Puzzel 98-6 Wobien Doyer
Spelen met delen. Lieke de Rooij

We kregen van Gerard Bouwhuis het idee om iets met Harshad (of Niven) getallen te doen. Dat zijn getallen die deelbaar zijn door hun cijfersom. Hij merkte wel op dat veel van de antwoorden op zijn vragen op internet te vinden zijn. Toch bedacht hij nog vragen waar je het zonder hulp moet doen. We hebben enkele van zijn ideeën met wat aanvulling in deze puzzel verwerkt en deze gecombineerd met algemene testen op deelbaarheid. Gerard krijgt dus extra punten.

Deelbaarheidstesten:
Om te testen of een getal *n* deelbaar is door een gegeven getal *d* zijn meerdere ”trucjes” bekend.
De meest bekende zijn testen op deelbaarheid door 2 tot en met 11.
Behalve voor de machten van 2, 5 en 10 (delers van 10) wordt daarbij meestal gebruik gemaakt van repeterende resten bij deling van machten van 10 door *d*.
Dan verdelen we, afhankelijk van *d*, de cijfers van *n* van rechts naar links in groepjes en tellen de waarden van die groepjes op, of om en om aftrekken. Voor deelbaarheid door 11 is dat bijvoorbeeld door de cijfers van rechts naar links om en om op te tellen en af te trekken. Voor o.a. *d*=7 en 13 (met rest -1 bij deling op 1000) verdelen we de cijfers van rechts naar links in groepjes van 3 en tellen die ook afwisselend op en af. Voor veel andere getallen, zoals 17 en 19 kan dat ook, maar wordt de lengte van die groepjes maximaal (*d*-1)/2. Natuurlijk kan je ook gewoon een staartdeling maken, maar dat neemt gauw veel papier in beslag.
Een alternatief voor niet al te grote delers, maar veel meer dan 1 t/m 11 is mogelijk op 2 regels en kan vaak zelfs uit het hoofd worden toegepast. Misschien al bekend, en anders op internet te vinden. We vragen het toch omdat het soms erg eenvoudig is en wellicht leuk om het als truc aan leerlingen te laten zien zonder dat je aanvankelijk uitlegt wat je doet en waarom. We geven hier wel het algoritme en met een voorbeeld hoe je daarmee kan onderzoeken of *n*=2023 deelbaar is door delers *d*=7 en *d*=17 (het gaat om het voorbeeld, niet of dit de beste manier is om in dit geval de deelbaarheid te testen).

Algoritme:
Noteer het getal *n* met wat ruimte tussen de cijfers.
Laat *t*(0) het laatste cijfer van *n* zijn (de eenheden) , *t*(1) het een na laatste etc.
Van rechts naar links gaan we er andere, eventueel negatieve getallen onder schrijven die we *s*(0), *s*(1) etc. noemen.
Die getallen *s* bepalen we als volgt:

Eerst bepalen we een factor *f*, afhankelijk van de deler *d* : Vermenigvuldig *d* met een getal *m* zodanig dat het product $m \bullet d$ op een 1 of een 9 eindigt.
ALs $m \bullet d$ op een 1 eindigt geldt $f = (1 - m \bullet d)/10$. Als $m \bullet d$ op een 9 eindigt wordt $f = (1 + m \bullet d)/10$.

Onder *t*(0) schrijven we *s*(0) met $s(0) = t(0)$.
Voor $s(k)$ (met $k > 0$) geldt: $s(k) = t(k) + a + b \bullet f$. Hierin is *a* het aantal tientallen en *b* het aantal eenheden van $s(k-1)$.
Links van $s(0)$ bepalen we zo *s*(1), *s*(2), etc. in die volgorde.
Als en alleen als het laatste getal *s* dat we zo hebben bepaald deelbaar is door *d* is *n* deelbaar door *d*.

