$

figuur 2 Bron: Barton<sup>[3]</sup>

moeilijker dan meteen een handiger voorbeeld als  $3^2$  kiezen. Kies dus ook bij wortels niet als eerste voorbeeld de wortel van 4.

Ook is het verstandig om voorbeelden met voldoende variatie te gebruiken, want te eenzijdige voorbeelden kunnen tot misconcepties leiden, zoals we hierboven al zagen. Als je het begrip prisma bespreekt, geef dan voorbeelden van prisma's met allerlei verschillende grondvlakken, waaronder ook niet-regelmatige veelhoeken, en laat ook prisma's zien waarbij het grondvlak niet op de grond ligt. Ook non-voorbeelden, randvoorbeelden (is een cilinder een prisma?) en extreme voorbeelden (is een kubus een prisma?) helpen om het begrip echt scherp te krijgen. Ander voorbeeld: zet een ruit niet altijd op een punt, want dan denken leerlingen dat dat een kenmerk is. Voorheen was de gangbare opvatting dat onderwijs altijd misconcepties moest voorkomen. Deze boodschap is bijvoorbeeld duidelijk aanwezig in een invloedrijk boek van Gardner.<sup>[5]</sup> Maar in reactie hierop wees men erop<sup>[6]</sup> dat deze in steek eigenlijk niet past bij de constructivistische ideeën over leren die toen opgeld deden. Het is namelijk onvermijdelijk dat er bij leren misconcepties optreden. Denk weer aan het idee dat als je een getal ergens mee vermenigvuldigt de uitkomst groter is dan dat getal. Dat klopt zo lang je over gehele getallen groter dan 1 praat. Maar op het moment dat kinderen voor het eerst kennismaken met vermenigvuldigen, kun je simpelweg nog niet de uitzonderingen (breuken, negatieve getallen) al gaan bespreken, want dat zijn dan nog onbekende begrippen. Omdat het moeite kost om een cognitief schema aan te passen is het belangrijk om vooruit te denken. Soms lijkt het op de korte termijn snel en efficiënt om leerlingen een trucje aan te leren, bijvoorbeeld het rekenen met de appels bij het optellen van gelijksoortige termen (drie appels en vijf appels worden samen acht appels, dus  $3a + 5a = 8a$ ), maar dat zorgt op de langere termijn misschien voor misconcepties over het variabelenbegrip,



zoals we hierboven zagen. Later in de leerlijn kan zo'n aanpak dus tot problemen leiden. Dan is het beter om in een eerder stadium wat meer inzicht te investeren.

Toch kun of wil je dat aanpassen niet altijd vermijden. Denk aan het gebruik van de omgekeerde pijlenketting bij het oplossen van een vergelijking. De omgekeerde pijlenketting is een denkmodel dat beperkt houdbaar is: als de vergelijking maar aan één kant een onbekende heeft werkt hij uitstekend, maar als je toe bent aan vergelijkingen van het type  $x + 3 = 2x - 7$  kun je hem niet meer gebruiken. Dat kan een reden zijn om te besluiten dat je die hele pijlenketting maar liever überhaupt niet gebruikt, want misschien hebben leerlingen dan 'oplossen van vergelijkingen' zo aan die pijlenketting gekoppeld dat het lastig wordt om dat later weer aan te passen. Aan de andere kant is de pijlenketting een heel krachtig denkmodel voor het functiebegrip, en hij geeft een methode om bepaalde vergelijkingen die niet met de balansmethode lukken, zoals  $x^2 = 9$ , aan te pakken. Dat is dan weer een overweging om het model wél te introduceren, waarbij je dan de beperkte houdbaarheid bij vergelijkingen oplossen voor lief neemt. Maar dan moet je je er dus van bewust zijn dat bij het nieuwe type vergelijkingen aandacht nodig is voor het accommoderen van het cognitieve schema. Het cognitieve conflict bestaat er dan uit dat de leerling probeert de vergelijking  $x + 3 = 2x - 7$  met een omgekeerde pijlenketting op te lossen, maar dan blijkt dat de uitkomst  $2x - 7$  is, met een  $x$  erin, en dat je daarmee niet kunt gaan terugrekenen. De oude aanpak voldoet hier niet, dus moet er een andere aanpak komen. De conclusie is dat bij het maken van keuzes in didactische aanpak je overwegingen maakt met betrekking tot het vervolg van de leerlijn. Daarvoor is overzicht over de leerlijnen een voorwaarde.

## Tot slot

Terug naar het voorbeeld waarmee het eerste artikel over misconcepties begon:  $\frac{5}{2a} - \frac{1}{2b} = \frac{4}{2a-2b}$ . De leerling doet hier onterecht bij aftrekken wat bij vermenigvuldigen wel mag. Of dit echt een misconceptie genoemd mag worden of dat er überhaupt nog geen begrip is gevormd, is niet duidelijk: daar zou je met doorvragen achter kunnen komen. Fundamenteel is een misconceptie die aan het licht kwam toen de substitutie van 3 voor  $x$  in de uitdrukking  $2x$  resulteerde in het getal 23. Misconcepties hebben vaak een kern die wel goed is, of ze uiten zich in aanpakken die lijken op procedures die in andere situaties wel werken. Daarom zijn ze zo hardnekkig. Als docent is het dus belangrijk dat je misconcepties bij leerlingen herkent, ze niet afdoet als

onzin, maar er serieus op ingaat, en probeert duidelijk te maken aan de leerling waarom dat beeld in deze situatie mis is.

We bedanken onze collega's Rieke van Bommel, Paul Drijvers, Aad Monquil, Irene van Stiphout voor hun waardevolle reacties op de conceptversie.

Dit artikel is geschreven vanuit Samenwerkingsgroep Lerarenopleidingen Wiskunde tweedegraads (SLW).

## Noten

- [1] Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169. [http://wrap.warwick.ac.uk/507/1/WRAP\\_Tall\\_dot1981a-concept-image.pdf](http://wrap.warwick.ac.uk/507/1/WRAP_Tall_dot1981a-concept-image.pdf)
- [2] Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *The Mathematics Teacher*, 74(6), 418–420. Shell Centre (1985). *The Language of Functions and Graphs*. <https://www.mathshell.com/materials.php?item=lfq&series=tss>
- [3] Barton (2020). *Reflect, Expect, Check, Explain*. John Catt Educational Ltd.
- [4] Barton heeft een grote website vol met dit soort vragen: <https://diagnosticquestions.com>
- [5] Gardner, H.G. (1991). *The Unschooled Mind*. Basic.
- [6] Smith, J., diSessa, A. & Rochelle, J. (1993). Misconceptions reconceived: a constructivist analysis of knowledge in transition. *Journal of Learning Science*, 3, 115–163.

## Over de auteurs

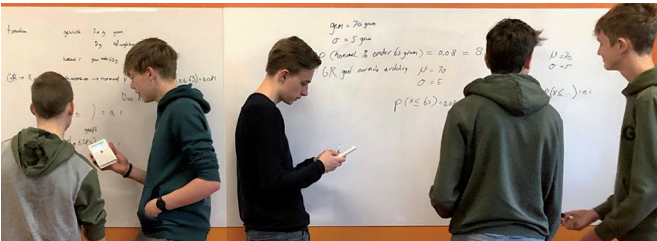
Jeanine Daems en Theo van den Bogaart zijn beiden als lerarenopleider wiskunde verbonden aan de Hogeschool Utrecht. E-mailadressen: [theo.vandenbogaart@hu.nl](mailto:theo.vandenbogaart@hu.nl), [jeanine.daems@hu.nl](mailto:jeanine.daems@hu.nl)

# Building Thinking Classrooms

Op 15 december 2023 is de Nederlandse versie van het boek *Building Thinking Classrooms* (BTC) uitgekomen. Het boek is de climax van ruim 15 jaar onderzoek in klaslokalen door de Canadese hoogleraar Peter Liljedahl. In tegenstelling tot veel boeken en artikelen die ik heb gelezen, hoefde ik deze keer niet lang na te denken over hoe dit er in mijn les uit zou zien. Peter beschrijft welke strategieën een docent in zijn les moet inzetten om leerlingen maximaal in de denkstand te zetten en ze weg te voeren van het imiteren van voorbeelden zonder echt denkwerk.

## Een typische BTC-les

Kletsend komen de 30 leerlingen uit 4 havo wiskunde A binnen en gaan zitten in afwachting van de groepsindeling van de dag. Als de groepjes *random* zijn samengesteld, staan de leerlingen weer op en lopen naar de aan hun drielat toegewezen plek langs de rand van het lokaal, waar ze staan bij de verticale niet-permanente oppervlakken (liefst whiteboards, soms ramen of statische whiteboard vellen) wachten op de opdrachten die ze vandaag voorgeschoteld krijgen.



figuur 1 Leerlingen werken in groepjes op verticale niet-permanente oppervlakken

Zelf heb ik inmiddels de beamer weer uitgezet en sta ik in het midden van het lokaal. 'In een chic restaurant, kies je niet uit 100 verschillende gerechten. In het restaurant waar we het vandaag over hebben, kun je kiezen uit een tweegang menu of een driegang menu. Je neemt in ieder geval een hoofdgerecht, daarnaast kies je nog een voorgerecht of een nagerecht of beide. Voor het voorgerecht ...'

Zo vertel ik het verhaal bij de menukaart uit figuur 2 (die de leerlingen dus niet zien) en de leerlingen schrijven alles wat zij relevant achten op. De vraag wordt hoeveel verschillende bestellingen er nu mogelijk zijn en hoe je

dat op een overzichtelijke manier kunt weergeven. Dit is de eerste les bij het hoofdstuk over combinatoriek.



figuur 2 Hoofdstuk 4 opgave 1 uit *Getal & Ruimte* 12<sup>e</sup> editie havo wiskunde A

Mijn 4 havo klas lijkt qua diversiteit een beetje op een eerstejaarsgroep in het hbo. Leerlingen hebben allemaal een ander voortraject. Dit jaar komen ze uit 3 havo, 3 vwo, 4 vmbo-t, 4 havo en 4 vwo. Het nadeel is dat sommigen al verschillende manieren kennen om het probleem aan te vliegen, terwijl anderen nog geen idee hebben. Dat nadeel is ook meteen het voordeel. Dit voordeel kan ik volledig uitbuiten als het me lukt om de leerlingen zich verantwoordelijk te laten voelen voor het leren van hun groepsgenoten én de andere klasgenoten. En dat dat soms zo goed lukt, verrast me nog steeds. Het is het tweede jaar dat ik in mijn 4 havo wiskunde A volledig BTC probeer te werken en ik heb het inmiddels dankzij de beschrijvingen van Peter Liljedahl in zijn boek *Building Thinking Classrooms* (2020) al behoorlijk onder de knie.

## De aanleiding voor BTC

In zijn boek beschrijft Peter Liljedahl hoe hij in 2003 uitgenodigd wordt door Jane, een docent in de onderbouw van het voortgezet onderwijs (vertaald naar de Nederlandse context). Zij weet dat Peter een voorliefde heeft voor probleemoplossen en dat hij bezig is met een promotieonderzoek, niet meer voor de klas staat en dus zeeën van tijd heeft (aldus Peter zelf). Peter bezoekt haar lessen en het enige dat Peter mag doen is een paar problemen aanleveren, waar zij zelf mee aan de slag gaat. Hij mag verder enkel observeren. Het wordt één grote ramp. Na drie lessen zijn de leerlingen gefrustreerd, Jane is uitgeput en Peter is teleurgesteld.

Deze ervaring heeft Peter ertoe aangezet om meer lessen bij Jane te bekijken, maar niet alleen bij Jane. Hij kijkt bij verschillende docenten die hoog aangeschreven staan in allerlei scholen, met leerlingen met diverse achtergronden. En ondanks alle verschillen zijn er in de lessen meer overeenkomsten dan verschillen. Wat hij vooral ziet? Leerlingen die niet nadenken en leraren die hun lesplanning baseren op de aanname dat leerlingen dat niet willen of kunnen. De docenten en leerlingen zitten samen vast in een vicieuze cirkel.

