Olympiadepuzzel

Euclides 99 nummer 1

Delers van faculteiten

Opgave

Zoals bekend staat $n!$ voor het product $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Uiteraard is $n!$ deelbaar door alle positieve gehele getallen kleiner dan of gelijk aan n. Sommige faculteiten zijn ook deelbaar door de eerstvolgende grotere getallen. Zo is 5! deelbaar door 6 en is 7! deelbaar door 8, 9 en 10. Sterker nog, 7! is deelbaar door $8 \cdot 9 \cdot 10$.

We zeggen dat 7 een *deelbaarheidspotentie* van 3 heeft omdat 7! deelbaar is door het product van de 3 (maar niet 4) gehele getallen volgend op 7. Net zo heeft 5 een deelbaarheidspotentie van 1 en heeft 6 een deelbaarheidspotentie van 0. In het algemeen definiëren we de deelbaarheidspotentie van een positief geheel getal n als het grootste getal k zodat $n!$ deelbaar is door $(n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+k)$.

Bepaal het kleinste positieve gehele getal n met een deelbaarheidspotentie van 4.

Uitwerking

We zijn op zoek naar het kleinste getal n zodat $n!$ deelbaar is door $(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)$ maar niet door $(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4) \cdot (n+5)$.

Geen van de getallen $n+1$, $n+2$, $n+3$ en $n+4$ kan een priemgetal zijn, want dan zou het geen deler van $n!$ zijn. Deze getallen moeten dus een rij van vier opeenvolgende samengestelde getallen vormen. De kleinste priemgetallen zijn 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, ... De eerste keer dat er minimaal vier getallen tussen twee opeenvolgende priemgetallen zit, is tussen 23 en 29. De kleinste opties voor getallen met deelbaarheidspotentie 4 zijn dus $n = 23$ en $n = 24$.

We laten nu zien dat de deelbaarheidspotentie van $n = 23$ gelijk is aan 5. De deelbaarheidspotentie is kleiner dan 6 omdat 23! niet deelbaar is door het priemgetal 29. Er geldt echter wel dat 23! deelbaar is door $24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28$. Dit kunnen we inzien door $24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28$ te schrijven als product van *verschillende* getallen kleiner dan 23. Er geldt dat

$$\begin{aligned} 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 &= (2 \cdot 12) \cdot (5 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 13) \cdot (3 \cdot 9) \cdot (4 \cdot 7) \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 13 \end{aligned}$$

Omdat 23! het product is van *alle* positieve gehele getallen kleiner dan of gelijk aan 23, is het deelbaar door het product van elke deelverzameling van deze getallen. In het bijzonder is 23! deelbaar door $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 13$. Hiermee hebben we aangetoond dat 23! deelbaar is door $24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28$, zodat 23 deelbaarheidspotentie 5 heeft.

Uit het feit dat 24! deelbaar is door 23! volgt nu direct dat 24! deelbaar is door $24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28$ en dus ook door $25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28$. Aangezien 24! niet deelbaar is door 29, is de deelbaarheidspotentie van 24 gelijk aan 4. Het gevraagde getal is dus $n = 24$.

Inzenders met de juiste oplossing

Peter Donkelaar, Rezi Goverde, Gé Groenewegen, Kenneth Halman, Mitchel van Heesch, Hans Linders, Cindy Russon, Matthijs Schukking, Piet Smal en Robert van der Waall

Winnaar van de cadeaubon

Robert van der Waall