Maarten Müller

Formatief handelen in de wiskundeles

1: Formatief handelen en wiskundige competentie

Formatief handelen… heeft er weer een onderwijsgoeroe iets uit zijn hoge hoed getoverd en kunnen we rustig afwachten tot de hype is overgewaaid of hebben we hier iets blijvends te pakken? Dit artikel is het begin van een serie waarin betoogd wordt dat formatief handelen een essentiële toevoeging is aan je les en hoort bij goed lesgeven.

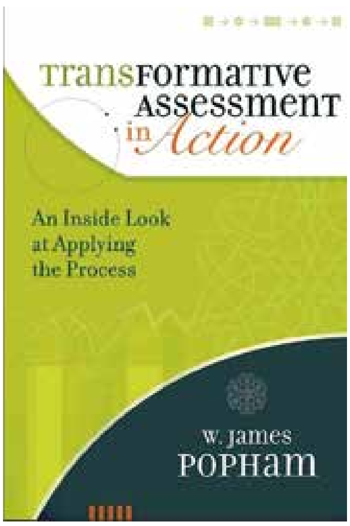
Inleiding

Formatief handelen kan helpen leerlingen en docenten zicht te geven op welke stukken wiskunde zij al wel en nog niet beheersen. Daarnaast kan het leerlingen helpen hun leerstrategie te evalueren. Het kan bijdragen aan het doorbreken van een toetscultuur van last-minute leren voor een toets. Kortom, een wondermiddel… zou je denken, maar er zit vast een addertje onder het gras en dat is ook zo.

Ik zal beginnen met een definitie van formatief handelen. Daarna een korte toelichting om gevoel te krijgen voor hoe formatief handelen eruitziet (en dus niet specifiek voor wiskunde). Daarna volgt het spreekwoordelijke addertje en een eerste aanzet tot een oplossing.

Wat is formatief handelen?

Formatief toetsen, formatief evalueren, formatief handelen, wat is het verschil? Dat is er niet. Zelf kies ik graag voor de term formatief handelen, omdat dat het beste weergeeft dat het niet om het toetsen of evalueren van die toetsen alleen gaat, maar om een mindset en een werkwijze.



figuur 1

James Popham[1] schreef in zijn boek *Transformative Assessment in Action*: 'Formative assessment is a planned process in which assessment-elicited evidence of students' status is used by teachers to adjust their ongoing instructional procedures or by students to adjust their current learning tactics'. Laten we die definitie eens analyseren.

Formatief toetsen (formative assessment) is kennelijk iets wat je voorbereidt (planned proces). Je haalt bewijsmateriaal (evidence) op en dit bewijsmateriaal komt uit de toetsen die je afneemt (assessment-elicited). Het moet iets zeggen over hoe goed een leerling ergens in is (students' status) en moet de docent helpen zijn instructies naar aanleiding hiervan aan te passen (adjust their ongoing instructional procedures). Daarnaast kan het bewijsmateriaal ook gebruikt worden door leerlingen om hun huidige leerstrategie aan te passen (adjust their current learning tactics).

Er is een heleboel literatuur over *formative assessment*, waarbij dit veel meer omvat dan hetgeen ik hiervoor beschreef. De genoemde definitie past goed bij, wat vaak *assessment for learning* genoemd wordt. [2]

Formatief handelen in de praktijk

Als je helemaal niet formatief zou handelen, zou je dus geen bewijsmateriaal verzamelen tijdens het leerproces (en hooguit achteraf; het zogenaamd summatief toetsen). Dat betekent dat je alleen maar zendt en op geen enkele manier kijkt naar de reactie van je toehoorders. Dit hebben we helaas in het online lesgeven vaker moeten doen dan ons lief was. Zeker toen we nog niet zo bedreven waren in online lesgeven. Het is ook wat ik in veel hoorcolleges tijdens mijn wiskundeopleiding op de universiteit heb meegemaakt.

Een 'toets' zonder de context waarin die gebruikt wordt, kan nooit een formatieve of summatieve toets zijn. Het gaat er namelijk om hoe deze ingezet wordt. Een mooie vergelijking, die ik wel eens gehoord heb, vind ik het proeven van de soep door de kok of de klant. De kok proeft de soep om nog bij te kunnen sturen, voordat deze daadwerkelijk beoordeeld wordt door de klant. De klant zit helemaal aan het eind van het proces. Er wordt daarna niets meer gedaan met de soep. Hij wordt alleen nog beoordeeld. Is de soep lekker of niet? Is het antwoord nee, dan is het definitief nee en gaat er ook niets meer aan veranderen. Als de kok vaststelt dat de soep nog niet optimaal is, zal hij nog iets doen om de soep te verbeteren. Dat laatste is formatief gebruik van 'toetsen'. Het toetsen binnen het formatief handelen omvat, zoals ook in het voorbeeld, veel meer dan het geven van schriftelijke toetsen. Het gaat om kijken naar reacties van leerlingen, het stellen van vragen om vast te stellen of iets wel of niet begrepen is of het laten maken van korte diagnostische vragen. Het kan ook het laten maken van een complete diagnostische toets zijn, een week voordat de toets voor een cijfer gegeven wordt. Toetsen moet je dus heel breed opvatten.

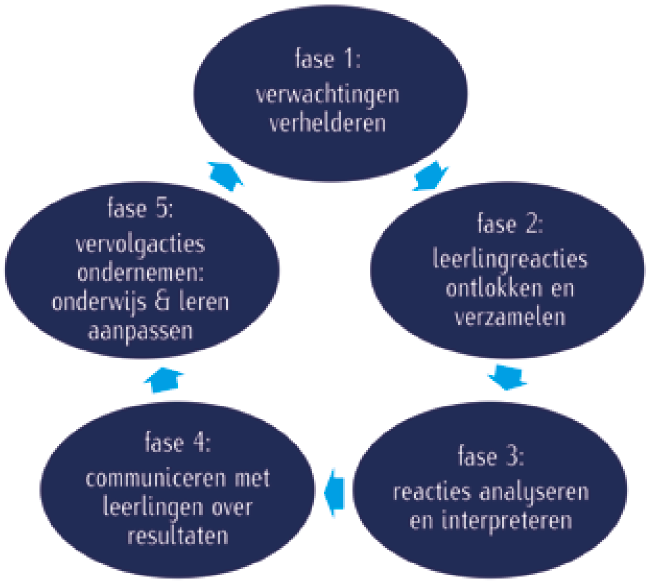
De effectiviteit van formatief handelen

Black & William[3] schreven in 1998 al: 'The research reported here shows conclusively that formative assessment does improve learning. The gains in achievement appear to be quite considerable, and as noted earlier, amongst the largest ever reported for educational interventions.' Nou, meteen maar implementeren dan, zou je zeggen, maar daar zit dan het addertje. Verschillende onderzoekers schrijven dat, hoewel formatief handelen het leren van leerlingen significant kan verbeteren, de factoren die het bevorderen of juist tegenwerken nogal onduidelijk zijn.[4] En dat de effectgroottes die Black & William beschrijven dan ook zelden worden gehaald.[5] Als oorzaak wordt onder andere genoemd dat er veel geschreven wordt over formatief handelen in algemene zin, maar dat het zelden specifiek gemaakt wordt voor een bepaald vak. De aard van het vak bepaalt hoe formatief handelen eruit zou moeten zien binnen dat specifieke vak.

De zoektocht

Op dit punt kun je concluderen dat formatief handelen misschien toch niet zo effectief is als je hoopt, maar je kunt dit ook zien als startpunt van de zoektocht naar hoe formatief handelen er binnen het wiskundeonderwijs uit zou moeten zien. In figuur 2 staat de formatieve cyclus[6] (Gulikers & Baartman, 2017) die in veel trainingen over formatief handelen wordt gebruikt.

In dit artikel zal ik me beperken tot de eerste fase uit dit model. In de rest van de serie zal ik meer de diepte in

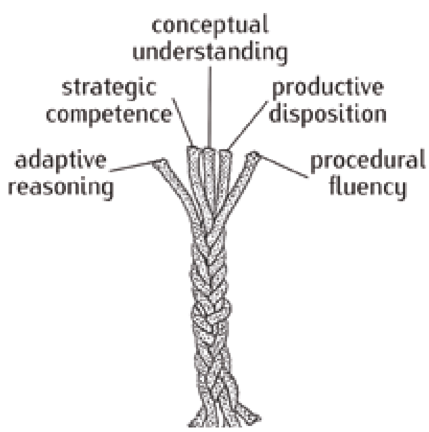


figuur 2 De formatieve cyclus

gaan en de andere fases verkennen. Fase 1 gaat over het verhelderen van verwachtingen in de vorm van het delen van de leerdoelen met je leerlingen. Wat moet er precies geleerd worden in de wiskundeles?

Wiskundige competentie

Kilpatrick, Swafford & Findell[7] beschrijven in hun boek *Adding it up* hoe competent zijn in wiskunde eruitziet. Dit is in figuur 3 weergegeven als een draad, bestaande uit vijf strengen die met elkaar verweven zijn. De vijf strengen staan symbool voor vijf componenten van wiskundige competentie. De vijf strengen versterken elkaar tot een stevig geheel. Als je één van de strengen korter maakt of verwijdert, blijft er minder stevigheid over. Het is dus essentieel voortdurend aan alle componenten te werken. Ik loop ze één voor één langs.



figuur 3 Five strands of mathematical proficiency

>

Conceptual understanding omvat kennis over en de verbanden tussen wiskundige concepten. Een voorbeeld hiervan is het feit dat de diagonalen van een vierkant loodrecht op elkaar staan en elkaar middendoor delen. Later leert een leerling dat dat bij een ruit ook het geval is, maar dat dan de diagonalen niet even lang hoeven te zijn. In het vervolg zal ik deze streng vatten onder de noemer *kennis*, en dat omvat ook het bijbehorende begrip.
Procedural fluency gaat over het geautomatiseerd kunnen uitvoeren van bepaalde procedures (*vaardigheden*). Zo moet een leerling snel elke kwadratische vergelijking kunnen oplossen, zonder over de afzonderlijke stappen na te hoeven denken. Het gaat dus om geautomatiseerde vaardigheden.
Strategic competence noem ik zelf *probleemoplossend vermogen*. Als een leerling geconfronteerd wordt met een nieuwe situatie, moet hij kiezen welke stukjes kennis en welke vaardigheden hij nodig heeft in zijn zelf te ontwerpen stappenplan om tot een oplossing te komen.
Adaptive reasoning is wat kennis, vaardigheden en probleemoplossend vermogen met elkaar verbindt. Om kennis, vaardigheden en oplossingsstrategieën op een zinnige manier op te bouwen en onderling te verbinden en aan wat je al weet, heb je logische redeneerstappen nodig. Als docent kun je zien in hoeverre *adaptive reasoning* ontwikkeld is bij leerlingen door hen te vragen om hun denkstappen uit te leggen en te rechtvaardigen.
Productive disposition is de houding die een leerling ten aanzien van het vak wiskunde heeft. Leerlingen die een goede houding hebben, hebben er vertrouwen in dat ze beter kunnen worden in wiskunde en zien het nut van het vak.