Maar doen de leerlingen dan niets in die lessen? Jazeker, ze doen van alles, maar er wordt maar door een heel klein deel van de leerlingen (20%) een klein deel van de tijd (wederom 20%) echt nagedacht op een manier waarvan we weten dat het leidt tot leren. In zijn boek gebruikt Peter de mooie zinsnede 'Thinking is a necessary precursor to learning'. Belangrijk om te weten is dat Peter het nadoen van een voorbeeld zonder echt na te denken over wat er precies achter het voorbeeld zit, niet rekent tot nadenken. Zijn onderzoek van de daaropvolgende 15 jaar in aanloop naar het uitbrengen van het boek is gericht op het vinden van strategieën die ertoe leiden dat zo veel mogelijk leerlingen een zo groot mogelijk deel van de lestijd nadenken.

## Het boek

In *Building Thinking Classrooms* onderscheidt Peter 14 keuzes (zie figuur 3) die een docent moet maken in en rond zijn lessen. Bij elk van deze 14 keuzes heeft Peters onderzoek een optimale denkstrategie (in het Engels *optimal practice for thinking*) opgeleverd. Deze strategie wordt besproken en er worden nuances aangegeven hoe je de strategie kunt verfijnen.

Na deze 14 hoofdstukken volgt een laatste hoofdstuk waarin beschreven wordt op welke manier je je eigen

- 
1. Welke soorten opgaven we gebruiken
  2. Hoe we groepjes vormen
  3. Waar leerlingen werken
  4. Hoe we het meubilair opstellen
  5. Hoe we vragen beantwoorden
  6. Wanneer, waar en hoe opgaven worden gegeven
  7. Hoe huiswerk eruitziet
  8. Hoe we leerlingautonomie kweken
  9. Hoe we hints en uitbreidingen gebruiken
  10. Hoe we een les consolideren
  11. Hoe leerlingen aantekeningen maken
  12. Wat we besluiten te beoordelen
  13. Hoe we formatief evalueren
  14. Hoe we beoordelingen geven

figuur 3 De 14 keuzes die een docent moet maken

*thinking classroom* kunt bouwen. Welke strategieën voer je als eerste in en welke volgen later?

Hoofdstuk 1 tot en met 14 beginnen met een beschrijving van de strategie die we op het moment zien in de meeste klaslokalen (*De kwestie*) en wat *Het probleem* daarvan is. Daarna volgt de kern van het hoofdstuk, waarin beschreven staat hoe je een verandering kunt inzetten *Naar een denkende klas*. Als je dit zeer gestructureerde deel van het hoofdstuk gelezen hebt, ontstaan er in je gedachten allerlei losse eindjes. In de *Veel gestelde vragen*-sectie staat een groot aantal vragen met bijbehorende antwoorden, waardoor je hele concrete handvatten krijgt om allerlei kleine dingetjes op te lossen. Elk hoofdstuk eindigt met een korte samenvatting van de *Macro- en Microstappen* en een reeks *Vragen om over na te denken*. Om je op weg te helpen wordt elk hoofdstuk afgesloten met een *Probeer dit eens*-paragraaf waarin je tips en trucs krijgt alsook denkopgaven die je kunt gebruiken om de betreffende denkstrategie in je klas in te voeren. Het boek leest ontzettend lekker weg en je kunt mooie kleine behapbare stukken tekst (de hoofdstukken) in een kwartier tot een half uur lezen.

## Vervolg van de les

We waren in de les gebleven op het punt waarop de leerlingen met elkaar een opgave aan het verkennen



waren. BTC is een vorm van zelfontdekkend leren. Wat sterk is aan BTC is dat het zelfontdekkend leren niet een open einde heeft, maar dat de docent continu het proces bewaakt en stuurt. Terwijl de leerlingen de vraag over de verschillende bestellingen beantwoorden, check je als docent of de verschillende methodes die je graag zou willen zien langskomen, zoals wegendiagrammen, boomdiagrammen, systematisch noteren, een rooster en een berekening.

De methodes die niet gekozen worden, probeer je via een paar hints alsnog bij een groepje te droppen, zodat na afloop van het ontdekkende deel van de les de klas als geheel alle methodes gebruikt heeft. Soms lukt dit allemaal in één opgave, maar soms is het nodig één of meer extra vragen te stellen. Zo stelde ik in deze les ook nog een vraag over manieren om acht ogen te gooien met drie dobbelstenen.

## Samenwerken

Tijdens het werken zorg je zo veel mogelijk dat de leerlingen het echt samen doen, door ze de stift regelmatig door te laten geven aan een andere groepsgeenoot en door af en toe kort met ze in gesprek te gaan. Daarna wil je graag dat ze niet alleen binnen hun eigen groepje werken, maar hun antwoorden en methodes gaan vergelijken met andere groepen, om zo te zien dat er meerdere oplossingsstrategieën zijn en om ervoor te zorgen dat de meeste fouten er al uit worden gehaald.

## Rode lijn aanbrengen

In de volgende fase van de les, loop je als docent met de leerlingen langs het leerlingenwerk om alsnog de uitleg te doen. Volgens BTC doe je dat echter niet door zelf veel te schrijven, maar door dingen te benoemen die je in het leerlingenwerk ziet. Op deze manier komt het veel beter aan bij de leerlingen. Ze hebben het zelf eerst geprobeerd en weten al wat de mogelijke problemen zijn waar je tegenaan loopt. Ze hebben bij anderen ook al alternatieven gezien, maar nu breng je als docent de rode lijn aan in het verhaal.

## Individuele verwerking

Tot zo ver zijn leerlingen bezig geweest om gezamenlijk iets te kunnen, maar ze moeten het uiteindelijk individueel kunnen. De eerste stap om ze er zelf over na te laten denken is om ze allemaal individueel met behulp van alle uitwerkingen om hen heen aantekeningen te laten maken bij wat ze ontdekt hebben in de les. Als docent help je daar in het begin een stuk mee dan wanneer ze al iets meer geoefend zijn. Je kunt in het begin een soort van geraamte bieden van de aantekeningen die zij verder

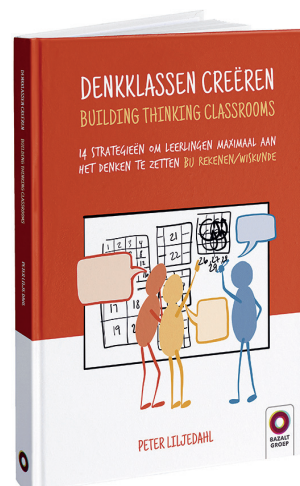
invullen, maar wel in hun eigen woorden en met zelf gekozen voorbeelden.

## Check-je-begrip

En dan komt het zelf proberen of je het kunt. De leerlingen krijgen een aantal check-je-begrip-vragen, die ze soms ook mee naar huis krijgen, om te controleren of ze het echt begrijpen. Er bestaat dus ook geen huiswerk binnen BTC, maar een set controlevragen om erachter te komen of ze iets begrijpen of niet. Uiteraard zul je af en toe wel leerlingen hebben die bepaalde vaardigheden niet zo snel in de vingers hebben als anderen. Zij kunnen thuis zorgen dat ze zich deze vaardigheden alsnog eigen maken.

## Ervaringen met werken volgens BTC

Ik wist niet wat ik meemaakte, toen ik volgens BTC ging werken. Het is echt veel minder vaak nodig om leerlingen aan het werk te zetten. Het komt regelmatig voor dat ze verbaasd zijn dat de les alweer voorbij is. Huiswerk maken is voor veel leerlingen niet meer nodig, omdat ze de lessen veel effectiever gebruiken. Je kunt precies zien waar de leerlingen de fout in gaan en over welke stukken je niets meer uit hoeft te leggen. En in het bijzonder zie je dat ze heel veel bijleren op het vlak van samenwerken, doorzetten en een risico durven nemen om eens iets uit te proberen als ze nog niet zeker weten of het werkt. Gelukkig heb ik daarnaast gemerkt dat het niet ten koste gaat van de cijfers. In sommige klassen zie ik een verbetering en in andere klassen blijft het ongeveer gelijk. Het extra plezier en de dingen die ze nog leren naast de wiskunde-inhoud zijn reden genoeg om hiermee door te gaan. Is dit dan een toverformule, die je alleen even uit hoeft te leggen aan de leerlingen? Nee, dat zeker niet. Je kunt in het begin ook wel wat weerstand verwachten, zeker van leerlingen die al meerdere jaren les hebben gehad



figuur 4 De Nederlandse vertaling van *Building Thinking Classrooms*

met een andere didaktiek. En ook als je collega's hebt die de parallelgroep lesgeven, waarin ze wel 'gewoon' uitleggen en de leerlingen enkel het voorbeeld na hoeven te doen, gaat het niet altijd vanzelf. Maar als je zelf de ervaring hebt opgedaan en de leerlingen over de streep hebt getrokken, wil je met die klas nooit meer terug. En collega's die zien wat je manier van lesgeven doet met de leerlingen, zullen geïnteresseerd raken. Als ze dan ook nog eens in een lokaal zitten waar whiteboards hangen, zullen ze (al dan niet op verzoek van de leerlingen) beginnen met experimenteren.

## Conclusie

Om af te sluiten wil ik nog graag de boodschap meegeven dat BTC niet slechts een nieuwe werkvorm is. Het is een visie en een mindset. Het doel is van elke activiteit in je les een denkactiviteit te maken, zodat je leerlingen zo veel mogelijk uit de les halen en elke minuut benutten om na te denken en te communiceren over wiskunde.

## En wat als je hiermee aan de slag wilt?

Als je nu zelf met BTC aan de slag wilt, raad ik je aan te starten op de website [www.buildingthinkingclass-](http://www.buildingthinkingclass-rooms.nl)

[rooms.nl](http://rooms.nl). Van hieruit kun je het Engelstalige boek of de Nederlandse vertaling bestellen. Je vindt er ook links naar de Facebook groepen *Building Thinking Classrooms* (Engelstalig) en *Building Thinking Classrooms – Nederland*, waar je gelijkgestemden vindt aan wie je je vragen kunt stellen. Verder zijn er op steeds meer plekken scholingsmogelijkheden. Zie hiervoor ook de website.

En dan eindig ik met de woorden van Peter Liljedahl: 'Enjoy the journey'.

## Bron

Liljedahl, P. (2024). *Denkklassen creëren – Building Thinking Classrooms*. Bazalt Groep

## Over de auteur

Maarten Müller is werkzaam als eerstegraads docent wiskunde aan het Marianum in Groenlo en verzorgt scholingen aan docenten of secties.

E-mailadres: [m.muller@marianum.nl](mailto:m.muller@marianum.nl)

# Vermeerder je kennis

Soms merk je dat het tijd is om je vakkennis uit te breiden of te verdiepen. Of je hebt de ambitie om een stap in je loopbaan te zetten en les te gaan geven in de bovenbouw havo/vwo. Beide leerwensen kun je invullen bij de masteropleiding Leraar Wiskunde van de HvA. Kies voor losse modules of volg de gehele opleiding.

**Meer weten?**

Meld je aan voor de open dag.

[hva.nl/mlrwk](http://hva.nl/mlrwk)

 Hogeschool van Amsterdam



Creating Tomorrow

Uitdagende problemen

# Wat gaat ChatGPT aan het wiskundeonderwijs veranderen?

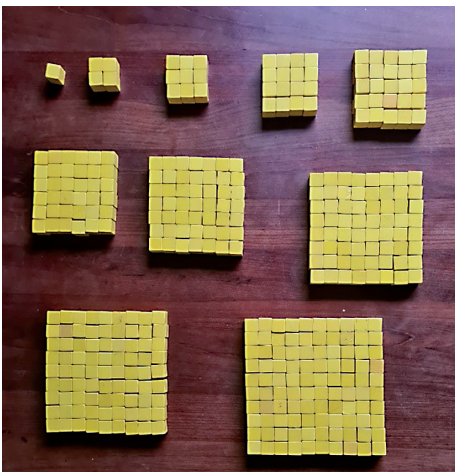
Gaat ChatGPT binnenkort ook al het wiskunde huiswerk van de leerlingen maken? Jacques Jansen is daar niet zo bang voor. Hij laat zien dat het nog niet allemaal even goed zit met de wiskundige vaardigheden van ChatGPT. Dan maar liever het échte handwerk.

