



EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAAR

Wat bedoelen ze toch met... misconcepties?

Nieuwe examenprogramma's havo en vwo

Bèta-activiteiten voor meisjes

Een volledig formatieve aanpak



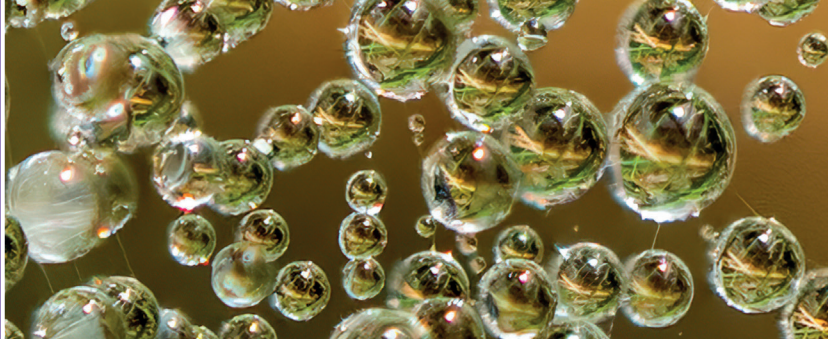
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

NR. 3

JAARGANG 99 DECEMBER 2023

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 99 NR 3



IN DIT NUMMER

WAT BEDOELEN ZE TOCH MET... MISCONCEPTIES (1)

Jeanine Daems, Theo van den Bogaart

4

WISKUNDE IN WORDING: NIEUWE EXAMENPROGRAMMA'S HAVO EN VWO

Bea Ros

8

NINJA-PADEN IN JAPANESE DRIEHOEKEN BIJ DE IMO

Hylke Hoogeveen,
Mads Kok

12



DE PARABOOL OP SCHOOL (3)

Martin Kindt

18



ROEST RUST (NIET) DRIE

Ab van der Roest

23

BOEKBESPREKING ZEBRA 65: FILOSOFIE VAN DE WISKUNDIGE PRAKTIJK

Bert Zwaneveld

24

EEN NOMOGRAM VOOR KWADRATISCHE VERGELIJKINGEN

Jeroen Spandaw

26

BOEKBESPREKING BETER DENKEN

Ab van der Roest

28

FORMATIEF HANDELEN IN DE WISKUNDELES 6: EEN VOLLEDIG FORMATIEVE AANPAK

Maarten Müller

32

HET FIZIER GERICHT OP... BËTA-ACTIVITEITEN VOOR MEISJES

Monica Wijers,
Sanne Korte,
Marjolein Gelauff,
Vincent Jonker

36



Inquiry

WIS EN WAARACHTIG

38

Afbeelding voorkant: 'Dauwdruppeltjes op een spinnenweb in het gras'.
Fotograaf: Eric Kruis, docent wiskunde Fontys Lerarenopleiding
Tilburg en int-Oelbert Gymnasium, Oosterhout

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

MACHTEN IN DE BRUGKLAS

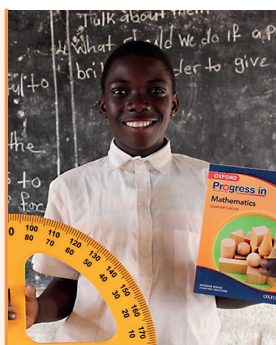
Sjef van Dongen

40

WERELDWISKUNDE FONDS ALFMARY COMMUNITY SCHOOL IN ZAMBIA

Monica Woldinga

44



PUZZEL

Esther Bod

45

SERVICEPAGINA

46

X-je: Iris

Op een maandag, de eerste van de maand, maakt 5 vwo aan het eind van de ochtend een proefwerk. Mooi weer, dus de ramen staan open. Om twaalf uur loeien de alarmsirenes. Direct daarna wil Iris weten hoeveel tijd ze nog heeft en vraagt 'hoe laat is het?'

Een X-je is een korte anekdote van een voorval op school. Heb je iets leuks meegemaakt in de les? Stuur je tekst van max 100 woorden op naar l.coffeng@nvvw.nl.

Het eerste X-je over Iris is van Ernst Lambeck.



Kort vooraf

Joop van Dormolen, erelid van onze vereniging, is op 27 september jl op 94-jarige leeftijd overleden. Velen van ons zijn didactisch 'opgegroeid' met zijn standaardwerk *Didactiek van de wiskunde* uit 1974 of hebben zijn naam voorbij horen komen in vakdidactiekbijeenkomsten als bedenker van het OSAEV-model.

Joop heeft ongeveer 35 artikelen in *Euclides* gepubliceerd, zijn laatste bijdrage was de rubriek 'Vijf vragen aan...' dat eindigt met een advies aan ons: *Ik wil graag herhalen wat ik van Freudenthal, een van mijn grote leermeesters, geleerd heb: 'Luister naar je leerlingen en als je daarmee klaar bent, luister dan nog meer.' Van hen leer je. Niet wiskunde, maar (bijna nog belangrijker) hóe leert iemand; wat gaat er in iemand om die iets wil leren; en wat in iemand die iets niet wil leren...*

We hebben Bert Zwaneveld en Anne van Streun gevraagd om Joop te herdenken in twee artikelen die in *Euclides* 99-4 zullen verschijnen.

De kerstvakantie staat voor de deur. Tijd om te puzzelen: naast de Olympiadepuzzel 'Kerstboom' hebben we een extra puzzel van Alex van den Brandhof, ter gelegenheid van het verschijnen van zijn boek *De kabouter-formule*.

Misschien is er tijd om de mooie gesprekken met je leerlingen van het afgelopen jaar nog eens actief te herinneren: wie weet inspireren die je tot het schrijven van een X-je. Zie het eerste X-je in de kolom hiernaast. X-je is een nieuwe rubriek, geïnspireerd op de Ikjes in *NRC Handelsblad*.

Mede namens de hele redactie:
fijne feestdagen!

Tom Goris

Wat bedoelen ze toch met... misconcepties (1)

Bij hardnekkige fouten van leerlingen wordt vaak naar misconcepties verwezen. Misconcepties kunnen optreden bij alle onderwerpen en in alle leerjaren. Misconcepties kunnen het leren van nieuwe wiskunde in de weg staan en om die reden is het interessant om er eens wat beter naar te kijken. Want wat bedoelt men dan eigenlijk met de term 'misconceptie'? En wanneer zit achter een fout een misconceptie? In dit artikel gaan we daarop in. In deel 2 kijken we naar wat er aan misconcepties te doen is.

Inleiding

In een tweede klas vwo vond een les plaats over het herleiden van letterbreuken. Leerlingen werd bijvoorbeeld gevraagd om $\frac{5}{2a} - \frac{1}{2b}$ als één breuk te schrijven. De les werd gefilmd, met het doel tot voorbeeld te dienen in lerarenopleidingen, en om die reden was de les zorgvuldig voorbereid door een aantal doorgewinterde docenten. Een van de dingen die zij probeerden te voorkomen was dat leerlingen een niet-bestaande rekenregel toepasten zoals $\frac{5}{2a} - \frac{1}{2b} = \frac{4}{2a-2b}$. Dat doel werd glansrijk behaald: geen enkele leerling maakte dit soort fouten. Al met al was het dus een geslaagde les.

Maar toen na de les interviews met leerlingen werden gehouden, bleken er toch dingen aan de hand te zijn die geen van de docenten had voorzien. Zo gaf een aantal leerlingen aan de stof toch niet goed te hebben begrepen. Deze leerlingen hadden weliswaar een correcte afleiding opgeschreven, $\frac{5}{2a} - \frac{1}{2b} = \frac{10b-2a}{4ab}$, maar omdat in de feedback duidelijk was geworden dat ze in teller en noemer nog een factor 2 konden wegdelen, meenden ze toch de opgave fout te hebben. Kennelijk hadden de leerlingen een sterk zwart-wit, resultaatgericht beeld van wiskunde: er is één goed antwoord en al het andere is fout. Maar er speelden nog veel fundamentele dingen. In de les was de leerlingen meermaals gezegd dat ze hun antwoord altijd konden controleren door een getal in te vullen, iets dat overigens niemand deed. In een nagesprek met een aantal leerlingen werd gevraagd hoe dat controleren eigenlijk moet. Na enige tijd kwam daar een moeizaam antwoord uit: "Je vervangt bijvoorbeeld iedere a en b door een getal. Vervolgens reken je het uit. En daarna vervang je die getallen weer door a en b ." Het werd duidelijk dat de leerlingen verkeerd begrepen hoe zo'n controle wordt uitgevoerd en misschien niet eens begrepen wat die letters betekenen! Op de fouten zoals

hierboven zijn beschreven, wordt vaak het etiket 'misconceptie' geplakt. We zullen zien dat het de vraag is of dat altijd terecht is, maar dat een goede diagnose wel belangrijk is om te bepalen hoe je als docent omgaat met dit soort problemen.

Misconcepties

In de jaren '60 van de vorige eeuw begonnen wetenschappers op een andere manier naar leren te kijken.^[1]

Voorheen, in het behaviorisme, werd een leerling beschouwd als een 'black box', met voor het onderwijs veel nadruk op oefenen als gevolg. Nu ging men echter modellen maken over wat er tijdens het leren precies in het hoofd van een leerling gebeurt, en probeerde men daar in het onderwijs ook iets mee te doen. Met name door het baanbrekende onderzoek van Piaget ontdekte men dat leerlingen vaak heel andere ideeën hebben over hoe de wereld in elkaar zit dan experts. Men ging de term 'misconceptie' gebruiken.

Misconcepties worden met name in de didactiek van natuurwetenschappen uitgebreid bestudeerd (zie^[2] voor een hele lijst). Ze spelen daar een belangrijke rol, omdat woorden als 'energie' of 'warmte' in het dagelijks taalgebruik heel anders worden gebruikt dan in de schoolvakken. Maar ook in de wiskundendidactiek is aandacht voor misconcepties.^[3]

Een misconceptie is een denkbeeld dat leerlingen hebben dat leidt tot fouten. Dat 'mis' suggereert dat het beeld van leerlingen verkeerd is en veel mensen vinden dat arrogant klinken.^[4] Het denkbeeld van een leerling is namelijk vaak op iets redelijks gebaseerd, en kan de leerling in heel veel situaties juist wel helpen. Denk maar aan het denkbeeld dat de wortel van een negatief getal niet bestaat. Sommigen geven de voorkeur aan de term 'alternatief denkbeeld'. Een ander onderscheid dat vaak

wordt gemaakt is tussen 'misconceptie' en 'preconceptie'. Misconcepties worden dan veroorzaakt door het onderwijs, terwijl preconcepties overtuigingen betreffen die leerlingen vanuit hun sociale en culturele achtergrond meekrijgen. We zullen in deze tekst deze nuance niet maken en gewoon de term misconceptie hanteren.

"Misconceptie is vermeend begrip van een wiskundig onderwerp en leidt systematisch tot fouten."

Misconcepties versus fouten

Het is belangrijk om een misconceptie te onderscheiden van een fout, omdat je er als docent anders op moet reageren. Misconcepties kunnen leiden tot fouten, maar een fout is niet altijd te wijten aan een misconceptie. Misconceptie is vermeend begrip van een wiskundig onderwerp en leidt systematisch tot fouten. Niet alle fouten ontstaan op die manier. De meeste fouten worden gemaakt vanwege een vergissing, gebrek aan concentratie of gebrek aan feitenkennis. Als een leerling een rekenregel verkeerd toepast, zoals bij het aftrekken van breuken in het voorbeeld, zou het bijvoorbeeld kunnen dat hij uit onmacht maar wat doet, of gewoon een vergissing maakt; dat leidt tot een fout, maar er is geen sprake van een misconceptie. Dat het belangrijk is om als docent de oorzaak van een fout te achterhalen, blijkt wel uit de diversiteit aan reacties die je kunt geven. Bij een vergissing wijs je de leerling erop en zegt hij waarschijnlijk iets als "o ja, dom van mij"; bij een echte misconceptie zul je veel dieper moeten graven.

Cognitieve schema's

Mensen hebben een sterke behoefte in actie te komen als ze een opdracht krijgen. Dan kunnen ze bijvoorbeeld correcte ideeën gaan toepassen in een situatie waar ze niet van toepassing zijn. Bijvoorbeeld als een leerling gevraagd wordt op te lossen $\frac{1}{a} + \frac{1}{7} = \frac{1}{4}$ en besluit hier $a + 7 = 4$ van te maken, want dat werkt immers zo wanneer teller en noemer zouden zijn omgedraaid. Of als een leerling breuken gelijknamig gaat maken bij een vermenigvuldiging, omdat dat bij optellen zo moet. Als de leerling niet snel op deze foute werkwijze wordt gewezen, bekijft dit denkbeeld en is een misconceptie geboren.^[5] Piaget, en later Anderson, modelleerden kennis die leerlingen hebben met cognitieve schema's.^[6] Zo'n schema geeft aan hoe verschillende concepten, ideeën en procedures in de gedachten van de leerling met elkaar samen-

hangen: bijvoorbeeld dat kwadratische vergelijkingen te maken hebben met variabelen, parabolen en de abc-formule; en via die laatste met wortels, et cetera. 'Een goed begrip van iets hebben' betekent dan dat iemand veel verbindingen in het cognitieve schema heeft én dat die verbindingen kloppen. Een misconceptie is in dit model een verkeerde of incomplete verbinding, bijvoorbeeld het beeld dat een kwadratische vergelijking altijd een oplossing heeft.

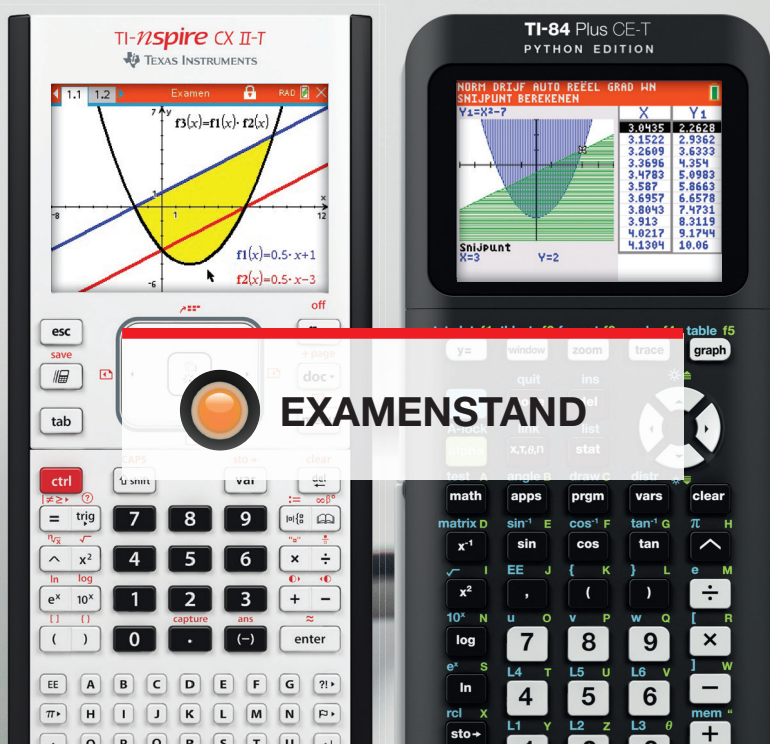
Leren wordt volgens de theorie van Piaget en Anderson gezien als de ontwikkeling van cognitieve schema's. Er zijn twee belangrijke manieren^[1] waarop een cognitief schema zich ontwikkelt: door het toevoegen van een verbinding (*assimilatie*) en door het aanpassen van verbindingen (*accommodatie*).

In dat laatste gaat het om een aanpassing van misconcepten. De uitdaging voor het onderwijs is dat accommodatie moeite kost. Als mensen bepaalde ideeën hebben, kost het hun moeite die aan te passen. Alleen vertellen dat iets niet correct is, werkt vaak niet. Er moet dissonantie, of een cognitief conflict, worden gecreëerd. Dat gebeurt als mensen doorkrijgen dat de ideeën die ze hebben niet goed met elkaar samenhangen. Dat cognitieve conflict is het sterkst in een situatie waar leerlingen geheel overtuigd zijn van hun verwachting en niet de oorzaak van verschillen kunnen wijten aan andere factoren. Dit heet het hypercorrectie-effect.^[7] Hoe vaker een misconceptie optreedt, hoe steviger die wordt verankerd en hoe lastiger het is om die te repareren. Het is dus belangrijk misconcepties direct te adresseren. In klassikale situaties is dat soms lastig, omdat de misconceptie van de ene leerling niet bij andere leerlingen hoeft op te treden. Als je dan de fout van een leerling klassikaal bespreekt, kan dat er soms toe leiden dat andere leerlingen in de war raken of dat bij hen zelfs nieuwe misconcepties ontstaan.

Soorten misconcepties

Een aantal hardnekkige misconcepties in de wiskunde komt uit het dagelijks leven. Wie heeft niet een familielid wel eens horen zeggen dat hij nu wel veel kans zal maken in de loterij, omdat hij de afgelopen keren steeds niet in de prijzen is gevallen? Deze uitspraak berust op de foute veronderstelling dat de trekkingen van de loterij afhankelijk van kansprocessen zijn. In de kansrekening en statistiek zijn veel meer voorbeelden te vinden: een negentigjarige roker die vindt dat zijn hoge leeftijd aantoont dat roken helemaal niet zo ongezond is, of de verwarring tussen correlatie en causaliteit. Beroemd is een onderzoek van Gigerenzer onder gynaecologen, waaruit bleek dat ze >

Op naar het examen met deze grafische rekenmachines



Deze grafische rekenmachines zijn **door het CvTE toegestaan bij de wiskunde-examens havo t/m 2025 en vwo t/m 2026:**

- » TI-84 Plus CE-T / TI-84 Plus CE-T Python Edition
- » TI-Nspire™ CX II-T / TI-Nspire™ CX II-T CAS
- » TI-Nspire™ CX

Leerlingen gaan goed voorbereid hun examen in met de uitleg over de examenstand!

Goedgekeurd

Door CvTE toegestaan bij examens 2023-2026

education.ti.com/nl/examenstand

verkeerde interpretaties gaven van resultaten van diagnostisch onderzoek. Het betreft de paradox van het vals positieve^[8]: bij een positieve uitslag van een test op een zeldzame ziekte, is de kans dat iemand niet ziek is groter dan dat de test gelijk heeft, ook al is de test heel goed. Een ander voorbeeld van een wiskundige misconceptie die je in het dagelijks leven terugvindt, betreft percentages. Mensen hebben de neiging te denken dat als een prijs met 50% gestegen is en het jaar erna met 20%, hij in totaal met 70% is gestegen, terwijl het eigenlijk meer is: $100 \cdot 1,5 \cdot 1,2 = 180$, dus een stijging van 80%. En een winkel adverteert bijvoorbeeld dat je bij hen de btw (van 21%) terugkrijgt. Ze doen dat door 21% van de prijs af te trekken. De winkel snijdt zichzelf daarmee in de vingers, want 21% ergens bij optellen en van het resultaat 21% afhalen zijn geen tegenovergestelde acties ($100 \cdot 1,21 = 121$, maar $121 \cdot 0,79 \approx 96 \neq 100$). Dit is een bijzonder geval van de *lineariteitsillusie*: de misconceptie dat natuurlijke processen lineair, of zelfs recht evenredig, zijn: als één appeltaart een half uur in de oven moet, moeten twee appeltaarten dan een uur in de oven? Of wat nog vaker voorkomt: als een afbeelding met een factor 3 vergroot wordt, dan wordt de oppervlakte ook drie keer zo groot...^[9]

Soms komt een misconceptie voort uit een *verkeerde* of *vage definitie*. In de krant wordt een priemgetal vaak beschreven als 'een getal dat enkel deelbaar is door zichzelf en door 1'; op basis hiervan is het niet duidelijk dat 1 geen priemgetal is. Misconcepties over getallen zijn hardnekkig: is $\sqrt{3}$ of $\log(3)$ een getal of enkel een actie (knop op de rekenmachine) die een getal oplevert? En zijn gehele getallen ook breuken? Zijn alle getallen positief of negatief? Zo ja, wat is nul dan?

Soms is de *naamgeving* ronduit onhandig: een 'kromme' kan in de wiskunde best recht zijn, een 'lijn' is dan weer nooit krom. In het Duits heet een even getal een 'recht getal' (*gerade Nummer*). Er hebben zich situaties voorgedaan waarin leerlingen 2 niet als even getal aanwezen en 7 wel: het getal 7 schrijf je namelijk met rechte streepjes, het getal 2 niet (het duurde even voor de wiskundeleraar zijn leerlingen begreep...)

In de volgende *Euclides* bespreken we nog meer soorten misconcepties en gaan we in op de aanpak: hoe voorkom je, signaleer je en 'genees' je misconcepties.

We bedanken onze collega's Rieke van Bommel, Paul Drijvers, Aad Monquil en Irene van Stiphout voor hun waardevolle reacties op de conceptversie. Dit artikel is geschreven vanuit Samenwerkingsgroep Lerarenopleidingen Wiskunde tweedegraads (SLW).

Noten

- [1] Van Ast, M., Van Bommel, R. & Berg, B. (2020). *Een meester in leren*. Uitgeverij: Een meester in leren.
- [2] Duit, R. (2009). *Bibliography – students' and teachers' conceptions and science education*. IPN. <https://archiv.ipn.uni-kiel.de/stcse>
- [3] Ay, Y. (2017). A review of research on the misconceptions in mathematics education. In *Education Research Highlights in Mathematics. Science and Technology 2017* (pp. 21–31). Isres https://www.isres.org/books/chapters/Education_Research_Highlights_in_Mathematics_Science_and_Technology_2017_3_21-12-2017.pdf
- [4] Gilbert, J. & Watts, D. (1983). Concepts, Misconceptions and Alternative Conceptions: Changing Perspectives in Science Education. *Studies in Science Education*, 10(1), 61–98.
- [5] Ojose, B. (2015). *Common misconceptions in mathematics. Strategies to correct them*. University Press of America.
- [6] Drijvers, P., Van Streun, A. & Zwaneveld, B. (2012). *Handboek wiskundendidactiek*. Epsilon.
- [7] Butterfield, B., & Metcalfe, J. (2001). Errors committed with high confidence are hypercorrected. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 27(6), 1491–1494.
- [8] Madison, B. (2007). Mathematical Proficiency for Citizenship. In Schoenfeld, A. (red.), *Assessing Mathematical Proficiency* (blz. 122). Cambridge University Press.
- [9] De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: an in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 311–334.

Over de auteurs

Jeanine Daems en Theo van den Bogaart zijn beiden als lerarenopleider wiskunde verbonden aan de Hogeschool Utrecht. E-mailadressen: theo.vandenbogaart@hu.nl, jeanine.daems@hu.nl

Wiskunde in wording: nieuwe examenprogramma's havo en vwo

Wiskunde A, B, C en D maken straks plaats voor nieuwe wiskundevakken die beter aansluiten bij de profielen in de bovenbouw van havo en vwo. Een vakvernieuwingscommissie met leraren, vak- en curriculumexperts werkt momenteel de inhoud van elk vak uit. Hierbij staan ze voor mooie, maar ook moeilijke keuzes.

Inleiding

Op dit moment kennen we in de bovenbouw van havo en vwo vier smaken wiskunde: A, B, C en D. Handig, eentje voor elk profiel, denkt de buitenstaander. Maar zo simpel is het niet. Zo zijn wiskunde B en C inderdaad gekoppeld aan een profiel (B voor de Natuurprofielen en C voor Cultuur & Maatschappij), maar wiskunde D is een keuzevak voor leerlingen met het profiel Natuur & Techniek. En wiskunde A speelt een dubbelrol: het moet zowel het profiel Natuur & Gezondheid als Economie & Maatschappij bedienen.