Effectief formatief handelen binnen het vak wiskunde

Om formatief handelen effectief te implementeren in je eigen lessen, moet je allereerst goed zicht hebben op de leerdoelen en passende methodes van formatief handelen kiezen. *Adaptive reasoning* wordt gebruikt om kennis (*conceptual understanding*), vaardigheden (*procedural fluency*) en probleemoplossend vermogen (*strategic competence*) te ontwikkelen. Formatief handelen moet leerlingen helpen erachter te komen waar voor hen precies het probleem zit en hoe ze hieraan kunnen werken. Dat zorgt ervoor dat leerlingen zicht krijgen op hun eigen leren en daarmee kunnen ze (zelf)vertrouwen opdoen.

In het volgende artikel in deze serie zal ik een stukje van een lesmethode analyseren om te onderzoeken hoe kennis, vaardigheden en probleemoplossend vermogen daarin voorkomen met als doel meer feeling te krijgen voor deze componenten en om te kijken hoe je de methode het best kunt inzetten om recht te doen aan elk van de drie.

Noten

[1] Popham, W. (2008). *Transformative assessment in Action*. Alexandria, VA: ASCD.

[2] Van der Kleij, F., Vermeulen, J., Schildkamp, K. & Eggen, T. (2015): Integrating databased decision making, Assessment for Learning and diagnostic testing in formative assessment. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, *22*(3), 324-343.

[3] Black, P. & Wiliam, D. (1998). Assessment and Classroom Learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 5*(1), 7-74.

[4] Heitink, M., Van der Kleij, F., Veldkamp, B., Schildkamp, K. & Kippers, W. (2016), A systematic review of prerequisites for implementing assessment for learning in classroom practice. *Educational Research Review*, *17*, 50-62.

[5] Bennett, R. (2011). Formative assessment: A critical review. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 18*(1), 5-25.

[6] Gulikers, J. & Baartman L. (2017). *Doelgericht professionaliseren: formatieve toetspraktijken met effect! Wat DOET de docent in de klas?* Universiteit Wageningen, Hogeschool Utrecht.

[7] Kilpatrick, A., Swaford, J. & Findell, B. (2001). *Adding It UP: Helping children learn Mathematcs.* Washington, DC: Natonal Academy Press.

Maarten Müller

Formatief handelen in de wiskundeles

2: Kennis, vaardigheden en probleemoplossend vermogen

Formatief handelen... een hype of iets blijvends? Dit tweede artikel in de serie over formatief handelen gaat over de indeling van leerdoelen in kennis, vaardigheden en probleemoplossend vermogen en hoe hiermee om te gaan in de les.

Inleiding

In deel 1 van deze serie hebben we de verschillende fases gezien binnen het formatief handelen. In de eerste fase worden leerdoelen benoemd. Ook hebben we gekeken naar wat wiskundig competent zijn betekent. Een manier om ernaar te kijken is om naast nog twee andere aspecten te kijken naar kennis, vaardigheden en probleemoplossend vermogen.

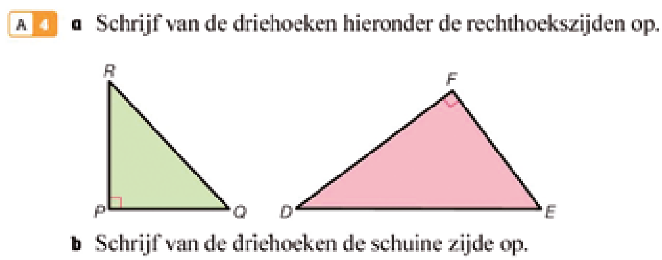
In deel 2 zal ik een stuk uit een lesmethode analyseren om te laten zien welke leerdoelen daarin te onderscheiden zijn. Daarnaast zal ik een voorschot nemen op hoe je daar op een formatieve manier mee om kunt gaan, om dit in volgende delen van deze serie verder uit te werken.

Als voorbeeld gaan we kijken naar de introductie van de stelling van Pythagoras. Hiervoor analyseren we paragraaf 1 van hoofdstuk 6 van *Getal & Ruimte* 2 vmbo-t/havo, twaalfde editie.

Kennis over de stelling van Pythagoras

Als we nader analyseren wat leerlingen wiskundig competent maakt met betrekking tot dit onderwerp, zien we dat leerlingen in de eerste plaats van alles moeten weten (kennis). Bij dit onderwerp is dat niet weinig. Als je mensen op straat vraagt of ze de stelling van Pythagoras kennen, komen ze vaak op de proppen met $a^2 + b^2 = c^2$. Dat is inderdaad een deel van de kennis, maar daar houdt het niet op.

Het begint met te weten wanneer je de stelling kunt toepassen en dat dit alleen kan in rechthoekige driehoeken. Daarvoor moeten leerlingen weten wat een rechthoekige driehoek is. De eerste opgave van paragraaf 1 gaat dan ook over verschillende typen driehoeken, waarbij de nadruk op de rechthoekige driehoek ligt. Daarna worden de drie zijden van de driehoek verdeeld in twee rechthoekszijden en één schuine zijde (zoals *Getal & Ruimte* die zijde noemt). Er volgen drie opgaven waarin leerlingen van elke zijde moeten bepalen welk type zijde dat is. In figuur 1 zie je opgave 4.

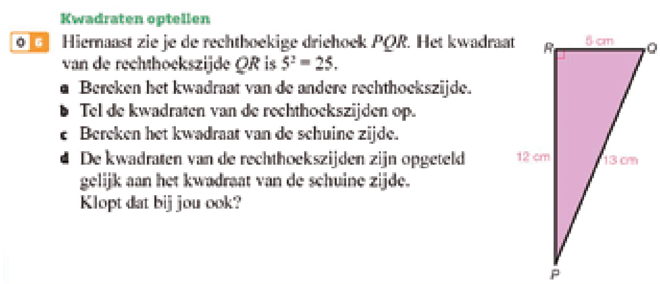


figuur 1 Kennisdoel herkennen van de schuine zijde

Dan pas wordt de stelling geïntroduceerd. Leerlingen moeten dan weten dat de variabelen *a*, *b* en *c* staan voor de zijden van de driehoek, waarbij de variabelen die samen in één lid van de vergelijking staan betrekking hebben op de lengtes van de rechthoekszijden en dat de laatste variabele bij de schuine zijde hoort.

De laatste vraag is nog waarom de stelling eigenlijk waar is. In sommige methodes volgt nu een bewijs.

Getal & Ruimte kiest ervoor om het slechts aannemelijk te maken door voor enkele driehoeken te controleren of het klopt, zie hiervoor figuur 2.



figuur 2 Kennisdoel stelling van Pythagoras begrijpen en aannemelijk maken

Op dit punt, na zes opgaven, zijn de kennisdoelen van deze paragraaf bereikt en wordt de overstap gemaakt naar de vaardigheidsdoelen.

Vaardigheden bij de stelling van Pythagoras

In deze paragraaf komen twee vaardigheden aan bod en dat betreft het berekenen van de lengte van de schuine zijde en het berekenen van de lengte van een rechthoekszijde met de stelling van Pythagoras. Hiertoe volgen zeven opgaven. Bij de eerste twee opgaven wordt de leerling aan het handje genomen door enkele tussenvragen te stellen, waarna de leerling bij de laatste twee vragen zonder tussenvragen meteen de eindvraag moet kunnen beantwoorden. Hierna volgen vier opdrachten met een context. In figuur 3 zie je de laatste.


Rolstoelhelling

A 15 Hieronder zie je een foto van een rolstoelhelling.
Bereken het hoogteverschil *BC* in meters. Rond af op twee decimalen.

figuur 3 Vaardigheidsdoel rechthoekszijde berekenen

Bij deze opgave wordt er weinig creativiteit van leerlingen gevraagd. De leerlingen hebben na enig oefenen een standaard stappenplan voor handen dat zij hier kunnen inzetten. Pas als de opgave iets meer vraagt, moeten leerlingen hun probleemoplossend vermogen aanspreken.

Probleemoplossend vermogen met de stelling van Pythagoras als context

De paragraaf heeft twee opgaven, waarbij het zou kunnen zijn dat leerlingen die alle kennis over de stelling en de bijbehorende vaardigheden bezitten, de opgave toch niet tot een goed einde weten te brengen. Er wordt namelijk nog iets meer van ze gevraagd. Het standaard stappenplan is niet meer voldoende, maar de leerlingen moeten zelf een stappenplan ontwerpen, zie figuur 4.


Zeilboot

A 14 Tijdens een hevige storm is de mast van een zeilschip op een hoogte van 5,6 m geknakt. De top van de mast raakt het dek op een afstand van 3,85 m van de voet.

a Hoe lang is het geknakte stuk? Rond af op twee decimalen.

b Hoeveel meter was de mast? Rond af op twee decimalen.

figuur 4 Probleem oplossen en de stelling van Pythagoras

Eigenlijk is het jammer bij dit soort vragen dat er vragen a en b zijn. In dit geval had prima alleen vraag b gesteld kunnen worden. Dan moeten leerlingen zelf bedenken dat de gehele mast uit het verticale stuk en het schuine stuk bestaat. Het plan bestaat er dan uit eerst het schuine deel te berekenen en dat op te tellen bij het verticale deel. Het is belangrijk je als docent te realiseren dat je bij deze opgave les moet geven over het maken van het stappenplan en niet over het uitvoeren van de stelling. Dat is namelijk al gebeurd in de vaardigheidsopgaven. Deze opgave is dus ook pas zinnig om te maken als de leerlingen de kennis- en vaardigheidsdoelen behaald hebben.