## Inleiding

Ik houd me al een tijdje bezig met kwadraten, bijvoorbeeld met het optellen van deze getallen. Een jongen uit 3 havo die ik ondersteun, kende de kwadraten niet, hij was bezig met wortelgetallen. 'Hoe maak ik ze voor hem zichtbaar?', vroeg ik me af. Om te beginnen, dacht ik, laten we de andere naam van kwadraten gebruiken: vierkantsgetallen. Laatst kwam ik een opgave over kwadraten tegen in het tijdschrift *Pythagoras*. Weer wat later las ik een serie van vijf artikelen over ChatGPT in *de Volkskrant*. Dat verleidde mij tot het idee: 'Laat ik het vragen aan ChatGPT'. En of het verrassend was? Oordeel zelf. Daar de ontwikkelingen bij ChatGPT razendsnel gaan, geef ik in dit artikel chronologisch tijdsperioden aan. Ik laat een aantal uitwerkingen van ChatGPT zien en op het eind van dit artikel blik ik terug op die uitwerkingen.

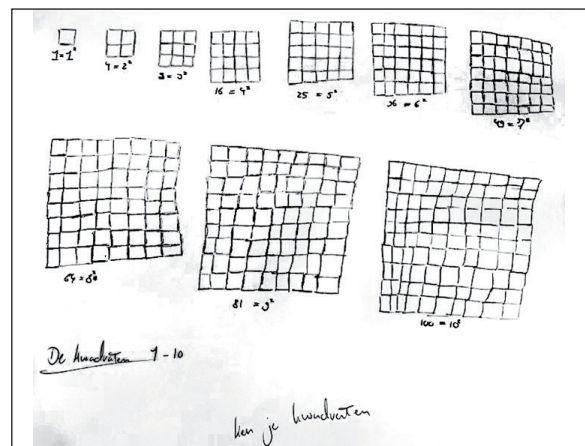
## Vierkantsgetallen

Voor het zichtbaar maken van vierkantsgetallen ging ik met gele kubusvormige blokjes aan de slag, zie figuur 1.



figuur 1

Leerling Thom gaat thuis aan het werk. Zie zijn resultaat in figuur 2. 'Zijn beide fysieke inspanningen nog de moeite waard?', vroeg ik me af.



figuur 2



Ik stel een paar weken later op 10 mei een vraag aan ChatGPT: 'Hoe maak ik vierkantsgetallen zichtbaar?' Zie hier het antwoord:

Een vierkantsgetal is een getal dat kan worden geschreven als het kwadraat van een geheel getal. Bijvoorbeeld, 9 is een vierkantsgetal omdat het kan worden geschreven als  $3^2$ . Om vierkantsgetallen zichtbaar te maken, kun je verschillende wiskundige methoden gebruiken, waaronder:

- 1 Het tekenen van een vierkant: Je kunt een vierkant tekenen met een zijde die gelijk is aan het wortelgetal van het vierkantsgetal. Bijvoorbeeld, als je het vierkantsgetal 25 wilt weergeven, teken dan een vierkant met een zijde

van lengte 5. Dit komt omdat de wortel van 25 gelijk is aan 5.

2. Gebruik een rekenmachine: Veel rekenmachines hebben een functie waarmee je het kwadraat van een getal kunt berekenen. Door een getal in te voeren en op de knop voor het kwadraat te drukken, kan de rekenmachine je het bijbehorende vierkantsgetal laten zien.
3. Maak gebruik van de formules: Een vierkantsgetal kan worden berekend met behulp van de formule  $n^2$ , waarbij  $n$  het gehele getal is. Door  $n$  in de formule in te voeren, kan het bijbehorende vierkantsgetal worden berekend. Bijvoorbeeld, als  $n = 4$ , dan is het bijbehorende vierkantsgetal  $4^2 = 16$ .

Door deze methoden te gebruiken, kun je vierkantsgetallen op verschillende manieren zichtbaar maken.

## Tijdschrift *Pythagoras*

In het tijdschrift *Pythagoras* stond in mei 2023 de volgende opgave:

Peter heeft een getal van drie cijfers in zijn hoofd. Hij verklaart dat zijn getal min 13 een kwadraat is, evenals zijn getal plus 32. Aan welk getal denkt Peter?

Een docent heeft misschien de neiging om te denken aan variabelen in tweetermen zoals  $x - 13$  en  $x + 32$ . Hoe zou ChatGPT dit probleem oplossen? Zou er een overeenkomst zijn in het begin van de aanpak?

Hoe zou een leerling zo'n opgave aanpakken? Hoe kun je er anders tegenaan kijken?

Je kunt ook denken aan twee kwadraten op een afstand van  $13 + 32$ , een verschil van 45 dus. Je kunt gaan zoeken naar kwadraten tussen 100 en 1000. Zoveel zijn er niet. Het verschil tussen 100 en 121 is 21. Het helpt als je bedenkt dat de verschillen blijven toenemen. Het zal niet lang duren, het vraagt om wat uithoudingsvermogen, voor je de twee kwadraten te pakken hebt.

## Andere aanpak

Je blijft denken aan twee kwadraten die een verschil van 45 hebben. Laten we er eerst van uitgaan dat het gaat om twee opeenvolgende kwadraten:

$(x + 1)^2 - x^2 = 45 \rightarrow 2x + 1 = 45 \rightarrow x = 22$ . Peter denkt dus aan het getal  $22^2 + 13 = 497$ . Nieuwsgierig geworden, denk ik dan, hoe zou ChatGPT dat doen? We voeren de volgende vraag in: Peter heeft een getal van

drie cijfers in zijn hoofd. Hij verklaart dat zijn getal min 13 een kwadraat is, evenals zijn getal plus 32. Aan welk getal denkt Peter?



Laten we het getal waar Peter aan denkt aanduiden met  $xyz$ , waarbij  $x$ ,  $y$  en  $z$  respectievelijk de honderdtallen, tientallen en eenheden zijn. We weten dat het getal min 13 een kwadraat is,

dus:

$(xyz - 13) = a^2$  waarbij  $a$  een geheel getal is.

We weten ook dat het getal plus 32 een kwadraat is, dus:

$(xyz + 32) = b^2$  waarbij  $b$  een geheel getal is.

Door de vergelijkingen op te lossen, krijgen we:

$(xyz - 13) + (xyz + 32) = a^2 + b^2$

$2xyz + 19 = a^2 + b^2$

We weten dat  $a^2$  en  $b^2$  perfecte kwadraten zijn, dus hun som kan alleen een van de volgende waarden zijn: 2, 5, 8, 10, 13, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 37, 40, 41, enzovoort.

Aangezien  $2xyz$  een driecijferig getal is, kan de som van de kwadraten geen getallen zijn die groter zijn dan 200. Dit beperkt de mogelijke waarden voor  $a^2 + b^2$  tot 18, 20, 25 en 32.

Als  $a^2 + b^2 = 18$ , dan zou  $2xyz = -1$ , wat niet mogelijk is omdat  $xyz$  een positief getal is.

Als  $a^2 + b^2 = 20$ , dan zou  $2xyz = 1$ , wat niet mogelijk is omdat  $xyz$  een oneven getal moet zijn.

Als  $a^2 + b^2 = 32$ , dan zou  $2xyz = 13$ , wat betekent dat  $xyz$  gelijk is aan 6.

Dus het getal waar Peter aan denkt, is 632, omdat  $(632 - 13)$  gelijk is aan 619, dat is  $31^2$ , en  $(632 + 32)$  gelijk is aan 664, dat is  $26^2$ .

Zitten er fouten in de uitwerking? Hoe elegant is het? Later in mei stel ik exact dezelfde vraag weer aan ChatGPT, met een verrassend antwoord:



Laten we het getal waar Peter aan denkt als "XYZ" schrijven, waarbij X, Y en Z de cijfers zijn. Volgens de informatie die we hebben, kunnen we de volgende vergelijkingen opstellen:

$XYZ - 13 = (A)^2$  (1)  $XYZ + 32 = (B)^2$  (2)

Hierbij vertegenwoordigen A en B de mogelijke kwadraten van getallen.

>



Laten we de mogelijke waarden van A en B verkennen. Aangezien XYZ een getal van drie cijfers is, kan A alleen 10, 11, 12, of 13 zijn. Evenzo kan B alleen 18, 19, 20, 21 of 22 zijn.

Laten we deze waarden in de vergelijkingen (1) en (2) plaatsen:

$$\begin{aligned} XYZ - 13 &= 100A + 10A + A - 13 = 111A - 13 \\ XYZ + 32 &= 100B + 10B + B + 32 = 111B + 32 \end{aligned}$$

We zoeken een oplossing waarbij XYZ - 13 en XYZ + 32 beide kwadraten zijn. Laten we de mogelijke waarden van A en B proberen:

1. A = 10, B = 18:  $111A - 13 = 1110 - 13 = 1097$   
(geen perfect kwadraat)  $111B + 32 = 111 \cdot 18 + 32 = 2014$  (geen perfect kwadraat)
2. A = 11, B = 19:  $111A - 13 = 1111 - 13 = 1098$   
(geen perfect kwadraat)  $111B + 32 = 111 \cdot 19 + 32 = 2121$  (geen perfect kwadraat)
3. A = 12, B = 20:  $111A - 13 = 1112 - 13 = 1099$   
(geen perfect kwadraat)  $111B + 32 = 111 \cdot 20 + 32 = 2232$  (geen perfect kwadraat)
4. A = 13, B = 21:  $111A - 13 = 1113 - 13 = 1100$   
(geen perfect kwadraat)  $111B + 32 = 111 \cdot 21 + 32 = 2343$  (geen perfect kwadraat)

Geen van de bovenstaande combinaties leidt tot een perfect kwadraat voor zowel XYZ - 13 als XYZ + 32. Dit betekent dat er geen oplossing is voor het beschreven probleem.

## Kubische getallen

Een tweede idee is om een opgave te maken met kubische getallen. De opgave zou kunnen zijn:

*Peter heeft een getal van vier cijfers in zijn hoofd. Hij verklapt dat zijn getal min 19 een kubisch getal (derde macht) is, evenals zijn getal plus 900. Aan welk getal denkt Peter?*

Bij de uitwerking zal een derdegraads vergelijking terug te brengen zijn naar een vierkantsvergelijking. Dit in tegenstelling met de oorspronkelijke opgave waarbij een tweedegraads vergelijking teruggebracht wordt tot een eerstegraads vergelijking.

$$\begin{aligned} (x + 1)^3 - x^3 &= 919 \rightarrow 3x^2 + 3x + 1 - 919 = 0 \rightarrow \\ x^2 + x - 306 &= 0 \rightarrow x = 17. \end{aligned}$$

**4932** is het getal dat hij in gedachte heeft. Nu is ChatGPT weer aan de beurt...

Je raadt het al. ChatGPT begint weer met een getal van de vorm *abcd*. Dit keer geeft het eerste cijfer *a* de duizendtallen aan. Ik zal het je verder besparen, de uitwerking liep weer helemaal in het honderd.

## ChatGPT en de eerste honderd kwadraten

Voor de jonge Carl Friedrich Gauss (1777-1859) was het een eitje om de eerste honderd natuurlijke getallen op te tellen. Maar hoe krijg je het voor elkaar om de eerste honderd kwadraten op te tellen? We zetten ChatGPT weer aan het werk:



Om de som van de eerste honderd kwadraten te berekenen, moeten we eerst elk van de eerste honderd getallen kwadrateren en vervolgens deze

kwadraten bij elkaar optellen. We kunnen deze som oplossen met behulp van de volgende formule:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

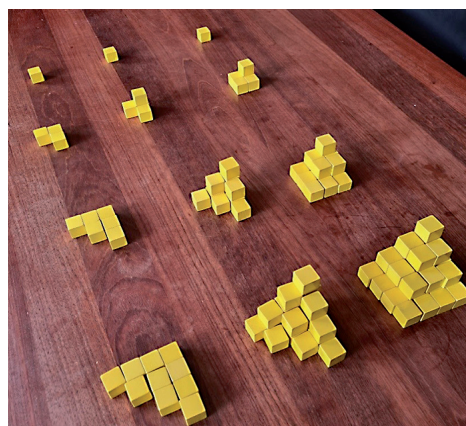
Hier is *n* gelijk aan het aantal termen dat we willen optellen, in dit geval 100.