Die indeling begon te wringen. Behalve die onhandige dubbelrol was een ander knelpunt dat weinig leerlingen wiskunde D kozen. Verder was het vakgenoten al jaren een doorn in het oog dat havoleerlingen met het C&M-profiel geen wiskunde hoefden te volgen. Want om je in de maatschappij te kunnen redden heb je basale wiskundige vaardigheden nodig, reden waarom het ministerie van OCW wiskunde als basisvaardigheid heeft benoemd. Om dit soort knelpunten te tackelen is in voorjaar 2022 een nieuwe vakkenstructuur gepresenteerd: per profiel komt er één verplicht wiskundevak. Dat zijn Wiskunde Maatschappij (voor profiel C&M), Wiskunde Maatschappij+ (E&M), Wiskunde Natuur (N&G) en Wiskunde Natuur+ (N&T).

Uitgangspunten

Die nieuwe vakkenstructuur was stap één in de herziening van de examenprogramma's. Stap twee is vlees op de botten aanbrengen. Dat is het werk van de in juni 2022 gestarte vakvernieuwingscommissie. Een groep wiskundeleraars, vak- en curriculumexperts en een procesregisseur buigen zich over de inhoudelijke invulling van elk wiskundevak. Leidende vraag daarbij is: welke kennis en vaardigheden hebben leerlingen met de verschillende profielen nodig?

Wiskundeleraar en commissielid Marianne Laponder geeft een voorbeeld. 'Op dit moment zijn vwo-leerlingen met een C&M-profiel nog heel veel bezig met algebraïsche vaardigheden, zoals het oplossen van gecompliceerde vergelijkingen. Je vraagt je af: waarom eigenlijk? Dat is voor deze leerlingen helemaal niet relevant. Een ander voorbeeld is het onderdeel sinusoiden in wiskunde A. Heel nuttig voor leerlingen met natuurkunde in hun profiel, maar waarom zou je dat E&M-leerlingen aanbieden?'



Marianne Laponder
fotograaf:
Barbra Verbij

Door de relevantie per profiel scherp in de gaten te houden, zullen leerlingen naar verwachting ook meer plezier aan wiskunde beleven. 'Het moet voor hen duidelijker worden waarom de lesstof nuttig is en wat ze er later aan hebben', licht procesregisseur Hildegard Montsma toe. 'Wiskunde reikt verder dan het wiskunde-lokaal', vult Laponder aan. 'Het speelt een rol in de wereld om je heen en dus moet je die wereld ook de klas in brengen.' Hopelijk leidt dat tot een positievere attitude tegenover wiskunde. Niet van: het is geen leuk vak of ik kan het toch niet. Maar: ik kan het leren en het helpt me om bepaalde problemen op te lossen.

Een ander uitgangspunt is dat de wiskundevakken tegemoetkomen aan burgerschapsdoelen. Je hebt wiskunde niet alleen nodig voor school en vervolgopleiding, maar ook om je te redden in de hedendaagse maatschappij. 'Als je in de krant leest dat zoveel procent van de Nederlanders x vindt of als je een grafiekje ziet, moet je daarmee uit de voeten kunnen', vertelt Montsma. 'Ze hoeven het niet altijd zelf te berekenen, maar ze moeten het wel kunnen duiden en snappen', vult Laponder aan. Een derde uitgangspunt is dat de examenprogramma's bij de tijd gebracht worden. Wiskunde als vakdiscipline verandert weliswaar niet wezenlijk, maar in het voortgezet onderwijs moet je vanwege maatschappelijke ontwikkelingen wel andere accenten leggen. Zo is kennis van statistiek en kansberekening belangrijker geworden. Over de hele linie stelt de commissie daarom meer ruimte voor deze onderdelen voor, waarbij de diepgang per profiel uiteraard wisselt.

En dan moet de vakvernieuwingscommissie bij het formuleren van eindtermen ook rekening houden met kansen-gelijkheid. Niet elke leerling heeft thuis bijvoorbeeld de beschikking over een computer om data te analyseren. Kan dat ook op een andere manier? En hoe zorg je dat taligheid geen obstakel wordt bij het maken van wiskunde-opgaven? 'Met dat soort zaken moeten en willen we in de eindtermen rekening houden', vertelt Montsma.

Puzzelstukjes

De vakvernieuwingscommissie werkt van globaal naar concreet en levert daarbij telkens tussenproducten op, zie ook het kader 'Meer over de actualisatie'. Laponder vergelijkt het met het maken van een puzzel die steeds gedetailleerder wordt: 'Ons eerste product, een karakteristiek van het vak wiskunde, was een puzzel van, zeg, vijftig stukjes. Nu we bezig zijn met het formuleren van concept-eindtermen is het een puzzel van zo'n duizend stukjes. Of beter gezegd, acht puzzels, voor elk vak op havo en vwo één.'

Elk tussenproduct wordt voorgelegd aan een advieskring. Leden van de advieskring vertegenwoordigen elk een achterban, zoals de Vereniging van Wiskundeleraars of, zoals Sep Thijssen, de universitaire opleidingen voor leerlingen met N-profielen (dus bèta en medisch). Hij merkte dat die achterban vooral zit te wachten op het concrete werk. 'Met het eerste tussenproduct over het wat en waarom van wiskunde kon niet iedereen uit de voeten. Ze wilden lijstjes zien met vakonderdelen en dachten 'waar is die commissie mee bezig?' Maar dat is echt pas een volgende stap, dus wij zeiden telkens weer: dat komt echt, nog even geduld.'

Want alvorens de concepteindtermen te kunnen maken moest de commissie veel zaken afwegen, zeker ook vanwege de nieuwe vakkenstructuur, en de nodige knopen doorhakken. Zo kun je onmogelijk alle wiskundeonderdelen aan bod laten komen. 'De vraag is dan: wil je dat iedere leerling alles een beetje aanraakt of liever een beperkt aantal onderdelen en dan goed?', vertelt Montsma. 'Wij hebben voor dat laatste gekozen.'

En daarna begint dus de grote puzzel: welke onderdelen zijn voor welke profielen zinvol? 'Elke wiskundeleraar heeft natuurlijk favoriete onderdelen, maar daar moeten we als commissielid afstand van nemen', vertelt Laponder. 'Het gaat er niet om wat wij leuk vinden, maar om wat leerlingen nodig hebben.'

Statistiek is zo'n onderdeel dat alle leerlingen nodig hebben; ze leven immers in een samenleving waarin grote hoeveelheden data steeds gebruikelijker zijn. 'De volgende vraag is dan 'hoe dan' en 'hoe diep', vertelt Montsma. 'En als je in de N en N+ wiskunde een flinke portie statistiek stopt, welke onderdelen schrap je daar dan? Want als je iets toevoegt, moet er iets anders uit, zodat we overladenheid voorkomen.'



Hildegard Montsma
fotograaf:
Barbra Verbij

Finetunen

Bij elk tussenproduct stuurt de commissie vragen mee naar de advieskring: Herkennen jullie onze karakteristiek of missen jullie iets? Kloppen de namen die we aan de verschillende subdomeinen geven? Moeten we wel of geen rekening houden met leerlingen die in plaats van het verplichte profielvak een ander wiskundevak willen kiezen? Doen de verschillen tussen havo en vwo recht aan de schoolsoorten? Enzovoort. De feedback vanuit de advieskring zorgt voor beter doortimmerde ontwerpen. Laponder geeft een voorbeeld: 'In onze eerste puzzels hadden we natuurlijke logaritmes geschrapt. Dat leidde tot enig wenkbrauwenfronsen bij de advieskring. Nu zit dit onderdeel er toch in, maar kleiner dan in de huidige wiskundevakken. Zo zijn we voortdurend aan het finetunen.'

>

De advieskring hielp ook om een andere knoop door te hakken: moet wiskunde vooral de andere schoolvakken bedienen of de vervolgoopleidingen? Dat laatste is nog niet zo eenvoudig. 'Je ziet verschillende belangen', vertelt Thijssen. 'Sommige mensen uit mijn achterban zeiden: onze eerstejaarsstudenten hebben de basisvaardigheden niet op orde, ze moeten in het voortgezet onderwijs veel meer rekenen. Maar het Koninklijk Wiskundig Genootschap hamert juist weer op het belang van inzicht.' Bovendien kunnen wij eerstejaars de benodigde vaardigheden ook zelf aanleren, kreeg de commissie terug van enkele vervolgoopleidingen. Sluit kortom vooral aan bij wat leerlingen voor de andere schoolvakken en in de samenleving nodig hebben. 'Voor wiskunde M+ betekent dat bijvoorbeeld dat je leerlingen wel leert hoe ze een afgeleide kunnen bepalen, want dat hebben ze bij economie nodig', licht Laponder toe. 'Maar je hoeft ze bij het differentiëren geen logaritmische en wortelfuncties voor te schotelen, want dat hebben ze pas later in het hbo nodig.'

Een volgende kwestie om te tackelen is welke onderdelen het beste passen bij het schoolexamen en welke voor het centraal schriftelijk examen. 'Dat is geen makkelijke puzzel', vertelt Montsma, 'We moeten zorgen voor een gelijkwaardige verdeling en vergelijkbare zwaarte. Dat is ook onze opdracht. Bovendien wil je onderdelen die bij elkaar horen graag bij elkaar houden. En neem een onderdeel als wiskundig modelleren. Als je wilt dat leerlingen alle stappen van de modelleercyclus uitvoeren, past dat niet in de drie uur examen in de gymzaal.'

Grafische rekenmachine

Een andere lastige knoop om door te hakken betreft de rol van ict en het gebruik van de grafische rekenmachine. 'We hebben als advieskring al een paar keer benadrukt: denk daar goed over na en schuif dat niet voor je uit', vertelt Thijssen. 'Want het is een kwestie waarover de achterban uitgesproken meningen heeft; van verbied ict en doe alles met de hand tot en met zet het vooral in.'

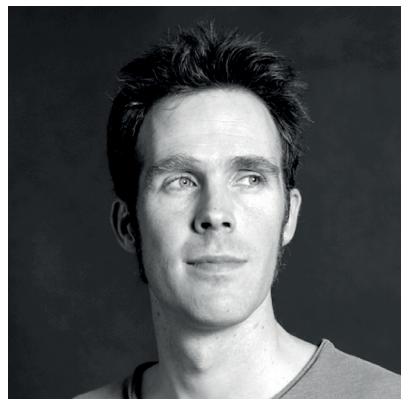
Montsma beaamt dit. 'De maatschappelijke discussie over het gebruik van ict zien we ook in de advieskring. Dat maakt ons er heel erg bewust van dat we daar toch echt iets over moeten zeggen.' Helemaal eruit zijn ze er nog niet. De grafische rekenmachine mag een achterhaald apparaat zijn en minder kunnen dan een computer, maar mag je er zomaar vanuit gaan dat elke leerling een pc of tablet heeft of daarmee aan de slag kan?

Als je wilt dat leerlingen kunnen omgaan met big data, is ict onontbeerlijk, stelt Laponder. 'Maar daarmee ben je er nog niet. Want hoeveel moeten leerlingen bijvoorbeeld weten van Excel? En hoort Excel bij wiskunde of moeten

leerlingen dat al kunnen?' Montsma vult aan: 'In hoeverre wil je dat leerlingen dingen handmatig kunnen of mogen ze het overlaten aan de computer? Dat antwoord zal per profiel verschillen. De ene groep leerlingen moet zelf een standaarddeviatie kunnen uitrekenen, de andere kan dat overlaten aan een spreadsheet. En bij die laatste groep is weer de vraag: mogen ze erop vertrouwen dat de computer het wel goed doet of moeten ze de uitkomst kunnen controleren?'

De namen van de nieuwe wiskundevakken roepen bij zowel de commissie als de advieskring vragen op. De voorgestelde namen drukken weliswaar goed uit dat er voor de natuur- en maatschappijprofielen een basis- en uitgebreidere variant is, maar de vraag is of de + niet een ongewenste associatie oproept van beter of hoger. 'Dat zou niet moeten', stelt Thijssen. 'N+ is niet beter of hoger dan N. Leerlingen moeten de wiskunde doen die bij hen past.'

Ook discussiëren ze wel over de vraag of een leerling een wiskundevak buiten het eigen profiel zou mogen kiezen, bijvoorbeeld wiskunde N binnen een M-profiel. En of je daar met de eindtermen op moet anticiperen of niet. 'We moeten het aantrekkelijk maken om bij je profiel te blijven', zegt Thijssen. 'Maar in die discussie zitten we nog volop.'



Sep Thijssen

Het ontwikkelproces is kortom nog in volle gang. Zomer 2024 zal de commissie de conceptexamenprogramma's inclusief toelichtingsdocument presenteren. Ondanks de soms ingewikkelde discussies verwachten Laponder, Montsma en Thijssen dat er straks acht voorstellen voor aantrekkelijke wiskundevakken liggen die beter aansluiten bij de havo- en vwo-profielen en de samenleving van nu. En ja, leraren zullen straks onderdelen missen en nieuwe onderdelen aantreffen. Kijk er met een open blik naar, wil Laponder al haar collega's adviseren. 'Misschien is het soms wennen. Maar het belang van leerlingen weegt zwaarder dan de voorkeuren van leraren.'

Meer over de actualisatie

De actualisatie van de examenprogramma's is voorjaar 2022 gestart voor Nederlands, moderne vreemde talen, wiskunde havo en vwo, natuurwetenschappelijke vakken en maatschappijleer. Inmiddels is ook gestart met de actualisatie van klassieke talen en Friese taal en cultuur. Per vak ontwikkelt een vakvernieuwingscommissie enkele (tussen)producten: een karakteristiek van het vak, een raamwerk met domeinen en subdomeinen, uitwerking van concepteindtermen en verdeling CE-SE. Voor wiskunde worden momenteel alleen de examenprogramma's havo en vwo geactualiseerd. Die voor vmbo zijn al geactualiseerd. Hier^[1] vind je meer informatie over de actualisatie. Door je aan te melden voor automatische updates blijf je op de hoogte van de vorderingen.

Met dank aan Marianne Laponder (wiskundeleraar en commissielid), Hildegard Montsma (procesregisseur) en Sep Thijssen (lid advieskring namens universitaire opleidingen) voor hun input.

Noten

[1] Meer informatie over de actualisatie is te vinden op:

www.actualisatie-examenprogrammas.nl/wiskunde

Over de auteur

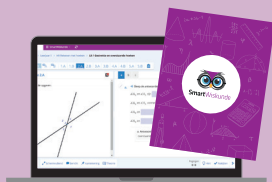
Bea Ros is neerlandica en zelfstandig (onderwijs) journalist. Ze is onder meer wetenschapsredacteur bij onderwijsvakblad *Didactief* en is auteur van *Leer ze rekenen* (TBU, 2022). Ze publiceert behalve over onderwijs over leesbevordering, (jeugd)literatuur en cultuureducatie.



SmartWiskunde

DÉ SLIMME BLENDED WISKUNDEMETHODE

- combinatie van boek en digitaal voor onderbouw vmbo basis, kgt en havo/vwo
- compact en compleet, opbouw in complexiteit
- herhaling, gemengde en verdiepende opgaven en toetsing
- grip op leren voor leerlingen: stapsgewijze hints en feedback
- grip op voortgang: inzicht in individuele leerprocessen en groepstrends



MEER WETEN

We sturen je graag een beoordelingsexemplaar met proeflicentie. Ga naar smartwiskunde.nl of scan de QR-code.

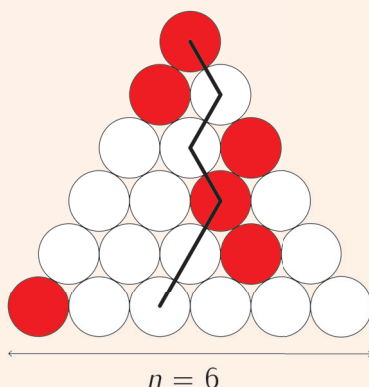


Ninja-paden in Japanse driehoeken bij de IMO

Van 6 tot 13 juli werd de Internationale Wiskunde Olympiade gehouden in Chiba, Japan. Deze wedstrijd bestaat uit twee dagen, en op elke dag hebben de deelnemers 4,5 uur de tijd om drie opgaven op te lossen. Er zaten maar liefst twee Nederlandse creaties in de wedstrijdpaper, waaronder opgave 5 van de hand van oud-deelnemers/-trainers Daniël Kroes en Merlijn Staps. Hieronder presenteren medaillewinnaars Mads en Hylke elk hun eigen aanpak van deze opgave over zogenaamde 'Japanse driehoeken'.

Opgave 5

Zij n een (strikt) positief geheel getal. Een *Japanse driehoek* bestaat uit $1 + 2 + \dots + n$ cirkels die in de vorm van een gelijkzijdige driehoek liggen, zodanig dat voor elke $i = 1, 2, \dots, n$, de i^{de} rij precies i cirkels bevat, waarvan precies één rood gekleurd is. Een *ninja-pad* in een Japanse driehoek is een opeenvolging van n cirkels, verkregen door te starten met de cirkel in de bovenste rij, dan herhaaldelijk van een cirkel naar een van de twee cirkels direct daaronder te gaan, en te eindigen met een cirkel in de onderste rij. Hier is een voorbeeld van een Japanse driehoek waarbij $n = 6$, met daarin een ninja-pad dat twee rode cirkels bevat.



figuur 1

$n = 6$

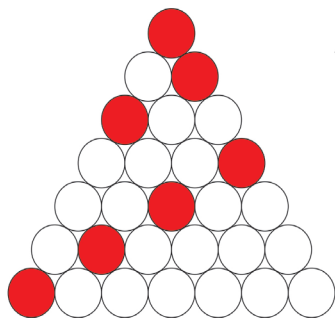
Bepaal, als functie van n , de grootste k zodanig dat er in elke Japanse driehoek een ninja-pad is dat op zijn minst k rode cirkels bevat.

Oplossing van Mads

Het is altijd een goed idee om eerst kleine waarden voor n te gaan proberen, zodat je een vermoeden kunt krijgen voor wat k is als functie van n . Laten we dus eens beginnen met $n = 1$. Dan heb je alleen maar een rij met een rode cirkel, dus daaruit volgt dat $k = 1$. Stel dat $n = 2$. Elk ninja-pad gaat door de bovenste rode cirkel en een van de ninja-paden gaat ook door de rode cirkel op de tweede rij, dus $k = 2$. Stel dat $n = 3$. Je kunt aannemen dat de rode cirkel op de tweede rij rechts zit (want als hij links zit heb je precies dezelfde situatie maar dan gespiegeld). Als de rode cirkel op de derde rij helemaal links zit is er geen ninja-pad dat door alle drie de rode cirkels gaat, maar er is er wel een die door de eerste twee gaat, dus geldt weer dat $k = 2$.

Stel nu dat $n = 4$. Je kunt daarvoor weer aannemen dat de rode cirkel op de tweede rij rechts zit. Als de rode cirkel op de derde rij niet links zit, is er een ninja-pad dat door de eerste drie rode cirkels gaat. Als deze rode cirkel wel links zit is er voor elke cirkel op de derde rij een ninja-pad dat in de eerste drie rijen door twee rode cirkels gaat en in die cirkel eindigt, wat betekent dat – waar de rode cirkel op de vierde rij ook zit – er altijd een ninja-pad is dat door drie rode cirkels gaat (twee op de eerste drie rijen en één op de laatste rij). Dus $k \geq 3$. Als n gelijk is aan 5, 6 of 7 geldt dus ook dat $k \geq 3$; neem maar een ninja-pad dat drie rode cirkels uit de bovenste vier rijen bevat. Bovendien kun je voor elk van deze waarden van n de rode cirkels zo plaatsen dat er geen ninja-pad is dat door vier rode cirkels gaat, dus er geldt dat $k \geq 3$; plaats hiervoor de rode cirkels zoals in de bovenste n rijen van figuur 2. Het is bij dit voorbeeld voor $n \geq 7$ nu weer zo dat er voor elke cirkel op de onderste rij een ninja-pad

is dat door drie rode cirkels gaat en in die cirkel eindigt, waardoor ik het vermoeden kreeg dat $k = 4$ voor $n = 8$.

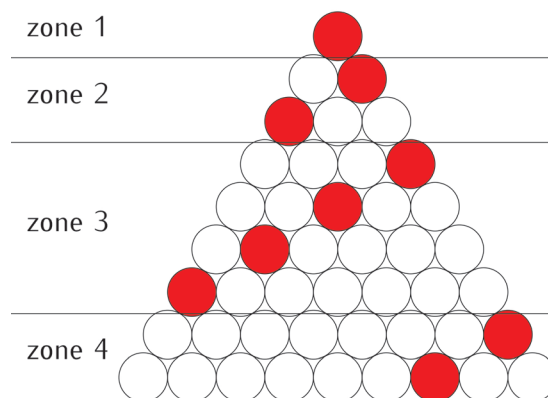


figuur 2

n	k
1	1
2, 3	2
4, 5, 6, 7	3
8, ...	4

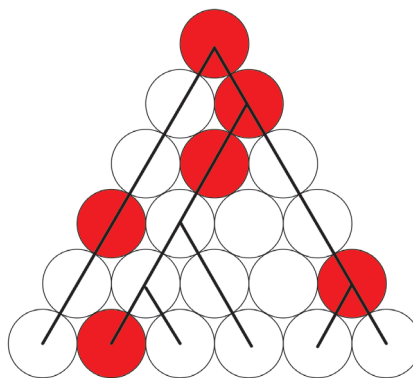
Als je dus kijkt naar de waarden van n waarbij k met één toeneemt, dan zijn dat: (1), 2, 4 en vermoedelijk 8. Dit zijn de tweemachten, dus het lijkt erop dat k gelijk is aan $\lceil \log_2(n) \rceil + 1$ naar beneden afgerond, oftewel, als je x definieert als het gehele getal waarvoor geldt dat $2^{x-1} \leq n < 2^x$, dan lijkt k gelijk te zijn aan x . Het bewijs moet nu bestaan uit twee delen: ik moet bewijzen dat je de rode cirkels zo kunt plaatsen dat er geen ninja-pad is dat door $x + 1$ rode cirkels gaat, en daarnaast dat er altijd (dus voor elke Japanse driehoek) een ninja-pad is dat door minstens x rode cirkels gaat.

Allereerst zal ik laten zien dat je de rode cirkels zo kunt plaatsen dat er geen ninja-pad is dat door $x + 1$ rode cirkels gaat. In de kleine gevallen lijkt een patroon te zitten; de rode cirkels liggen telkens op een schuine rechte lijn en bij het bereiken van de linkercirkel, beginnen we in de rij daarna weer bij de rechtercirkel. Dus laten we proberen om dat te generaliseren. Deel de driehoek daarvoor op in zones, zodat de i -de zone van de 2^{i-1} -de rij tot en met de $(2i - 1)$ -de rij gaat (dus zone 1 bestaat uit rij 1, zone 2 bestaat uit rijen 2 en 3, zone 3 bestaat uit rijen 4 tot en met 7, enzovoorts, zie figuur 3). Kies nu als rode cirkel in de $(2^{i-1} + j)$ -de rij de $(2^{i-1} - j)$ -de cirkel (dus de 2^{i-1} -de cirkel in de 2^{i-1} -de rij, de $(2^{i-1} - 1)$ -de cirkel in de volgende rij, de $(2^{i-1} - 2)$ -de cirkel in de volgende rij, enzovoorts). Omdat de rode cirkels steeds met twee stappen naar links gaan en een ninja-pad maar met één naar links (of naar rechts), is het niet mogelijk dat een ninja-pad door twee rode cirkels in dezelfde zone gaat. Vanwege de definitie van x als $2^{x-1} \leq n < 2^x$ zijn er precies x zones en gaat een ninja-pad voor deze Japanse driehoek door hoogstens x rode cirkels.