Subjectiviteit bij het indelen

Bij het indelen in kennis, vaardigheden en probleemoplossend vermogen maak je als docent keuzes op basis van je overtuigingen. Zo zou je er bijvoorbeeld voor kunnen kiezen om in deze fase slechts één vaardigheidsdoel te onderscheiden; het berekenen van de lengte van de schuine zijde. Het berekenen van de lengte van een rechthoekszijde zou dan een probleemoplosopgave worden. Leerlingen leren dan niet twee (slechts voor een klein deel) verschillende stappenplannen, maar één. Het berekenen van de lengte van een rechthoekszijde zou dan zelfs pas voor het eerst op de toets gevraagd kunnen worden.

Ook zou het kunnen dat leerlingen het toevoegen van de context zo lastig vinden, dat het vertalen naar een driehoek zonder context niet goed lukt. Dan zou de opgave uit figuur 3 niet langer een vaardigheidsopgave zijn, maar een probleemoplosopgave worden.

Er is dus deels sprake van een keuze door de docent, maar ook bepaalt de groep die je voor je neus hebt af en toe of iets een probleem is of dat het een standaardopgave is, die in de categorie *vaardigheid* valt.

Getal & Ruimte is er erg goed in om veel opgaven te presenteren alsof ze behoren bij een vaardigheidsdoel, omdat er steeds eerst een voorbeeld wordt gegeven en daarna een aantal opgaven aangeboden wordt die erg veel op elkaar lijken. Ik kies er zelf voor om dan hele theorieblokken te bestempelen als context voor probleem oplossen. De precieze gevolgen daarvan, bespreek ik later in deze serie.

> "OM BETER TE WORDEN IN HET OPLOSSEN VAN PROBLEMEN IS HET BELANGRIJK DAT EEN LEERLING VEEL VERSCHILLENDE MANIEREN VAN OPLOSSEN HEEFT GEZIEN BINNEN EEN BEPAALD DOMEIN."

Voorschot op formatief handelen per type leerdoel

Kennisdoelen zijn (bijna) onmogelijk door leerlingen zelf te toetsen. Wiskundige concepten zijn zo rijk en hebben zo veel verschillende facetten dat het voor een leerling niet mogelijk is om zelf te controleren of het hele concept begrepen wordt. Dit geldt niet alleen voor het formatief toetsen, maar ook voor het aanbrengen van de kennis. Een goede manier om te controleren of kennisdoelen behaald zijn is om veel korte diagnostische vragen te stellen die elk van de verschillende facetten van het concept belichten.[1]

Vaardigheidsdoelen zijn juist weer heel goed te toetsen door leerlingen zelf. Het gaat hierbij om voorgeschreven routes naar een eindantwoord. Leerlingen kunnen, als zij geschikte vragen hebben, proberen de route zelf te doorlopen en met een uitgeschreven uitwerking kunnen zij zichzelf controleren, waarna ze eventueel kunnen uitzoeken welke stappen nog niet goed gaan en dan kunnen ze die met meer opgaven die erg lijken op elkaar verder oefenen.[1] Uiteraard is het wel belangrijk dat leerlingen ook echt begrijpen wat ze aan het doen zijn en daar kan de docent dan weer wel bij helpen, maar leerlingen kunnen in ieder geval heel goed controleren of ze de vaardigheidsdoelen behaald hebben.

De doelen met betrekking tot het ontwikkelen van probleemoplossend vermogen zijn een stuk lastiger te controleren. De vraag is ook wanneer je überhaupt zo'n doel behaald hebt. Probleemoplossen is één van de 21e-eeuwse vaardigheden, zoals benoemd door onder andere het SLO.[2] Het lastige is dat probleemoplossend vermogen niet los gezien kan worden van de context waarin het toegepast wordt,[3] dus je kunt nooit zeggen dat een leerling klaar is met leren probleem oplossen.

Om beter te worden in het oplossen van problemen is het belangrijk dat een leerling veel verschillende manieren van oplossen heeft gezien binnen een bepaald domein.

Als docent krijg je dit bijna niet voor elkaar, maar leerlingen kunnen heel veel leren van hun medeleerlingen. Zo kun je kiezen voor werkvormen waarin veel verschillende groepjes van leerlingen aan hetzelfde probleem werken onder leiding van een docent.[4] Je kunt dan verschillende uitwerkingen naast elkaar leggen, zodat leerlingen niet alleen de door de methode voorgeschreven strategie zien, maar juist veel verschillende strategieën zien.

In het volgende artikel zullen we een stap verder gaan dan het benoemen van leerdoelen. We zullen dan dieper ingaan op het aanbrengen, toetsen en remediëren van kennisdoelen.

Noten

[1] Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge in mathematics. In Cohen Kadosh. R. & Dowker, A. (Eds.). *Oxford handbook of numerical cognition* (pp. 1102 - 1118).

[2] SLO (2018). *Concept-leerlijnen voor 21e-eeuwse vaardigheden*. Enschede, SLO.

[3] Perkins, D. & Salomon, G. (1989). Are cognitive skills context bound? *Educational Researcher 18*(1), 16 - 25.

[4] Evans, S., Swan, M. (2014). Developing Students' Strategies for Problem Solving. *Educational Designer 2*(7).

Maarten Müller

Formatief handelen in de wiskundeles

Deel 3: Formatief toetsen bij kennisdoelen

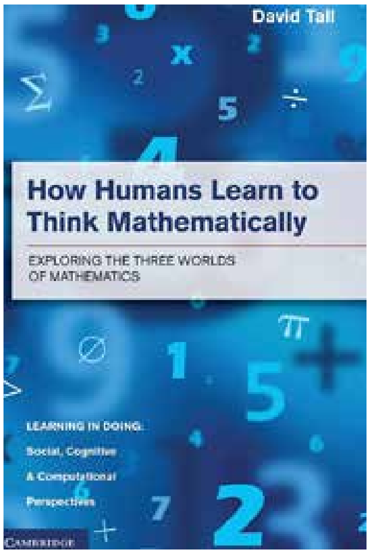
Formatief handelen… heeft er weer een onderwijsgoeroe iets uit zijn hoge hoed getoverd en kunnen we rustig afwachten tot de hype is overgewaaid of hebben we hier iets blijvends te pakken? Dit artikel is het derde deel van een serie waarin betoogd wordt dat formatief handelen een essentiële toevoeging is aan je les. In dit deel ligt de nadruk op doelen op kennisniveau.

Inleiding

In deel 1 van deze serie hebben we de verschillende fases gezien binnen het formatief handelen. In de eerste fase worden leerdoelen benoemd. Ook is beschreven wat wiskundig competent zijn betekent. Dit heeft te maken met kennis, vaardigheden en probleemoplossend vermogen.
In deel 2 hebben we gekeken naar hoe de verschillende doelen zijn te herkennen in een lesmethode, zodat je die optimaal kunt inzetten.
In deel 3 richten we ons specifiek op kennisdoelen. Vragen die centraal staan zijn *'Hoe slaan leerlingen kennis op in hun hersenen?'*, *'Hoe kunnen wij als docenten kennis aanbrengen bij leerlingen?'* en *'Hoe controleren we of leerlingen de juiste kennis bezitten?'*. We zullen dit doen aan de hand van een voorbeeld. Een geschikt voorbeeld is de kennis rond het concept 'lijn', omdat de vorming daarvan al begint in het basisonderwijs en er nog nieuwe kennis rond het concept wordt toegevoegd in 6 vwo bij wiskunde D.

Kennis opslaan in je hersenen

Waarschijnlijk ken je de vergelijking wel waarin verbindingen in je hersenen vergeleken worden met geitenpaadjes en snelwegen. Als leerlingen een stukje kennis voor het eerst tegenkomen, wordt er een verbinding in de hersenen gemaakt, die nog erg fragiel is (het geitenpaadje), maar naarmate het vaker opgeroepen wordt, wordt de verbinding sterker (de snelweg). Belangrijk in het opslaan van grote hoeveelheden kennis is dat de individuele stukjes kennis met elkaar verbonden worden, zodat als we een onderdeel van het concept oproepen, ook de rest aan de oppervlakte komt.
David Tall schrijft in zijn boek *How Humans Learn to Think Mathematically*[1] over *crystalline concepts*. Hij schrijft dat conceptvorming in een bepaalde volgorde plaatsvindt en uiteindelijk ontstaat er een *crystalline concept*. Aan de hand van het concept 'lijn' zal ik zichtbaar maken hoe deze conceptvorming werkt.



figuur 1 How humans learn to think mathematically van David Tall

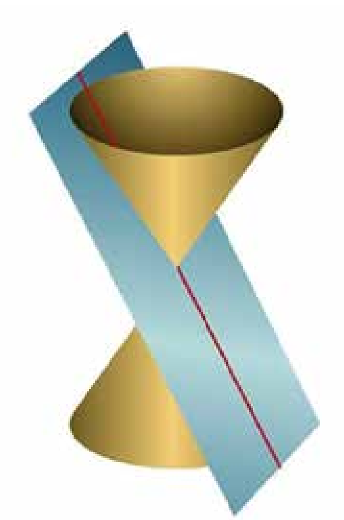
Het concept lijn

Als je kinderen op zeer jonge leeftijd vraagt een lijn te tekenen, dan hebben ze een globaal idee van wat een lijn is. Ze kunnen niet uitleggen wat het is, ze kunnen ook geen eigenschappen van een lijn benoemen, maar ze kunnen wel aangeven van verschillende plaatjes wat wel en niet een lijn is. Er zit uiteraard nog een flink gat tussen wat zij een lijn noemen en de wiskundige definitie ervan. Zo zal hun lijn een dikte hebben en niet oneindig lang zijn. Daarnaast is zelfs in mijn 4 vwo klassen een lijn nog niet altijd recht. Tall noemt dit een *unistructural situation*.

>

Pas in het voortgezet onderwijs gaat een deel van de leerlingen preciezer omschrijven wat een lijn is en de verschillende eigenschappen benoemen, zoals de eerder genoemde infinitesimale dikte, de oneindige lengte en het feit dat er geen kromming in een lijn zit. Dit is de *multi-structural situation,* volgens Tall.
In een volgende fase wordt het concept lijn in verband gebracht met andere concepten. Zo wordt duidelijk dat een lijn een bijzondere vorm van een kromme is. Tall spreekt hier van *a relational structure*.