Dus, voor de som van de eerste honderd kwadraten, hebben we:  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2 = \frac{100(100+1)(2(100)+1)}{6} = \frac{100(101)(201)}{6} = 338,350$ . Dus de som van de eerste honderd kwadraten is 338,350.

Dit keer klopt het antwoord. De meeste leerlingen zullen de formule *kwadratensom*  $= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$  niet kennen. Het is veel leuker en betekenisvoller voor de leerlingen om dat zelf af te leiden. Ik ga het dus anders aanpakken.

## Kwadratensom met blokjes

Ik keer terug naar mijn fysieke inspanningen met de gele kubusvormige blokjes, om de honderd opeenvolgende kwadraten vanaf een te kunnen optellen.<sup>[1]</sup> Zie in figuur 3 de drie rijen, elk met vier bouwsels. In tabel 1, zie je welke getallen bij de bouwsels horen. De bouwsels met rangnummer 5 laat ik over aan je verbeelding maar de bijbehorende getallen heb ik in de tabel al ingevuld.



figuur 3

Rangnummer $n$	Driehoeksgetal $D_n$	Piramidegetal $P_n$	Kwadratensomgetal $K_n$
1	1	1	1
2	3	4	5
3	6	10	14
4	10	20	30
5	15	35	55
6	...	...	...

tabel 1

Een piramidegetal wordt verkregen door driehoeksgetallen bij elkaar op te tellen. Zo is het derde piramidegetal  $P_3 = D_1 + D_2 + D_3 = 1 + 3 + 6 = 10$ . Het bijbehorend bouwsel bestaat uit drie lagen. Het derde kwadratensomgetal is  $K_3 = 1 + 2^2 + 3^2 = 14$ . Het bijbehorend bouwsel bestaat ook weer uit drie lagen. De formules van het  $n^e$  piramidegetal hebben we nodig om een formule af te leiden voor het  $n^e$  kwadratensomgetal. Want wat blijkt? Het tweede kwadratensombouwsel kun je samenstellen uit de eerste twee piramiden uit de tweede rij. Het derde kwadratensombouwsel ontstaat uit een samenvoeging van de tweede en de derde piramide, enz. Er geldt  $P_{n-1} + P_n = K_n$ . Je kunt dat voor de bouwsels in figuur 3 makkelijk nagaan, maar je moet het eigenlijk wel bewijzen. Ik denk even aan een cirkel met gezette punten op de rand waarbij je de punten verbindt met lijnstukken en kijkt naar het aantal vlakken waarin de cirkel kan worden verdeeld. Dat levert de rij 1, 2, 4, 8, 16, 31, ... op met dat storende getal 31. Een bewijs is een uitdaging voor jou. Een formule voor het  $n^e$  piramidegetal kunnen we vinden met behulp van een derdegraadsterm

$P_n = an^3 + bn^2 + cn$ . Het bijbehorende bouwsel is immers van de derde dimensie. We schrijven, zie ook voor de waarden de tabel, de volgende drie vergelijkingen op:

$$a + b + c = 1 \quad (1)$$

$$8a + 4b + 2c = 4 \quad (2)$$

$$27a + 9b + 3c = 10 \quad (3)$$

Uit de eerste en tweede vergelijking leid je af:  $3a + b = 1$ .

Uit de eerste, tweede en derde vergelijking:  $18a + 4b = 5$ .

Deze twee vergelijkingen met twee onbekenden geven  $a = \frac{1}{6}$  en  $b = \frac{1}{2}$ . Met vergelijking (1) vind je dan  $c = \frac{1}{3}$ .

We gaan aan de slag met de uitdrukkingen voor  $P_n$  en  $P_{n-1}$ :

$$P_n = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n = \frac{1}{6}n(n^2 + 3n + 2) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

$$P_{n-1} = \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$$

$$K_n = P_n + P_{n-1} = \frac{1}{6}n(n+1)((n+2) + (n-1)) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$K_{100} = \frac{1}{6} \cdot 100 \cdot 101 \cdot 201 = 338\,350.$$

### En nu zelf...

Er is een Nederlandse rekenaar die ook heel handig is in kwadraten: Willem Bouwman. In 2020 kreeg hij in een wedstrijd tien keer een getal van vijf cijfers met de opdracht om die uit zijn hoofd als som van vier kwadraten te schrijven. Vraag zelf eens aan ChatGPT hoe je dat moet doen, ik ontvang jullie resultaten graag!

### Terugblik

Zie de figuren 1 en 2 en de eerste methode van ChatGPT. Het tekenen van een vierkant van vijf bij vijf is toch weer anders dan het leggen van een vierkant met 25 blokjes of met het tekenen van de 25 hokjes van Thom. Ik vermoed dat ChatGPT niet snel met elegante uitwerkingen zal komen. We mogen al blij zijn dat er geen fouten in de uitwerkingen zitten. Controle en waakzaamheid lijken me hard nodig. Met het toepassen van ChatGPT zullen de leerlingen heel veel opgaven uit het boek kunnen maken. De vraag is hoe we ons (wiskunde) onderwijs zouden moeten aanpassen om onze leerlingen te 'leren denken' of nog mooier 'beter denken', denkend aan Marcus du Sautoy.<sup>[2]</sup> En nog uitdagender: 'om elegante uitwerkingen te maken'. Sowieso kunnen ze fouten opsporen in uitwerkingen van ChatGPT.

### Noten

- [1] Zie ook: Ridderbos, G-J. Doeboek 25 *Getalfiguren. Stichting Vierkant voor wiskunde*
- [2] Du Sautoy, M. (2023). *Beter Denken de kunst van de shortcut*. Uitgeverij Nieuwezijds (zie de bespreking in *Euclides* 99-3)

### Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde. Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen. E-mailadres: [jacques.jansen@wxs.nl](mailto:jacques.jansen@wxs.nl).



## Vierkant voor Wiskunde zomerkampen



De bèta-vice-decanen van de Nederlandse universiteiten hebben een bijdrage toegekend om in 2024, 2025 en 2026 de zomerkampen van stichting Vierkant voor Wiskunde te versterken en uit te bouwen.

Vierkant voor Wiskunde is in 1993 opgericht om zomerkampen met wiskundige activiteiten te organiseren. Sinds 1994 zijn er elke zomer kampen voor jongeren vanaf groep 6 tot en met klas 6. Er zijn kampen voor verschillende leeftijdscategorieën: kamp A voor bovenbouw po, kamp B voor onderbouw vo en kamp C voor bovenbouw vo. Tegenwoordig nemen jaarlijks meer dan 170 jongeren aan de zomerkampen deel. Maar omdat lang niet alle po- en vo-scholen worden bereikt, is nog groei mogelijk. De kampen worden begeleid door een enthousiast team vrijwilligers. Zij zetten zich elk jaar in om leuke, nieuwe activiteiten en uitdagende wiskundige problemen te bedenken. Uit een enquête blijkt dat een groot deel van de kampdeelnemers later wiskunde of een andere bèta-studie gaat studeren.

Bron: <https://www.vierkantvoorwiskunde.nl>

## CWI in aflevering over internet van Het Klokhuis

Op donderdag 2 november was Steven Pemberton (CWI) te zien in een aflevering van tv-programma Het Klokhuis, waarin hij vertelde over de beginjaren van het open



Steven Pemberton en Klokhuis-presentator Pascal Tan op het CWI

internet in Europa, dat begon bij het CWI. Het interview werd uitgezonden op NPO3 en is terug te zien op NPO Start. Steven Pemberton legt uit: 'Indertijd dachten we dat internet vooral voor wetenschappers was; we wisten niet dat het in de woonkamer zou komen!'

Op 17 november 2023 is het vijfendertig jaar geleden dat Nederland als eerste land in Europa werd aangesloten op het open internet. Toen kreeg systeembeheerder Piet Beertema van Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) in Amsterdam de bevestiging dat het CWI – als eerste instituut buiten Noord-Amerika (na de VS en Canada) – officieel toegang kreeg tot NSFnet, een academisch computernetwerk dat later uitgroeide tot het wereldwijde internet.

In 2018 publiceerde het CWI een mini-documentaire (<https://youtu.be/ddnu0oF1d5E>) over deze historische gebeurtenis. In deze film delen twee van de betrokkenen – internetpionier Teus Hagen en Steven Pemberton, een van de eerste internetgebruikers van Europa – hun herinneringen en vertellen ze hoe ze terugkijken op die periode. In een later stadium ontwikkelde Steven Pemberton belangrijke standaarden voor het World Wide Web, een van de belangrijkste toepassingen van het internet. Pemberton: 'Achteraf gezien was het tot stand brengen van die eerste connectie een historisch moment, iets wat we ons toen nog niet realiseerden.' Andere academische en onderzoeksinstellingen in Nederland en de rest van Europa werden kort na het CWI aangesloten.

Bron: <https://www.cwi.nl> en <https://npo.nl/start/>

## Vormen die omlaag rollen langs vooraf bepaalde route

De meeste voorwerpen, zoals ballen en wielen, rollen in een rechte lijn een heuvel af. Er zijn ook voorwerpen die een gebogen lijn volgen: zoals oloïden, driedimensionale vormen die je je kunt voorstellen als twee cirkels die haaks op elkaar staan onder een strakgespannen doek. Maar ook deze oloïden volgen relatief simpele, herhalende cirkelvormige paden. De rolroutes van oloïdes zijn wiskundig bestudeerd, maar ze hebben ook praktische toepassingen: zo zijn er bijvoorbeeld oloïde-vormige mixers die vijvers van zuurstof voorzien, of het water in rioolzuiveringsinstallaties doorroeren. Nu hebben natuurkundigen uit Zuid-Korea een algoritme ontworpen dat objecten kan bedenken die langs elk mogelijk pad naar beneden rollen, zolang die route zich maar twee keer herhaalt.

Bron: [newscientist.nl](https://www.newscientist.nl)

# Als er één $a$ over de dam is...

Voor de liefhebbers van getaltheorie: hoe het ogenschijnlijke toeval in een niet-kloppende berekening met het juiste antwoord via 'hogere' wiskunde helemaal geen toeval blijkt te zijn.

## Hoe een fout tot iets goeds kan leiden

Het vereenvoudigen van de breuk  $\frac{16}{64}$  kan, merkwaardigerwijze, door deze op een foute manier te lezen als  $\frac{1\cancel{6}}{6\cancel{4}}$  en dan de zessen weg te strepen:

$$\frac{16}{64} = \frac{1\cancel{6}}{6\cancel{4}} = \frac{1}{4}$$

met het juiste antwoord als resultaat. Verrassend? Ja, natuurlijk, een fout argument dat naar het goede antwoord leidt zonder dat er een 'dubbele fout' is gemaakt, komt (gelukkig) niet vaak voor. In zekere zin is dit verschijnsel toeval. Als je dit grappig vindt, lees vooral verder: het wordt nog veel grappiger, en we gaan verklaringen zoeken. Niet omdat we iedere grap willen uitleggen en daarmee doodmaken, maar omdat er wel degelijk patronen te vinden zijn, en in de uitleg zit nu juist de échte grap.