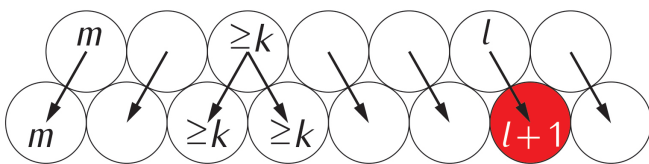
figuur 3

Nu moet ik nog bewijzen dat er voor elke Japanse driehoek een ninja-pad is dat door x rode cirkels gaat. We hebben hierboven voorbeelden gezien voor $n = 3$ en $n = 7$ waarin een ninja-pad met respectievelijk twee en drie rode cirkels bij elke cirkel op de onderste rij kan eindigen. Dat bracht mij op het idee om (gegeven een Japanse driehoek) de waarde van een cirkel te definiëren als het maximale aantal rode cirkels dat een ninja-pad kan hebben als het in die cirkel eindigt, en om vervolgens de waarden van alle cirkels op de onderste rij bij elkaar op te tellen; hopelijk kunnen we dan bewijzen dat minstens één van die cirkels een grote waarde heeft. In het voorbeeld van figuur 4 zou je met de (optimale) ninja-paden die ik heb ingetekend uitkomen op een som van $2 + 4 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18$. Omdat deze som natuurlijk afhangt van waar de rode cirkels zich precies bevinden, heb ik besloten om naar het minimum van deze som te kijken en deze $f(n)$ te noemen.



figuur 4

Vervolgens ging ik kijken of ik $f(n+1)$ kon uitdrukken in $f(n)$, waarbij we veronderstellen dat we voor n al weten dat er een ninja-pad is dat op zijn minst k rode cirkels bevat. Er is dan dus een cirkel in de n -de rij die een waarde heeft van minstens k . De twee cirkels hieronder hebben dan ook een waarde van minstens k , want je kunt het ninja-pad dat door minstens k rode cirkels gaat en bij die cirkel in de n -de rij eindigt ook nog een cirkel langer maken. Alle cirkels op de $n+1$ -ste rij links van deze twee cirkels hebben om dezelfde reden een waarde die minstens zo groot is als de waarde van de cirkel rechtsboven die cirkel, en alle cirkels op de $n+1$ -ste rij rechts van deze twee cirkels hebben een waarde die minstens zo groot is als de waarde van de cirkel linksboven die cirkel. Met andere woorden: elke cirkel op de $n+1$ -ste rij heeft een waarde die minstens zo groot is als de cirkel op de rij erboven die in figuur 5 met een pijl verbonden is. Zo heb ik elke cirkel op de $n+1$ -ste rij gekoppeld aan een cirkel op de n -de rij en elke cirkel op de n -de rij gekoppeld aan een cirkel op de $n+1$ -ste rij (behalve de cirkel die het eindpunt is van een ninja-pad door minstens k rode cirkels, die is gekoppeld aan twee cirkels op de $n+1$ -ste rij). Dus alle waarden die je op de $n+1$ -ste rij hebt zijn minstens die op de rij daarboven, en je hebt een extra getal dat minstens k is (van die ene cirkel die met twee cirkels in de rij daaronder correspondeert). Die waarden op de n -de rij hebben als som minstens $f(n)$, dus hieruit volgt dat $f(n+1) \geq f(n) + k$. Daarnaast heb je ook nog ergens de rode cirkel op de $n+1$ -ste rij, dus de waarde van die cirkel is minstens 1 meer dan die van de corresponderende cirkel op de n -de rij, dus $f(n+1) \geq f(n) + k + 1$.



figuur 5

Toen bedacht ik dat als ik voor tweemachten 2^a kon bewijzen dat $f(2^a) \geq a2^a + 1$, dat dan uit het laden-principe volgt dat $k \geq a + 1$. Het getal $f(2^a)$ is immers de som van 2^a waarden (die van de onderste rij cirkels), en als die waarden allemaal hoogstens a zouden zijn, zou $f(2^a) \leq a2^a$; tegenspraak. Er is dus minstens een van die

waarden gelijk aan minstens $a + 1$. Dat ben ik dus met inductie gaan bewijzen. Als $a = 0$ heb je $f(1) = 1$ (dat volgt uit de definitie van f) en dat is inderdaad minstens $0 \cdot 2^0 + 1 = 1$.

Als je weet dat $f(2^a) \geq a2^a + 1$, dan geldt voor $n = 2^a$ vanwege het ladenprincipe zoals eerder al genoemd dat $k \geq a + 1$, en omdat als n groter wordt k niet kleiner kan worden, geldt als $n \geq 2^a$

altijd dat $k \geq a + 1$ en dus dat

$$f(n+1) \geq f(n) + k + 1 \geq f(n) + a + 2.$$

Hieruit volgt dat

$$f(2^{a+1}) \geq f(2^a + 1) + a + 2 \geq$$

$$f(2^a + 1) + 2a + 4,$$

en als je dit de hele tijd herhaalt, zie je dat

$$f(2^{a+1}) \geq f(2^a) + 2^a(a+2) =$$

$$f(2^a) + a2^a + 2^{a+1} \geq (a2^a + 1) + a2^a + 2^{a+1} =$$

$$(a+1)2^{a+1} + 1,$$

waarmee de inductie klaar is. Dus als n gelijk is aan 2^{x-1} , is k minstens $(x-1) + 1 = x$.

Dus als n minstens 2^{x-1} is, is k ook minstens x , dus dan is er altijd een ninja-pad met minstens x rode cirkels. Dus als $2^{x-1} \leq n < 2^x$ is er altijd een ninja-pad dat door x rode cirkels gaat. Maar we hebben ook gezien dat er niet altijd een ninja-pad is dat door $x+1$ rode cirkels gaat. Daarmee hebben we bewezen dat $k = x$.

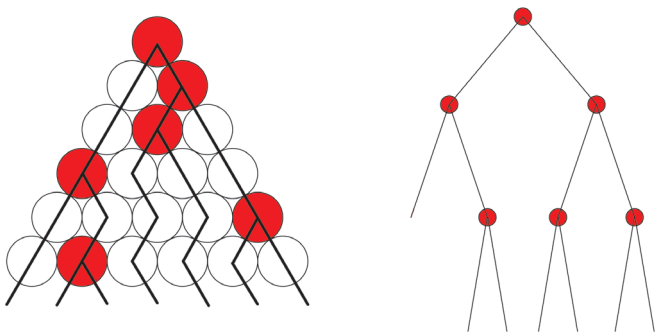
Oplossing van Hylke

Net als Mads was ook ik begonnen met het invullen van kleine getallen om een vermoeden te krijgen, een van de eerste lessen bij de training van de Wiskunde Olympiade. Bijna alle leden van ons team kwamen hierdoor op het vermoeden dat $k = x$ bij $2^{x-1} \leq n < 2^x$ en hadden daarbij de hierboven door Mads beschreven 'worst case' gevonden met een rode cirkel per zone voor elk mogelijk ninja-pad. Nadat ik tijdens de wedstrijd ook dit voorbeeld had bedacht en natuurlijk netjes had opgeschreven om de eerste punten binnen te harken, ging ik nadenken over hoe ik de andere kant zou kunnen bewijzen: dat je bij een Japanse driehoek met 2^{x-1} rijen altijd een ninja-pad met minstens x rode cirkels kunt vinden.

Tijdens de wedstrijd kwam ik hier ondanks vele pogingen niet uit. Toen we na de wedstrijd terugliepen voor de lunch werden de opgaven natuurlijk uitgebreid besproken en legde Mads mij zijn oplossing uit. Ik was uiteraard erg blij dat mijn vermoeden en constructie klopten, maar omdat ik bij de wedstrijd niks had opgeschreven dat ook maar een begin was van Mads' bewijs van die andere kant, verwachtte ik niet meer dan 2 punten voor deze opgave. Twee dagen later, toen we samen met onze

Japanse gids Tokyo aan het verkennen waren, kregen we echter van onze nakijkers via de app de scores terug. Het bleek dat ik 5 punten had gehaald voor deze opgave. Hier was ik vrij verbaasd over; waar had ik al die extra punten vandaan gehaald?

In mijn aanpak tijdens de wedstrijd ging ik er steeds vanuit dat in een Japanse driehoek met 2^{x-1} rijen elk ninja-pad maximaal $x-1$ rode cirkels bevat en probeerde ik hier een tegenspraak in te vinden. Dat zou namelijk betekenen dat er een ninja-pad met x rode cirkels moet zijn. Om die tegenspraak te vinden probeerde ik een boel verschillende ninjapaden te maken, die het liefst samen zo veel mogelijk rode cirkels bevatten. Laten we daarom beginnen met de rode cirkel bovenin en van daaruit eens twee paden starten naar de twee cirkels eronder. Laten we nu het pad naar de rode cirkel splitsen naar de twee cirkels eronder, zo krijgen we immers meer paden met die rode cirkel, en het pad naar de witte cirkel doortrekken naar de derde cirkel. Dit kunnen we herhalen door in elke rij het pad naar de rode cirkel te splitsen naar de twee cirkels eronder en de rest van de paden door de witte cirkels door te trekken; zie figuur 6 (links). Dit gaat precies goed, want elke rij heeft één rode cirkel en dus één splitsing, wat goed gaat omdat de volgende rij één cirkel meer heeft.



figuur 6

Volgens onze aanname bevatten alle paden maximaal $x-1$ rode cirkels, dus zijn ze maximaal $x-1$ keer gesplitst. We kunnen onze Japanse driehoek met splitsingen daarom zien als een wiskundige binaire boom met hoogte (hooguit) $x-1$; het linkerplaatje (bij $n=6$) gaat daarbij over in het rechterplaatje, waarin alleen de rode cirkels een rol spelen en de rest van de doorgaande paden wordt samengetrokken. Zo'n binaire boom met hoogte (hooguit) $x-1$ heeft aan het einde hooguit 2^{x-1} takken.

Dit zou betekenen dat onze Japanse driehoek met $n = 2^{x-1}$ maximaal 2^{x-1} paden kan hebben.

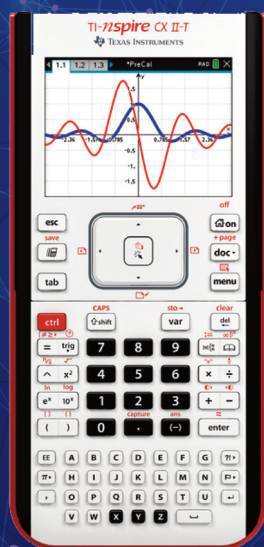
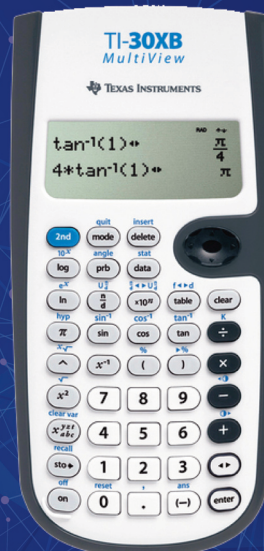
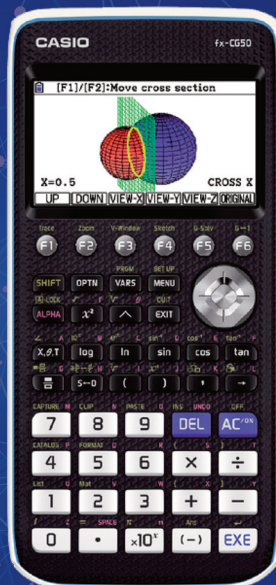
Hoewel ik dit tijdens de wedstrijd nog wel had bedacht, had ik me niet gerealiseerd dat ik hiermee het probleem in feite had opgelost. Kijken we immers weer naar het linkerplaatje, dan zien we dat – als we ook de splitsing van de rode cirkel op de onderste rij meetellen – we bij een Japanse driehoek met n rijen $n+1$ paden hebben. Voor $n = 2^{x-1}$ rijen hebben we dus $2^{x-1} + 1$ paden. Maar dat is in tegenspraak met onze constatering in de vorige alinea dat onze Japanse driehoek met $n = 2^{x-1}$ maximaal 2^{x-1} paden kan hebben. Vanwege deze tegenspraak moet er wel een ninja-pad zijn met x rode cirkels, oftewel $k = x$.

Deze uiteindelijk zeer elementaire oplossing was voorafgaand aan de wedstrijd nog niet bekend bij de nakijkers en de jury. De makers van de opgave, Daniël en Merlijn, hadden de opgave op Mads' manier bewezen en ook in het comité dat de opgaven voor de Internationale Wiskunde Olympiade selecteert had niemand dit bewijs bedacht. Gelukkig bedacht aan het eind van de eerste nakijkdag een jurylid deze oplossing en liet die ook aan onze begeleiders zien. Die realiseerden zich toen dat ze deze constructie van paden en de vertaalslag naar binaire bomen ook waren tegengekomen in mijn werk. Ook al had ik me niet gerealiseerd dat ik zo dicht bij de oplossing was, eigenlijk ontbrak er nog maar één concluderende zin om de gezochte tegenspraak af te leiden. Uiteindelijk bleek ik bovendien de enige van alle meer dan zeshonderd deelnemers te zijn die met deze aanpak punten had gescoord. Dit was natuurlijk erg speciaal en ik vond het extra leuk dat het ook nog eens bij een door Nederlandse makers bedachte opgave was.

Over de twee wedstrijddagen hadden Mads en ik naast deze opgave ook nog opgaven 1 en 4 opgelost en ook nog een paar punten behaald voor opgave 2. Hierdoor kwam ik uit op 22 punten en Mads op 24. Mads' score was helaas net een punt te weinig voor een zilveren medaille, maar wel net als de mijne genoeg voor een bronzen plak. Ook alle anderen hadden een medaille en zelfs allemaal minstens de helft van de punten. Dit kwam vooral doordat we bij opgaves 2 en 5 allemaal onze vele ideeën duidelijk hadden opgeschreven waardoor we, zoals in mijn geval, vaak nog punten voor die opgaves konden halen zonder ze compleet opgelost te hebben. Hierdoor zijn we als land 29^e van de 112 deelnemende landen geworden, een voor Nederland erg goede notering.

“Als het gaat om goed rekenen,
kunnen wij veel voor u betekenen!”

NIEUW



Beste service, beste prijs?

Neem dan contact met ons op voor een
passend aanbod. Wij leveren op school of
rechtstreeks thuis bij de leerlingen.

Preferred partner van:

CASIO



TEXAS INSTRUMENTS



Scan mij



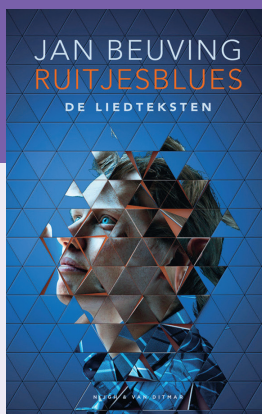
Tel. 0512 53 83 53
info@rekenmachines.com
www.rekenmachines.com

Over de auteurs

Mads Kok (16) is oud-leerling van het Utrechts Stedelijk Gymnasium. De afgelopen twee jaar vertegenwoordigde hij Nederland bij de Internationale Wiskunde Olympiade en behaalde daar achtereenvolgens een eervolle vermelding en een bronzen medaille. Inmiddels studeert hij wiskunde en sterrenkunde aan de Universiteit Leiden.

E-mailadres: madsskok@gmail.com

Hylke Hoogeveen (18) is oud-leerling van het Openbaar Lyceum Zeist. Hij vertegenwoordigde Nederland bij de Internationale Wiskunde Olympiade in 2021 en 2023 en behaalde daar beide keren een bronzen medaille. Over zijn ervaringen met een opgave bij IMO2021 schreef hij eerder al het artikel 'Kaartjes en kwadraten' voor Euclides. Inmiddels studeert hij wiskunde en natuurkunde aan de Universiteit Utrecht. E-mailadres: hylkehoogeveen117@gmail.com



Verschenen: Ruitjesblues

Titel: Ruitjesblues

Ondertitel: De liedteksten

Auteur: Jan Beuving

Uitgever: Uitgeverij Nijgh & van Ditmar

ISBN: 9789038814568

Prijs: € 20,99 (244 pagina's)

Van de uitgever

'Zijn die liedteksten ergens terug te lezen?', hoort cabaretier Jan Beuving stevast na zijn voorstellingen. Het antwoord daarop was altijd nee. Tot nu. Alle liedteksten uit zijn eerste zes theaterprogramma's zijn gebundeld, met toelichtingen van de schrijver zelf. Daarnaast bevat het boek een selectie uit het materiaal dat Beuving voor anderen schreef (voor o.a. Richard Groenendijk, Paul de Leeuw en Karin Bloemen), en vrij werk buiten zijn theaterprogramma's om.

Zijn meermaals bekroonde liedteksten – twee Annie M.G.

Schmidtprijzen, één Willem Wilmkprijs – kenmerken zich door een brede variatie in onderwerpkleuze en vorm, van puntig tot verhalend, waarin zijn wiskundige precisie en zijn vermogen om te ontroeren moeiteloos samengaan.

Van de redactie

Uiteraard ontbreken de klassiekers, voor ons als wiskundedocent, niet: *Algebrapotpourri*, *Fermat*, *Tangens* ('geschreven voor een schnabbel bij de Nationale Wiskundedagen' schrijft Jan in de toelichting), *Was de wereld maar van wiskunde gemaakt* en *Sinus en Cosinus* ('Een bescheiden hit onder wiskundedocenten, die het nog steeds in hun klassen aan leerlingen laten zien. Arme kinderen.', aldus Jan)

Jan Beuving (Numansdorp, 1982) studeerde Wiskunde en Wetenschapsgeschiedenis, waarna hij het theater inging. In tien jaar tijd heeft hij zich naar de top van het Nederlandse cabaret geschreven. Hij won de Neerlands Hoop (voor aanstormend talent) en werd twee keer genomineerd voor de Poelifinario. Daarnaast had hij jarenlang een taalrubriek op Radio 1 en schreef hij columns voor NOS Studio Voetbal en *Euclides*.

De parabool op school (3)

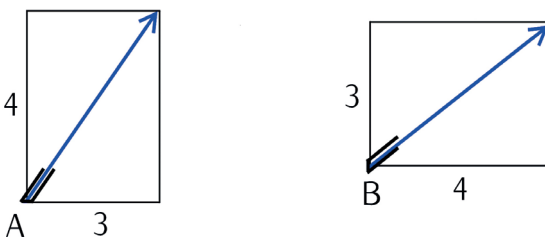
Net als de twee vorige artikelen over parabolen heeft dit artikel een kaleidoscopisch karakter: waterbanen, een klassiek constructieprobleem uit de Oudheid en de bollen van Dandelin.



figuur 1

Waterbanen

De waterbanen uit de fontein van figuur 1 zijn heuse parabolen. De reikwijdte van zo'n baan hangt af van de hoek tussen de spuitrichting en het horizontale vlak. Ik vergelijk in figuur 2 twee beginsituaties:



figuur 2

De blauwe pijlen stellen (gelijke) beginsnelheden van waterstralen voor. Vraag:

in welke van de twee situaties (A en B) reikt de waterbaan het verst?

Dit probleem ontleen ik aan een lezing die ik ooit bijwoonde op de ICME.^[1] De Italiaanse leerlingen aan wie dit probleem was voorgelegd voorspelden unaniem dat B het zou winnen. Verrassenderwijs blijkt – na wat kinematisch rekenwerk – dat beide waterbanen even ver reiken! In beide gevallen stel ik de beginsnelheid van de waterstraal op 5 m/s. In geval A is de horizontale beginsnelheid dan 3 m/s en in B is die 4 m/s. Verder stel ik de zwaartekrachtversnelling g nu even op 10 m/s².

Volgens de regels van de kinematica heeft een waterdruppel in geval A dan deze bewegingsvergelijkingen:

$$x_t = 3t \text{ en } y_t = 4t - 5t^2.$$

Overduidelijk een parabool-op-school. De reikwijdte vind ik door $y_t = 0$ te stellen. Oplossingen $t = 0$ en $t = 0,8$ met als gevolg dat de 'schootsafstand' gelijk is aan $3 \times 0,8 = 2,4$ m. In geval B komt er $x_t = 4t$ en $y_t = 3t - 5t^2$. Zodat $y_t = 0$ nu leidt tot $t = 0$ of $t = 0,6$ en ook hier is de reikwijdte 2,4 m.

Een algemenere aanpak verdiept het inzicht. Stel de horizontale beginsnelheid v_x en de verticale v_y . De bewegingsvergelijkingen zien er dan zo uit:

$$x = v_x t \text{ en } y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Uit $y = 0$ en $t \neq 0$ volgt $t = \frac{2v_y}{g}$.

De reikwijdte $\frac{2v_x v_y}{g}$ is blijkbaar symmetrisch in v_x en v_y !

Laat α de hoek zijn die de startvector maakt met het horizontale vlak en laat v de lengte van die vector zijn, zodat

$$v_x = v \cdot \cos(\alpha) \text{ en } v_y = v \cdot \sin(\alpha).$$

De reikwijdte van de waterstraal is dan

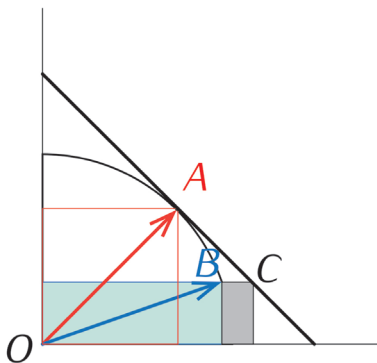
$$\frac{v^2 \cdot \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g} \text{ ofwel } \frac{v^2 \cdot \sin(2\alpha)}{2g}.$$

Hieruit volgt dat de kraan, om een maximale reikwijdte te krijgen, een hoek van 45° met het horizontale vlak moet maken.

Dat 45° de optimale starthoek is, kan ook aanschouwelijk worden gemaakt, zie figuur 3.

Het product $v_x v_y$ stel ik voor als oppervlakte van een in de cirkelsector beschreven rechthoek met hoekpunt O . De oppervlakte van zo'n rechthoek is maximaal als die rechthoek een vierkant is. Immers, noteer ik de rechthoeken in figuur 3 met hun diagonaal (op zijn Grieks dus) en de oppervlakten van die rechthoeken als $[OA]$, $[OB]$ en $[OC]$ dan geldt:

$$[OA] > [OC] > [OB].$$

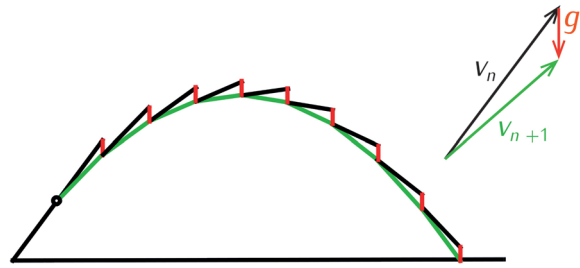


figuur 3

De ongelijkheid $[OA] > [OC]$ is een gevolg van de bekende stelling dat van alle rechthoeken met een gegeven omtrek het vierkant de grootste oppervlakte heeft.