Nog weer later wordt duidelijk dat de lijn op verschillende manieren gedefinieerd kan worden. Zo is de lijn in Euclidische meetkunde de enige verbinding van twee punten. In de algebra is de lijn de grafiek horend bij een lineair verband. En in mijn 6 vwo wiskunde D klas ontdekken de leerlingen dat de lijn een ontaarde kegelsnede is en ook op die manier gedefinieerd kan worden.



figuur 2 De lijn als kegelsnede

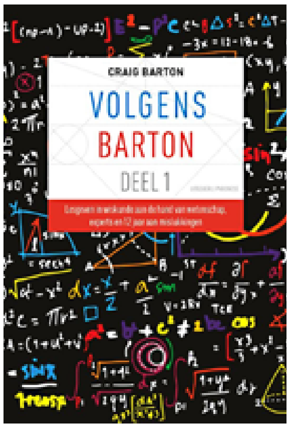
Op het moment dat leerlingen al die equivalente ideeën zien als verschillende aspecten van hetzelfde onderliggende concept, is er sprake van een *crystalline concept*. Dit klinkt allemaal nogal hoogdravend, maar het benadrukt wat mij betreft vooral dat het onze taak in het wiskundeonderwijs is om ervoor te zorgen dat leerlingen deze verbanden gaan zien en de kennis in hun hersenen opslaan als één geheel en niet als gefragmenteerde stukjes kennis. De volgende vraag is natuurlijk hoe we dat voor elkaar krijgen en hoe we controleren of onze leerlingen inderdaad toewerken naar een *crystalline concept*. Uiteraard is het zo dat het niet nodig is dat het concept voor elke leerling even rijk is en zeker niet op elk moment in hun ontwikkeling.

Aanbrengen van kennis

De methode waarmee ik werk in het voortgezet onderwijs probeert het leerlingen makkelijk te maken door concepten juist op te breken en elk aspect van het concept apart aan te bieden. Dit is voor leerlingen heel overzichtelijk en het lukt dan goed om de vragen te beantwoorden die per theorieblokje gesteld worden, maar op het moment dat leerlingen naar de wat lastigere opgaven gaan, waar de vragen niet meer zo netjes geordend zijn, komen ze in de problemen.
Het is dus mijn taak als docent om te zorgen dat dit hiaat in de methode wordt opgelost. Laten we even teruggaan naar het voorbeeld van de lijn. We gaan er voor nu even van uit dat leerlingen al weten dat een lijn meetkundig wordt vastgelegd door twee punten. Deze voorkennis moet eerst geactiveerd worden. Zelf werk ik graag in een zelfontdekkende setting. Ik zou leerlingen de opdracht kunnen geven om in hun schrift een lijn te tekenen in een assenstelsel, waarbij een medeleerling niet mag zien welke lijn ze tekenen. Vervolgens moeten ze elkaar aanwijzingen geven, opdat ze beiden ook de lijn van de medeleerling in hun schrift krijgen. Bij verschillende koppels zullen verschillende aanwijzingen gebruikt worden, maar ergens in je klaslokaal zal waarschijnlijk een koppel zijn waarin twee punten genoemd worden, waarna de ander de lijn kan tekenen.
Nadat duidelijk is dat twee punten voldoende zijn om de lijn te tekenen, is het voor leerlingen heel vanzelfsprekend dat ze slechts twee verschillende getallen moeten invullen in de formule van het lineaire verband om de bijbehorende grafiek te kunnen tekenen. Uiteraard moet op nog veel meer aspecten van het concept ingegaan worden, maar dat voert te ver voor deze serie.
Het is uiteraard aan de docent om te kiezen in hoeverre hij kennis aanbrengt door te vertellen of leerlingen zelfontdekkend aan de slag laat gaan. Ik kies voor het laatste en zal in het laatste deel van deze serie ingaan op hoe dit ook kan helpen bij het leren probleem oplossen. Ik raad alvast het boek *Building thinking classrooms* van Peter Liljedahl[2] aan als verplicht leesvoer voor elke docent in het po en vo.
Overigens meldde ik eerder dat het een hiaat in mijn methode is dat verbanden tussen verschillende stukjes kennis niet gelegd worden. Je zou ook kunnen zeggen dat het je rol als docent is om niet gewoon de methode van kaft tot kaft te volgen, maar de methode meer als naslagwerk en verzameling van opgaven te gebruiken. Dit lijkt me zonder meer een gezonde opvatting.

Formatief toetsen van kennisdoelen

Bij het checken of leerlingen de kennisdoelen beheersen is het nodig veel korte (diagnostische) vragen te stellen, die alle facetten van het concept en de samenhang tussen verschillende concepten toetsen.[3] Craig Barton beschrijft in zijn boek *How I wish I'd taught maths* [4] aan welke criteria een goede diagnostische vraag moet voldoen.



figuur 3 De Nederlandse vertaling van How I wish I'd taught maths

Barton noemt onderstaande criteria

- duidelijk en op meerdere manieren te interpreteren;
- er wordt slechts één vaardigheid getoetst;
- moet te beantwoorden zijn binnen 10 seconden;
- elk incorrect antwoord moet je iets vertellen over een misconceptie;
- je kunt de vraag niet goed beantwoorden als je een belangrijke misconceptie hebt.

Zoals altijd is het belangrijk om kritisch te zijn op ideeën van anderen en is het ook belangrijk om te kijken hoe iets past binnen je eigen onderwijspraktijk. Ik ben erachter gekomen dat het voor mij vooral goed werkt om diagnostische vragen in te zetten bij het checken van kennisdoelen en niet bij vaardigheidsdoelen. Deze toets ik op een andere manier, maar daar kom ik in het volgende deel van deze serie op terug. Daarnaast is het naar mijn idee niet zo belangrijk om elk van de criteria heel strikt te volgen, maar ze geven een mooi beoordelingskader van je eigen diagnostische vragen. Een voorbeeld van een goede diagnostische vraag bij het concept lijn zie je in figuur 4.

figuur 4 Diagnostische vraag bij het concept 'lijn'

Verder is het goed om te weten dat het van belang is een hele set vragen te ontwikkelen rond een belangrijk concept die allemaal gesteld moeten worden. Barton stelt voor om elke les te beginnen met een zogenaamde *low stake quiz*, waarin leerlingen een aantal diagnostische vragen beantwoorden. Het resultaat van de quiz levert geen beoordeling op, maar als leerlingen bepaalde vragen niet goed kunnen beantwoorden, kan de docent de leerlingen die het betreft heel gericht feedback geven, zodat het kennishiaat voor dat moment gerepareerd wordt.

Samenvattend

Het formatief handelen bij kennisdoelen vraagt van een docent dus dat relevante voorkennis geactiveerd wordt en in verband wordt gebracht met de nieuw aan te brengen kennis. Daarnaast moet de docent door het stellen van veel korte diagnostische vragen na verloop van tijd controleren of leerlingen de kennisdoelen behaald hebben en als dat niet het geval is, moet het gesprek over dit concept opnieuw gevoerd worden.

Noten

[1] Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically.* Cambridge University Press.
[2] Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms.* Sage Publications Inc.
[3] Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge in mathematics. In Cohen Kadosh. R. & Dowker, A. (Eds.). *Oxford handbook of numerical cognition* (pp. 1102-1118). Oxford University Press.
[4] Barton, C. (2018). *How I wish I'd taught maths.* John Catt Educational Ltd.

Maarten Müller

Formatief handelen in de wiskundeles

Deel 4: Formatief toetsen bij vaardigheidsdoelen

Formatief handelen,... heeft er weer een onderwijsgoeroe iets uit zijn hoge hoed getoverd en kunnen we rustig afwachten tot de hype is overgewaaid of hebben we hier iets blijvends te pakken? Dit artikel is het vierde deel van een serie waarin betoogd wordt dat formatief handelen een essentiële toevoeging is aan je les en behoort tot gewoon goed lesgeven. In dit deel de nadruk op doelen op vaardigheidsniveau.

Inleiding

In de eerste twee delen van deze serie heb ik verteld dat het indelen van doelen in kennis-, vaardigheids- en probleemoplosdoelen helpt om de juiste methode van formatief toetsen te kiezen bij elk leerdoel, aangezien die voor elk type doel anders is. In deel 3 hebben we gekeken naar kennisdoelen en in deel 4 zijn de vaardigheidsdoelen aan de beurt.

Vragen die in dit deel centraal staan, zijn *'Hoe hangen kennis- en vaardigheidsdoelen met elkaar samen?'*, *'Hoe leer je leerlingen nieuwe vaardigheden aan?'* en *'Hoe controleren leerlingen of ze de vaardigheden beheersen?'*

Kennis vóór vaardigheid of vaardigheid vóór kennis

Het is een discussie die steeds maar terugkomt. Het ene kamp roept: 'Ik leer mijn leerlingen geen trucjes aan. Ik wil dat ze alles volledig begrijpen.' Het andere kamp roept: 'Met veel oefenen komt het begrip vanzelf. Oefenen, oefenen, oefenen...'

Gelukkig gaat de discussie zelden over of het van belang is dat leerlingen meer kunnen dan het trucje uitvoeren, maar meer over de volgorde waarin de vaardigheid en de kennis waar deze vaardigheid bij hoort, worden aangeboden.
De ervaring leert een aantal dingen. (1) Als leerlingen de vaardigheid kunnen uitvoeren, maar geen idee hebben van wat ze aan het doen zijn, onthouden ze het niet voor de lange termijn. (2) Als leerlingen een vraag krijgen waarin ze de vaardigheid niet rechtstreeks volgens het (zonder begrip) aangeleerde stappenplan kunnen uitvoeren, kunnen ze de vraag niet meer beantwoorden. (3) Soms is de stap om volledig begrip aan te brengen te groot en moeten we onze toevlucht nemen tot het aannemelijk maken in plaats van het volledig begrip eerst aan te brengen. Bij elk van deze drie observaties een voorbeeld.