Eerst een notatie: het getal dat ontstaat door  $a$  en  $b$  'aan elkaar te plakken' noteren we als  $a|b$ . Dus met  $a = 6$  en  $b = 4$  krijgen we  $a|b = 64$ , met  $a = 21$  en  $b = 7$  krijgen we  $a|b = 217$ , met  $a = 36$  en  $b = 81$  krijgen we  $a|b = 3681$ . Precies gezegd: voor positieve gehele getallen  $a, b$  (nou, vooruit,  $b$  mag ook 0 zijn), waarbij we het aantal cijfers van  $b$  nu  $k$  noemen, definiëren we  $a|b = 10^k a + b$ . Het aantal cijfers van  $b$  kunnen we kunstmatig verhogen met 'voorloopnullen': we zeggen doorgaans dat  $b = 3$  één cijfer heeft ( $k = 1$ ), maar als we dat nodig vinden kunnen we datzelfde getal  $b = 3$  ook als  $b = 0003$  schrijven, en dan heeft het plotseling  $k = 4$  cijfers. Met deze notatie kunnen we nu precies zeggen wat we willen: zoek getallen  $x$  en  $z$  waarvoor er een  $a$  bestaat zodat

$$\frac{x|a}{a|z} = \frac{x}{z}$$

Een kleine zoektocht naar meer voorbeelden van  $\frac{x|a}{a|z} = \frac{x}{z}$  in getallen  $a, x, z$  van één enkel cijfer (dus  $a, x, z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ; je kunt zelf bedenken waarom 0 hier niet erg zinvol is) levert nog drie voorbeelden op:

$$\frac{19}{95} = \frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5} = \frac{1}{5} \quad \frac{26}{65} = \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5} \quad \frac{49}{98} = \frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8} = \frac{4}{8}$$

Met wat grotere  $x, z$ , maar  $a$  nog steeds één cijfer, gebeurt het ook, bijvoorbeeld:

$$\frac{217}{775} = \frac{21\cancel{7}}{\cancel{7}75} = \frac{21}{75}$$

En het kan zelfs met  $a$ -tjes met meer cijfers:

$$\frac{3681}{8180} = \frac{36\cancel{8}1}{8\cancel{1}80} = \frac{36}{80}$$

De voorbeelden met eencijferige  $x, a, z$  zie je hier en daar in de literatuur<sup>[1]</sup> opduiken, met name ons eerste voorbeeld van  $\frac{16}{64}$  lijkt wel redelijk bekend te zijn. Minder bekend, maar ook in de literatuur<sup>[2]</sup> te vinden, is dat je zo'n voorbeeld onmiddellijk kunt uitbreiden. Kijk maar:

$$\frac{1}{4} = \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{16}{64},$$

maar ook:

$$\frac{1}{4} = \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{16}{64} = \frac{16\cancel{6}}{\cancel{6}64} = \frac{166}{664},$$

en

$$\frac{1}{4} = \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{16}{64} = \frac{16\cancel{6}}{\cancel{6}64} = \frac{166}{664} = \frac{166\cancel{6}}{\cancel{6}664} = \frac{1666}{6664} = \dots,$$

enzovoorts, het lijkt iedere keer weer te kloppen. Is dit echt zo? Kun je zoveel zessen als je maar wilt toevoegen achteraan de teller en (evenveel natuurlijk) vooraan de noemer? Is het ook bij de andere voorbeelden van hierboven zo? Het lijkt er wel op:

$$\frac{1}{5} = \frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5} = \frac{19}{95} = \frac{19\cancel{9}}{\cancel{9}95} = \frac{199}{995} = \frac{199\cancel{9}}{\cancel{9}995} = \frac{1999}{9995} = \dots,$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{26}{65} = \frac{26\cancel{6}}{\cancel{6}65} = \frac{266}{665} = \frac{266\cancel{6}}{\cancel{6}665} = \frac{2666}{6665} = \dots,$$



$$\frac{4}{8} = \frac{4\cancel{0}}{\cancel{0}8} = \frac{49}{98} = \frac{49\cancel{0}}{\cancel{0}98} = \frac{499}{998} = \frac{499\cancel{0}}{\cancel{0}998} = \frac{4999}{9998} = \dots,$$

$$\frac{21}{75} = \frac{21\cancel{7}}{\cancel{7}75} = \frac{217}{775} = \frac{217\cancel{7}}{\cancel{7}775} = \frac{2177}{7775} = \frac{2177\cancel{7}}{\cancel{7}7775} = \frac{21777}{77775} = \dots$$

$$\frac{36}{80} = \frac{36\cancel{8}}{\cancel{8}180} = \frac{3681}{8180} = \frac{3681\cancel{8}}{\cancel{8}18180} = \frac{368181}{818180} = \frac{368181\cancel{8}}{\cancel{8}1818180} = \frac{36818181}{81818180} = \dots$$

het is allemaal waar (reken maar na), en lijkt telkens ook verder uit te breiden te zijn.

Een leuke alternatieve manier om deze voorbeelden op te schrijven illustreren we aan ons eerste voorbeeld:

$$\frac{1}{4} = \frac{16}{64} = \frac{166}{664} = \frac{1666}{6664} = \frac{16666}{66664} = \frac{166666}{666664}$$

$$166666 \times 4 = 1 \times 666664, \quad 16666 \times 64 = 16 \times 66664,$$

$$1666 \times 664 = 166 \times 6664,$$

waarbij het maaltteken op de juiste 'symmetrische' manier opschuift. Precies even leuk is:

$$\frac{166666}{1} = \frac{666664}{4}, \quad \frac{16666}{16} = \frac{66664}{64}, \quad \frac{1666}{166} = \frac{6664}{664}.$$

Verschillende termen worden gebruikt om dit soort merkwaardige verschijnselen aan te duiden: 'illegal cancellations' [3], 'amusing cancelling' [4], 'freak arithmetic cancellations' [5], en 'weird fractions' [6]. In het Nederlands zou je het 'Miskunde' kunnen noemen.

## Een hyperbool

Wat zit hierachter? Want dat moet haast wel, dat er iets achter zit. En waarom werkt het bij sommige getallen wel, maar bij andere niet? Bijvoorbeeld,  $\frac{13}{32}$  is zeker niet gelijk aan  $\frac{1}{2}$ .

En we kunnen het allemaal nog een slagje algemener doen. Het is natuurlijk zo dat dit verschijnsel sterk afhangt van het feit dat we het tientallig stelsel gebruiken. In het negentallig stelsel bijvoorbeeld moeten we 16 schrijven als 17 (want  $1 \times 9 + 7$ ) en 64 als 71 (want  $7 \times 9 + 1$ ), en dat gaat dus goed fout:

$$\frac{17}{71} \neq \frac{1\cancel{7}}{\cancel{7}1} = \frac{1}{1}$$

en het gaat ook fout als we 16 en 64 negentallig lezen, want negentallig is

$$\frac{16}{64} \neq \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$$

want negentallig  $\frac{16}{64}$  is tientallig  $\frac{15}{58}$ , en  $\frac{15}{58} \neq \frac{1}{4}$ .

Maar negentallig gaat het ergens anders weer goed:

$$\frac{14}{43} \neq \frac{1\cancel{4}}{\cancel{4}3} = \frac{1}{3}$$

(let wel: 14 betekent hier  $1 \times 9 + 4 = 13$  en 43 is  $4 \times 9 + 3 = 39$ , dus het klopt wel degelijk).

Laten we wat algemener dan in het tientallig stelsel werken, laten we zeggen, in het  $b$ -tallig stelsel, met  $b \geq 2$ . De letter  $b$  staat hier voor 'basisgetal'. De 'cijfers' in het  $b$ -tallig stelsel zijn dus  $0, 1, 2, \dots, (b-2), (b-1)$ , en als we bijvoorbeeld 345 opschrijven dan bedoelen we  $3b^2 + 4b + 5$  (als tenminste  $b \geq 6$ , want anders heeft 345 geen betekenis omdat het cijfer 5 al niet meer voorkomt als  $b \leq 5$ ). Wat betekent het nu precies dat

$$\frac{x|a}{a|z} = \frac{x}{z}?$$

Hierbij laten we toe dat  $x$  en  $z$  ook  $b$  of groter zijn, maar de  $a$  moet echt een 'cijfer' zijn, dus  $0 \leq a \leq b-1$ . Met die laatste eis verliezen we niets: het voorbeeld

$$\frac{3681}{8180} = \frac{36\cancel{8}1}{\cancel{8}180} = \frac{36}{80}$$

van hierboven lezen we als geschreven in het honderdtallig stelsel, met  $b = 100$ , en de 'cijfers' [00], [01], [02], ..., [98], [99], dus

$$\frac{[36][81]}{[81][80]} = \frac{[36][\cancel{8}1]}{[\cancel{8}1][80]} = \frac{[36]}{[80]},$$

en zo past dit voorbeeld dus toch binnen onze conditie dat  $a$  maar één 'cijfer' heeft.

Als we het aantal 'cijfers' van  $z$  nu  $k$  noemen, dan wordt onze vergelijking  $\frac{x|a}{a|z} = \frac{x}{z}$ :

$$\frac{xb+a}{ab^k+z} = \frac{x}{z}.$$

Nou vinden we die  $k$  in de noemer een beetje lastig, en die gaan we wegwerken door in plaats van  $z$  altijd te gaan kijken naar  $\frac{z}{b^{k-1}}$ ; dat getal noemen we dan maar  $y$ , en die ligt altijd tussen 1 en  $b$ . De vergelijking hierboven

wordt dan, met  $z = yb^{k-1}$ ,

$$\frac{xb+a}{ab^k+yb^{k-1}} = \frac{x}{yb^{k-1}},$$

en nu kunnen we aan beide zijden de noemers door  $b^{k-1}$  delen, en dan wordt het:

$$\frac{xb+a}{ab+y} = \frac{x}{y}.$$

Dat heeft het grote voordeel dat de  $k$  er niet meer direct inzigt. Een voorbeeldje: in plaats van  $\frac{1}{4} = \frac{16}{64} = \frac{166}{664}$  schrijven

we nu voor de eerste stap nog steeds  $\frac{1}{4} = \frac{16}{64}$ , maar voor de volgende stappen  $\frac{16}{6,4} = \frac{166}{66,4}$ ,  $\frac{166}{6,64} = \frac{1666}{66,64}$ , enz.

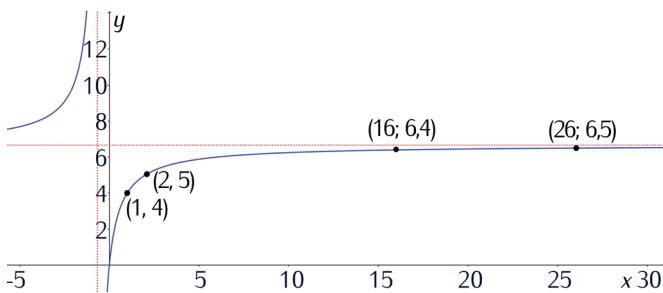
In de vergelijking die we nu te pakken hebben, gaan we de noemers uitvermenigvuldigen:  
 $bxy + ay = abx + xy$   
 oftewel  
 $(b - 1)xy + ay - abx = 0$ .

Voor vaste  $a$  en  $b$  en variabele  $x$  en  $y$  staat hier de vergelijking van een hyperbool. We zouden het als de grafiek van een functie kunnen zien door  $y$  er uit op te lossen:

$$y = \frac{abx}{(b-1)x - a},$$

die niet bestaat als de noemer 0 wordt, dus als  $x = -\frac{a}{b-1}$ . Bij deze waarde van  $x$  is er dan een verticale asymptoot. Ook zien we, door  $x$  naar  $\infty$  of naar  $-\infty$  te laten fietsen, dat er een horizontale asymptoot te vinden is bij  $y = \frac{ab}{b-1}$ .

We tekenen maar eens een plaatje voor  $a = 6$  en  $b = 10$ , dus van  $y = \frac{60x}{9x+6} = \frac{20x}{3x+2}$  met de asymptoten  $x = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$  en  $y = \frac{60}{9} = 6\frac{2}{3}$  zie figuur 1.