Discrete kogelbaan

Je kunt als volgt een stapsgewijze benadering van de parabolische baan tekenen. Ga uit van de snelheidsvector aan de start. Trek daar de constante verticale vector g van af en plaats de zo verkregen verschilvector met de staart aan de kop van zijn voorganger en herhaal dit procedé.

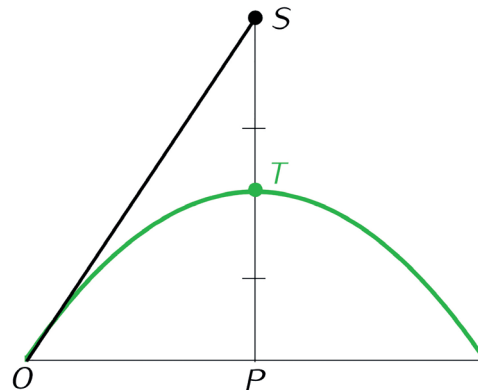


figuur 4

Met wat sjoemel-geluk kom je na een aantal stappen weer op de grond, als in figuur 4. Deze aldus verkregen groene polygoon benadert een parabool.^[2]

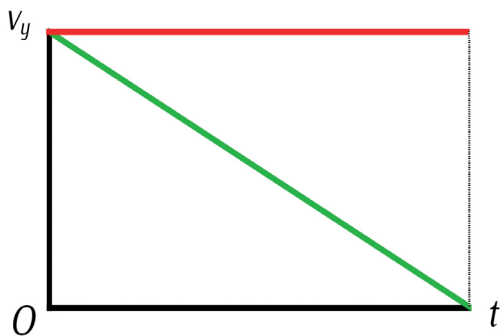
Raaklijneigenschap

Als schrijver van dit artikel voel ik me nu eventjes almachtig en laat ik de zwaartekracht tijdens het spuiten wegvallen. De baan van een waterdruppel wordt dan een schuin oplopende rechte lijn.



figuur 5

Op het moment dat de 'parabooldruppel' de top T bereikt, is de 'gewichtloze' druppel in het punt S dat twee keer zo hoog ligt als T . Je kunt dit netjes narekenen, maar aardiger is een kinematisch-meetekundige verklaring. De Franse scholasticus Nicolas Oresme (1325-1382) vond uit dat de snelheid van een bewegend object weergegeven kan worden in een grafiek (volgens sommige historici de eerste grafiek ooit), waarbij de 'afgelegde weg' dan de oppervlakte onder die grafiek is. In figuur 6 zie je twee tijd-snelheidgrafieken. Zij geven de verticale snelheid weer van de waterdruppels mét en zonder zwaartekracht. De groene grafiek past bij een druppel die de (halve) parabool doorloopt en waarbij de snelheid daalt van v_y tot 0. De rode lijn geeft de constante verticale snelheid aan van de virtuele druppel zonder gewicht.



figuur 6

Het tijdsinterval in figuur 6 loopt van start tot het moment dat de top van de parabool wordt bereikt. De oppervlakte van het gebied onder de rode grafiek is duidelijk twee keer zo groot als de oppervlakte onder de groene grafiek, vandaar dat in figuur 5 geldt: $ST = TP$.

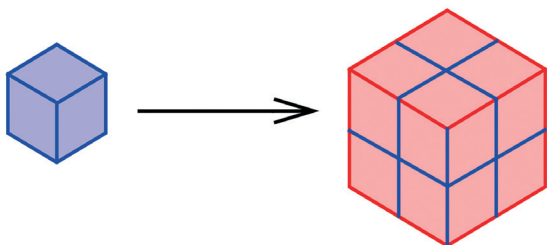
Omdat (in figuur 5) OS de richting aangeeft van de startvector van beide bewegingen, is zij een raaklijn aan de parabool en daarmee is de volgende mooie eigenschap bevestigd:

de raaklijn in een punt P aan de parabool snijdt de symmetrieas in een punt S dat even ver af ligt van de topaaklijn als P .

Dat deze eigenschap leidt tot de bewering dat de gediifferentieerde van x^2 gelijk is aan $2x$ is nu een koud kunstje.

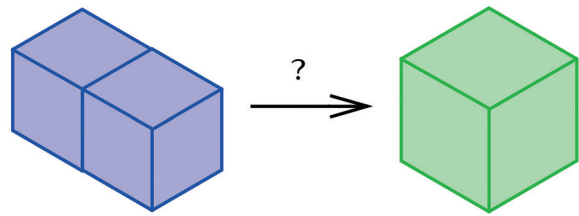
Parabool en de dubbele kubus

Het is een oeroude legende. Omstreeks het jaar 430 voor Chr. brak in Athene de pest uit. De bewoners raadpleegden het orakel van Apollo in Delos en die gaf het advies om het kubusvormige altaar te verdubbelen. De Atheners maakten de ribben twee keer zo lang, maar de epidemie verergerde.



figuur 7

Geen wonder, het altaar werd maar liefst acht keer zo groot van inhoud. Opnieuw raadpleegden zij het orakel en ze werden door het orakel op de vingers getikt. De bedoeling was een kubus met een twee keer zo groot volume.



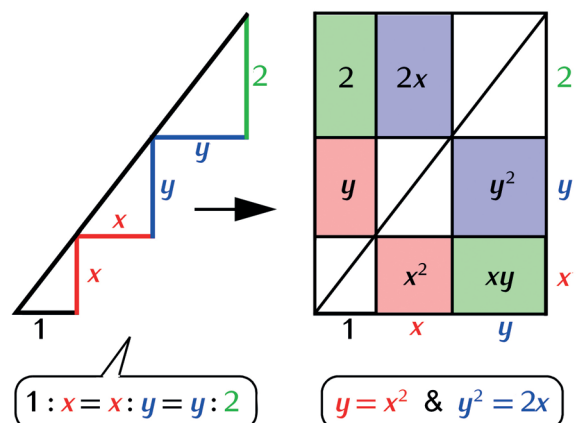
figuur 8

Het kwam er meetkundig dus op neer dat een gegeven lijnstuk met factor $\sqrt[3]{2}$ moest worden vergroot, maar hoe doe je dat op zijn Grieks, dat wil zeggen met passer en liniaal? De zoektocht naar de oplossing heeft veel mooie wiskunde opgeleverd, tot in de 19^{de} eeuw de onmogelijkheid van zo'n constructie werd bewezen. De Fransman Wantzel (1814 – 1848) publiceerde in 1837 een artikel waarin hij bewees dat wortels van een irreducibele vergelijking van een graad ongelijk een macht van 2, niet met passer en liniaal kunnen worden geconstrueerd. Hiermee was in één klap zowel de onoplosbaarheid van de verdubbeling van de kubus als van een ander klassiek probleem, de trisectie van een hoek, aangetoond.^[3]

Maar... als het constructie-instrumentarium wordt uitgebreid met kegelsneden lukken de genoemde constructies wel! De Griek Hippocrates van Chios (ca 430 voor Chr.) bedacht – naar analogie van het feit dat $\sqrt{2}$ de middel-evenredige^[4] is van 1 en 2 – dat het getal $\sqrt[3]{2}$, samen met $\sqrt[3]{4}$, voldoet aan de geschakelde evenredigheid

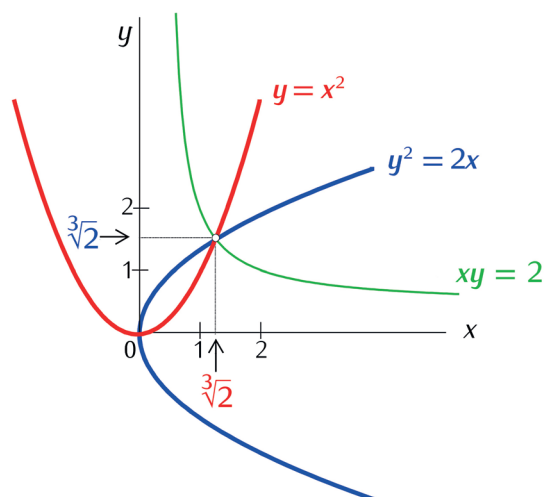
$$1 : x = x : y = y : 2$$

Zo kwam hij op de relaties die wij nu kunnen schrijven als $x^2 = y$ en $2x = y^2$. Het is een aantrekkelijke speculatie dat hij die relaties op aanschouwelijke wijze vond, zie figuur 9.



figuur 9

Figuur 9 toont dat ook de relatie $xy = 2$ in het spel is. Uit $y = x^2$ en $xy = 2$ volgt dan simpel $x^3 = 2$ (en $y^3 = 4$).



figuur 10

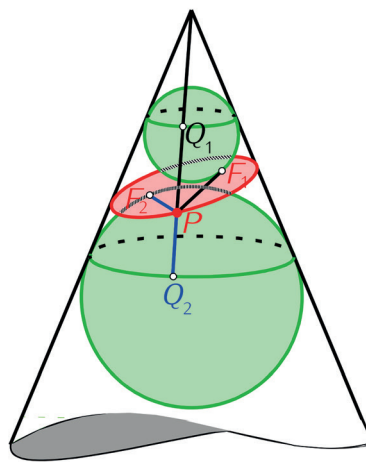
Een andere Griek, Menaechmos (380-320), die door historici wel wordt beschouwd als ‘uitvinder’ van de kegelsneden, leidde uit de geschakelde evenredigheid van Hippocrates een constructie af, zeg ‘met cirkel, liniaal en parabool’ voor het getal $\sqrt[3]{2}$, zie figuur 10.

Kortom: met een constructieprogramma als GeoGebra kan het getal $\sqrt[3]{2}$ – zeg op neo-Griekse wijze – worden geconstrueerd.

De bollen van Dandelin

In de vorige aflevering van mijn drieluik over de parabool^[4], noemde ik het daar gebruikte bewijs dat de doorsnede van een vlak, parallel met één beschrijvende van een kegel, een parabool is ‘hybride’, omdat daarbij ook een algebraïsche identiteit werd gebruikt.

De Belg Dandelin (1794-1847) zag kans om ellips, parabool en hyperbool langs zuiver ruimte-meetekundige weg te behandelen. Daarbij maakte hij gebruik van raakbollen binnen de kegel: *de bollen van Dandelin*. Het meest aanschouwelijk is dit in het geval dat de doorsnijding van het vlak met de kegel een ellips is. Er zijn dan twee bollen die zowel aan de kegel als aan het snijvlak raken, één ‘boven’ en één ‘onder’. De raakpunten met het vlak blijken dan juist de brandpunten van de ellips te zijn, zie figuur 11.



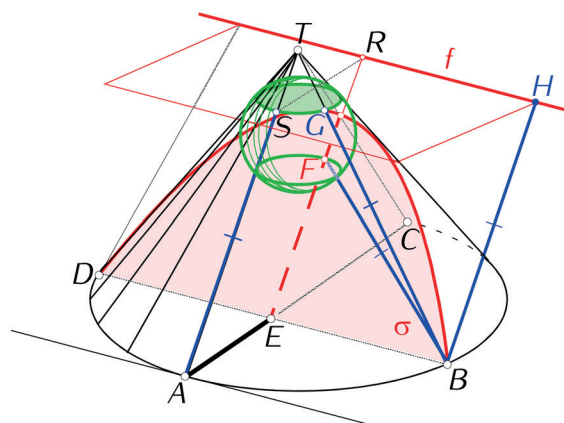
figuur 11

Het bewijs verloopt dan kort gezegd als volgt. Uit een punt P van de ellips vertrekken twee raaklijnen aan de boven- en onderbol. De raaklijnstukken PF_1 en PQ_1 zijn even lang. Net zo de raaklijnstukken PF_2 en PQ_2 . Als P over de ellips beweegt, verandert de som van de afstanden $|PQ_1|$ en $|PQ_2|$ niet en dus is ook de som $|PF_1| + |PF_2|$ constant!

In het geval van de parabool (die slechts één brandpunt en een richtlijn heeft) is het wat ingewikkelder.

Dandelin ging uit van een rechte cirkelkegel en een vlak – zeg σ – dat evenwijdig is aan juist één beschrijvende lijn van de kegel.

Er is dan precies één bol die omhuld wordt door de kegel en die raakt aan het snijvlak σ . Het raakpunt F van die bol, zie figuur 12, met het paraboolvlak zal blijken het brandpunt van de parabool te zijn en de snijlijn f van σ met het vlak van de raakcirkel van kegel en bol is nu de richtlijn van de parabool!



figuur 12

>

Dit moet nog wel worden aangetoond.

Ik merk eerst op dat E het midden is van lijnstuk BD en dat AC de middelloodlijn is van BD . De lijn RE evenwijdig aan TA is dan de symmetrieas van de parabool.

Verder zijn S (op TA) en G (op TB) punten van de raakcirkel van kegel en bol.

Nu geldt: $|BG| = |BF|$ want BG en BF zijn raaklijnen aan de bol vanuit het punt B .

En verder:

$$|BG| = |BT| - |GT| = |AT| - |ST| = |AS|$$

En ook:

$$|AS| = |ER| = |BH|$$

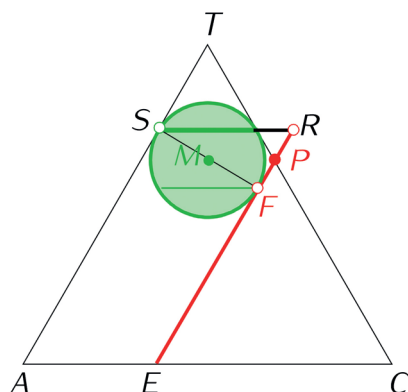
Bijgevolg:

$$|BF| = |BH|$$

Bovendien: $|BH| \perp f$ want $BH \parallel ER$.

Kortom: het punt B van de parabool ligt even ver van de lijn f als van het punt F .

Hetzelfde geldt uiteraard voor D en voor de andere punten op de parabool: een kwestie van verschuiven van het vlak ABC , omhoog of omlaag. Je kunt nog twijfels hebben over één bijzonder punt van de parabool, namelijk de top P . Dat P midden tussen F en R moet liggen, volgt wel uit continuïteitsoverwegingen. Maar je kunt dit ook inzien door naar de doorsnede van de kegel met vlak TAC te kijken, zie figuur 13.



figuur 13

De top P van de parabool is het snijpunt van de lijnen TC en RE . Dat P het midden is van lijnstuk RF is te bewijzen via elementaire vlakke meetkunde: *MP blijkt midden-parallel te zijn van driehoek SRF!*

Ik merk nog op dat de top van de parabool in het 'equator-vlak' van de groene bol in figuur 12 ligt.

Wat zegt van Dale?

Ik begon deze serie van drie artikelen met de vraag 'Wat is een cirkel?' en eindig nu met: 'Wat is een parabool?'. Daar zijn heel veel verschillende goede antwoorden op mogelijk. In mijn (papieren) Van Dale staat dit literaire hoogstandje:

een ongesloten kromme lijn, die ontstaat wanneer van een kegel, evenwijdig aan de mantel, een stuk wordt afgesneden.

Noten

- [1] Dit was in 1980 in Berkeley op het International Congress Mathematics Education (ICME). Ik schreef hierover in *Euclides* 57-1.
- [2] Dit plaatje lijkt in de verte op het diagram dat Newton tekende in de *Principia Mathematica* bij zijn meetkundig bewijs van de eerste twee wetten van Kepler. Zie ook Goodstein, D. en J. (1997). *Feynman's Lost Lecture*. Vintage Books.
- [3] Zie Grootendorst, A.W. (1983). Een bekend probleem opgelost door een onbekend wiskundige. *Euclides*, 58(1), 17-28.
- [4] M. Kindt. De parabool op school (2). *Euclides*, 99(2), 20-24.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

Drie

Voor vaderdag kreeg ik van mijn zoon een lekker biertje. Het is een tripel met de naam Trinity. Ik kreeg dit biertje niet speciaal omdat het een tripel is, maar vooral om het etiket, want daar zie je een klaverbladknoop en mijn zoon weet dat ik gek ben op wiskundige knopen.

De naam klaverbladknoop is een vanzelfsprekende naam, want we zoeken altijd wel naar klavertje vier, maar de meeste klavertjes hebben slechts drie blaadjes. Zo zie je op één flesje drie keer de drie met zeer verschillende betekenissen.



Trinity

Trinity is een Nederlandse worldbeat-band die vooral bekend is in christelijk Nederland. De band heeft een internationaal tintje omdat een aantal bandleden opgroeiden in Peru. Zo ontstonden er Zuid-Amerikaanse invloeden in hun muziek. Maar trinity staat ook voor de drie-eenheid van God: Vader, Zoon en Heilige Geest. Daarom zijn er in het Engelstalige gebied verschillende trinity churches en ook wel trinity universities. Vooral scholen en universiteiten gebruiken hetzelfde logo als afgedrukt op het etiket van het bierflesje. Ook wordt het symbool wel gebruikt voor een tekst uit de bijbel. We vinden die in 1 Korinthe 13: En nu blijven geloof, hoop en liefde, deze drie, maar de meeste van deze is de liefde.

Tripel

Tripel bier was oorspronkelijk een biersoort geproduceerd door Westmalle. Het is van kleur een licht biertje, maar van alcoholpercentage een zwaar biertje. Ik las op het internet: 'De termen dubbel, tripel en quadrupel zeggen niets over de wiskundige verhoudingen van ingrediënten in het bier. Het zegt alleen wat over het alcoholpercentage. Sterk, sterker, sterkst.'

Klaverbladknoop

De klaverbladknoop is de meest eenvoudige knoop. We kennen de triviale knoop. Dat is een gesloten lus zonder kruisingen (een cirkel), maar dat is voor mijn gevoel geen echte knoop. Knopen met één of twee kruisingen zijn er niet. Je kunt natuurlijk wel een knoopdiagram tekenen met twee kruisingen, maar deze knoop is eenvoudig te vervormen tot de triviale knoop. De klaverbladknoop met zijn drie kruisingen is dus de eenvoudigste knoop. Intuïtief volledig duidelijk en je kunt dit aantonen met drie-kleuringen. Leuke stof voor een laatste les.

Deelbaar door 3

Als je nu denkt dat het veel te moeilijk is voor een middelbare scholier, kun je altijd nog nadenken met de klas over deelbaarheidskenmerken van drie. Wanneer is een getal deelbaar door drie? Als de som van de cijfers deelbaar is door drie. Moeilijk te bewijzen? Nee.

Neem als voorbeeld een getal van drie cijfers en noem het abc . Dus het getal bestaat uit a honderdtallen, b tientallen en c eenheden. Welnu:

$$a \times 100 + b \times 10 + c = a \times (99 + 1) + b \times (9 + 1) + c = 99a + a + 9b + b + c$$

$99a$ en $9b$ zijn deelbaar door drie. Dus het getal abc is alleen deelbaar door drie als $a + b + c$ deelbaar is door drie. Merk op dat je deelbaarheid door negen er meteen bij krijgt.



Drie ringen

Wat een flesje bier met je doet is toch wel verrassend. En dan hebben we nog niet eens gehad over de Amersfoortse stadsbrouwerij 'De Drie Ringen'. Weliswaar geen knoop, maar een schakel die dan gewoon weer onderdeel is van de knopentheorie.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde in ruste.

E-mailadres: a.b.vanderroest@ziggo.nl



Zebra 65 : Filosofie van de wiskundige praktijk



Titel: Filosofie van de wiskundige praktijk
Auteurs: Joachim Frans, Bart Van Kerkhove en Jean Paul Van Bendegem
Zebra-reeks, deel 65
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam
ISBN: 978-90-5401-195-0
Prijs: € 10,00 (64 pagina's)

Inleiding

Dit deel in de Zebra-reeks beoogt de lezers inzicht te verschaffen in de filosofie van de wiskundepraktijk. Tot de doelgroep behoren leerlingen van de hoogste klassen van het voortgezet onderwijs, hun docenten, of andere in wiskunde geïnteresseerden. Filosofie gaat over wat kennis is en hoe die tot stand komt. Wat wiskunde is denkt iedereen te weten. Wiskundepraktijk gaat over wat mensen in de praktijk met wiskunde doen. Uit de titels van de hoofdstukken of de paragrafen blijkt dat het niet alleen om beroepswiskundigen gaat, maar ook om mensen die wiskunde in andere wetenschappen gebruiken, of over het functioneren van wiskunde in de maatschappij, en dus in feite om alle mensen. In mijn ogen zijn de schrijvers hier behoorlijk goed in geslaagd. Op de paar minpuntjes kom ik nog. Eerst een globale beschrijving van de inhoud aan de hand van de titels van de hoofdstukken.

Filosofie en wiskunde, vandaag en nu

Dit hoofdstuk begint niet bij vandaag en nu, maar bij een korte beschrijving van de relatie tussen filosofie en wiskunde door de eeuwen heen. Wiskunde wordt gezien als een menselijke activiteit die tot steeds andere resultaten heeft geleid, terwijl het toch vaak als dé wetenschap van de zekerheid wordt gezien. De acceptatie van nieuwe wiskundige objecten ging soms heel moeizaam. Denk hierbij aan de complexe getallen of aan de niet-euclidische meetkunde. Of aan hoe om te gaan met paradoxen, zoals die van Russel: 'de kapper die zegt alle mannen van het dorp te

scheren die zichzelf niet scheren, en verder niemand. De vraag is dan: scheert de kapper zichzelf of niet?' Het hoofdstuk eindigt met het werk van Lakatos over de formule van Euler over het verband tussen het aantal hoekpunten, zijvlakken en ribben van een veelvlak in de ruimte. Dit leidt naar de rol van een bewijs van een wiskundige bewering die tot de (vermeende) zekerheid leidt.

Het vinden van een bewijs

Aan de hand van voorbeelden worden verschillende methoden om tot een bewijs te komen besproken: de algoritmische aanpak, de heuristische, maar ook bewijsmethoden als bewijs uit het ongerijmde, volledige inductie, opsplitsen in verschillende gevallen, oneindige afdaling, de 'binnenweg' die niemand, op één na, had gezien. Duidelijk wordt dat je vaak veel geduld moet hebben om een bewijs op te stellen.

De schoonheid van een bewijs

Wat is de waarde van een bewijs? Het antwoord is duidelijk: zodra een stelling bewezen is, kan aan de waarheid van een stelling niet langer getwijfeld worden. Maar er is meer. Bijvoorbeeld: bij bewijzen komen ideeën en strategieën tot leven die bijdragen aan de wiskundige kennis. Een ander aspect is dat tegenwoordig computers een steeds belangrijkere rol spelen, zoals in de situatie waarin er heel veel afzonderlijke gevallen moeten worden bekeken. En dat kunnen computers veel beter dan mensen. Er wordt dan op de computer vertrouwd. Maar wat is het verschil van dit vertrouwen en het vertrouwen op een 'wiskundige autoriteit' bij een moeilijk bewijs? Bewijzen kunnen op verschillende manieren beoordeeld worden. Eén manier is onderscheid te maken tussen bewijzen: mooie en lelijke. Dit wordt verduidelijkt door verschillende bewijzen van bekende stellingen te vergelijken, zoals de stelling van Pythagoras, en de relatie tussen het rekenkundig en meetkundig gemiddelde. Dit leidt tot een lijstje eigenschappen van bewijzen dat in het begin van de vorige eeuw door de wiskundige Hardy is opgesteld.