Vaardigheid zonder kennis

Een voorbeeld bij (1) is het opstellen van de formule van een rechte lijn. Met name de stap van het opstellen van de formule in context naar het opstellen van de formule $y = ax + b$, waarbij $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, levert bij mijn leerlingen op havo met wiskunde A altijd grote problemen op. Het aanvankelijk aanleren van de procedure kost met een voorbeeld erbij niet al te veel moeite. Als je gewoon uit je hoofd leert hoe je a moet berekenen, is het niet een heel ingewikkeld stappenplan. Als je enige tijd later deze procedure weer eens oproept bij leerlingen, merk je dat veel leerlingen de procedure weer volledig vergeten zijn of ze delen Δx door Δy in plaats van andersom of ze doen wel $y_B - y_A$, maar daarna $x_A - x_B$. Als ze vervolgens met elkaar in discussie gaan over hoe het dan moet, komen ze meestal niet verder dan het graven in hun herinneringen. Als die dan verschillen, is het ook meteen einde oefening en moet de docent het verlossende woord brengen.

Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is
$p \pm 2 \cdot \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$, met p de steekproefproportie en n de steekproefomvang.

figuur 1 Het betrouwbaarheidsinterval op het formuleblad van het eindexamen

Afwijken van het stappenplan

Bij (2) denk ik onmiddellijk aan het opstellen van een betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie. Zie figuur 1 voor het deel van het formuleblad waar dit op staat. Het is voor het bepalen van een betrouwbaarheids-interval niet nodig om te weten wat de betekenis van

het interval is of dat $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ een standaardafwijking is.
Als je echter bijvoorbeeld een vraag zou stellen over een 68% betrouwbaarheidsinterval of als je vraagt hoe groot de steekproef moet zijn om een interval te krijgen met een bepaalde breedte, moet je weer nieuwe stappenplannen aanleren. Als de onderliggende kennis aanwezig is, is dit heel weinig werk, maar als leerlingen alleen het stappenplan kennen, wordt het een lastig verhaal. Het aantal stappenplannen dat ze moeten onthouden voor een toets, laat staan voor het eindexamen, wordt daarmee ook erg groot.

Aannemelijk maken

Bij (3) moet ik denken aan wat ik mij ooit voornam in een brugklas vwo extra. Ik zou deze keer geen trucjes aanleren, maar alleen vanuit begrip werken. Bij een opgave als $4x - (x - 3)$ legde ik dus uit hoe je dit kon herleiden, waarbij ik niet wilde spreken over vermenigvuldigen met -1 of alles tussen de haakjes maar een - geven. Ik legde uit aan de hand van voorbeelden met getallen, zoals $8 - (5 - 2)$ dat je 5 van 8 wilde afhalen, maar wacht,... toch maar 2 minder. Die 2 moest er dan weer bij opgeteld worden. Zo deed je dat ook bij $4x - (x - 3)$. Eerst die x eraf en dan toch maar weer 3 erbij, omdat er 3 minder van $4x$ afgehaald moest worden. Op de toets die erop volgde werd beroerd gescoord. Ik besloot in een week alle trucjes aan te bieden en er werd geweldig gescoord. Bij deze vaardigheid was het probleem later ook niet dat ze het snel weer vergaten, want ze hadden het heel erg vaak nodig. Het aanleren van de vaardigheid met volledig begrip zat hier behoorlijk in de weg.
Mijn conclusie was de volgende. Eerst één keer uitleggen waar het trucje vandaan komt en dan in een later stadium eventueel alsnog terugkomen op het waarom.
Conclusie is dat het samen aanleren van vaardigheden en begrip (kennis) de voorkeur heeft, behalve als de onderliggende kennis nog te abstract is voor dat moment.

Het aanleren van vaardigheden

Voor het aanleren van vaardigheden wil ik verwijzen naar *How I wish I'd taught maths* van Barton[1] en *Building thinking classrooms* van Liljedahl[2] Beide auteurs adviseren gebruik te maken van *thin slicing*. Liljedahl beveelt aan ook nog eens nauwelijks of geen uitleg te geven voorafgaand aan het aanleren van de nieuwe vaardigheid, omdat vrijwel elke nieuwe vaardigheid volgt op voorkennis van leerlingen. Dit blijkt verrassend vaak te lukken. Liljedahl zegt dat het belangrijk is om groepjes van drie leerlingen te maken die gezamenlijk de nieuwe vaardigheid verkennen en dan het liefst ook nog zo dat andere leerlingen kunnen zien wat de andere groepjes doen in het geval zij er toch niet echt aan kunnen beginnen. Op die manier zal de kennis zich verspreiden door het lokaal, terwijl dit niet gebaseerd is op een theorieblokje of een uitleg, maar logisch volgt uit de kennis die de leerlingen al hebben.

Laten we eens kijken naar de som-product

(of product-som) methode. Je kunt hier beginnen met de vraag de haakjes bij $(x + 2)(x + 3)$ weg te werken. In elk groepje is waarschijnlijk wel iemand die nog weet hoe je dit doet. De volgende vraag zou dan zijn om te bedenken wat er tussen de haakjes heeft gestaan om als antwoord niet $x^2 + 5x + 6$ te krijgen, maar $x^2 + 7x + 6$. Daarna volgt het zogenoemde *thin slicing* door in kleine stapjes verder te gaan. Zie figuur 2 voor een uitwerking van *thin slicing* bij dit onderwerp.

$$\begin{aligned}
(x + 2)(x + 3) &= x^2 + 5x + 6\\
(\qquad)(\qquad) &= x^2 + 7x + 6\\
(\qquad)(\qquad) &= x^2 + 7x + 12\\
(\qquad)(\qquad) &= x^2 + 14x + 24\\
(\qquad)(\qquad) &= x^2 + 10x - 24\\
(\qquad)(\qquad) &= x^2 + 4x - 12\\
(\qquad)(\qquad) &= x^2 - x - 12\\
(\qquad)(\qquad) &= x^2 - 2x - 24\\
(\qquad)(\qquad) &= x^2 - 0x - 16\\
(\qquad)(\qquad) &= x^2 - 25\\
(\qquad)(\qquad) &= x^2 - 10x + 24
\end{aligned}$$

figuur 2 Thin slicing

Als leerlingen het verband zien tussen het wegwerken van haakjes en het ontbinden in factoren, kunnen ze zichzelf altijd controleren en kan er ook geen discussie ontstaan waarin alleen in het geheugen gegraven wordt of 7 nu de som was en 6 het product of andersom. Ze kunnen de stappen waarin het aangeboden werd herhalen om die vraag te kunnen beantwoorden.

Liljedahl schrijft verder *'thinking is a neccesary precursor to learning'*, vrij te vertalen met *zonder denken geen leren*. Dat betekent dat het aan te bevelen is ze zelf te laten puzzelen in plaats van het voordoen van alle verschillende situaties, omdat leerlingen dan in de consumeerstand gaan en een deel van de leerlingen niet echt aan het denken zal zijn. Zij zullen pas beginnen met denken op het moment dat ze zelf aan de slag moeten. En dat is dan nog in het meest gunstige geval, omdat er ook een risico is dat ze in plaats van zelf denken voorbeelden na zullen doen en ze bij dit onderwerp dan wel een probleem hebben, omdat er verschillende stappenplannen zijn afhankelijk van waar de minnen staan. En als er dan ook nog eens een term ontbreekt, is er helemaal een probleem.

Formatief toetsen van vaardigheidsdoelen

Het checken van kennisdoelen gebeurt door leerlingen en docenten samen, omdat het veel te complex is voor leerlingen om dit alleen te doen. Bij vaardigheidsdoelen ligt dit anders. Vaardigheidsdoelen kan een leerling prima zelf controleren,[3] zeker als het gelukt is om leerlingen in de stand te krijgen dat ze echt willen begrijpen wat er gebeurt. Dat betekent niet dat de docent nooit meer nodig is bij deze doelen, maar doordat er bij niet al te complexe vaardigheden één voor de hand liggende route is naar het eindantwoord, kunnen leerlingen met een goede vraag en modeluitwerking zelf checken of de vaardigheid beheerst wordt. Als ze tot de conclusie komen dat ze het nog niet voldoende beheersen en de modeluitwerking niet goed genoeg helpt om alsnog te gaan begrijpen hoe het werkt, kunnen ze weer bij de docent terecht.

Addertjes onder het gras

In de praktijk blijken er wel wat addertjes onder het gras te zitten. Zo is het belangrijk dat leerlingen ook daadwerkelijk gaan checken of ze bepaalde vaardigheden beheersen. Daar kan de rol van de docent wel weer belangrijk worden. Het werk moet voor de leerlingen gepland worden. Dit kan in de lessen gebeuren of via het huiswerk. Het is per klas in te schatten of het werk ook daadwerkelijk gedaan wordt als het als huiswerk wordt opgegeven. Daarnaast zijn er complexe vaardigheden waarbij verschillende volgordes mogelijk zijn om tot hetzelfde eindantwoord te komen. Neem bijvoorbeeld het herleiden van een uitdrukking met meerdere bewerkingen. In figuur 3 zien we bij één vraag drie verschillende beginnetjes die allemaal tot het beoogde eindantwoord zullen leiden, mits er daarna geen fouten worden gemaakt. Hier ligt dan misschien toch nog een wat grotere rol voor de docent om samen met de leerlingen te checken of hun uitwerking juist is.

Je zou natuurlijk ook nog kunnen zeggen dat het herleiden van dit soort uitdrukkingen niet een vaardigheid is, maar dat hier sprake is van probleem oplossen op basis van een aantal minder complexe vaardigheden (de individuele stappen) en een hoeveelheid beschikbare kennis. Of dat zo is, valt of staat met hoe vaak leerlingen dit moeten

Maak x vrij in de uitdrukking $y=\frac{6\sqrt{x-2}}{3}$

Route 1:	Route 2:	Route 3:
$\frac{6\sqrt{x-2}}{3}=y$	$y=\frac{6\sqrt{x-2}}{3}$	$y=\frac{6\sqrt{x-2}}{3}$
$2\sqrt{x-2}=y$	$6\sqrt{x-2}=3y$	$\frac{36(x-2)}{9}=y^2$
$4(x-2)=y^2$	$\sqrt{x-2}=\frac{1}{2}y$	$\frac{36x-72}{9}=y^2$

figuur 3 Verschillende routes bij een vaardigheid

doen en of dit het eind van een leertraject is of dat er nog vervolgstappen gemaakt moeten worden en dit slechts een tussenstap is richting het veel complexere einddoel. Bij havo wiskunde A is dat een heel ander verhaal dan bij vwo wiskunde B.