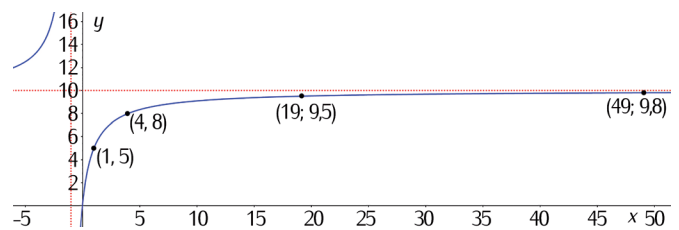
figuur 1 De hyperbool  $y = 20x / (3x + 2)$

Dat we hierboven met  $a = 6$  en  $b = 10$  de twee voorbeelden  $(x, y) = (1, 4)$  en  $(x, y) = (2, 5)$  hadden, betekent nu dat deze twee punten precies op deze hyperbool liggen, vandaar dat we ze hebben ingetekend. Maar we hebben gezien dat één voorbeeld meteen tot meer leidt: naast  $(x, y) = (1, 4)$  moet ook  $(x, y) = (16, 6,4)$ ,  $(166, 6,64)$ , ... op dezelfde hyperbool liggen, en vanwege  $(x, y) = (2, 5)$  evenzo  $(x, y) = (26, 6,5)$ ,  $(266, 6,65)$ , ... . Deze punten intekenen houdt gauw op. Voor  $b = 10$  is er nog een tweede waarde van  $a$  waarvoor

we voorbeelden zagen met allemaal getallen van één cijfer, namelijk  $a = 9$ . Dat geeft een tweede hyperbool, met als

$$\text{functie } y = \frac{90x}{9x+9} = \frac{10x}{x+1}$$

met daarop de punten  $(x, y) = (1, 5)$ ,  $(19, 9,5)$ ,  $(9,95)$ , ... en  $(x, y) = (4, 8)$ ,  $(49, 9,8)$ ,  $(499, 9,98)$ , ... en asymptoten  $x = -\frac{9}{9} = -1$  en  $y = \frac{90}{9} = 10$ , zie figuur 2.



figuur 2 De hyperbool  $y = 10x / (x + 1)$

## De echte grap

Een handige truc om hyperbolen in de vingers te krijgen is om de beide asymptoten naar de assen te verschuiven, door nieuwe variabelen  $u, v$  te kiezen, als volgt:

$$u = x + \frac{a}{b-1}, \quad v = y - \frac{ab}{b-1}$$

De vergelijking  $(b - 1)xy + ay - abx = 0$  gaat dan over in:

$$(b-1)\left(u - \frac{a}{b-1}\right)\left(v + \frac{ab}{b-1}\right) + a\left(v + \frac{ab}{b-1}\right) - ab\left(u - \frac{a}{b-1}\right) = 0.$$

We werken de haakjes uit en zien dat er een hoop wegvalt:

$$(b-1)uv + \frac{a^2b}{b-1} = 0,$$

dus we houden iets heel simpels over in de variabelen  $u, v$ :

$$uv = -\frac{a^2b}{(b-1)^2}$$

Nu blijkt het handig om  $u$  een beetje te schalen:

$$u = \frac{ab}{b-1}t,$$

zodat de hyperbool-uitdrukking ons voor  $v$  geeft:

$$v = -\frac{a}{b-1} \cdot \frac{1}{t},$$

oftewel, we vinden een 'parametrisatie' van de hyperbool:

$$(x, y) = \frac{a(bt-1)}{b-1} \cdot \left(1, \frac{1}{t}\right).$$

Voor de parameter  $t$  geldt dat  $t = \frac{x}{y}$ , de 'schaling' van  $u$  en  $v$  was hierop afgestemd.

Dat betekent, dat als  $t$  de reële getallen doorloopt (behalve de 0), dan doorloopt  $(x, y)$  precies de hyperbool.

Bovendien geldt: als  $t$  rationaal (een breuk) is, dan zijn  $x$  en  $y$  dat ook, en bovendien ook andersom: als  $x, y$  beide rationale getallen zijn, dan is  $t$  dat ook.

Veronderstel nu dat we getallen  $x_0, z_0$  hebben die een

oplossing zijn van ons oorspronkelijke probleem, dus  $\frac{x_0|a}{a|z_0}$  met  $a < b$ . Dan nemen we,  $y_0 = \frac{z_0}{b^{k-1}}$

en dan ligt  $(x_0, y_0)$  op de hyperbool  $(b-1)$

$xy + ay - abx = 0$ . Voor  $u_0 = x_0 + \frac{a}{b-1}$ ,  $v_0 = y_0 - \frac{ab}{b-1}$

geldt dan  $u_0 v_0 = -\frac{a^2 b}{(b-1)^2}$  en we nemen  $t_0$  zodat

$$u_0 = \frac{ab}{b-1} t_0 \text{ en } v_0 = -\frac{a}{b-1} \cdot \frac{1}{t_0}.$$

Nu komt de echte grap. Vermenigvuldig deze  $t_0$  met  $b$ , en noem het resultaat  $t_1$ , dus  $t_1 = b t_0$ . We rekenen terug:

$$u_1 = \frac{ab}{b-1} t_1, \text{ en } v_1 = -\frac{a}{b-1} \cdot \frac{1}{t_1}, \text{ zodat weer } u_1 v_1 = -\frac{a^2 b}{(b-1)^2},$$

en dus met  $x_1 = u_1 - \frac{a}{b-1}$ ,  $y_1 = v_1 + \frac{ab}{b-1}$  vinden we een punt  $(x_1, y_1)$  dat op dezelfde hyperbool

$(b-1)xy + ay - abx = 0$  ligt. Laten we nu eens gaan kijken hoe  $(x_1, y_1)$  zich verhoudt tot  $(x_0, y_0)$ . We hebben:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{a(bt_0 - 1)}{b-1} \\ x_1 &= \frac{a(bt_1 - 1)}{b-1} \\ &= \frac{a(b^2 t_0 - 1)}{b-1} \\ &= \frac{a(b^2 t_0 - b + b - 1)}{b-1} \\ &= \frac{a(b^2 t_0 - b)}{b-1} + \frac{a(b-1)}{b-1} \\ &= b \frac{a(bt_0 - 1)}{b-1} + a \\ &= bx_0 + a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{a(bt_0 - 1)}{b-1} \cdot \frac{1}{t_0} \\ y_1 &= \frac{a(bt_1 - 1)}{b-1} \cdot \frac{1}{t_1} \\ &= \frac{a(b^2 t_0 - 1)}{b-1} \cdot \frac{1}{bt_0} \\ &= \frac{a(b^2 t_0 - bt_0 + bt_0 - 1)}{b(b-1)t_0} \\ &= \frac{a(b^2 t_0 - bt_0)}{b(b-1)t_0} + \frac{a(bt_0 - 1)}{b(b-1)t_0} \\ &= a + \frac{1}{b} \cdot \frac{a(bt_0 - 1)}{(b-1)t_0} \\ &= a + \frac{1}{b} \cdot y_0 \end{aligned}$$

Onze eerste conclusie is dat

$$x_1 = bx_0 + a = x_0|a.$$

Hoera, dat is precies wat we wilden. Voor  $z_1$  ligt het net wat subtieler. We moeten terugrekenen van  $y$  naar  $z$ , maar let op, voor  $y_0$  en  $z_0$  geldt weliswaar  $z_0 = y_0 b^{k-1}$ , waarbij  $k$  het aantal cijfers van  $z_0$  is, maar voor de  $y_1$  die we nu gevonden hebben gaat

$$y_1 b^{k-1} = \left(a + \frac{1}{b} y_0\right) b^{k-1} \equiv a + \frac{1}{b} z_0$$

geen geheel getal zijn; er is een noemer  $b$  die niet zomaar wegvalt. Maar er is natuurlijk geen reden te veronderstellen dat  $z_1$  ook  $k$  cijfers gaat hebben, net als  $z_0$ . We zien hier dat de gevonden  $y_1$  aanleiding geeft tot  $k+1$  cijfers voor  $z_1$ , want dan is  $z_1 = y_1 b^k = ab^k + b^{k-1} y_0 = ab^k + z_0$ , en dat is wel netjes geheel. Dat geeft dan  $z_1 = ab^k + z_0 = a|z_0$  en dat is gelukkig ook precies wat we wilden.

Hiermee is aangetoond dat, voor gegeven  $a; b$  met

$a < b$ , een oplossing  $(x, z)$  van  $\frac{x|a}{a|z} = \frac{x}{z}$  in het  $b$ -tallig stelsel leidt tot een punt  $(x, y)$  op de hyperbool  $(b-1)$   $xy + ay - abx = 0$ ; dan blijkt  $(x|a, a|z)$  op zijn beurt ook weer tot een punt op die hyperbool te leiden, waardoor

het een oplossing is van  $\frac{x|a|a}{a|a|z} = \frac{x|a}{a|z}$ ; en dus leidt een

oplossing  $(x, z)$  van  $\frac{x|a}{a|z} = \frac{x}{z}$  in het  $b$ -tallig stelsel tot

een oneindige rij oplossingen  $\frac{x|a|a| \dots |a|a}{a|a| \dots |a|a|z} = x/z$ .

De al eerder genoemde artikelen<sup>[1], [6]</sup> bevatten ook bewijzen, waar de hyperbolen echter niet in uitgelicht worden.

Inderdaad, als er één  $a$  over de dam is, dan volgt er nog één, en nog één, en...

Op de *Euclides*-website staat een vervolg van dit artikel waarin met behulp van lineaire afbeeldingen een vereenvoudiging van het uitbreidingsproces wordt gevonden, en een manier wordt beschreven om systematisch en efficiënt voorbeelden te vinden.



[vakbladeuclides.nl/994aoverdedam](http://vakbladeuclides.nl/994aoverdedam)

## Noten

- [1] Jones, B.W. (1995). *The Theory of Numbers*. Rinehart & Co., paragraaf 3.6.
- [2] Boas, R.P. (1979). Anomalous Cancellation. In Ross Honsberger (Red.), *Mathematical Plums*. (hoofdstuk 6). Mathematical Association of America.
- [3] Trigg, C.W. (1961). Solution of Problem 434, *Mathematics Magazine*, 34, 367–368.
- [4] Domoryad, A.P. (1963). *Mathematical Games and Pastimes*. Pergamon Press, hoofdstuk 6.
- [5] Carman, R.A. (1971). Mathematical Mistakes. *The Mathematics Teacher*, 64, 109–115.
- [6] Fried, M.N. & Mayer Goldberg (2010). A Pumping Lemma for Invalid Reductions of Fractions. *College Mathematics Journal*, 41(5), 357–364.

## Over de auteur

Benne de Weger is universitair hoofddocent bij de Technische Universiteit Eindhoven, en is geïnteresseerd in getaltheorie en cryptologie.  
E-mailadres: [b.m.m.d.weger@tue.nl](mailto:b.m.m.d.weger@tue.nl)

# Roest rust (niet)

Ab van der Roest

## Plaatsnamen

Hardlopen is mijn grote hobby en af en toe loop ik een marathon. Zo kwam ik in Zeeuws-Vlaanderen terecht voor de marathon Terneuzen–Hulst. Een eind rijden vanuit



Veenendaal voor een marathon en daarom knoopten we er een paar dagen aan vast. Dat betekent de omgeving verkennen op de kaart en in ‘real life’. En dan kom je opeens terecht in Nummer Een.

Een uitdagende naam voor een wiskundeleraar in ruste. We hebben getallen die gevormd worden door cijfers en we hebben nummers, meestal gerepresenteerd met een getal. We hebben natuurlijk maar tien cijfers en oneindig veel getallen. Het aantal nummers is afhankelijk waar we het over hebben: in de Top2000 hebben we 2000 nummers. In een voetbalelftal met bijvoorbeeld vijf reserves zouden we kunnen volstaan met 16 nummers. Maar wie durft er met nummer 14 te spelen, want dat nummer is toch helemaal gekoppeld aan Johan Crujff. Nummer Een, daar kwam ik terecht. Zal er ook een Nummer Twee bestaan? Voor zover ik kon nagaan



bestaat er geen plaats in Nederland met zo'n naam. Maar wel zijn er plaatsnamen die bestaan uit een getal: we hebben Een, Drie en Acht. Natuurlijk ook plaatsnamen als Driewegen, Driehuizen, Driebergen en dergelijke, maar die laat ik rusten, daar zijn er te veel van. Nu ik dit uitgezocht heb, pak ik de fiets en rijd naar Drie. Je kunt natuurlijk wel zeggen dat het bestaat, maar wij willen natuurlijk bewijs. Dat was nog best even zoeken, maar het bord is gevonden en de plaats bestaat.