Het verklarend vermogen van een bewijs

Een verklaring door middel van een bewijs is dat er antwoord wordt gegeven op de waarom-vraag. Dus niet: de stelling is waar (de wat-vraag), maar waarom is die waar? In het algemeen wordt de waarom-vraag beantwoord door een causaal verband aan te geven tussen het gegeven en de conclusie. In vakken als natuurkunde, scheikunde en biologie is dit heel gebruikelijk. In de wiskunde krijgt dit veel minder aandacht. En dat komt omdat men er niet van overtuigd is dat antwoorden op waarom-vragen in

de wiskunde mogelijk zijn. Toch zijn er de laatste jaren filosofen geweest die hieraan hebben gewerkt, bijvoorbeeld door bij een onderwerp (p) een contrastklasse te definiëren (waarom p , en niet q , r of s)? Toegepast op de stelling van Pythagoras: waarom geldt die in rechthoekige driehoeken en niet in scherphoekige of stomphoekige driehoeken? Ook hier kan het vergelijken van verschillende bewijzen van een stelling inzicht bieden in het verklarend vermogen van een bewijs.

De onmisbaarheid van de wiskunde

Een voorbeeld uit de biologie is waarom de levenscyclus van verschillende soorten cicaden steeds een priemgetal is: 7, 13 of 17 jaar. Dit moet welhaast een evolutionair voordeel zijn. De wiskunde geeft er een verklaring: door die priemgetallen komt nadelige interactie tussen verschillende soorten cicaden slechts heel incidenteel voor. Een voorbeeld uit de natuurkunde is het rekenen met snaartjes in de poging de kwantumtheorie en de algemene relativiteitstheorie onder één noemer te brengen: het unificeren van de theorieën over subatomaire verschijnselen en over kosmologische verschijnselen. Filosofen spreken bij de rol van wiskunde in natuurwetenschappen over een raadsel: hoewel wiskunde op zichzelf bijzonder efficiënt is, kunnen we de relatie tussen wiskunde en werkelijkheid moeilijk verklaren. Anders geformuleerd: hoe kan het dat wiskunde onmisbaar is om de werkelijkheid van concrete objecten te beschrijven met abstracte objecten van de wiskunde?

Wiskunde en maatschappij

De auteurs beginnen dit hoofdstuk met: "Wiskunde is overal maar we zien haar nergens. Logisch, want wiskunde

is abstract. Getallen en patronen kun je niet letterlijk waarnemen." Uit een zeer beknopte geschiedenis van de mathematisering van de moderne samenleving blijkt hoe de werkelijkheid vorm krijgt door wiskunde. Toch willen we vaak geen beroep op wiskunde doen om situaties te begrijpen, zelfs is er een negatieve houding tegenover wiskunde. En dit, terwijl de wiskunde de realiteit 'onttoverd' heeft: alles is controleerbaar, zolang men de werkzame materiële beginselen ervan begrijpt. Onze superieure technologie doet de rest. Vervolgens worden enkele experimenten in de sfeer van wiskundig denken besproken. Het bekende 'driedeurenprobleem' is hier een van. Een ander voorbeeld staat in figuur 1. De auteurs verzetten zich tegen de houding van zich afzetten tegen de wiskunde, zij benadrukken 'gecijferdheid', zeker gezien de digitalisering van onze maatschappij.

Filosofie en wiskunde, morgen

In het laatste hoofdstuk wordt opnieuw ingegaan op de relatie tussen filosofie en wiskunde, maar nu in het licht van de grote uitdagingen waarmee we momenteel kampen: artificiële intelligentie en de opwarming van de aarde.

Beoordeling

Het boek is helder geschreven, veel voorbeelden, opdrachten voor de lezer met antwoorden achterin, weinig moeilijke redeneringen of woorden, met een enkele uitzondering: proportionaliteiten. Het boek geeft voor de niet-filosofisch geschoolde lezer, en ook voor de niet al te wiskundig geschoolde lezer een mooi overzicht van de relatie tussen filosofie en wiskunde, in verleden, heden en toekomst. Er had wellicht wat meer in mogen staan over waaraan het wiskundeonderwijs nu (meer) aandacht zou moeten of kunnen besteden, al gebeurt dat wel impliciet. Er is een onderwerp dat ik gemist heb: een filosofische beschouwing van wat een wiskundig model is, zeker daar waar het gaat over de relatie tussen wiskunde en werkelijkheid. Nog een kleine kanttekening. In de titel is sprake van de *wiskundige praktijk*, terwijl in het boek soms deze term, maar soms ook wiskundige praktijken staat. Of er verschil is, is mij niet duidelijk. Al met al een boek waarin veel te lezen/leren valt en dat ik dus van harte aanbeveel.

Wason-selectietaak
We starten met een experiment dat bekend staat als de Wason-selectietaak. Voor we uitleggen wat het belang van dit experiment is, kun je dit zelf uitvoeren.

Opdracht 6.1.
Vraag 1

A	D	4	7
---	---	---	---

Voor je liggen deze vier kaarten. Je weet dat op elke kaart op de ene zijde een getal staat, en op de andere zijde een letter. Nu wil je weten of de volgende uitspraak klopt:
Als op de ene zijde een klinker staat, dan staat op de andere zijde een even getal.
Welke kaarten moet je minstens omdraaien om te weten of deze uitspraak klopt? Noteer je antwoord.

Vraag 2

35	Water	Bier	14
----	-------	------	----

Voor je liggen deze vier kaarten. Je weet dat op elke kaart op de ene zijde de leeftijd van een persoon staat, en op de andere zijde wat deze persoon op een feestje drinkt. Nu wil je weten of de volgende uitspraak klopt:
Als een persoon bier drinkt, dan moet hij of zij ouder zijn dan 18 jaar.
Welke kaarten moet je minstens omdraaien om te weten of deze uitspraak klopt? Noteer je antwoord.

figuur 1

Over de auteur

Bert Zwaneveld is emeritus hoogleraar professionalisering van de leraar in het bijzonder in het wiskundeonderwijs en informaticaonderwijs van de Open Universiteit. E-mailadres: bert.zwaneveld@ou.nl

Een nomogram voor kwadratische vergelijkingen

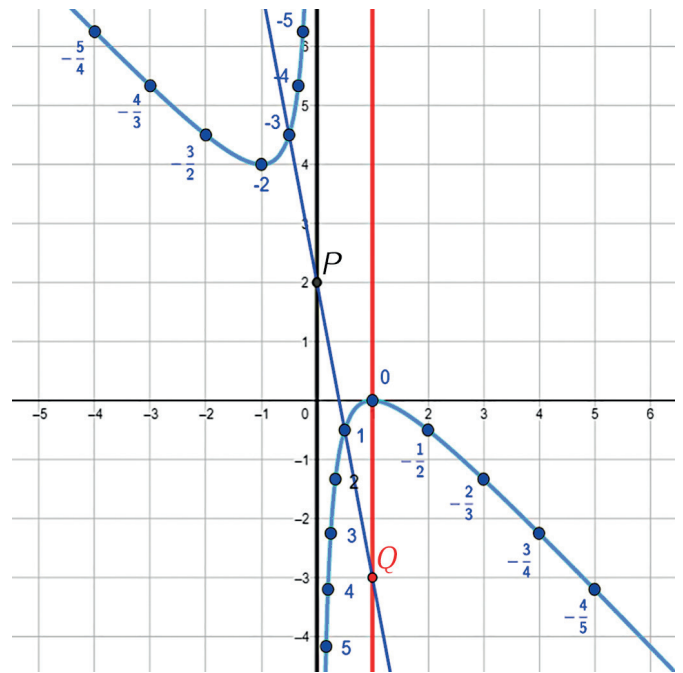
Een nomogram is een tweedimensionaal diagram waarin de waarde van een wiskundige functie bij benadering kan worden afgelezen, zonder dat er een berekening aan te pas komt. Je hebt alleen een potlood en een liniaal nodig, aldus Wikipedia. Jeroen Spandaw vraagt zich af of en hoe je een nomogram kunt construeren dat kwadratische vergelijkingen voor je oplost.

Inleiding

In dit artikel onderzoeken we een grafische methode om kwadratische vergelijkingen op te lossen. Een Delftse student civiele techniek vertelde me dat dergelijke technieken nog steeds worden gebruikt in de opleiding! Voor mij als wiskundige was het vooral een leuke puzzel om de correcte kromme te vinden en te bewijzen dat deze kromme inderdaad kwadratische vergelijkingen oplost. Als didacticus vind ik dit een aardig voorbeeld van de onderschatte aanpak om problemen op te lossen door te experimenteren, vervolgens de oplossing te raden en tot slot het raadwerk te verifiëren. We geven echter ook een 'rechtstreekse' oplossing. We eindigen dit verhaal met enkele variaties op het thema.

Kwadratische vergelijkingen oplossen met een nomogram

Figuur 1 laat zien hoe we met een nomogram de kwadratische vergelijking $t^2 + pt + q = 0$ in t kunnen oplossen voor gegeven coëfficiënten p en q . Het nomogram bestaat uit de parallelle verticale lijnen $x = 0$ (zwart) en $x = 1$ (rood), de lichtblauwe hyperbool h plus de in donkerblauwe cijfers aangegeven parametrisatie van deze hyperbool. Gegeven de coëfficiënten p en q tekenen we de punten $P(0, q)$ en $Q(1, q)$. In figuur 1 hebben we als voorbeeld de vergelijking $t^2 + 2t - 3 = 0$ genomen, dus $p = 2$ en $q = -3$. Vervolgens tekenen we de verbindingslijn PQ en snijden deze met de lichtblauwe hyperbool h . De bijbehorende parameterwaarden in donkerblauw zijn de oplossingen van $t^2 + pt + q = 0$. In het voorbeeld met $p = 2$ en $q = -3$ lezen we in figuur 1 af dat deze oplossingen $t = -3$ en $t = 1$ zijn.



figuur 1 Een nomogram voor $t^2 + pt + q = 0$

In dit artikel onderzoeken we waarom zo'n geparametriseerde kromme h bestaat die op deze manier alle kwadratische vergelijkingen $t^2 + pt + q = 0$ oplost en hoe we deze kromme met parametrisatie kunnen vinden.

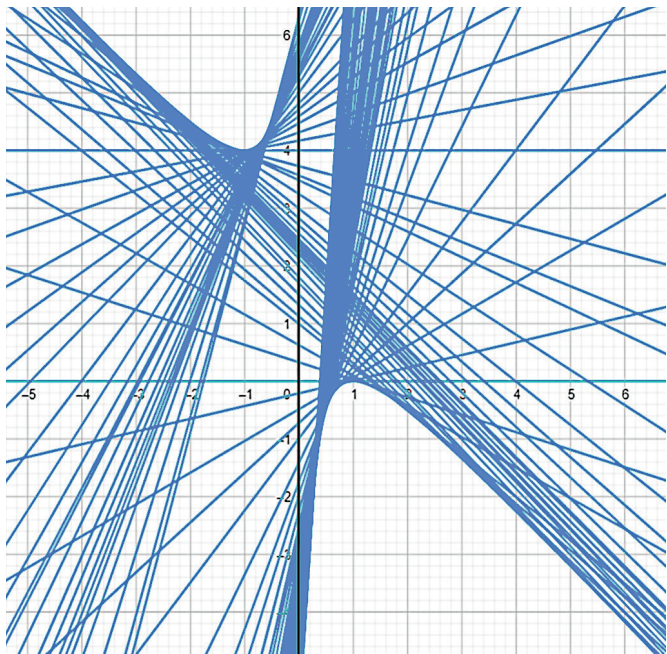
Een experiment in GeoGebra

De eerste gedachte die bij me opkwam toen Jelle Alten in onze lerarenopleiding dit nomogram presenteerde was: als de discriminant van $t^2 + pt + q$ gelijk is aan 0, dan vallen de twee snijpunten van de lichtblauwe kromme h met de verbindingslijn van $P(0, q)$ en $Q(1, q)$ samen, dus dan raakt de lijn PQ aan h . Laten we de verbindingslijnen PQ

met $p^2 = 4q$ 'kritieke verbindingslijnen' noemen. Daarna tekende ik in GeoGebra de lijn $x = 0$, nam een willekeurig

punt P op die lijn, definieerde het punt $Q = \left(1, \frac{(y(P))^2}{4}\right)$,

tekende de verbindingslijn PQ en koos voor die lijn de optie 'spoor aan'. Tot slot varieerde ik het punt P langs de y -as.



figuur 2 De familie verbindingslijnen PQ voor $p^2 = 4q$

Figuur 2 laat het resultaat van dit GeoGebra-experiment zien. We zien dat de familie van kritieke verbindingslijnen PQ inderdaad lijkt te raken aan een hyperbool h . Deze hyperbool lijkt de y -as als asymptoot te hebben. De x -as lijkt te raken aan de hyperbool in $(1, 0)$.

Dat doet ons vermoeden dat h wordt gegeven door de

vergelijking $y = \frac{a(x-1)^2}{x}$, omdat deze vergelijking

(voor $a \neq 0$) een hyperbool definieert die de x -as in $(1, 0)$ raakt en die de y -as als asymptoot heeft. Je kunt bewijzen dat we met de ene parameter a alle hyperbolen met die eigenschappen te pakken hebben, maar dat bewijs laten we hier achterwege, omdat we hieronder zullen verifiëren dat deze familie inderdaad leidt tot het gewenste nomogram. Op dit moment kunnen we deze familie van kegelsneden beschouwen als een *educated guess*.

Verderop in dit artikel zullen we trouwens ook een aanpak laten zien die niet berust op 'raden en verifiëren'. Ons GeoGebra-experiment suggereert verder dat de hyperbool door het punt $(-1, 4)$ gaat. Dat geeft $a = -1$, dus

$$h: y = -\frac{(x-1)^2}{x}.$$

Uiteraard is dit geen bewijs dat deze hyperbool kan worden gebruikt voor het oplossen van $t^2 + pt + q = 0$. Ten eerste weten we nog niet of de kritieke verbindingslijnen PQ raken aan h . Ten tweede weten we de parametrisatie (de getallen in donkerblauwe cijfers langs de kromme in figuur 1) nog niet. En ten derde weten we niet of de hyperbool h met de nader te bepalen parametrisatie ook werkt voor kwadratische vergelijkingen $t^2 + pt + q = 0$ met $p^2 \neq 4q$.

Verificatie dat we goed hebben geraden

De lezer kan zelf nagaan dat de verbindingslijnen PQ in het geval $p^2 = 4q$ inderdaad allemaal raken aan de hyperbool h .

(Substitueer $y = (\frac{1}{4}p^2 - p)x + p$ in $xy = -(x-1)^2$ en verifieer dat de resulterende kwadratische vergelijking in x discriminant 0 heeft.) Je kunt zelfs de coördinaten van het raakpunt R bepalen. Je vindt $x = \frac{2}{2-p}$ en $y = \frac{\frac{1}{2}p^2}{p-2}$ voor $p \neq 2$. Het unieke nulpunt van $t^2 + pt + \frac{1}{4}p^2$ is $t = -\frac{1}{2}p$, dus dit is de donkerblauwe parameterwaarde t die bij

het punt $R(x, y) = \left(\frac{2}{2-p}, \frac{\frac{1}{2}p^2}{p-2}\right)$ hoort. We herschrijven deze

coördinaten als functie van $t = -\frac{1}{2}p$ en vinden dan

$$R = \left(\frac{1}{1+t}, -\frac{t^2}{1+t}\right) \text{ voor } t \neq -1.$$

Wat gebeurt er voor $t = -1$? Dit is precies dan een nulpunt van $t^2 + pt + q$ als $q = p - 1$, dus als de helling van PQ gelijk is aan -1 . In dit geval is PQ parallel aan de scheve asymptoot van h . Als $p \neq 2$ dan heeft PQ precies één snijpunt met h in het (x, y) -vlak en als $(p, q) = (2, 1)$ (corresponderend met de vergelijking $(t+1)^2 = 0$) dan valt PQ samen met de scheve asymptoot $x + y = 2$ van h en zijn er helemaal geen snijpunten van PQ met h . (Kenners van de projectieve meetkunde begrijpen nu dat $t = -1$ correspondeert met het oneindige punt van de scheve asymptoot.)

We hebben nu de geparametriseerde nomogramkromme h gevonden! We weten echter nog niet of onze geparametriseerde kromme h ook werkt als $p^2 \neq 4q$.

Als $p^2 > 4q$ dan zou de verbindingslijn PQ de hyperbool h moeten snijden in twee punten en de bijbehorende donkerblauwe parameterwaarden t zouden de nulpunten van $t^2 + pt + q$ moeten zijn. Als $p^2 < 4q$, dan zou de verbindingslijn PQ de hyperbool h niet moeten snijden. Dit is allemaal te bewijzen, maar we laten dit graag aan de enthousiaste lezer over.

>

Zojuist bekeken we de verbindingslijnen PQ met helling -1 , dus het geval $q = p - 1$. Het is aardig om na te denken over horizontale verbindingslijnen, dus het geval $q = p$. Het snijpunt van de asymptoten $x = 0$ en $x + y = 2$ is het punt $C(0, 2)$. De hyperbool h is puntsymmetrisch in C . De lezer kan direct verifiëren dat $x \mapsto -x$ correspondeert met $y \mapsto 4 - y$. Figuur 1 suggereert wat deze puntspiegeling betekent voor de parameter t . We laten het aan de lezer over om dit te herontdekken en te verifiëren.

Alternatieve aanpak

We bekijken nu een geheel andere aanpak om de nomogram-hyperbool h en bijbehorende parametrisatie te vinden. In figuur 1 bekeken we het voorbeeld $t^2 + 2t - 3 = 0$ met $p = 2$ en $q = -3$.

De twee oplossingen zijn

$t = 1$ en $t = -3$ en die lezen we af aan de verbindingslijn

$\overline{(0,2)(1,-3)}$. Neem nu een andere kwadratische vergelijking met oplossing

$t = -3$, bijvoorbeeld $t^2 + 3t = 0$ met $p = 3$ en $q = 0$.

De bijbehorende verbindingslijn is $\overline{(0,3)(1,0)}$. Het snijpunt

van twee verbindingslijnen is $(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$, dus dit punt hoort op de nomogramkromme h en heeft parameterwaarde $t = -3$.

We moeten nog verifiëren dat voor *alle* kwadratische vergelijkingen $t^2 + pt + q = 0$ waarvan $t = -3$ een

oplossing is de verbindingslijn $\overline{(0,p)(1,q)}$ door het punt

$(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$ gaat. Dus als $9 - 3p + q = 0$, dan moet de lijn $y = (q - p)x + p$ door dit punt gaan. Even controleren... ja, klopt!

Wat we hier voor $t = -3$ hebben gedaan, kunnen we voor iedere waarde van t doen. Stel dat $t = T$ een nulpunt is van $t^2 + pt + q$, dus stel dat p en q voldoen aan $T^2 + pT + q = 0$. We nemen twee paren (p, q) die hieraan voldoen (voor gegeven T) en snijden de bijbehorende verbindingslijnen $y = (q - p)x + p$ van $P(0, p)$ en $Q(1, q)$. Bijvoorbeeld nemen we $(p, q) = (0, -T^2)$ en $(p, q) = (-T, 0)$. De bijbehorende verbindingslijnen PQ zijn $y = -T^2x$ en $y = Tx - T$.

Snijden geeft $x = \frac{1}{1+T}$ en $y = -\frac{T^2}{1+T}$.

Voor willekeurige p verifieer je eenvoudig dat de lijn PQ :

$y = (q - p)x + p$ door $(\frac{1}{1+T}, -\frac{T^2}{1+T})$ gaat als $q = -T^2 - pT$.

We hebben nu dus de parametrisatie

$$t \mapsto S(t) = (x, y) = \left(\frac{1}{1+t}, -\frac{t^2}{1+t} \right)$$

van de nomogramkromme h gevonden! Het is nu ook duidelijk dat deze geparametriseerde kromme inderdaad functioneert als nomogram: de verbindingslijn $\overline{(0,p)(1,q)}$ gaat precies dan door $S(T)$ als $t = T$ een nulpunt is van $t^2 + pt + q$. Het is niet lastig om de vergelijking voor h te vinden. Uit $x = \frac{1}{1+t}$

volgt dat $t = \frac{1-x}{x}$ en dus $y = -\frac{(1-x)^2}{x}$. Hiermee is ons

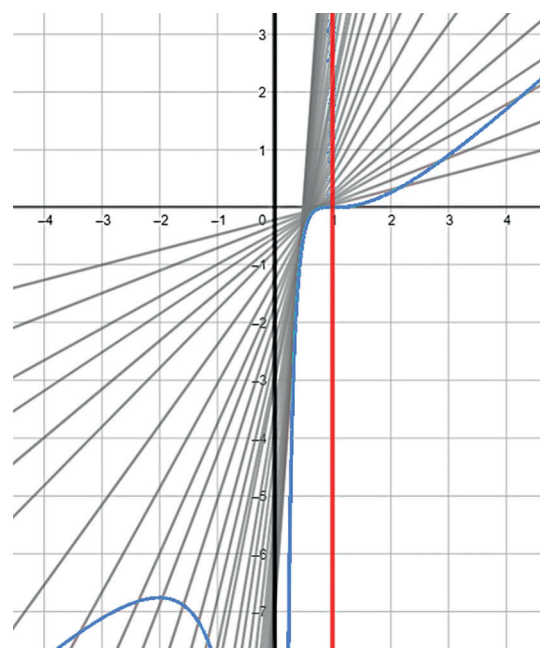
nomogram-probleem voor de vergelijking $t^2 + pt + q = 0$ opgelost!

Variaties

Dezelfde methoden kun je toepassen op de kubische vergelijking $t^3 + pt + q = 0$. Deze heeft een 'dubbeltellende' oplossing $t = T$ als de raaklijn aan de grafiek van $y = t^3 + pt + q$ in $t = T$ horizontaal is, dus als $T^3 + pT + q = 0$ en $3T^2 + p = 0$. Vullen we $T^2 = -\frac{1}{3}p$ in $(T^2 + p)T + q = 0$ in, dan vinden we $\frac{2}{3}pT = -q$.

Kwadrateren geeft $\frac{4}{9}p^2T^2 = q^2$, dus $-\frac{4}{27}p^3 = q^2$. Teken

in GeoGebra de lijn $x = 0$ en een willekeurig punt P op die lijn. Definieer het punt Q als $(1, \sqrt[3]{-\frac{4}{27}(y(P))^3})$ en teken de kritieke verbindingslijn PQ . Zet het spoor van die verbindingslijn aan en beweeg het punt P langs de y -as. Het resultaat is te zien in figuur 3.



figuur 3 Een nomogram voor $t^3 + pt + q = 0$

De alternatieve aanpak leidt tot de parametrisatie $S(t) = \left(\frac{1}{1+t}, -\frac{t^3}{1+t} \right)$ van de kromme $x^2y = (x-1)^3$.

Deze kromme is hiernaast in blauw aangegeven. In het vierde kwadrant raken de kritieke verbindingslijnen PQ inderdaad aan deze kromme. Maar hoe verklaar je het gedrag in het eerste en derde kwadrant? Een interessant geval is $(p, q) = (0, 0)$, corresponderend met de vergelijking $t^3 = 0$ en de verbindingslijn $PQ: y = 0$. Deze lijn is buigraaklijn aan de kromme in het punt $(1, 0)$. Waarom? Een ander interessant geval is $(p, q) = (-3, -2)$, corresponderend met $t^3 - 3t - 2 = 0$, dus met $(t+1)^2(t-2) = 0$. De bijbehorende verbindingslijn PQ is $y = x - 3$. Wat is er bijzonder aan de ligging van deze lijn ten opzichte van de kromme $x^2y = (x-1)^3$, wat is er bijzonder aan $(t+1)^2(t-2)$ en hoe verhouden deze zaken zich tot elkaar? Een eenvoudiger vraag om over na te denken is de volgende: kunnen we een nomogram ontwerpen voor $t^2 + pt + q = 0$ dat werkt bij $P(0, p)$ en $Q(q, 0)$ in plaats van $Q(1, q)$?