Samenvattend

Het formatief handelen bij vaardigheidsdoelen vraagt van een docent ervoor te zorgen dat leerlingen zichtbaar (voor de docent) in staat zijn de procedure uit te voeren. Bij het aanleren is het aan te bevelen kleine stapjes te maken en zo op te bouwen naar de verschillende versies van de procedure. Daarnaast moet de docent ervoor zorgen dat leerlingen tijd en ruimte hebben om te controleren of ze de vaardigheid in de vingers hebben. Hiervoor dient hij een aantal controlevragen en modeluitwerkingen aan te bieden.

Noten

[1] Barton, C. (2018). *How I wish I'd taught maths.* John Catt Educational Ltd.

[2] Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms.* Sage Publications Inc.

[3] Zie: Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge in mathematics. In Cohen Kadosh. R. & Dowker, A. (Eds.). *Oxford handbook of numerical cognition* (pp. 1102-1118).

Maarten Müller

Formatief handelen in de wiskundeles

Deel 5: Formatief toetsen bij probleemoplossend vermogen

Formatief handelen…, heeft er weer een onderwijsgoeroe iets uit zijn hoge hoed getoverd en kunnen we rustig afwachten tot de hype is overgewaaid of hebben we hier iets blijvends te pakken? Dit artikel is het vijfde deel van een serie waarin betoogd wordt dat formatief handelen een essentiële toevoeging is aan je les en behoort tot gewoon goed lesgeven. In dit deel de nadruk op doelen op het niveau van probleemoplossend vermogen.

Inleiding

In de eerste twee delen van deze serie heb ik verteld dat het indelen van doelen in kennis-, vaardigheids- en probleemoplosdoelen helpt om de juiste methode van formatief toetsen te kiezen bij elk leerdoel, aangezien die voor elk type doel anders is. In deel 3 hebben we gekeken naar kennisdoelen, in deel 4 zijn de vaardigheidsdoelen aan bod gekomen en in deel 5 worden doelen voor probleemoplossen besproken.

Vragen die in dit deel centraal staan, zijn '*Hoe hangen kennis, vaardigheden en probleemoplossend vermogen met elkaar samen*', '*Hoe meet je probleemoplossend vermogen?*' en '*Welke werkvormen zijn geschikt om leerlingen beter te maken in het oplossen van problemen?*' Maar eerst moeten we antwoord geven op de vraag wat we precies verstaan onder een probleem en probleemoplossen.

> "Een vraagstuk dat voor een leerling eerst een probleem was, kan later een routinevraagstuk zijn."

Samenhang kennis, vaardigheden en probleemoplossend vermogen

Op de site van SLO lezen we: 'Een probleem is een vraagstuk dat een leerling niet op routine op kan lossen (of zou moeten kunnen oplossen). Over een probleem moet altijd worden nagedacht: welke stappen moet ik zetten om een oplossing te vinden? Een vraagstuk dat voor een leerling eerst een probleem was, kan later een routinevraagstuk zijn, omdat hij routines geleerd heeft om het vraagstuk op te lossen. Over een routine hoeft een leerling niet meer na te denken. Die is geautomatiseerd en is vlot op te roepen uit het geheugen van de leerling.' [1]

Dat plaatst probleemoplossen enerzijds lijnrecht tegenover het toepassen van een vaardigheid, maar anderzijds heb je vaardigheden nodig om het probleem op te lossen. Uit alle beschikbare kennis en vaardigheden moet een leerling een selectie maken en met die stukjes kennis en vaardigheden zelf een stappenplan ontwerpen. Je zou dus kunnen zeggen dat het behalen van kennis- en vaardigheidsdoelen vóór het probleemoplossen komt.

Aan de andere kant lezen we ook dat iets dat eerst probleemoplossen is, later een routinevraagstuk kan zijn; een vaardigheid dus. Het probleemoplossen komt dus soms ook voor de vaardigheid. Dat betekent dat we leerlingen in onze lessen op twee momenten kunnen leren probleemoplossen. Dit kan bij het aanbrengen van nieuwe kennis en vaardigheden, dus aan het begin van het leerproces. Maar het kan ook aan het eind van het leerproces op het moment dat de leerling de kennis en vaardigheden al bezit en hiermee een nieuw stappenplan moet ontwerpen. Als het stappenplan dat hieruit voortkomt, een stappenplan is dat vaker gebruikt gaat worden, is daarmee het eind van het leerproces ook weer het begin van een nieuw leerproces geworden.

Wat maakt een goede probleemoplosser?

Onderzoek van Perkins en Salomon[2] laat zien dat generieke vaardigheden zich niet eenvoudig laten vertalen naar specifieke contexten. Het artikel begint met een verhaal over een land X dat in oorlog is met een naburig land Y. Land X heeft helaas een kleiner leger, dus het zal niet lukken om te winnen met pure kracht, ze zullen dus de tegenstander te slim af moeten zijn. Gelukkig woont in >

land X de wereldkampioen schaken. Wat nu als ze hem wat militaire en politieke kennis bijbrengen om daarna zijn grote probleemoplossend vermogen te gebruiken om de tegenstander te slim af te zijn,...
Als je bovenstaande leest, klinkt het meteen al niet logisch dat dit zo zou werken. Dit kun je vertalen naar wiskundeonderwijs. Om een goede probleemoplosser te zijn, heb je veel kennis van het specifieke domein nodig waar je het op wilt toepassen. Een goede probleemoplosser bij meetkunde hoeft nog geen goede probleemoplosser bij combinatoriek te zijn. Het vereist kennis en vaardigheden binnen het specifieke domein en daarna heel veel training.
Antwoord op de vraag of een leerling (of wie dan ook) een goede probleemoplosser kan zijn, is dus zowel ja als nee. Een leerling kan een goede probleemoplosser zijn binnen een domein, maar als een leerling een goede probleemoplosser is binnen dat domein, betekent dat nog niet dat hij een goede probleemoplosser is in elke context. Dat moet steeds opnieuw getraind worden.

Heuristieken

Om problemen op te lossen kun je zogenaamde heuristieken inzetten. Heuristieken zijn strategieën om problemen op te lossen. Het is mogelijk vele tientallen strategieën te onderscheiden. Om dit concreet te maken, neem ik als voorbeeld het domein combinatoriek. Bij combinatoriek leer ik mijn leerlingen altijd twee belangrijke heuristieken als ze een probleem voorgeschoteld krijgen. De eerste is *maak (een deel van) een boomdiagram* om daarna de berekening op te kunnen schrijven. De tweede is *noteer systematisch een deel van de mogelijkheden en zoek naar een structuur* waaruit wederom de berekening volgt. Deze twee heuristieken leiden meestal tot het juiste antwoord. Hieronder een tweetal voorbeelden. De figuren komen uit *Getal & Ruimte* 12e editie, vwo A/C deel 1 hoofdstuk 4.

12

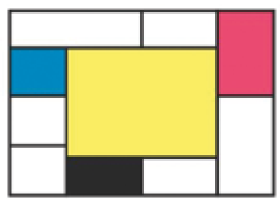
In deze opgave gaat het om getallen van vier cijfers, waarin alleen maar de cijfers 3, 4, 5, 6, 7 en 8 voorkomen.
Hoeveel van die getallen zijn er in het geval
a elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden
b elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden en het getal kleiner dan 6000 moet zijn
c elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden en het getal groter moet zijn dan 6500?

figuur 1 Maak een deel van een boomdiagram

Bij opgave 12 a en b zou je kunnen spreken van een routineopgave. Bij opgave c is dat niet het geval, want het is zeker de eerste keer dat een leerling zo'n opgave tegenkomt. Mijn leerlingen komen meestal met de berekening $3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6$ aanzetten. Een boomdiagram geeft al snel het inzicht dat achter de 6 een andere vertakking ontstaat dan achter de 7 en de 8. Het is daarna voor de meeste leerlingen niet meer nodig om al die vertakkingen ook daadwerkelijk te tekenen.

65

Tijdens een ckv-les kleuren de leerlingen de vlakverdeling hieronder. Van de tien rechthoeken moeten er vier gekleurd worden met rood, geel, blauw en zwart. Elke kleur moet één keer gebruikt worden. De andere rechthoeken blijven wit. Zo ontstaat een Mondriaan-compositie.
Hoeveel composities zijn mogelijk?



figuur 2 Noteer systematisch een deel van de mogelijkheden en zoek naar een structuur.

Ook opgave 65 is voor de meeste leerlingen geen routineopgave. Uiteraard is het mogelijk om de simpele berekening $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ te gebruiken, maar mijn leerlingen bedenken dat zelden. Bij deze opgave is het ook mogelijk een boomdiagram te maken, maar het is voor leerlingen, die de eerder genoemde berekening niet zien, nagenoeg onmogelijk om een boomdiagram te tekenen. Beginnen met systematisch noteren kunnen ze allemaal. Er kunnen nu allerlei keuzes gemaakt worden, maar na enig uitproberen komen leerlingen vaak tot het inzicht dat je de kleuren onderling kunt verwisselen (4!) en dat je keuze voor welke vakjes gekleurd moeten worden ($\binom{10}{4}$) anders kunt kiezen. Dit leidt dan tot de berekening $4! \cdot \binom{10}{4}$.

Dit maakt ook heel erg duidelijk dat leerlingen binnen elk domein opnieuw moeten leren problemen op te lossen. Als een leerling goed is in probleemoplossen bij combinatoriek en een meetkundig probleem wil oplossen, zullen de genoemde heuristieken weinig opleveren. Dan werken heuristieken als *teken een plaatje* weer veel beter. Het is dus belangrijk om deze heuristieken expliciet te maken voor leerlingen en hen ook duidelijk te maken wanneer ze vaardigheden aan het oefenen zijn en wanneer ze met probleemoplossen bezig zijn.

Meten van probleemoplossend vermogen

Het feit dat kennis, vaardigheden en probleemoplossend vermogen zo met elkaar verbonden zijn, maakt het moeilijk om het probleemoplossend vermogen te meten. Kennis kun je meten door (diagnostische) vragen te stellen over kenniselementen, vaardigheden kun je meten door leerlingen te vragen een vaardigheid te laten zien, maar bij probleemoplossend vermogen gaat het om het maken van een slimme keuze uit beschikbare kennis en vaardigheden.