Nu nog de bewijzen voor Acht en Een. Dat vind ik te ver om te fietsen, dus dan maar op de motorfiets. En ook Acht bestaat. In het zuiden van het land, als deel van Eindhoven. Vroeger waarschijnlijk een eigen dorp en nu omringd door de grote stad.

“Overigens ben ik van mening dat, nul een natuurlijk getal moet zijn.”



En Een werd in Drenthe gevonden. Zijn er meer plaatsen die als naam een getal hebben? Ik kon er niet meer vinden, maar als je er meer weet, hoor ik het graag.

Speurend op het internet bleek dat ik niet de eerste was die zich met plaatsnamen en foto's van de bordjes bezig hield. Bram Witvliet heeft van meer dan 3000 plaatsen het bordje gefotografeerd<sup>[1]</sup>.



Afsluitend nog een mooie plaatsnaam: Den Nul. Niet echt een getal, maar toch bijna. In mijn opleiding aan de VL-VU was er een docent die zijn schrijfwerk altijd afslot met de zin: *Overigens ben ik van mening dat, nul een natuurlijk getal moet zijn!* Sommige wiskundigen zeggen dat nul wel een natuurlijk getal is, anderen beginnen bij één. Als hulde aan deze docent vind ik dat Den Nul ook mee mag doen.



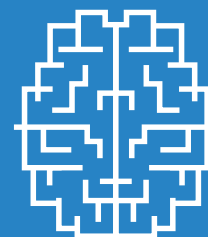
Noot

[1] zie: <https://www.bramfietst.nl/>

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde in ruste.

E-mailadres: [a.b.vanderroest@ziggo.nl](mailto:a.b.vanderroest@ziggo.nl)

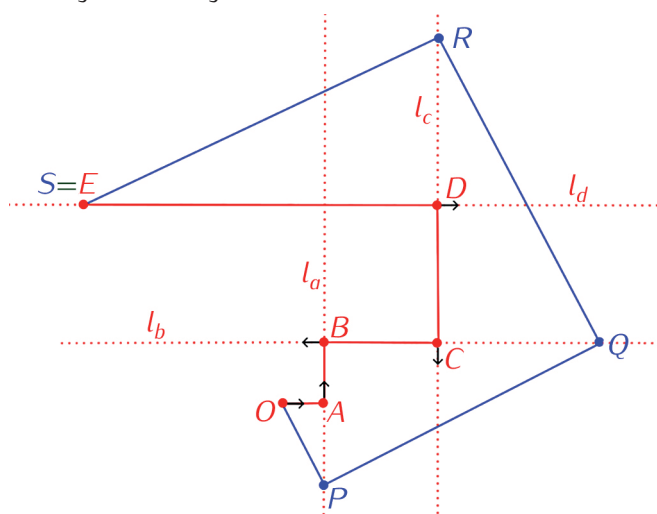


Hoewel we in principe puzzels proberen te maken waarvan de oplossingen niet geheel op internet zijn te vinden, hebben we nu gekozen voor een onderwerp dat wel is beschreven. Maar zover we weten is het niet algemeen bekend en zeker de moeite waard. Dus hebben we er toch een puzzel van gemaakt.

Het idee heeft leuke toepassingen en is ook te volgen en te begrijpen voor leerlingen, zelfs (gedeeltelijk) in de onderbouw.

Het gaat om de methode die wij 'haakse-hoeken methode' hebben genoemd. Het is een manier om een voorstelling te maken van een polynoom van graad  $n$  met één variabele. Vervolgens kun je daarmee grafisch mogelijke nulpunten bepalen. Voor een tweedegraads vergelijking kun je die zelfs construeren met passer en lat. Toepassingen zijn bijvoorbeeld de driedeling van een hoek en het verdubbelen van de kubus.

Het gaat als volgt:



figuur 1

We maken een plaatje dat bestaat uit rechte lijnstukken met haakse hoeken. Zie de rode lijnstukken in het voorbeeld in figuur 1 voor een polynoom van graad  $n = 4$ :  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ , met  $a = 1$ ,  $b = 1,5$ ,  $c = -3$ ,  $d = -3,5$  en  $e = -9$ . We zullen steeds zorgen dat  $a$  positief is en liefst 1.

We tekenen de punten  $O$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  en  $E$  voor een vierdegraads polynoom als volgt vanaf  $O$ :

In het eerste punt  $O$  tekenen we een pijltje naar rechts. Bij elk volgend punt komt weer een pijltje,  $90^\circ$  gedraaid

naar links ten opzichte van het vorige pijltje.

De afstand van het volgende punt is de absolute waarde van de coëfficiënt, de richting met het pijltje mee als de coëfficiënt positief is, tegen de richting van het pijltje in als de coëfficiënt negatief is.

Als één of meer van de coëfficiënten nul is dan vallen er twee of meer punten samen en is er bij die coëfficiënt geen rood lijnstuk, maar wel een pijltje dat  $90^\circ$  gedraaid is t.o.v. het vorige.

In ons voorbeeld wordt dat met rode punten en lijnen:

Teken  $O$  en een pijltje naar rechts beginnend bij  $O$ .

Om  $A$  te vinden:  $a = 1$  dus  $A$  komt 1 rechts van  $O$ .

( $a$  is positief dus met het pijltje mee)

Het pijltje in  $A$  gaat omhoog. ( $90^\circ$  linksom t.o.v. het pijltje in  $O$ )

Om  $B$  te vinden:  $b = 1,5$  dus  $B$  komt 1,5 boven  $A$ .

( $b$  is positief dus met het pijltje mee)

Het pijltje in  $B$  gaat naar links. ( $90^\circ$  linksom t.o.v. het pijltje in  $A$ )

Enzovoort tot punt  $E$ .

We tekenen ook rode stippellijnen langs de pijltjes en noemen de lijn langs het pijltje bij  $A$   $l_a$  enzovoort tot  $l_d$ . Als er een of meer coëfficiënten 0 zijn, kunnen er dus rode stippellijnen samenvallen.

We noemen het traject  $OABCDE$  de haakse-hoeken voorstelling van de polynoom.

Vervolgens gaan we een mogelijk nulpunt van de polynoom bepalen, dus hier een oplossing van de vergelijking  $x^4 + 1,5x^3 - 3x^2 - 3,5x - 9 = 0$ .

We kiezen een punt  $P$  op  $l_a$  en trekken  $OP$  met een blauwe lijn.

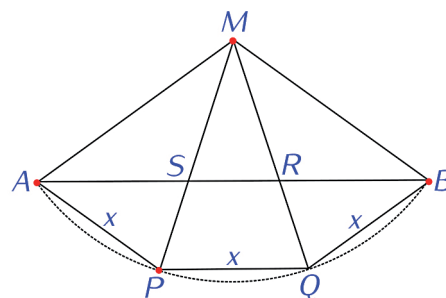
Het punt  $Q$  is dan het snijpunt van de loodlijn van  $OP$  in  $P$  met  $l_b$ . Trek  $PQ$  met een blauwe lijn.

Op dezelfde manier construeren we ook  $QR$  en  $RS$ . Het laatste punt is dus  $S$ , maar dat zal in het algemeen niet samenvallen met  $E$ , zoals in figuur 1.

Vervolgens verschuiven we  $P$  langs  $l_a$  zodanig dat  $S$  samenvalt met  $E$ . We hebben dan een tweede haakse-hoeken traject met hetzelfde begin- en eindpunt, maar met één haakse hoek minder.

Afhankelijk van de lengte van  $AP$  en  $OA$  kunnen we nu een oplossing van de vergelijking bepalen. Let daarbij op het teken  $+$  of  $-$ .

Het is natuurlijk niet zo makkelijk om de juiste plaats van punt  $P$  te vinden zodat  $S$  en  $E$  samenvallen. Je kunt daar doorzichtig millimeter papier voor gebruiken, maar zeker voor grotere  $n$  blijft dat lastig. Met GeoGebra of een vergelijkbaar tekenprogramma kun je echter heel gemakkelijk punt  $P$  langs  $l_a$  schuiven tot  $S$  en  $E$  samenvallen. Het blijft echter een benadering. Maar voor tweedegraads vergelijkingen kunnen we het keurig met passer en lat construeren!



figuur 2

**Opgave 1a:** We onderzoeken met de haakse-hoeken methode mogelijke oplossingen van  $x^2 + 5x + 6 = 0$  en van  $2x^2 - 5x + 3 = 0$ . De rode figuur heeft dan dus de punten  $O, A, B$  en  $C$ , de blauwe figuur heeft dan de punten  $O, P$  en  $Q$ .

- 1) Bepaal de plaatsen van de punten van de rode en blauwe trajecten. (Geef coördinaten of een tekening).
- 2) Waar/hoe vind je een punt  $P$  zo dat  $C$  en  $Q$  samenvallen en geef een oplossing van de vergelijkingen. Let ook op het juiste teken! Controleer of dit klopt.

**Opgave 1b:** Beschrijf hoe je in het algemeen de oplossingen van een tweedegraads vergelijking met de haakse-hoeken methode kunt construeren met passer en lat en hoe je dan meteen kunt zien hoeveel oplossingen er zijn. Leg ook uit dat je hiermee bewijst dat de haakse-hoeken methode voor  $n = 2$  juist is.

We gaan nu de wortel trekken uit een getal  $c$ , dus de oplossingen van  $x^2 = c$ .

**Opgave 2:** Leg uit hoe je met passer en lat  $\sqrt{c}$  kunt construeren met de haakse-hoeken methode en vergelijk het met een meer bekende methode om de wortel van  $c$  te construeren.

We bekijken nog twee toepassingen: De verdubbeling van een kubus en de driedeling van een hoek.

**Opgave 3a:** Bepaal de lengte van de ribben van een kubus met inhoud 2 liter. Geef een vergelijking waarmee je de oplossing kunt vinden met de haakse-hoeken-methode en leg uit hoe.

**Opgave 3b:** Idem voor de driedeling van een hoek. Teken daartoe een gelijkbenige driehoek  $ABM$  met gegeven lengte  $AB$ , en  $MA = MB = 1$ , en een cirkel met middelpunt  $M$  en straal  $= 1$ . Schets de koorden  $AP = PQ = QB = x$ , zie figuur 2. Tip: Druk de lengte van  $AB$  uit in  $x$ . Leg vervolgens uit hoe je  $x$  kunt bepalen met de haakse-hoeken methode.

Het blauwe traject dat we verkrijgen met de haakse-hoeken methode voor de oplossing van een  $n$ -de-graads vergelijking van  $O$  via  $P$  naar het punt waar hij aansluit op het rode traject kunnen we draaien zodat  $OP$  horizontaal naar rechts wijst. Je hebt dan een nieuwe voorstelling van een polynoom van graad  $n - 1$ . Daarmee kun je mogelijke nulpunten van die polynoom van graad  $n - 1$  (de blauwe) bepalen. En dat blijken ook (de andere) oplossingen te zijn van de oorspronkelijke polynoom.

**Opgave 4:** Als  $x = s$  een oplossing is van een polynoom  $p(x) = 0$  met graad  $n$ , dan is  $p(x)$  deelbaar door  $(x - s)$  en bestaat er een blauw haakse-hoeken traject  $q(x)$  van graad  $n - 1$ . Bepaal het verband tussen  $p(x)$  en  $q(x)$  en bewijs hiermee dat de haakse-hoeken methode juist is.

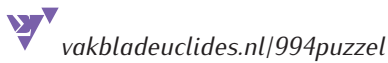
Tip: Let op gelijkvormige driehoeken waarmee je de ruimte tussen de blauwe en de rode trajecten kunt opvullen.

## Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kun je mailen naar [liekewobien@hotmail.nl](mailto:liekewobien@hotmail.nl) of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk.

Er zijn 20 punten te verdienen en een boekenbon waarde van 20 euro voor de aanvoerder van de ladder. Inzendingen moeten uiterlijk op 13 maart 2024 binnen zijn.

Voor de uitwerking van puzzel 99-2:



Voor de volledige ladderstand en de uitwerkingen van eerdere puzzels: <https://nvww.nl/euclides/puzzel/>

We feliciteren Gerard Bouwhuis van harte met de ladderprijs.

### Top 10 ladderstand t/m puzzel 99-2

1	G. Bouwhuis	176
2	J. Remijn	148
3	H. Huisman	117
4	M. Schukking	109
5	B. Dopheide	97
6	H. Bakker	97
7	R. Stolwijk	89
8	S. Zondervan	77
9	L. Cizkova	61
10	G. Groenewegen	59

# Witje: Hitte in de stad

Wiskunde in  
teams



WITjes zijn korte modelleer- of onderzoeksopdrachten, bedoeld voor één les, gebaseerd op Olympiade, Wiskunde B-dag en Onderbouw Wiskundedag (Wiskunde in Teams).

In steden wordt steeds meer gebouwd. Er worden ook steeds meer straten, pleinen en parkeerplaatsen aangelegd. Ook leggen mensen steeds vaker tegels in hun tuin. Als het warm weer is, zorgen deze verharde gebieden in steden ervoor dat het in de stad warmer is dan erbuiten. De stenen houden de hitte langer vast. Dit noemt men het 'hitte-eilandeffect'. Doordat het warmer wordt in steden, moeten er maatregelen getroffen worden om de steden minder warm te maken.

Op de plattegrond in figuur 1<sup>[1]</sup> zie je een wijk in aanbouw. Je ziet dat er al een school is in de wijk, verder zijn er woningen en andere bebouwing, pleinen, water, groen en nog onbebouwde stukken. De gemeente wil de wijk groener maken, zodat het hitte-eilandeffect minder groot wordt.



figuur 1

Op de plattegrond zie je de temperatuur op het heetste moment van een zomerse dag, op zes meetpunten in de wijk. De volgende gegevens zijn bekend over wat er gebeurt als je een stad gaat 'vergroenen':

- De temperatuur in parken kan 5 °C lager zijn dan in een deel met veel bebouwing.
- Parken kunnen hun omgeving koelen tot op een afstand van 70 meter: dichterbij het park zal het koeler zijn dan verder weg.
- Het hitte-eilandeffect in de hele wijk vermindert met gemiddeld 0,6 °C bij 10% meer groen in de wijk.
- De gevoelstemperatuur op straatniveau kan, door schaduwwerking van groen, dalen met 15 °C.

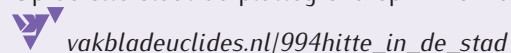
## Opdracht

Voeg groen toe aan de wijk zodat de temperatuur op de warmste plekken met 2 °C omlaag gaat. Maak duidelijk waar je groen hebt toegevoegd en hoeveel groen. Geef aan wat de nieuwe temperaturen zijn. Leg steeds duidelijk uit waardoor de temperatuur omlaag is gegaan.

## Vervolgopdracht

Kun je nog andere maatregelen verzinnen om de temperatuur omlaag te krijgen?

Op de site staat de plattegrond op A4 formaat.



Bron: OnderbouwWiskundeDag 2020,  
<https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28832/>



# COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.  
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.  
ISSN 0165-0394

## Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur  
Liesbeth Coffeng, eindredacteur  
Rogier Bos  
Hugo Duivesteijn, voorzitter  
Tanja Groenendaal  
Ernst Lambeck  
Martijn Schouw  
Constantijn Tilanus

## Inzenden bijdragen

Tom Goris,  
Molenbochtplein 38, 5014 EJ Tilburg  
E-mail: [vakbladeuclides@nvww.nl](mailto:vakbladeuclides@nvww.nl)

## Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.  
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.  
Zie voor nadere aanwijzingen: [vakbladeuclides.nl/richtlijnen](http://vakbladeuclides.nl/richtlijnen)

## Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.  
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, [www.dekleuver.nl](http://www.dekleuver.nl)

## Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: [www.nvww.nl](http://www.nvww.nl)

## Voorzitter

Wim Caspers  
E-mail: [w.caspers@nvww.nl](mailto:w.caspers@nvww.nl)

## Secretaris

Els Franken  
E-mail: [e.franken@nvww.nl](mailto:e.franken@nvww.nl)

## Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld  
Tel. 06 21 50 96 79 E-mail: [ledenadministratie@nvww.nl](mailto:ledenadministratie@nvww.nl)

## Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau, Tel. 0345 531 324  
E-mail: [evers.rechtspositie@gmail.com](mailto:evers.rechtspositie@gmail.com)  
Vermeld bij je contact je lidnummer en telefoonnummer.

## Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.  
De contributie per verenigingsjaar bedraagt met ingang van 1 augustus 2023

- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 72,50
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 75,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.  
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.  
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

## Abonnementen *Euclides* niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang  
Personen (niet-leden van de NVvW): € 90,00  
Instituten en scholen: € 160,00  
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00  
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

## Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie  
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal,  
Tel. (0318) 555 075  
E-mail: [secretariaat@dekleuver.nl](mailto:secretariaat@dekleuver.nl)

# KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: [vakbladeuclides@nvww.nl](mailto:vakbladeuclides@nvww.nl)

2024

## LANDELIJK

Scholen kiezen zelf een dag  
Op de scholen: Onderbouw Wiskundedag (3hv)  
en vmbo Wiskundedag (3 vmbo-gt)  
Organisatie: Freudenthalinstituut

05/02  
t/m  
16/02

## UTRECHT

Conferentie Rekenen-wiskunde, overgang  
van PO naar VO  
Organisatie: NVORWO, NVvW en SLO.

Wo  
13/03

## LANDELIJK

Op de scholen: W4Kangoeroewedstrijd,  
wereldwijde wiskundewedstrijd  
Organisatie: Stichting Wiskunde Kangoeroe

Do  
21/03

## NIEUWEGEIN

Conferentie Rekenen-wiskunde, overgang  
van PO naar VO  
Organisatie: NVORWO, NVvW en SLO

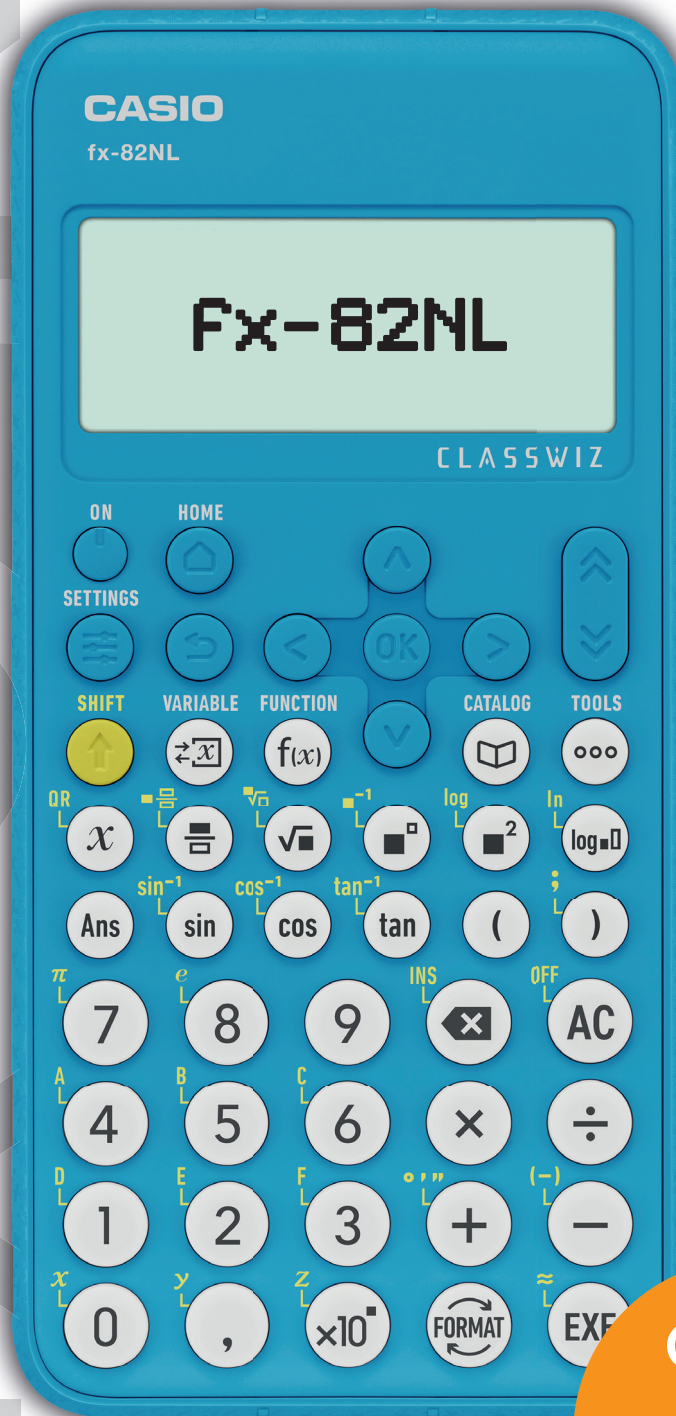
Wo  
27/03

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindsversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook [vakbladeuclides.nl](http://vakbladeuclides.nl)

## JAARGANG 99

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
5	13 maart 2024	2 januari 2024
6	1 mei 2024	26 februari 2024
7	19 juni 2024	22 april 2024

CASIO®



Opvolger van:  
fx-82MS  
fx-82EX

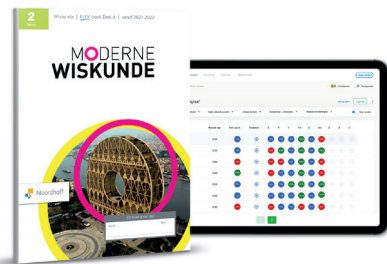
Voor Nederlands  
curriculum gemaakt

# Wiskunde bij Noordhoff: jij kiest!

Met wiskunde via Noordhoff kies je altijd voor de beste lesmethode wiskunde. Je bent verzekerd van een methode die aansluit bij jouw visie op het vak wiskunde. Je weet dat je kiest voor een heldere didactiek, de hoogste kwaliteit en zekerheid van klas 1 tot het eindexamen. Jij kiest!

Vernieuwde vmo bovenbouw vanaf '24/'25!

## MODERNE WISKUNDE



### Leerlinggericht

*Verkennen, verdiepen, oefenen en toepassen*  
Moderne Wiskunde brengt je begrip en inzicht bij.

### Didactiek

Het begrijpen en toepassen van wiskunde. Moderne Wiskunde stimuleert kritisch denken en probleemoplossende vaardigheden.

### Structuur

Structuur door de vaste omvang:  
één paragraaf is één les van 50 minuten.

## getal&ruimte



### Leerlinggericht

*Uitleggen, voordoen en oefenen*  
Getal & Ruimte biedt uitgebreide theorie en veel gericht oefenen.

### Didactiek

Stapsgewijs aanleren van wiskundige vaardigheden en formules met veel aandacht voor oefenen en herhalen.

### Structuur

Structuur door de vaste opbouw van de hoofdstukken en paragrafen.

	Hardcover	Flex-licentie
Leerling mag schrijven in het boek	Nee	Ja
Altijd up-to-date	Nee	Ja
Persoonlijke digitale leeromgeving met toetsen	Optioneel	Inclusief
Aanschafvorm	Eenmalige aanschaf boeken en jaarlijkse licentie digitale leeromgeving	Jaarlijkse licentie voor combinatie boek en digitale leeromgeving

Wil je meer weten of een gratis beoordelingspakket aanvragen?  
Kijk op [Noordhoff.nl/wiskunde](https://www.noordhoff.nl/wiskunde)