Dank aan Jelle Alten voor de kennismaking met nomografie. Jelle wees mij op de boeken [1] en [2]. Voor dit artikel heb ik die boeken (of artikelen over het onder-

werp op Wikipedia) opzettelijk niet ingekeken, omdat ik geen historicus ben of ingenieur die een nomogram wil toepassen om een vergelijking (bij benadering) op te lossen, maar een meetkundeliefhebber die onbevangen het probleem van de constructie van de nomogramkromme op mijn eigen manier wilde aanpakken. Maar wie weet welke mooie meetkunde problemen nog meer verborgen liggen in dergelijke onverwachte bronnen?

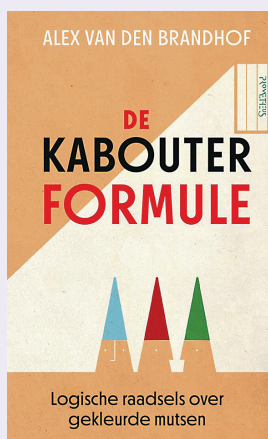
Noten

- [1] Van Veen, H.J. (1937). *Inleiding tot de nomographie*. P. Noordhoff N.V.
- [2] Le Heux, J.W.N. (1926). *Beginnelen der nomographie*. Kluwer.

Over de auteur

Jeroen Spandaw is universitair docent en lerarenopleider wiskunde aan de TU Delft.
E-mailadres: J.G.Spandaw@tudelft.nl

Kerstpuzzel



Onlangs verscheen dit boek van Alex van den Brandhof. Wij vroegen Alex of er toevallig nog een puzzel was die het boek niet gehaald heeft die we als kerstpuzzel konden gebruiken. Dat bleek het geval te zijn.

Een groep van n kabouters wordt gevangengehouden. Ze worden achter elkaar in een rij geplaatst.

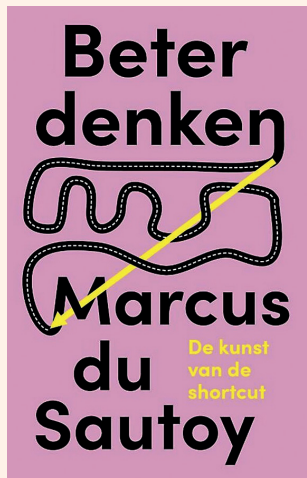
Eén van hen krijgt een rode muts op zijn hoofd, de rest een blauwe muts. Dat weten de kabouters, maar uiteraard wordt niet verteld wie de rode muts zal krijgen. Elke kabouter kan alleen de mutsen

van de kabouters vóór hem zien. Eén voor één wordt de kabouters gevraagd of ze hun mutskleur kennen – de kabouter achteraan eerst, daarna de kabouter vóór hem, enzovoort. De kabouters (die vooraf niet de gelegenheid krijgen om met elkaar te praten) moeten antwoorden met 'ja' of 'nee'. Iets anders mogen ze niet zeggen. Alle kabouters worden vrijgelaten als de roodgemutste kabouter 'ja' antwoordt. Als de $n - 1$ blauwe mutsen en de ene rode muts willekeurig worden verdeeld onder de n kabouters, hoe groot is dan de bevrijdingskans als n even is? En als n oneven is?

Stuur je oplossing uiterlijk 13 januari naar vakbladeuclides@nvw.nl, onder de goede inzendingen verloten we drie exemplaren van *De Kabouterformule*.



Beter denken



Titel: Beter denken

Ondertitel: De kunst van de shortcut

Auteur: Marcus du Sautoy

Uitgever: Uitgeverij Nieuwezijds B.V., 2023

319 pagina's, paperback

ISBN: 978-90-5712-564-5

Prijs: € 27,99

Shortcut

Wat Du Sautoy precies met een shortcut bedoelt, is niet makkelijk uit te leggen. Er is ook geen mooi Nederlands woord voor. Ik dacht eerst aan een afsnijding, een paadje binnendoor, maar dat doet geen recht aan het begrip. Het is meer een woord voor een wiskundig begrip dat cruciaal is voor een bewijs of oplosstrategie. Misschien zou 'Wiskundige Denkactiviteit' een goede vertaling zijn. Maar ook dat dekt de lading niet. Op blz. 107 schrijft Du Sautoy: 'In het grootste deel van dit boek bedoel ik met het woord shortcut een mentale verkorting van de tocht naar mijn bestemming.'

Verhalen

Het boek levert mooie voorbeelden en is voor elke wiskundeleraar zeer bruikbaar. Wiskunde is een denkactiviteit en leerlingen kunnen gestimuleerd worden door verhalen te vertellen. En dat doet Du Sautoy. Al in de inleiding komt het verhaal van de jonge Carl Friedrich Gauss die de eerste 100 getallen bij elkaar moest optellen en de meester verraste door meteen het goede antwoord te geven namelijk 5050. Zoals Du Sautoy het verhaal opschrijft, heb ik het nog nooit gehoord, maar het klinkt goed en menig leerling zal, wanneer zijn docent dit verhaal vertelt, getriggerd worden. Een mooi begin voor telstrategieën.

Patronen

Als voorbeeld dat het boek bruikbaar is voor in de klas noem ik het begin van hoofdstuk 1 'De patroon-shortcut'. *Je hebt een trap in je huis met tien treden. Je kunt de trap opgaan met één of twee treden tegelijk. Je kunt bijvoorbeeld tienmaal een tree nemen of vijfmaal twee treden om boven te komen. Of combinaties van één en twee treden tegelijk. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er om boven te komen?*

Een shortcut bij het nadenken over een patroon in aantallen. Dus niet alle mogelijkheden opschrijven, maar regelmaat ontdekken. Dat gaat als volgt met behulp van kortere trappen:

1 trede 1

2 treden 1,1 of 2

3 treden 1,1,1 of 1,2 of 2,1

4 treden 1,1,1,1 of 1,1,2 of 1,2,1 of 2,1,1 of 2,2

Aantal mogelijkheden is respectievelijk 1, 2, 3, 5 en er ontstaat een patroon. Vijf treden zou dan misschien acht mogelijkheden geven. Ja dat klopt, want bij vijf treden kun je de mogelijkheden van drie treden aanvullen met een tweestap of de mogelijkheden van vier treden aanvullen met een enkele stap. We hebben dus te maken met de rij van Fibonacci. Verder in het hoofdstuk wordt de relatie met de driehoek van Pascal uitgelegd. Bij tien treden zijn er

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{9}{1} + \binom{8}{2} + \binom{7}{3} + \binom{6}{4} + \binom{5}{5} = 89$$

mogelijkheden.

“Voor elke wiskundeleraar die zijn les wil opwaarderen door verhalen te vertellen.”

Grote diversiteit

De diversiteit in de hoofdstukken is groot en de tekst goed leesbaar. Elk hoofdstuk begint met een probleem. Als voorbeeld hiervan het hoofdstuk over de shortcut: *Je bent uitgenodigd voor een spelshow. Er zijn 21 kistjes, en in elk kistje zit een geldprijs. Je mag telkens één kistje openen. Het geld in het laatste kistje dat je geopend hebt, mag je houden. Maar als er eenmaal een nieuw kistje geopend is,*

KWG Wintersymposium

2024: Inzichtelijk abstract

kun je niet terug en het geld uit het vorige kistje opeisen. Probleem is dat je geen idee hebt hoe groot de prijs zal zijn. Er kan een kistje zijn met een miljoen euro erin. Of misschien zit in elk kistje slechts een prijs van minder dan een euro. Je uitdaging: hoeveel kistjes moet je openen zodat je de grootste kans maakt om de grootste prijs te krijgen?

En een tweede voorbeeld: Waar zou jij je geld opzetten?

1. Zes dobbelstenen gooien en minstens één zes krijgen, of 2. Twaalf dobbelstenen gooien en minstens twee zessen krijgen, of 3. Achttien dobbelstenen gooien en minstens drie zessen krijgen. Een instap die uit de geschiedenis van de kansrekening komt.

Na de introductie volgt een uitvoerige beschrijving van allerlei verwante onderwerpen uit verschillende disciplines als geschiedenis, economie of anderszins. Op een zeker moment komt Du Sautoy op zijn instap terug en legt het probleem uit. Door de veelheid aan voorbeelden die hij gebruikt is het een schat aan informatie die bruikbaar is voor elke wiskundeleraar die zijn les wil opwaarderen door verhalen te vertellen.

Tot slot

Zijn er ook minpunten? Jawel, er zijn soms storende drukfouten: op blz. 60 staat $60 = 2 \times 3$ ipv $60 = 2 \times 30$; op blz. 168 staat $25d - 10td - 5d^2/d = 25 - 10t - 5d$; ik mis hier haakjes en ten slotte op blz. 214 wordt in een voorbeeld beschreven dat patiënten aan spinnen blootgespeld worden, maar dat zal wel blootgesteld moeten zijn. Is het boek een aanrader voor een wiskundedo-cent? Zeker wel. Er worden veel mooie wiskundeverhalen verteld die doorgegeven kunnen worden aan leerlingen. Daarnaast de vele toepassingen uit andere vakgebieden die een les levendiger kunnen maken. Ik zou zeggen: kopen en verhalen vertellen.

Over de auteur

Ab van der Roest, wiskundedocent in ruste.
E-mailadres: a.b.vanderroest@ziggo.nl

Eye-openers uit de algebraïsche topologie en algebraïsche meetkunde

Zaterdag 13 januari 2024, Academiegebouw van de Universiteit Utrecht (Domein)

Tijd: 10.30 – 16.00 uur



Programma

Er zijn vier voordrachten:

- Dr. Thomas Rot (Vrij Universiteit Amsterdam) Een touw heeft een even aantal uiteinden. Over doolhoven, cyclonen en de Kleinse fles.
- Dr. Valentijn Karemaker (Universiteit Utrecht) Moduli ruimten – een familiegeschiedenis. Over families van meetkundigen objecten en wat invarianten je daarover leren.
- Dr. Renee Hoekzema (Vrije Universiteit Amsterdam), Knippen en plakken in de 21ste eeuw. Over de wiskunde van de schaar(congruentie).
- Prof. Dr. Jaap Top (Rijksuniversiteit Groningen). Over een onderwerp uit de algebraïsche meetkunde.

Daarnaast is er een markt. Het symposium is in de eerste plaats bestemd voor docenten wiskunde, maar ook voor leerlingen en collega's van andere vakgebieden kan het symposium interessant zijn. Alle belangstellenden zijn van harte welkom.

Zie voor het volledige programma en aanmelding:

<https://sites.google.com/view/kwgwintersymposium2024/home>

Kosten

KWG-leden € 40, niet-leden € 45, leerlingen, studenten en standhouders € 25. De bijdrage is inclusief lunch.

Meer informatie: Rogier Bos, r.d.bos@uu.nl.

Formatief handelen in de wiskundeles

Deel 6: Een volledig formatieve aanpak

Formatief handelen, ... heeft er weer een onderwijsgoeroe iets uit zijn hoge hoed getoverd en kunnen we rustig afwachten tot de hype is overgewaaid of hebben we hier iets blijvends te pakken? Dit artikel is het zesde en laatste deel van een serie waarin betoogd wordt dat formatief handelen een essentiële toevoeging is aan je les en behoort tot gewoon goed lesgeven. In dit deel worden de inzichten uit de eerste vijf artikelen samengevoegd tot één overkoepelende werkwijze.

Inleiding

In de eerste twee delen van deze serie heb ik verteld dat het indelen van doelen in kennis-, vaardigheids- en probleemoplosdoelen helpt om de juiste methode van formatief toetsen te kiezen bij elk leerdoel, aangezien die voor elk type doel anders is. In de delen 3, 4 en 5 hebben we gekeken naar kennisdoelen, vaardigheidsdoelen en doelen voor probleemoplossen. In dit deel gaan we kijken wat het betekent voor de flow van je lessen als je alles integreert. Uiteraard is dit slechts een mogelijke aanpak, dus voel je vooral uitgedaagd om je eigen aanpak te ontwerpen. De materialen die ik laat zien, zullen afkomstig zijn uit verschillende jaarlagen uit onder- en bovenbouw.

De lesplanner en de toets

Het leerproces begint voor onze leerlingen met het uitdelen van de lesplanner (in figuur 1 een uitsnede) en eindigt met het afnemen van een toets. Je zou echter ook kunnen zeggen dat de toets het startpunt is voor het volgende onderwerp. Daarover later meer.

Meteen bij het begin van het leerproces krijgen leerlingen zicht op welke leerdoelen er zijn. Leerlingen moeten kennis hebben over de concepten die genoemd worden

in kolom 2. Ze moeten de vaardigheden uit kolom 3 beheersen. In kolom 4 staan probleemoplosopgaven. Om deze tot een goed einde te kunnen brengen moeten leerlingen hun probleemoplosvaardigheden op peil hebben.

Het leerproces eindigt met een toets met daarin ook weer heel herkenbaar kennis (figuur 2), vaardigheden (figuur 3) en probleemoplossen (figuur 4). De verhouding in de toets tussen deze onderdelen is bij ons 1 : 3 : 4.

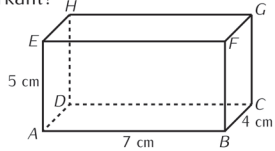
Kennisvragen

1p 1 Hoeveel dimensies heeft een vierkant?

Zie de balk hiernaast

1p 2 Hoeveel ribben heeft de balk

1p 3 Hoeveel platte vlakken heeft een cilinder?



figuur 2 Kennisvragen uit een kader mavo toets in klas 1

Hoofdstuk 1: Tabellen en grafieken			
38 18-09	Absoluut en relatief Percentages en verhoudingen (Groeif)actoren	Rekenen met procenten: V1, V2, V3, V4, V5, 2, 4 5, 6, 7 Rekenen met verhoudingen: 13, 14, 15	3b, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19 20
39 25-09	Wetenschappelijke notatie Eenheden van lengte, oppervlakte en inhoud	Berekeningen invoeren op de GR: 22, 23, 24, 25 Omrekenen van eenheden: 29, 31 Rekenen met tijd, afstand en snelheid: 35, 36	28, 32, 33, 34, 37, 38, 39

figuur 1 Planner 4 havo wiskunde A bij Getal & Ruimte editie 12

Vaardigheden

- 2p 6 Teken een cirkel met een straal van 4 cm.
- 2p 7 Teken een vierkant met zijden van 4 cm.
- 2p 8 Teken een rechthoek met zijden 3 cm en 5 cm.
(Kader)

De figuur hieronder staat ook op het werkblad



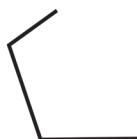
- 2p 9 Je ziet in het plaatje twee zijden van een rechthoek.
Maak de rechthoek op het werkblad af.

figuur 3 Vaardigheidsvragen uit een kader mavo toets in klas 1

Maak de vijfhoek af

Hieronder zie je drie van de vijf zijden van een vijfhoek.
De figuur staat ook op het werkblad. De twee zijden die niet
getekend zijn, zijn 6 cm en 8 cm.

- 2p 15 Maak de tekening van de vijfhoek af.



figuur 4: Probleemoplosvraag uit een kader mavo toets in klas 1

Deze toets wordt ingezet als summatieve toets voor de wiskunde-inhoud. Als de toets is afgenomen en beoordeeld, gaat het onderwerp even de ijskast in om pas later in het jaar of in het volgend jaar weer terug te komen. Dezelfde toets wordt echter ook formatief ingezet. Leerlingen krijgen namelijk naast een cijfer ook drie percentages. Deze percentages geven aan hoeveel procent van de punten een leerling behaald heeft op respectievelijk kennis, vaardigheden en probleemoplossen. Deze feedback kunnen leerlingen gebruiken om hun leerproces richting de volgende toets beter vorm te geven.

In het nu volgende deel van dit artikel zal ik ingaan op hoe elk van de drie onderdelen in de les wordt aan-

geboden bij de eerste kennismaking, hoe leerlingen kunnen vaststellen of ze de doelen behaald hebben en wat leerlingen kunnen doen als blijkt dat ze de doelen nog niet behaald hebben.

Kennis

Kennis breng ik aan door een script te schrijven met een aantal vragen uit het boek die ik eventueel aanpas, zodat alle relevante aspecten van een nieuw concept aan de orde komen. Bij het onderwerp differentiequotiënt (gemiddelde verandering) is het bijvoorbeeld belangrijk dat je de leerlingen een gemiddelde verandering laat berekenen, maar ook een verbindingslijnstukje laat tekenen om de link te leggen tussen de richtingscoëfficiënt van een lijn en de gemiddelde verandering. Ik laat de leerlingen deze opgaven maken op verticale whiteboards, zodat ze bij anderen kunnen zien of hun antwoord overeenkomt met de poging van anderen. Daarnaast kan ik zelf zien of elk groepje van drie (of twee als dat nodig is) het begrepen heeft. Om zeker te weten dat iedereen in het groepje het dan ook snapt is het wel nodig dat leerlingen kritisch zijn. Binnen het groepje moeten ze ervoor zorgen dat als er een antwoord staat, ze ook allemaal begrijpen wat er staat en ze mogen bij andere groepjes kijken voor ideeën, maar ze moeten niet alleen de antwoorden overschrijven. De manier van werken staat beschreven in *Building Thinking Classrooms*.^[1]

$$\text{Differentiër } f(x) = \frac{7}{(3x+1)^2}$$

- A $f'(x) = -42(3x+1)^{-1}$
- B $f'(x) = -42(3x+1)^{-3}$
- C $f'(x) = -14(3x+1)^{-3}$
- D $f'(x) = 7(3x+1)^{-2}$

figuur 5 Diagnostische vraag van diagnostischevragen.nl

In lessen later in het leerproces kun je diagnostische vragen inzetten, zoals beschreven in *Volgens Barton* van Craig Barton.^[2] Zie figuur 5 voor een voorbeeld van de site *diagnostischevragen.nl*. Barton beschrijft dat je elke les begint met een kleine selectie van diagnostische vragen, die niet per se tot de toetsstof behoren en elke vraag in 10 seconden laat beantwoorden. Daar zou ik dan in ieder geval ook elke keer twee vragen bij stoppen die passen bij het onderwerp waar we op dat moment mee bezig zijn.

Vaardigheden

Vaardigheidsdoelen leer ik aan door leerlingen wederom op verticale whiteboards te laten werken, zodat ik kan zien of leerlingen de vaardigheden in hun groepje van drie daadwerkelijk kunnen uitvoeren. Als leerlingen de eerste keer in een groepje hebben laten zien dat ze de vaardigheid met hun groepje kunnen uitvoeren, krijgen ze een set opgaven die ze in de les of thuis kunnen maken om hun begrip te toetsen. Ze krijgen hierbij ook meteen de antwoorden, zodat ze zelf vast kunnen stellen of ze de vaardigheid beheersen.

Tot zo ver het aanleren van nieuwe vaardigheden. Enige tijd later volgen lessen (aangevuld met tijd thuis, als het nodig is) waarin leerlingen werken aan een blad met opgaven, die ze formatief kunnen inzetten. Vergelijk het blad uit figuur 6 met de planner uit figuur 1. De namen van de vaardigheden op de planner staan ook op het formatieve opgavenblad. Op dit blad houden leerlingen door codes in de vakjes te schrijven bij op welke manier ze die opgave gemaakt hebben.

De codes die leerlingen kunnen gebruiken zijn ✓ (in mijn eentje gelukt), *S* (alleen een slordigheidsfoutje gemaakt), *G* (in een groepje gelukt), *H* (met hulp gelukt), *X* (niet gelukt) en *N* (niet aan kunnen beginnen). Leerlingen moeten proberen om in elke rij het meest rechter vakje te voorzien van twee vinkjes achter elkaar of een *G* en een vinkje achter elkaar. Die twee positieve beoordelingen moeten wel met enige tijd ertussen gescoord worden en ze moeten niet vlak ervoor uitleg gehad hebben.

Probleemoplossend vermogen

Het probleemoplossend vermogen is het meest ingewikkeld aan te leren. Bij kennis- en vaardigheidsdoelen kun je vaststellen of alle doelen behaald zijn. Bij kennis heb je daar al veel vragen voor nodig om alle aspecten van het concept voldoende te hebben belicht, maar zeker bij vaardigheden is het redelijk overzichtelijk. Bij probleemoplossen ligt het een stuk ingewikkelder. Het leren probleemoplossen kun je doen door als didactiek *teaching through problemsolving* (TTP) te gebruiken of *building thinking classrooms* (BTC). Het voert te ver om hier in dit artikel op in te gaan. Bottom line is dat leerlingen de nieuwe kennis opdoen door zelf al probleemoplossend bezig te zijn. Als de leerlingen de nieuwe concepten met bijbehorende vaardigheden hebben leren kennen en deze in de vingers hebben, kun je het leerproces bij dit onderwerp afronden door ze één les in de week de *problemen* uit de methode voor te leggen. Als ik het heb over problemen, doel ik op de opgaven die niet een routinematige manier van oplossen vragen, maar waarbij leerlingen echt moeten nadenken over welke stukjes

			
Rekenen met procenten	Bereken 12% van 760. Bereken hoeveel % 24 van 130 is. Een hoeveelheid neemt af van 120 naar 75. Bereken de procentuele afname.	Een hoeveelheid van 20 000 neemt met 0,03% af. Bereken de nieuwe hoeveelheid. Een hoeveelheid neemt toe van 120 naar 600. Bereken de procentuele toename.	Een hoeveelheid neemt toe met 13% tot 170. Wat was de hoeveelheid voor de toename?
Rekenen met verhoudingen	In een klas is de verhouding voetballers en niet-voetballers 2:5. Bereken hoeveel van de 28 leerlingen voetballen.	Een grote partij fruit bestaat uit appels, peren en pruimen. De soorten zijn qua gewicht verdeeld in de verhouding 3:4:5. Er is 120 kg peren. Hoeveel kg appels zijn er?	
Omrekenen van eenheden	5,2 dm = ... dam 3m ³ = ... cm ³	3 cl = ... hl 2ha = ... are	4,2 cl = ... mm ³ 250ha = ... km ²

figuur 6 Rubric met vaardigheden

kennis en vaardigheden ze met elkaar combineren. Dit doe ik dan weer in groepjes van drie leerlingen op de whiteboards, zodat ze met elkaar kunnen bespreken hoe ze het het beste kunnen aanpakken. Op die manier zien ze meerdere routes naar het eindantwoord en vergroten ze hun vermogen om te kiezen uit de verschillende oplossingsstrategieën.

“Formatief handelen gaat om het veranderen van de mindset van docenten en leerlingen.”

Evaluatie van het leerproces

Eerder noemde ik de drie percentages die een leerling naast het cijfer nog scoort op de toets. Deze percentages kunnen de leerling zicht geven op hoe het leerproces aangepast kan worden. Scoort een leerling slecht op kennis, dan moet de leerling zich meer verdiepen in waarom iets werkt en niet alleen het trucje kunnen uitvoeren. Dit betekent vaak dat er meer vragen in de les gesteld moeten worden en dat er een actievere bijdrage geleverd moet worden tijdens het aanbrengen van nieuwe kennis. Als een leerling slecht scoort op vaardigheden, dan zal de leerling op tijd thuis moeten checken of de vaardigheden beheerst worden om er eventueel in de les vragen over te stellen en daarna de vaardigheden verder in te oefenen. Als het bij probleemoplossen misgaat en kennis en vaardigheden kunnen ook een stuk beter, dan ligt het startpunt bij kennis en vaardigheden. Als juist kennis en vaardigheden goed gaan, kan de leerlingen daar misschien iets minder tijd in steken en meer aan de slag gaan met de probleemoplossingen. Het zou goed zijn om dan eens te kijken hoe de leerlingen met de uitwerkingen omgaat en welke rol de leerling in de les kiest op het moment dat er aan problemen gewerkt wordt.