Als een vraag in de categorie probleemoplossen valt en het lukt een leerling niet om de vraag goed te beantwoorden, dan kan dat zijn omdat de kennis niet op orde is, dat er bepaalde vaardigheden ontbreken of doordat het niet lukt om het plan te ontwerpen dat tot de oplossing moet leiden.

Bij ons op school maken we tegenwoordig toetsen waarin eerst kennisvragen (12,5 %), dan vaardigheidsvragen (37,5 %) en tot slot probleemoplosvragen (50 %) gesteld worden. We kunnen bij elke leerling zien hoe deze scoort op elk van de onderdelen. Als kennis en vaardigheden goed gaan en probleemoplossen niet, weet je dat daar het probleem zit. Lukken ook kennis en vaardigheden niet, dan moet dat eerst opgelost worden voordat het probleemoplossend vermogen echt goed gemeten kan worden. Dat geeft ook duidelijke handvatten voor leerlingen ten aanzien van waar zij moeten beginnen met leren; eerst zorgen dat je de kennis en vaardigheden op orde hebt en dan kun je daarna kijken of je er problemen mee op kunt lossen.

Hetgeen ik hierboven beschrijf komt voort uit uitproberen in de praktijk. Ook de literatuur biedt handvatten. Zo schrijven Evans en Swan[3] dat probleemoplossen bij voorkeur geleerd wordt in groepjes samenwerkende leerlingen onder supervisie van een docent. Zo zien leerlingen veel verschillende strategieën. Ook Liljedahl beschrijft in zijn boek *Building Thinking Classrooms*[4] een werkwijze waarin leerlingen in groepen van drie aan problemen werken. Ze doen dit op whiteboards die aan de muur hangen. Liljedahl heeft het met name over probleemoplossen tijdens het verkennen van nieuwe concepten en het ontwikkelen van nieuwe vaardigheden. Liljedahl doet ook de suggestie om opgaven in te delen op drie niveaus. Dit kan voor leerlingen zichtbaar maken waar zij ongeveer staan. Als de relatief eenvoudige opgaven allemaal lukken en de opgaven van een gemiddeld niveau niet, dan hoeven ze nog niet aan de moeilijke opgaven te beginnen. Maar dan nog is het belangrijk dat leerlingen inzicht krijgen in waarom het niet lukt. Zit het hiaat bij kennis, vaardigheden of probleemoplossend vermogen?

Zelf breng ik deze manier van werken inmiddels bijna een schooljaar lang in de praktijk in mijn klassen en ik zie dat het onderzoek dat in Canada is uitgevoerd in tal van klaslokalen zich goed laat vertalen naar de Nederlandse context.

Samenvattend

Om schriftelijk vast te stellen of leerlingen goede probleemoplossers zijn binnen een domein, is het nodig om eerst te checken of zij de kennis en vaardigheden op peil hebben. Om in een les vast te stellen waar leerlingen staan, is het verstandig ze op whiteboards te laten werken om zodoende te kunnen zien waarom het bij een bepaalde opgave niet lukt. Het indelen van opgaven op verschillende niveaus kan ook helpend zijn.

Om leerlingen beter te laten worden in probleemoplossen kun je ze het best laten werken in groepjes van drie leerlingen, waarbij de docent kan ondersteunen.

Noten

[1] Zie: *https://www.slo.nl/thema/vakspecifieke-thema/rekenen-wiskunde/toekomstbestendig/probleemoplossen/*

[2] Perkins, D. & Salomon, G. (1989). Are cognitive skills context bound? *Educational Researcher, 18*(1), 16–25.

[3] Evans, S., Swan, M. (2014). Developing Students' Strategies for Problem Solving. *Educational Designer*, *2*(7).

[4] Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms*. Sage Publications Inc.

Maarten Müller

Formatief handelen in de wiskundeles

Deel 6: Een volledig formatieve aanpak

Formatief handelen, ... heeft er weer een onderwijsgoeroe iets uit zijn hoge hoed getoverd en kunnen we rustig afwachten tot de hype is overgewaaid of hebben we hier iets blijvends te pakken? Dit artikel is het zesde en laatste deel van een serie waarin betoogd wordt dat formatief handelen een essentiële toevoeging is aan je les en behoort tot gewoon goed lesgeven. In dit deel worden de inzichten uit de eerste vijf artikelen samengevoegd tot één overkoepelende werkwijze.

Inleiding

In de eerste twee delen van deze serie heb ik verteld dat het indelen van doelen in kennis-, vaardigheids- en probleemoplosdoelen helpt om de juiste methode van formatief toetsen te kiezen bij elk leerdoel, aangezien die voor elk type doel anders is. In de delen 3, 4 en 5 hebben we gekeken naar kennisdoelen, vaardigheidsdoelen en doelen voor probleemoplossen. In dit deel gaan we kijken wat het betekent voor de flow van je lessen als je alles integreert. Uiteraard is dit slechts een mogelijke aanpak, dus voel je vooral uitgedaagd om je eigen aanpak te ontwerpen. De materialen die ik laat zien, zullen afkomstig zijn uit verschillende jaarlagen uit onder- en bovenbouw.

De lesplanner en de toets

Het leerproces begint voor onze leerlingen met het uitdelen van de lesplanner (in figuur 1 een uitsnede) en eindigt met het afnemen van een toets. Je zou echter ook kunnen zeggen dat de toets het startpunt is voor het volgende onderwerp. Daarover later meer.

Meteen bij het begin van het leerproces krijgen leerlingen zicht op welke leerdoelen er zijn. Leerlingen moeten kennis hebben over de concepten die genoemd worden in kolom 2. Ze moeten de vaardigheden uit kolom 3 beheersen. In kolom 4 staan probleemoplosopgaven. Om deze tot een goed einde te kunnen brengen moeten leerlingen hun probleemoplosvaardigheden op peil hebben.

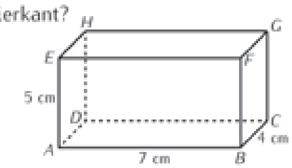
Het leerproces eindigt met een toets met daarin ook weer heel herkenbaar kennis (figuur 2), vaardigheden (figuur 3) en probleemoplossen (figuur 4). De verhouding in de toets tussen deze onderdelen is bij ons 1 : 3 : 4.

Kennisvragen

1p 1 Hoeveel dimensies heeft een vierkant?

Zie de balk hiernaast

1p 2 Hoeveel ribben heeft de balk

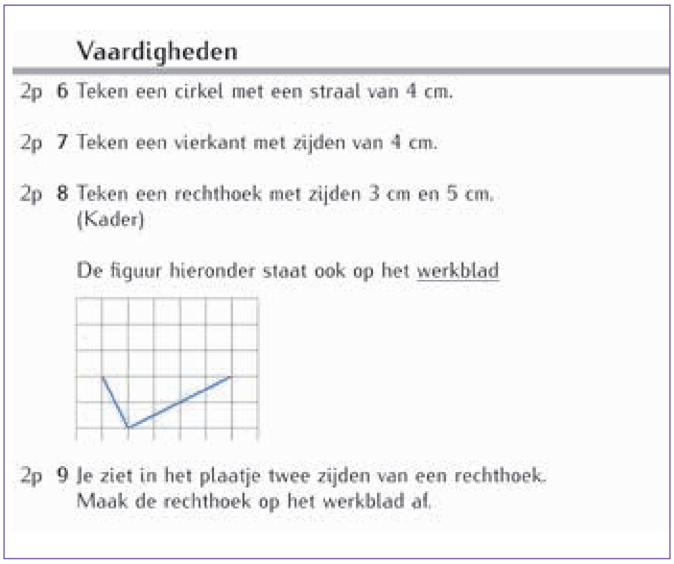


1p 3 Hoeveel platte vlakken heeft een cilinder?

figuur 2 Kennisvragen uit een kader mavo toets in klas 1

	Hoofdstuk 1: Tabellen en grafieken		
38 18-09	Absoluut en relatief Percentages en verhoudingen (Groei)factoren	Rekenen met procenten: V1, V2, V3, V4, V5, 2, 4 5, 6, 7 Rekenen met verhoudingen: 13, 14, 15	3b, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19 20
39 25-09	Wetenschappelijke notatie Eenheden van lengte, oppervlakte en inhoud	Berekeningen invoeren op de GR: 22, 23, 24, 25 Omrekenen van eenheden: 29, 31 Rekenen met tijd, afstand en snelheid: 35, 36	28, 32, 33, 34, 37, 38, 39

figuur 1 Planner 4 havo wiskunde A bij Getal & Ruimte editie 12



Vaardigheden

2p 6 Teken een cirkel met een straal van 4 cm.

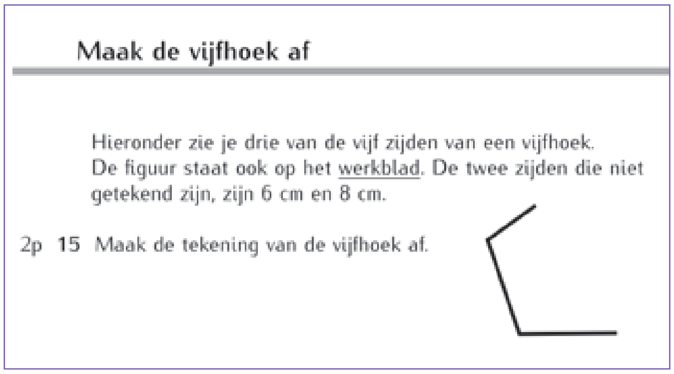
2p 7 Teken een vierkant met zijden van 4 cm.

2p 8 Teken een rechthoek met zijden 3 cm en 5 cm.
(Kader)

De figuur hieronder staat ook op het werkblad

2p 9 Je ziet in het plaatje twee zijden van een rechthoek.
Maak de rechthoek op het werkblad af.

figuur 3 Vaardigheidsvragen uit een kader mavo toets in klas 1



Maak de vijfhoek af

Hieronder zie je drie van de vijf zijden van een vijfhoek.
De figuur staat ook op het werkblad. De twee zijden die niet getekend zijn, zijn 6 cm en 8 cm.