Voorbeelden:
Deelbaarheid door 7: Hier kan *f* gelijk zijn aan -2 of 5.

t:	2	0	2	3	$f = -2$
s:	-14	8	-4	3	En -14 is deelbaar door 7, dus ook 2023

t:	2	0	2	3	$f = 5$
s:	35	36	17	3	En 35 is deelbaar door 7, dus ook 2023

Deelbaarheid door 17: Hier kan *f* gelijk zijn aan -5

t:	2	0	2	3	$f = -5$
s:	-17	14	-13	3	En -17 is deelbaar door 17, dus ook 2023

Je kan als je dat wil ook al eerder alle getallen modulo *d* vereenvoudigen.
Het bewijs dat bovenstaande klopt is misschien wel op internet te vinden, maar het dat bestaat meestal slechts uit een voorbeeld.

Opgave1:
a) Ga met deze methode na of 10000098 deelbaar is door 27.
Uitwerking opgave 1a:

Behalve dat we een fout gemaakt hadden in de beschrijving van het algoritme die we na de eerste melding hebben rechtgezet via mails en een melding op de website (we hadden de *a* en de *b* verwisseld), bleek nog een probleem: niet iedereen bleek te hebben begrepen dat waar we het hebben over het aantal tientallen (a is het aantal tientallen) dat aantal ook groter mag zijn dan 10 (dus in 437 is *a*=43).

$d = 27$ en met $m = 3$ krijgen we $m \bullet d = 81$ eindigend op 1. Dus is $f = \dfrac{1 - m \bullet d}{10} = -8$.

Het algoritme wordt dan :

k:	7	6	5	4	3	2	1	0	*d*=27
t:	1	0	0	0	0	0	9	8	*f*= -8
s:	0	71	-19	53	-37	35	-55	8	En 0 is deelbaar door 27 dus 10000098 ook.

Zoals verschillende inzenders opmerkten komen delers die een factor 2 of 5 bevatten niet aan bod omdat het dan niet mogelijk is om een *m* te vinden zodat *md* op een 1 of 9 eindigt.

b) Geef een sluitend bewijs voor de correctheid van het algoritme voor bovenstaande voorbeelden en ook in het algemeen.
Enkele inzenders gebruikten een aangepast algoritme om *s*(*i*) te bereken: $s(i) = t(i) + f \cdot s(i-1)$. Dat gebruikten ze op verschillende manieren voor een algemene bewijs, o.a. recursief voor een toenemend aantal cijfers van *n*.

Uitwerking opgave 1b:
We kijken eerst naar één van de voorbeelden:

Deelbaarheid door 17: Hier kan *f* gelijk zijn aan -5

k:	3	2	1	0	*d*=17
t:	2	0	2	3	$f = -5$
s:	-17	14	-13	3	En -17 is deelbaar door 17, dus ook 2023

Aan bovenstaande notatie van het algoritme hebben we een rij *k* toegevoegd met machten van 10: (zoals voor de hand ligt) moeten de cijfers (die ook negatief of >9 mogen zijn) onder *k*=0 gelezen worden als eenheden, die onder *k*=1 als tientallen etc.
Het algoritme wordt ondoorzichtig doordat de cijfers die al gebruikt zijn blijven staan. Het zou duidelijker zijn als we ze vervangen door nullen. Nadeel daarvan is dat we dan meer rijtjes nodig hebben (tenzij je gaat gummen).
Ook ondoorzichtig is de vermenigvulding met *f*: we vermenigvuldigen met *f* en plaatsen dan het resultaat één kolom naar links. In feite vermenigvuldigen we dus met 10*f*.
Helderder (maar met meer schrijfwerk) is de onderstaande notatie met hetzelfde getallenvoorbeeld en hetzelfde algoritme als het schema hierboven, maar nu vervangen we steeds de getallen die we gebruikt hebben door nullen.
Voor het algoritme maakt dat natuurlijk niet uit: die getallen worden nadat je ze gebruikt hebt daarna niet nog eens gebruikt.
Om dat te kunnen laten zien hebben we bij elke stap twee nieuwe rijtjes nodig die de oude vervangen..