Zelf aan de slag met de sectie

Binnen onze sectie werken we tijdens sectievergaderingen (die eigenlijk meer werkmiddagen zijn) continu aan het maken van materialen zoals hierboven genoemd. De regedingetjes zijn verplaatst naar de wandelgangen en appgroepen. Als je met de sectie een slag wilt maken op dit vlak is het noodzakelijk dat je dit gezamenlijk aanpakt. Uiteraard kun je ook zelf wel een paar elementen aanpakken, maar dat is lang niet zo effectief als wanneer je dat samen doet.

Mindset in plaats van werkvorm

Wat ik met name heb geprobeerd duidelijk te maken is dat formatief handelen niet gaat om het implementeren van een aantal werkvormpjes, zoals exit-tickets, diagnostische vragen of dergelijke. Het gaat om de mindset die leerlingen en docent moeten veranderen. Weg van het vullen van het schrift (als doel op zich) en richting het voortdurend checken of de doelen behaald zijn en bijsturen als blijkt dat dit niet het geval is. Hierbij moet je vermijden dat je je als docent een hele administratie op de hals haalt.

Mocht je willen sparren over dit onderwerp of graag materialen willen zien, die wij gebruiken, laat het dan vooral weten.

De zes delen van de serie Formatief handelen in de wiskundeles zijn gebundeld tot één pdf.



vakbladeuclides.nl/993formatief_handelen

Noten

- [1] Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms*. Sage Publications Inc.
- [2] Barton, C. (2019). *Volgens Barton*. Uitgeverij Phronese.

Over de auteur

Maarten Müller is werkzaam als eerstegraads docent wiskunde aan het Marianum in Groenlo en verzorgt scholingen aan docenten of secties.

E-mailadres: m.muller@marianum.nl



Het Flzier gericht op...

Bèta-activiteiten voor meisjes

Het Freudenthal Instituut heeft bèta-activiteiten ontwikkeld voor meisjes (leeftijd 11-16 jaar), van werkbladen voor een half uur tot grotere activiteiten voor minimaal een dag, tot en met een complete 'summerschool' van enkele dagen. Afgelopen drie jaar werd geëxperimenteerd met deze activiteiten binnen de GirlsClub van U-Talent^[1], en in het Europese project GEM.^[2] Hieronder laten we enkele voorbeelden zien, en iets van het achterliggende onderzoek.

Inleiding

Uitgangspunt is dat meisjes het soms als prettig kunnen ervaren als activiteiten worden uitgevoerd met alleen maar meisjes. De activiteiten zijn misschien niet altijd wezenlijk anders dan voor gemengde groepen, maar het 'klimaat' en de focus waarin de activiteiten worden uitgevoerd geven accenten die nuttig kunnen zijn om meisjes (en de betrokken docenten) anders naar hun eigen mogelijkheden te laten kijken.

Wat spreekt meisjes aan?

Het gaat bij het aanbieden van bèta-activiteiten in feite altijd om pedagogische en didactische keuzes die leiden tot 'goed onderwijs', zoals zorgen voor een veilige leeromgeving, uitdagende maar niet te moeilijke taken, passende feedback, creëren van een gevoel van verbondenheid, autonomie en competentie. Soms lijkt het verstandig om voor een specifieke groep leerlingen en bij specifieke vakgebieden bepaalde accenten te leggen. Uit onderzoek^{[3], [4]} blijkt dat meisjes meer geïnteresseerd zijn in bètavakken als docenten hun laten zien hoe ze dit kunnen gebruiken om bij te dragen aan verbetering van maatschappelijke situaties.

Dit kunnen bijvoorbeeld toepassingen zijn in de geneeskunde, voor het verminderen van afval of het tegengaan van klimaatverandering. De beste manier om meisjes te overtuigen om bètavaardigheden te verwerven is te benadrukken hoe die vaardigheden anderen helpen.^[5] Sociaal-maatschappelijke kwesties (Socio-Scientific Issues) bieden hiervoor mogelijkheden. Dit type vraagstukken biedt ook de mogelijkheid om kwesties vanuit meerdere perspectieven te onderzoeken.

Reacties van meisjes uit de Girlsclub (op basis van een enquête onder de deelnemers):

'De Girlsclub was veel uitgebreider dan op school en we deden veel met programmeren. Ik was verbaasd over hoeveel kanten wis/inf/na hebben.'

'Je leert hoe je wiskunde in het dagelijks leven kunt gebruiken.'



figuur 1

Girl-of-the-Day

Er blijkt een positief en significant verband te bestaan tussen het aandeel vrouwelijke bètadocenten op een middelbare school en de waarschijnlijkheid dat een vrouwelijke leerling een bètarichting kiest.^[6] Daarom werden de activiteiten meestal begeleid door vrouwen, die dan een rolmodel vormden. Daarnaast werd er bij elke bijeenkomst van de 'girls-club' een 'girl-of-the-day' uitgenodigd: een jonge vrouwelijke bètawetenschapper of -professional, die vertelde over haar 'dagelijks werk' en ook over de keuzes in studie en werk die hen daar hadden gebracht. In figuur 2 zie je twee 'girls-of-the-day'.



Lydia

Nationale politie, digitaal re-
chercheur

o.a. bezig met bestrijding van
cybercrime.



Fleur

PostNL, junior data scientist

o.a. bezig met het optimaliseren
van het postbezorgingssysteem

figuur 2

Reacties van meisjes op de 'Girl-of-the-day':

'Ze waren zelf enthousiast over het onderwerp dat ze bespraken en het onderwerp was interessanter dan ik had verwacht.' 'Ze vertelden over hun dagelijks leven, hun hobby's, en dan begrijp je beter hoe ze gestudeerd hebben en wat ze nu voor werk doen.'

Veilige leeromgeving

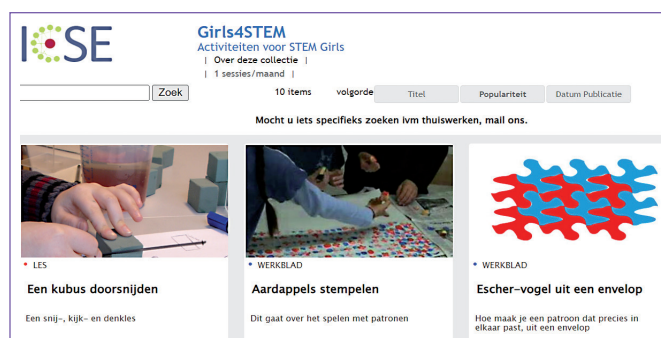
Natuurlijk, zoals altijd in onderwijs, is een veilige leeromgeving een noodzakelijke voorwaarde. Meisjes hebben vaak de voorkeur voor een speciale feedbackcultuur, waarin bijvoorbeeld bij 'falen' wordt verwezen naar een gebrek aan inspanning in plaats van gebrek aan competentie, en de activiteiten moeten zo worden opgezet dat ze succes kunnen ervaren en erkenning kunnen krijgen. Een genderneutrale omgeving helpt de meisjes om uit hun comfortzone te stappen en bèta-activiteiten uit te proberen.

Werkvormen

Ook coöperatieve werkvormen, zoals groepswork of denken-delen-uitwisselen dragen bij aan het vergroten van leersucces bij meisjes, omdat het ieder lid van de groep in staat stelt te werken volgens zijn of haar competenties om tot een succesvol resultaat komen. Een afsluitende activiteit voor het uitwisselen van bevindingen of het presenteren van een zelfontwikkeld product werkt bijvoorbeeld positief op de motivatie. Verder is aangetoond dat onderzoekend leren (Inquiry Based Learning) bevorderlijk is voor de interesse van meisjes in bètavakken en het enthousiasme waarmee ze zich bezighouden met daaraan gerelateerde projecten.^[7]

Lesmaterialen

Zoals gezegd, de lesmaterialen zijn niet wezenlijk anders dan wat voor de 'gewone lessen' gebruikt wordt. Toch hebben we enkele materialen bij elkaar gezet waarbij we de specifieke ervaring hebben hoe dit materiaal werkt met alleen maar meisjes, zie figuur 3.^[8]



figuur 3

De materialen zijn gratis te gebruiken, er staat aangegeven wat je ervoor nodig hebt en hoe lang het ongeveer duurt. We willen hier graag ook nog de landelijke Girls' Day op 18 april 2024 noemen.^[9] Deze activiteit, aangeboden door VHTO, is een uitgelezen mogelijkheid om eens een kijkje te gaan nemen bij een 'vrouw op de werkplek', of om een 'Girl-of-the-day' uit te nodigen op school.

Noten

- [1] Zie <https://u-talent.nl/girlsclub>
- [2] Empower Girls to Embrace their Digital and Entrepreneurial Potential. Zie: elwier.nl/gem/ en icse.eu.
- [3] Luo, T., So, W.W.M., Wan, Z.H., & Li, W.C. (2021). STEM stereotypes predict students' STEM career interest via self-efficacy and outcome expectations. *International Journal of STEM Education*, 8(1), 1-13. <https://doi.org/10.1186/s40594-021-00295-y>
- [4] Wieselmann, J.R., Roehrig, G.H., & Kim, J.N. (2020). Who succeeds in STEM? Elementary girls' attitudes and beliefs about self and STEM. *School Science and Mathematics*, 120(5), 297-308. <https://doi.org/10.1111/ssm.12407>
- [5] Milgram, D. (2011). How to Recruit Women and Girls to the Science, Technology, Engineering, and Math (STEM) Classroom. *Technology and Engineering Teacher*, 71(3), 4-11.

- [6] Stearns, E., Botta, M.C., Davalos, E., Mickelson, R.A., Moller, S., & Valentino, L. (2016). Demographic Characteristics of High School Math and Science Teachers and Girls' Success in STEM. *Social Problems*, 63(1), 87-110. <https://doi.org/10.1093/socpro/spv027>
- [7] Beyond bias and barriers: Fulfilling the potential of women in academic science and engineering. Committee on Maximizing the Potential of Women in Academic Science and Engineering (US), 2007

- [8] Zie: https://fisme.science.uu.nl/publicaties/subsets/girls4stem_nl/
- [9] Zie: <https://www.vhto.nl/agenda/girls-day-2023/>

Over de auteurs

De auteurs werken bij het Freudenthal Instituut en zijn betrokken bij verschillende projecten op het gebied van wiskunde/science en 'gender'. E-mailadres: m.wijers@uu.nl

Wis en Waarachtig



Lonneke Boels gepromoveerd

Op 20 september jl. promoveerde Lonneke Boels aan de Universiteit Utrecht op een proefschrift over de statistische gecijferdheid van middelbare scholieren en hoe je deze kunt ontwikkelen via histogrammen. Bij dit onderzoek werden de oogbewegingen van leerlingen en docenten gemeten terwijl ze statistische grafieken zoals histogrammen interpreteerden. Inzicht in hardnekkige misinterpretaties van veel leerlingen en sommige docenten wordt gebruikt om het statistiekonderwijs op de middelbare school te verbeteren. Lesmateriaal gebaseerd op de theorie van belichaamde instrumentatie is daarvoor ontwikkeld en uitgetest met leerlingen.

Lonneke schrijft regelmatig in dit tijdschrift, o.a. in de rubrieken Kleintje Didactiek en Wiskunde Digitaal. Sinds vorig jaar is Lonneke bestuurslid van de NVvW en is zij werkzaam als senior onderzoeker binnen het lectoraat Wiskundig en Analytisch Vermogen van Professionals van Hogeschool Utrecht.

Bron: <https://www.hu.nl/onderzoek/onderzoekers/lonneke-boels>



Een aantal deelnemers vestigde een nieuw wereldrecord: ze legden met 6250 identieke tegeltjes een aperiodieke vloer van grofweg drie bij drie meter.

Vlaams wiskundefestival

Platform Wiskunde Vlaanderen, zo'n twee jaar geleden opgericht, organiseerde op 17 september het eerste Vlaamse Wiskundefestival (*MathFest*). Het werd gehouden rondom de Sterrenwacht te Brugge en de belangstelling was erg groot. Er waren veel doe-activiteiten voor kinderen, er waren lezingen door gerenommeerde

Vlaamse wiskundigen, er was een recordpoging 'aperi-
odieke betegelingen' met het nieuwe Einstein tegeltje,
een Vlaams kampioenschap 'exotische sudoku oplossen',
een boekenstand en nog veel meer. Ook Pythagoras was
vertegenwoordigd met het project *Sheedz* waarbij kinderen
dodecaëders konden versieren met een patroon. Meer
informatie is te vinden op de webpagina [www.platform-
wiskunde.be](http://www.platformwiskunde.be). Wellicht een idee om ook een keer in
Nederland te organiseren?

Bron: <http://www.platformwiskunde.be>

Tentoonstelling 400 jaar mechanische rekenmachines

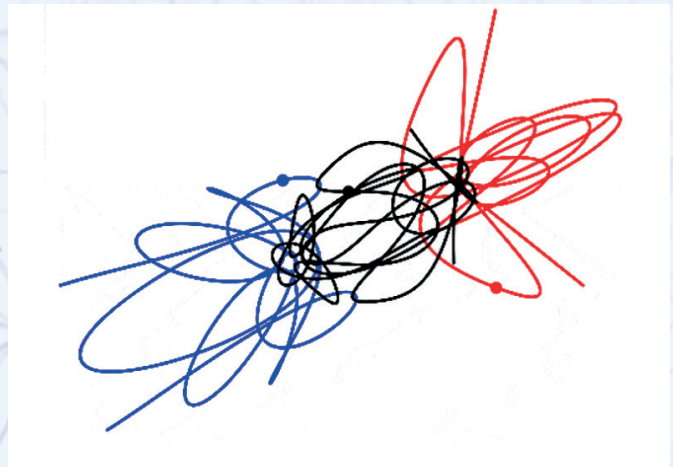


replica's van de Schickard en Leibnizmachines en tal
van andere hoogtepunten uit de geschiedenis van het
mechanisch rekenen. De tentoonstelling werd geopend op
22 september jl. en is nog tot en met 6 september 2024
op werkdagen te bezichtigen in Antwerpen, op campus
Groenenborger, dagelijks van half negen tot half vijf.

Bron: https://www.vvw.be/400_jaar_mechanisch_rekenen/

Ruim 12.000 oplossingen voor drielielichamenprobleem

Drie hemellichamen kunnen in stabiele banen om elkaar
heen bewegen. Neem bijvoorbeeld de zon, de aarde en de
maan. De vraag of er ook andere manieren zijn om drie
stabiele banen te creëren, houdt wiskundigen al meer dan
driehonderd jaar bezig. In 1887 schreef Oskar II, koning
van Zweden, hierover een prijsvraag uit. Twee jaar later
werd de bijdrage van Henri Poincaré bekroond. Weliswaar
loste hij het probleem niet op, maar ontdekte iets veel
interessanter: chaos (zie ook Zebra 16).



Naar aanleiding
van het 400-jarig
jubileum van de
eerste rekenma-
chine van Wilhelm
Schickard heeft
een aantal
medewerkers van
de Universiteit
Antwerpen een
tentoonstelling
samengesteld over
400 jaar mecha-
nisch rekenen.
Deze kleine maar
fijne tentoon-
stelling bevat
onder andere

Het wiskundig beschrijven van de onderlinge zwaarte-
kracht en de beweging van twee hemellichamen is relatief
eenvoudig. Maar het probleem wordt direct veel complexer
zodra er een derde object in het spel is.

In 2017 vonden onderzoekers 1223 nieuwe oplossingen
voor het drielielichamenprobleem. Dat was toen een
verdubbeling van het bekende aantal mogelijkheden.
Nu doet computerwetenschapper Ivan Hristov van de
Universiteit van Sofia samen met zijn collega's daar een
schepje bovenop. Zij hebben 12.392 banen gevonden
die volgens de wetten van Newton werken. Het team
gebruikte een supercomputer en een verbeterde versie
van het algoritme uit 2017. Hristov zegt dat als hij de
zoektocht zou herhalen met nog krachtigere hardware,
hij er nog 'vijf keer zoveel' zou vinden.

Oplossingen voor het drielielichamenprobleem zijn interes-
sant voor astronomen, omdat ze beschrijven hoe bijvoor-
beeld sterren, planeten of manen een stabiele baan
kunnen vinden. Maar het valt nog te bezien of de nieuwe
oplossingen echt in het heelal voorkomen. Daar spelen
minieme extra invloeden een rol, zoals de zwaartekracht
van verder gelegen hemellichamen.

'De relevantie voor de astronomie zal duidelijk worden
nadat we de stabiliteit van de banen hebben bestudeerd
– die is erg belangrijk', zegt Hristov. 'Desalniettemin –
stabiel of instabiel – zijn ze van groot theoretisch belang.
Ze hebben een hele mooie structuur in de ruimte en tijd.'

Bron: <https://www.newscientist.nl>

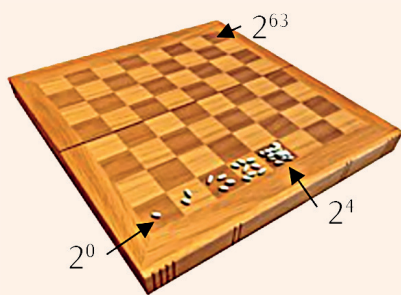
Machten in de brugklas

Als bewerkingen consistent(er) gedefinieerd worden, dan zouden (brugklas)leerlingen wel eens minder moeite met hun algebraïsche rekenvaardigheden kunnen hebben. Deze keer neemt Sjef van Dongen het machtsverheffen onder de loop.

Inleiding

Een macht is een van de vele codes die in de wiskunde gebruikt worden om een serie rekenkundige handelingen verkort weer te geven. Het nut van het gebruik van machten wordt duidelijk na het lezen van de volgende context.

Legende van het schaakspel

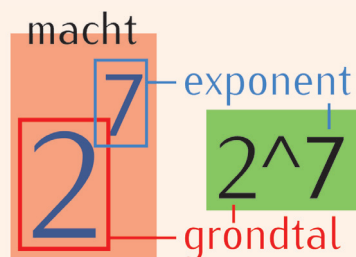


figuur 1

Een koning verveelde zich en verordonneerde een nieuw spel. Een geleerde kwam na een paar dagen terug met wat we nu het schaakspel noemen. De koning was zo verrukt dat hij tegen de geleerde zei: 'Noem je beloning en je krijgt het!' De geleerde dacht niet lang na en antwoordde: 'Ik wil graag één rijstkorrel op het eerste vakje van het schaakbord, twee op het tweede, vier op het derde, acht op het vierde enzovoort tot en met vakje 64.' De koning dacht goedkoop klaar te zijn en stemde direct in. Bij het betalen bleek echter dat er al snel niet genoeg rijst in het land was. Het aantal rijstkorrels op het 64^e vakje is:

$$1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \dots \times 2 \times 2 = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808$$

63 factoren 2



figuur 2

De opdracht 'vermenigvuldig 63 keer achtereenvolgend met het getal 2' wordt verkort tot het symbool: 2^{63} of 2^{63} . Dit symbool wordt een macht genoemd. Een macht is opgebouwd uit twee getallen, zie figuur 2. Je kunt kiezen voor de twee- of éénregelige variant. Het eerste cijfer heet het grondtal het tweede cijfer is de exponent. De macht in figuur 2 wordt gelezen als: de zevende macht van twee, twee tot de zevende macht of twee tot de macht zeven.

2^1 en 2^0

Een vervanging van een macht met een positief geheel getal als exponent zou kunnen luiden:

'Gebruik het grondtal zo vaak om mee te vermenigvuldigen als de exponent aangeeft'.

Oftewel: $2^7 \equiv 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

Is de exponent echter gelijk aan 1 dan blijkt deze afspraak niet te kloppen. We schrijven dan namelijk $2^1 \equiv 2$.

De veronderstelde ene vermenigvuldiging met 2 is nergens te bekennen. Bij het behandelen van de husselseigenschappen^[1] is al geconstateerd dat, onbewust, bij het starten van een optelling of aftrekking met het getal '0' en bij

het starten van een vermenigvuldiging of deling met het getal '1' wordt begonnen. De getallen '0' en '1' worden echter vrijwel nooit genoteerd. Het hiervoor geconstateerde probleem wordt opgelost door deze '1' wel meteen op te schrijven m.a.w.: $2^7 \equiv 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ en $2^1 \equiv 1 \times 2$. De macht 2^0 zou dan betekenen: gebruik het grondtal 2 '0' maal om mee te vermenigvuldigen. De intentie om te gaan vermenigvuldigen houdt in dat de vervanging van de macht 2^0 begint met '1', om vervolgens niet (nul maal) te gaan vermenigvuldigen met 2, dit levert op: $2^0 \equiv 1$.

Negatieve exponenten

Een macht met een negatieve exponent, bijvoorbeeld 2^{-3} zou geïnterpreteerd kunnen worden als: 'Gebruik het grondtal 2 negatief 3 maal om mee te vermenigvuldigen'. Dit is een onuitvoerbare opdracht. Het 'min'-teken verwijst echter ook vaak naar: het tegengestelde ^[2] doen van wat te doen staat bij een 'plus'-teken. Denk aan de invoering van de negatieve vermenigvuldiger en deler ^[1]. Zo wordt de juiste interpretatie van 2^{-3} : 'Gebruik het grondtal 2 driemaal om mee te delen, delen is immers het tegengestelde van vermenigvuldigen. M.a.w. $2^{-3} \equiv 1 : 2 : 2 : 2$.

Voor gebruik in de brugklas is een geschikte vervanging van een macht met een gehele exponent:

1: begin altijd met het getal '1'.

2a: gebruik het grondtal zo vaak om mee te vermenigvuldigen als de positieve exponent aangeeft.

2b: gebruik het grondtal zo vaak om mee te delen als de negatieve exponent aangeeft.

Als nieuwe 'bewerking' in rekenopdrachten heeft de machtsverheffing een hogere prioriteit toebedeeld gekregen ^[3] dan de tegengestelde bepaling, de vermenigvuldiging, de deling, de optelling en de aftrekking. Samen met de afspraken dat negatieve grondtallen en vervangingen altijd tussen haakjes worden geplaatst en dat bij meerregelige rekenopdrachten de opdrachten eerst per regel moeten worden berekend, levert dit de volgende herleidingen en gelijkheden op:

$5 \times -(-3)^{6-2^3} = 5 \times -(-3)^{6-8}$	berekenen van de exponent
$= 5 \times (-1) \times (-3)^{-2}$	tegengestelde bepalen $\equiv$ keer (-1)
$= (-5) \times (1 : (-3) : (-3)) (-3)^{-2} \equiv 1$	tweemaal delen door (-3)
$= (-5) \times 1 : (-3) : (-3)$	gebonden factoren vrijmaken
$= (-5) \times 1 : ((-3) \times (-3))$	vrije factoren binden
$= (-5) : 9$	$(-5) \times 1 = -5$ en $(-3) \times (-3) = 9$
$= \frac{-5}{9}$	van 1-regelige notatie naar 2- regelige notatie

$$7 \times -3^2 \equiv 7 \times -(1 \times 3 \times 3) \equiv 7 \times -9 = -63$$

$$7 \times (-3)^2 \equiv 7 \times (1 \times (-3) \times (-3)) \equiv 7 \times 9 = 63$$

$$2 \times (2 - 3)^{4-2} \equiv 2 \times (-1)^2 \equiv 2 \times (-1)(-1) = 2$$

$$2 \times 2 - 3^{4-2} \equiv 4 - 3^2 \equiv 4 - 3 \times 3 = 4 - 9 = -5$$

Gelijkwaardige meer- en éénregelige notaties:

$$3 \times 2^{3+2^{5-3}} \equiv 3 \times 2^8 = 384$$

$$4^{2^3} \equiv 4^{(2^3)} = 65536$$

Een brugklasleerling, die al gewend is aan de husselseigenschappen ^[1] en aan gebonden en vrije factoren ^[5] zal weinig moeite hebben met rekenopdrachten waarin machten zijn opgenomen. Hierna volgen enkele voorbeelden van toepassing van negatieve exponenten in de brugklas.