2p 15 Maak de tekening van de vijfhoek af.

figuur 4: Probleemoplosvraag uit een kader mavo toets in klas 1

Deze toets wordt ingezet als summatieve toets voor de wiskunde-inhoud. Als de toets is afgenomen en beoordeeld, gaat het onderwerp even de ijskast in om pas later in het jaar of in het volgend jaar weer terug te komen. Dezelfde toets wordt echter ook formatief ingezet. Leerlingen krijgen namelijk naast een cijfer ook drie percentages. Deze percentages geven aan hoeveel procent van de punten een leerling behaald heeft op respectievelijk kennis, vaardigheden en probleemoplossen. Deze feedback kunnen leerlingen gebruiken om hun leerproces richting de volgende toets beter vorm te geven.

In het nu volgende deel van dit artikel zal ik ingaan op hoe elk van de drie onderdelen in de les wordt aangeboden bij de eerste kennismaking, hoe leerlingen kunnen vaststellen of ze de doelen behaald hebben en wat leerlingen kunnen doen als blijkt dat ze de doelen nog niet behaald hebben.

Kennis

Kennis breng ik aan door een script te schrijven met een aantal vragen uit het boek die ik eventueel aanpas, zodat alle relevante aspecten van een nieuw concept aan de orde komen. Bij het onderwerp differentiequotiënt (gemiddelde verandering) is het bijvoorbeeld belangrijk dat je de leerlingen een gemiddelde verandering laat berekenen, maar ook een verbindingslijnstukje laat tekenen om de link te leggen tussen de richtingscoëfficiënt van een lijn en de gemiddelde verandering. Ik laat de leerlingen deze opgaven maken op verticale whiteboards, zodat ze bij anderen kunnen zien of hun antwoord overeenkomt met de poging van anderen. Daarnaast kan ik zelf zien of elk groepje van drie (of twee als dat nodig is) het begrepen heeft. Om zeker te weten dat iedereen in het groepje het dan ook snapt is het wel nodig dat leerlingen kritisch zijn. Binnen het groepje moeten ze ervoor zorgen dat als er een antwoord staat, ze ook allemaal begrijpen wat er staat en ze mogen bij andere groepjes kijken voor ideeën, maar ze moeten niet alleen de antwoorden overschrijven. De manier van werken staat beschreven *in Building Thinking Classrooms*.[1]

Differentiëer $f(x) = \frac{7}{(3x+1)^2}$

A $f'(x) = -42(3x+1)^{-1}$

B $f'(x) = -42(3x+1)^{-3}$

C $f'(x) = -14(3x+1)^{-3}$

D $f'(x) = 7(3x+1)^{-2}$

figuur 5 Diagnostische vraag van diagnostischevragen.nl

>

In lessen later in het leerproces kun je diagnostische vragen inzetten, zoals beschreven in *Volgens Barton* van Craig Barton.[2] Zie figuur 5 voor een voorbeeld van de site *diagnostischevragen.nl*. Barton beschrijft dat je elke les begint met een kleine selectie van diagnostische vragen, die niet per se tot de toetsstof behoren en elke vraag in 10 seconden laat beantwoorden. Daar zou ik dan in ieder geval ook elke keer twee vragen bij stoppen die passen bij het onderwerp waar we op dat moment mee bezig zijn.

Vaardigheden

Vaardigheidsdoelen leer ik aan door leerlingen wederom op verticale whiteboards te laten werken, zodat ik kan zien of leerlingen de vaardigheden in hun groepje van drie daadwerkelijk kunnen uitvoeren. Als leerlingen de eerste keer in een groepje hebben laten zien dat ze de vaardigheid met hun groepje kunnen uitvoeren, krijgen ze een set opgaven die ze in de les of thuis kunnen maken om hun begrip te toetsen. Ze krijgen hierbij ook meteen de antwoorden, zodat ze zelf vast kunnen stellen of ze de vaardigheid beheersen.

Tot zo ver het aanleren van nieuwe vaardigheden. Enige tijd later volgen lessen (aangevuld met tijd thuis, als het nodig is) waarin leerlingen werken aan een blad met opgaven, die ze formatief kunnen inzetten. Vergelijk het blad uit figuur 6 met de planner uit figuur 1. De namen van de vaardigheden op de planner staan ook op het formatieve opgavenblad. Op dit blad houden leerlingen door codes in de vakjes te schrijven bij op welke manier ze die opgave gemaakt hebben.

De codes die leerlingen kunnen gebruiken zijn ✓ (in mijn eentje gelukt), *S* (alleen een slordigheidsfoutje gemaakt), *G* (in een groepje gelukt), *H* (met hulp gelukt), *X* (niet gelukt) en *N* (niet aan kunnen beginnen). Leerlingen moeten proberen om in elke rij het meest rechter vakje te voorzien van twee vinkjes achter elkaar of een *G* en een vinkje achter elkaar. Die twee positieve beoordelingen moeten wel met enige tijd ertussen gescoord worden en ze moeten niet vlak ervoor uitleg gehad hebben.

Probleemoplossend vermogen

Het probleemoplossend vermogen is het meest ingewikkeld aan te leren. Bij kennis- en vaardigheidsdoelen kun je vaststellen of alle doelen behaald zijn. Bij kennis heb je daar al veel vragen voor nodig om alle aspecten van het concept voldoende te hebben belicht, maar zeker bij vaardigheden is het redelijk overzichtelijk. Bij probleemoplossen ligt het een stuk ingewikkelder. Het leren probleemoplossen kun je doen door als didactiek *teaching through problemsolving* (TTP) te gebruiken of *building thinking classrooms* (BTC). Het voert te ver om hier in dit artikel op in te gaan. Bottom line is dat leerlingen de nieuwe kennis opdoen door zelf al probleemoplossend bezig te zijn. Als de leerlingen de nieuwe concepten met bijbehorende vaardigheden hebben leren kennen en deze in de vingers hebben, kun je het leerproces bij dit onderwerp afronden door ze één les in de week de *problemen* uit de methode voor te leggen. Als ik het heb over problemen, doel ik op de opgaven die niet een routinematige manier van oplossen vragen, maar waarbij leerlingen echt moeten nadenken over welke stukjes

			
Rekenen met procenten	Bereken 12% van 760. Bereken hoeveel % 24 van 130 is. Een hoeveelheid neemt af van 120 naar 75. Bereken de procentuele afname.	Een hoeveelheid van 20 000 neemt met 0,03% af. Bereken de nieuwe hoeveelheid. Een hoeveelheid neemt toe van 120 naar 600. Bereken de procentuele toename.	Een hoeveelheid neemt toe met 13% tot 170. Wat was de hoeveelheid voor de toename?
Rekenen met verhoudingen	In een klas is de verhouding voetballers en niet-voetballers 2 : 5. Bereken hoeveel van de 28 leerlingen voetballen.	Een grote partij fruit bestaat uit appels, peren en pruimen. De soorten zijn qua gewicht verdeeld in de verhouding 3 : 4 : 5. Er is 120 kg peren. Hoeveel kg appels zijn er?	
Omrekenen van eenheden	5,2 dm = ... dam 3m^3 = ... cm^3	3 cl = ... hl 2ha = ... are	4,2 cl = ... mm^3 250ha = ... km^2

figuur 6 Rubric met vaardigheden

kennis en vaardigheden ze met elkaar combineren. Dit doe ik dan weer in groepjes van drie leerlingen op de whiteboards, zodat ze met elkaar kunnen bespreken hoe ze het het beste kunnen aanpakken. Op die manier zien ze meerdere routes naar het eindantwoord en vergroten ze hun vermogen om te kiezen uit de verschillende oplossingsstrategieën.

"Formatief handelen gaat om het veranderen van de mindset van docenten en leerlingen."

Evaluatie van het leerproces

Eerder noemde ik de drie percentages die een leerling naast het cijfer nog scoort op de toets. Deze percentages kunnen de leerling zicht geven op hoe het leerproces aangepast kan worden. Scoort een leerling slecht op kennis, dan moet de leerling zich meer verdiepen in waarom iets werkt en niet alleen het trucje kunnen uitvoeren. Dit betekent vaak dat er meer vragen in de les gesteld moeten worden en dat er een actievere bijdrage geleverd moet worden tijdens het aanbrengen van nieuwe kennis.
Als een leerling slecht scoort op vaardigheden, dan zal de leerling op tijd thuis moeten checken of de vaardigheden beheerst worden om er eventueel in de les vragen over te stellen en daarna de vaardigheden verder in te oefenen.
Als het bij probleemoplossen misgaat en kennis en vaardigheden kunnen ook een stuk beter, dan ligt het startpunt bij kennis en vaardigheden. Als juist kennis en vaardigheden goed gaan, kan de leerlingen daar misschien iets minder tijd in steken en meer aan de slag gaan met de probleemoplosopgaven. Het zou goed zijn om dan eens te kijken hoe de leerlingen met de uitwerkingen omgaat en welke rol de leerling in de les kiest op het moment dat er aan problemen gewerkt wordt.

Zelf aan de slag met de sectie

Binnen onze sectie werken we tijdens sectievergaderingen (die eigenlijk meer werkmiddagen zijn) continu aan het maken van materialen zoals hierboven genoemd. De regeldingetjes zijn verplaatst naar de wandelgangen en appgroepen. Als je met de sectie een slag wilt maken op dit vlak is het noodzakelijk dat je dit gezamenlijk aanpakt. Uiteraard kun je ook zelf wel een paar elementen aanpakken, maar dat is lang niet zo effectief als wanneer je dat samen doet.

Mindset in plaats van werkvorm

Wat ik met name heb geprobeerd duidelijk te maken is dat formatief handelen niet gaat om het implementeren van een aantal werkvormpjes, zoals exit-tickets, diagnostische vragen of dergelijke. Het gaat om de mindset die leerlingen en docent moeten veranderen. Weg van het vullen van het schrift (als doel op zich) en richting het voortdurend checken of de doelen behaald zijn en bijsturen als blijkt dat dit niet het geval is. Hierbij moet je vermijden dat je je als docent een hele administratie op de hals haalt.
Mocht je willen sparren over dit onderwerp of graag materialen willen zien, die wij gebruiken, laat het dan vooral weten.

De zes delen van de serie Formatief handelen in de wiskundeles zijn gebundeld tot één pdf.

vakbladeuclides.nl/993formatief_handelen

Noten

[1] Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms*. Sage Publications Inc.
[2] Barton, C. (2019). *Volgens Barton*. Uitgeverij Phronese.

Over de auteur

Maarten Müller is werkzaam als eerstegraads docent wiskunde aan het Marianum in Groenlo en verzorgt scholingen aan docenten of secties.
E-mailadres: *m.muller@marianum.nl*