Bereken

$$\begin{aligned} 2 : -3^{-2} &\equiv \\ &\equiv 2 : -(1 : 3 : 3)) \\ &\equiv 2 : ((-1) \times (1 : 3 : 3)) \\ &\equiv 2 : ((-1) \times 1 : 3 : 3) \\ &\equiv 2 : (-1) : 1 \times 3 \times 3 = -18 \end{aligned}$$

2 gedeeld door het tegengestelde van +3 tot de macht negatief 2
machtsverheffen gaat voor tegengestelde bepalen en $3^{-2} \equiv 1 : 3 : 3$
'het tegengestelde nemen van' $\equiv$ door vermenigvuldigen met -1 ^[4]
gebonden factoren vrijmaken ^[5]
nogmaals gebonden factoren vrijmaken

>

Wetenschappelijke notatie

$$0,067 \equiv 6,72 \times 1 : 10 : 10 \equiv 6,7 \times (1 : 10 : 10) \equiv 6,7 \times 10^{-2}.$$

$$\begin{aligned} 2,45 \times 10^{-2} &\equiv 2,45 \times (1 : 10 : 10) \\ &\equiv 2,45 \times 1 : 10 : 10 \\ &\equiv 2,45 : 10 : 10 \\ &\equiv 0,245 : 10 \\ &= 0,0245 \end{aligned}$$

de definitie van een macht met negatieve exponent
vrijmaken van gebonden factoren ^[5].
 $2,45 \times 1 = 2,45$ of simpelweg 'x1' weglaten
delen door 10 $\equiv$ komma een plaats naar links
delen door 10 $\equiv$ komma een plaats naar links

$$\begin{aligned} 42 \times 10^{-2} : (7 \times 10^3) \\ &\equiv 42 \times (1 : 10 : 10) : (7 \times (1 \times 10 \times 10 \times 10)) \\ &\equiv 42 \times 1 : 10 : 10 : 7 : 10 : 10 : 10 \\ &\equiv 42 : 7 \times 1 : 10 : 10 : 10 : 10 : 10 \\ &\equiv 42 : 7 \times (1 : 10 : 10 : 10 : 10 : 10) \\ &\equiv 6 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

definitie van machtsverheffen toepassen
gebonden factoren vrijmaken en $7 \times 1 = 7$
hukseleigenschap toepassen
vrije factoren binden
definitie machtsverheffen en $42 : 7 = 6$

De knop 'x⁻¹' van de rekenmachine

Het indrukken van deze knop geeft het omgekeerde van het getal 'x'. M.a.w.: $x^{-1} \equiv 1 : x$.

Natuurkundige eenheden zoals dichtheid:

$$\begin{aligned} \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} &\equiv \text{kg} \times (1 : \text{m} : \text{m} : \text{m}) \\ &\equiv \text{kg} \times 1 : \text{m} : \text{m} : \text{m} \\ &\equiv \text{kg} : 1 : \text{m} : \text{m} : \text{m} \\ &\equiv \text{kg} : (1 \times \text{m} \times \text{m} \times \text{m}) \\ &\equiv \text{kg} : \text{m}^3 \\ &\equiv \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \equiv \text{kg}/\text{m}^3 \end{aligned}$$

toepassen van de definitie macht met negatieve exponent
gebonden factoren vrijmaken
'x 1' is te vervangen door ': 1'
vrije factoren binden ^[5]
toepassen van de definitie van machtsverheffen
te lezen als: kilogram per kubieke meter

In tabel 1 hiernaast staan de definities van machten. In de tweede en laatste kolom van een regel staan uitdrukkingen die gelijkwaardig zijn: identiteiten. De identiteiten zijn te verklaren met behulp van de hukseleigenschap ^[1] en de regels die horen bij het vrijmaken en binden van factoren. ^[5]

Conclusie

Het introduceren van en werken met machten met positieve en negatieve exponenten in de brugklas hoeft geen problemen op te leveren als de leerling van tevoren kennis heeft genomen van de hukseleigenschappen en kan omgaan met vrije en gebonden factoren. De introductie van de wetenschappelijke notatie wordt begrijpelijk gemaakt door de hier gekozen definitie van machten in combinatie met de hukseleigenschap.

Noten

- [1] Zie: Dongen, S. van (2022). Handig husselen met rekenopdrachten. *Euclides*, 97(7), 4-7
- [2] Zie: Dongen, S. van (2021). Meer of minder minnen. *Euclides*, 96(6), 23-26.
- [3] Voor de prioriteitsregels zie ook [2].
- [4] Een getal vermenigvuldigen met -1 is te vervangen door het tegengestelde nemen van dat getal. Zie [1].
- [5] Gebonden en vrije factoren. Zie: Dongen, S. van. (2022). Van hoofdrekenen naar wiskunde. *Euclides*, 98(2), 41-43.

- [6] Gelijksoortige machten zijn machten met hetzelfde grondtal: $27, 2^{-3}, 2x, \dots$
- [7] Gelijknamige machten zijn machten met dezelfde exponent: $32, 72, x^2, \dots$

Over de auteur

Sjef van Dongen was jaren werkzaam in de elektrotechniek. Daarna was hij 30 jaar als wiskunde- en natuurkundedocent verbonden aan het 2College in Oisterwijk. Na zijn pensionering is hij enthousiast bijlesdocent.
E-mailadres: jjacvandongen@hotmail.com

regel		$a \neq 0$ en $b \neq 0$ $p \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ en $q \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$				
machten met positieve exponenten						
1	a^p	definitie			$1 \times a \times a \dots \times a$ p factoren a	
2	a^1	$1 \times a$ a				
3	a^0	1 1				
vermenigvuldigen en delingen van gelijksoortige machten ^[6]						
4	$a^p \times a^q$	$(1 \times a \dots \times a) \times (1 \times a \dots \times a)$ p factoren a q factoren a toepassen definitie	$1 \times a \dots \times a \times 1 \times a \dots \times a$ p factoren a q factoren a vrijmaken van gebonden factoren huseleigenschap	a^{p+q}		
5	$a^p : a^q$	$(1 \times a \dots \times a) : (1 \times a \dots \times a)$ p factoren a q factoren a toepassen van de definitie	$1 \times a \times a \dots \times a : 1 : a \dots : a$ p factoren a q factoren a vrijmaken van gebonden factoren huseleigenschap	a^{p-q}		
een macht van een macht						
6	$(a^p)^q$	$1 \times a^p \times a^p \times \dots \times a^p$ toepassen van de definitie: grondtal is a^p , exponent is q	$1 \times a \times a \times a \dots \times a \times a$ $p \times q$ factoren a toepassen van de definitie	$a^{p \times q}$		
een macht van een product is gelijk aan het product van gelijknamige machten						
7	$(a \times b)^p$	$1 \times (a \times b) \times (a \times b) \times \dots \times (a \times b)$ toepassen van de definitie: grondtal is $(a \times b)$, exponent is p	$(1 \times a \dots \times a) \times (1 \times b \dots \times b)$ vrijmaken van gebonden factoren: p factoren a en p factoren b	$a^p \times b^p$		
een macht van een deling is gelijk aan de deling met gelijknamige machten ^[7]						
8	$(\frac{a}{b})^p$	$\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \dots \times \frac{a}{b}$ toepassen van de definitie: grondtal is $\frac{a}{b}$, exponent is p	$\frac{a \times a \times \dots \times a}{b \times b \times \dots \times b}$ Product van breuken: tellers en noemers vermenigvuldigen	$\frac{a^p}{b^p}$		
een macht met een negatieve exponent						
9	a^{-p}	definitie			$1 : a : a \dots : a$ p factoren a	
10	a^{-p}	$(a^p)^{-1} \equiv 1 : (a^p) = 1 : a^p$ toepassen: $-p = p \times (-1)$ en de definitie	$\frac{1}{a^p}$	a^{-p} toepassen: $-p = (-1) \times p$ en de definitie	$(\frac{1}{a})^p$	
11	$(\frac{a}{b})^{-1}$	$1 : (a : b)$ grondtal is $a : b$, exponent is -1	$1 : a \times b \equiv 1 \times b : a \equiv b : a$ gebonden factoren vrijmaken + huseleigenschap		$\frac{b}{a}$	
12	$(\frac{a}{b})^{-p}$	$(\frac{a}{b})^{-1 \times p} \equiv ((\frac{a}{b})^{-1})^p$ via toepassen van regel 6 en regel 11 in deze tabel				$(\frac{b}{a})^p$

tabel 1

Alfmary Community School in Zambia

Het Wereldwiskunde Fonds ondersteunde de Alfmary Community School in Zambia met boeken en materialen, onder andere mogelijk gemaakt door jouw bijdragen aan het WwF. Docent Catherina Mulenga en leerlingen Alex Chali en Electra Butemwe Munkinyi willen je hiervoor hartelijk danken.

Community schools

Grassroots Heroes Zambia^[1] is een organisatie die, als deel van het versterken van de lokale gemeenschap, nieuwe scholen opricht in gebieden waar een gebrek is aan voldoende onderwijsmogelijkheden. Lokale ondernemers helpen met bouwmaterialen, grond en geld om de scholen te beginnen en draaiende te houden. In 2021 financierde het Wereldwiskunde Fonds wiskundeboeken voor de Mango Grove Community School. In 2023 kwam een aanvraag binnen voor een project op een andere school: Alfmary Community School. Beide scholen vallen onder de hoofdstad Lusaka, maar liggen in rurale gebieden. De afstanden zijn groot, en zonder deze Community Schools zouden veel kinderen niet de mogelijkheid hebben om naar school te gaan. De hoogste groepen, groep 8 en 9, van deze scholen zijn te vergelijken met de eerste en tweede klas van onze middelbare school.



Reacties

De docenten en leerlingen van Alfmary zijn heel blij met de wiskundeboeken. De lessen worden zo heel wat efficiënter, de stof begrijpelijker, en zelf een boek in handen kunnen hebben, stimuleert de interesse in wiskunde. We kregen onderstaande reacties.

Catherina

My name is Catherine Mulenga, a mathematics teacher for grade 8 and 9. I want to show my gratitude towards Mathematics textbooks donation. Surely they will help us

to excel in maths. The school has received the total of 160 books and in addition we have also received 1 box of A4 bond paper and 13 JY mathematical sets rulers which will help during our group work activities and make our work easier as well.



Alex

Electra

Alex

My name is Alex Chali. My classmates and I are very happy for the mathematics text books. We thank you very much and we appreciate for the books. We had only one book of mathematics at the school used by our maths teacher only but now each can have a copy so we thank you for making it possible for us to have these books and this will help to learn better and to stay focus. Thank you.

Electra

My name is Electra Butemwe Munkinyi. I'm doing grade 8 and going into grade 9 next year and I'm 14 years old. Thank you for the books. I appreciate a lot. The books will really help us in our studies. I like to study maths and our maths teacher Mrs Mulenga is really a very nice teacher. Thank you.

Noot

[1] zie: <https://www.grassrootsheroes.org/> en <https://www.facebook.com/Grassrootsheroesz>

Over de auteur

Monica Woldinga was docent wiskunde in Zambia, Botswana en Nederland. Nu is zij lid van het Wereldwiskunde Fonds. E-mailadres: mwoldinga@gmail.com

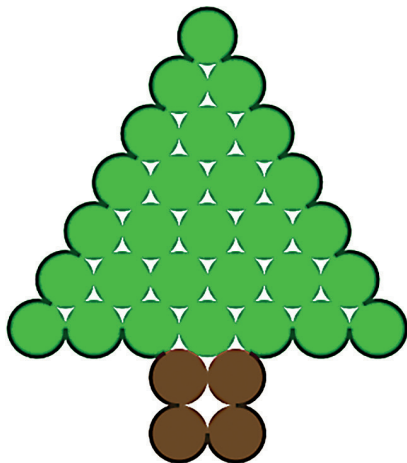
Olympiadepuzzel 99-3

Kerstboom

Esther Bod



De kerstman maakt een kerstboom bestaande uit 32 rakende cirkels, zoals in figuur 1. De cirkels hebben straal 1. Wat is de (buiten)omtrek van de boom?



figuur 1

Inzenden oplossingen

Stuur je oplossing uiterlijk 13 januari naar euclides@wiskundeolympiade.nl. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een cadeaubon van € 20,-.

Terugblik puzzel nr. 99-1

De vorige olympiadepuzzel ging over de deelbaarheid van faculteiten. Alle inzenders hadden al snel door dat $n!$ alleen deelbaar kan zijn door $(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)$ als geen van de getallen $n+1$, $n+2$, $n+3$ en $n+4$ priem is. Het kleinste getal waarbij de volgende vier getallen niet priem zijn, is 23. Met het vergelijken van priemdelers kun je laten zien dat $23!$ inderdaad deelbaar is door $24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27$. Ogenscheinlijk is de oplossing van de puzzel dus 23.

Zoals de meeste van onze inzenders scherp opmerkten is $23!$ echter ook deelbaar door $24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28$. Daarom is de deelbaarheidspotentie van 23 niet 4 maar (minimaal) 5. Het volgende getal waarvoor de volgende 4 getallen niet priem zijn, is 24. Net als $23!$ is ook $24!$ deelbaar door $24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28$. Omdat 29 een priemgetal is, is $24!$ niet deelbaar door 29. Daarom is 24 het kleinste getal met deelbaarheidspotentie 4.

Met dank aan oud-olympiadedeelnemers Aimée Jacobs en Kati Overbeeke voor het nakijken van de inzendingen.

De juiste oplossing (inclusief toelichting) is te vinden op de website, samen met de namen van de 10 inzenders die deze oplossing gevonden hadden. De cadeaubon van deze editie gaat naar Robert van der Waall.



vakbladeuclides.nl/993olympiadepuzzel

Winnaars Nederlandse Wiskunde Olympiade

Op 10 november jl zijn de prijzen uitgereikt van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2023. Dit zijn de winnaars:

4^e klas en lager:

- 1 Naïm Hofstede, thuisonderwijs, Makkum
- 2 Josiah 't Hart, Willem Lodewijk Gymnasium, Groningen
- 3 Alina Ju, Stedelijk Gymnasium Leiden
- 4 Fenne Meijer, Bataafs Lyceum, Hengelo
- 5 William Yang, Porta Mosana College, Maastricht

5^e klas:

- 1 Casper Heimel, Utrechts Stedelijk Gymnasium, Utrecht
- 2 Tobias Kristiansen, Stedelijk Gymnasium Leiden
- 3 Robert Stepanyan, Trevianum, Sittard
- 4 Wendy Huang, Huygens Lyceum, Eindhoven
- 5 Jorik van der Stouwe, Veluws College Walterbosch, Apeldoorn

6^e klas:

- 1 Ryan Staal, Erasmiaans Gymnasium, Rotterdam
- 2 Bas Capel, Gymnasium Apeldoorn
- 3 Felix Hamoen, Leidsche Rijn College, Utrecht
- 4 Mirte Nauta, Cals College, Nieuwegein
- 5 Yannick Nitescu, Huygens Lyceum, Eindhoven

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn, voorzitter
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck
Martijn Schouw
Constantijn Tilanus

Inzenden bijdragen

Tom Goris,
Molenbochtplein 38, 5014 EJ Tilburg
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvww.nl

Voorzitter

Wim Kaspers
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06 21 50 96 79 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau, Tel. 0345 531 324
E-mail: evers.rechtspositie@gmail.com
Vermeld bij je contact je lidnummer en telefoonnummer.

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt met ingang van 1 augustus 2023

- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 72,50
- leden, maar dan zonder Euclides: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWC: € 75,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen Euclides niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang

Personen (niet-leden van de NVvW): € 90,00

Instituten en scholen: € 160,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkwijk 63, 3901 EC Veenendaal,
Tel. (0318) 555 075

E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2024

UTRECHT

Conferentie: Werken aan basisvaardigheden
rekenen-wiskunde in alle vakken
Organisatie: NVvW, VECON, KNAG en NVON

Di
23/01

LANDELIJK

Scholen kiezen zelf een dag
Op de scholen: Onderbouw Wiskundedag (3hv) en
vmbo Wiskundedag (3 vmbo-gt)
Organisatie: Freudenthalinstituut

05/02
t/m
16/02

UTRECHT

Conferentie Rekenen-wiskunde, overgang
van PO naar VO
Organisatie: NVORWO, NVvW en SLO.

Wo
13/03

LANDELIJK

Op de scholen: W4Kangoeroewedstrijd,
wereldwijde wiskundewedstrijd
Organisatie: Stichting Wiskunde Kangoeroe

Do
21/03

NOORDWIJKERHOUT

Nationale Wiskundedagen
Organisatie: Freudenthalinstituut

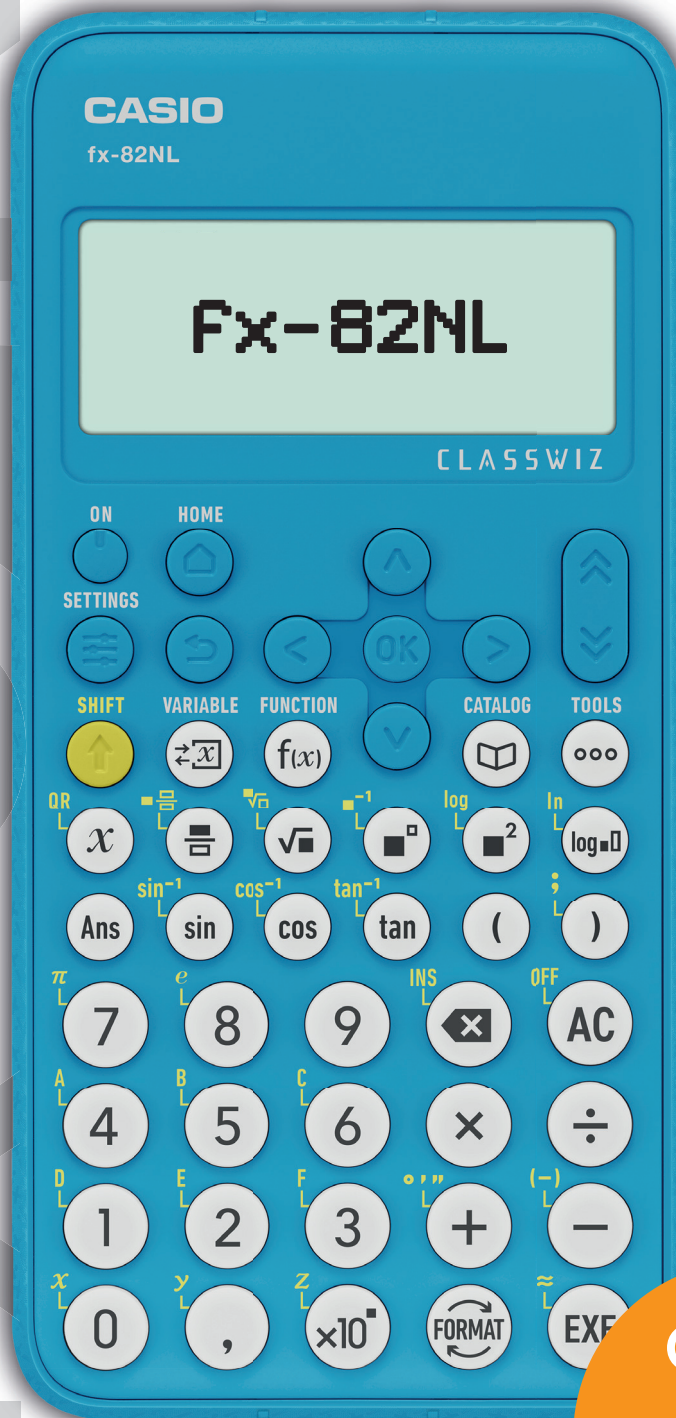
05/04
t/m
06/04

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook vakbladeuclides.nl

JAARGANG 99

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
4	31 januari 2024	13 november 2023
5	13 maart 2024	2 januari 2024
6	1 mei 2024	26 februari 2024
7	19 juni 2024	22 april 2024

CASIO®



Opvolger van:
fx-82MS
fx-82EX

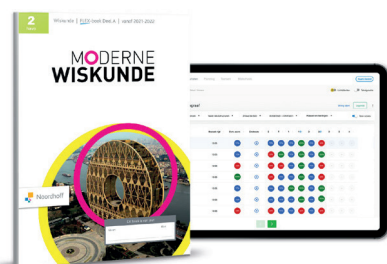
**Voor Nederlands
curriculum gemaakt**

Wiskunde bij Noordhoff: jij kiest!

Met wiskunde via Noordhoff kies je altijd voor de beste lesmethode wiskunde. Je bent verzekerd van een methode die aansluit bij jouw visie op het vak wiskunde. Je weet dat je kiest voor een heldere didactiek, de hoogste kwaliteit en zekerheid van klas 1 tot het eindexamen. Jij kiest!

Vernieuwde
vmbo bovenbouw
vanaf '24/'25!

MODERNE WISKUNDE



Leerlinggericht

Verkennen, verdiepen, oefenen en toepassen
Moderne Wiskunde brengt je begrip en inzicht bij.

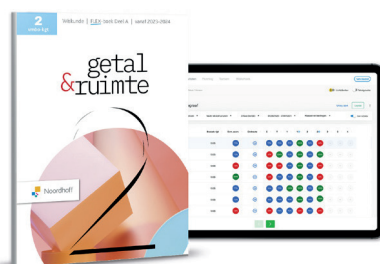
Didactiek

Het begrijpen en toepassen van wiskunde.
Moderne Wiskunde stimuleert kritisch denken en probleemoplossende vaardigheden.

Structuur

Structuur door de vaste omvang:
één paragraaf is één les van 50 minuten.

getal&ruimte



Leerlinggericht

Uitleggen, voordoen en oefenen
Getal & Ruimte biedt uitgebreide theorie en veel gericht oefenen.

Didactiek

Stapsgewijs aanleren van wiskundige vaardigheden en formules met veel aandacht voor oefenen en herhalen.

Structuur

Structuur door de vaste opbouw van de hoofdstukken en paragrafen.

	Hardcover	Flex-licentie
Leerling mag schrijven in het boek	Nee	Ja
Altijd up-to-date	Nee	Ja
Persoonlijke digitale leeromgeving met toetsen	Optioneel	Inclusief
Aanschafvorm	Eenmalige aanschaf boeken en jaarlijkse licentie digitale leeromgeving	Jaarlijkse licentie voor combinatie boek en digitale leeromgeving

Wil je meer weten of een gratis beoordelingspakket aanvragen?
Kijk op Noordhoff.nl/wiskunde