$d = 17$ en $f = -5$

k:	3	2	1	0	Verandering van de getalwaarden van de “cijfers” van $t + s$.	waarde van *t*+*s*.
t:	2	0	2	3		2023
t: s:	2	0	2	0 3	-3 (kolom=0) +3 (kolom=0)	2023
t: s:	2	0	0 -13	0 0	-20 (kolom=1) -3 (kolom=0) en $+20 - 10f \bullet 3 = -130$ (kolom=1)	$2023 - 153 = 1870$
t: s:	2	0 14	0 0	0 0	+100+30 (kolom=1) en $-100 + 10f \bullet 30 = 1400$ (kolom=2)	1870+1530=3400
t: s:	0 -17	0 0	0 0	0 0	-2000 (kolom=3) -1000-400 (kolom=2) en $+2000 + 1000 + 10f \bullet 400 = -17000$ (kolom=3)	$3400 - 20400 = 17000$

Algemeen, dus voor alle delers *d* waarvoor we een f kunnen vinden zodat $f = (1 \pm m \bullet d)/10$, is het algoritme valide als de veranderingen in de waarde van $t + s$ steeds gelijk blijven modulo *d*.
We zullen dus laten zien dat dat inderdaad zo is.
Er zijn in de stappen van het algoritme 3 soorten veranderingen:
1: verplaatsingen van *t* naar *s* in dezelfde kolom (zwarte cijfers in de berekeningen). Dat verandert dus niets in de waarde van $t + s$ en dus is de verandering 0 modulo *d.*
2: verplaatsingen van 10-tallen door 10 delen en verplaatsen naar een kolom naar links (rode cijfers). Ook dat verandert dus niets in de waarde van $t + s$ en dus is de verandering 0 modulo *d.*
3: verwijderen van aantallen uit een kolom, vermenigvuldigen met *f* en het resultaat verplaatsen naar één kolom naar links (blauwe cijfers).
Er wordt dus een getal (of cijfer) *x* in een kolom vervangen door $x \cdot f$ in één kolom naar links.
We zagen al in de inleiding boven het schema dat *x* wordt vervangen door de waarde van $x \cdot 10f$

We hoeven dus alleen nog te bewijzen dat het vervangen van *x* door $x \cdot 10f$ een verandering 0 modulo *d* is.
Het bewijs is eenvoudig::
$f = (1 \pm m \bullet d)/10$, dus $10f = 1 \pm m \bullet d$ en dus $10f \equiv 1 \pmod{d}$
En dus $x \cdot 10f \equiv x \pmod{d}$ QED

Het algoritme is dus valide en bruikbaar voor alle delers *d* waarvoor een factor *f* te vinden is met $f = (1 \pm m \bullet d)/10$, en we zagen bij de beschrijving van het algoritme dat dat het geval is als er een getal *m* is waarvoor $m \bullet d$ eindigt op 1 of 9. Dat lukt als *d* geen factoren 2 of 5 bevat.

Het algoritme is dus valide en bruikbaar voor alle delingen door waarden van *d* die niet deelbaar zijn door 2 of 5.

c) Bepaal de eenvoudigste factor *f* voor delers die op 1 of 9 eindigen.

Uitwerking opgave 1c:
In beide gevallen geeft *m*=1 absoluut gezien de kleinste waarde van *f*.
d eindigt op 1: $m = 1$, dus *md* eindigt op 1, dus $f = \dfrac{1 - md}{10} = \dfrac{1 - d}{10}$
of $m = 9$, dus $m \bullet d$ eindigt op 9, dus $f = \dfrac{1 + md}{10} = \dfrac{1 + 9d}{10}$.
De absolute waarde van *f* is het kleinst in het eerste geval.

d eindigt op 9: $m = 1$, dus *md* eindigt op 9, dus $f = \dfrac{1 + md}{10} = \dfrac{1 + d}{10}$
of $m = 9$, dus *md* eindigt op 1, dus $f = \dfrac{1 - md}{10} = \dfrac{1 - 9d}{10}$.
Ook nu is de absolute waarde het kleinst in het eerste geval.

Wellicht is bovenstaande bruikbaar bij de volgende vragen over Harshad getallen, maar niet noodzakelijk.

Harshad getallen:
We zullen Harshad getallen afkorten tot H-getallen.

Ter introductie:
Opgave 2:
Onderzoek of er een of meer H-getallen zijn met cijfersom=11 die eindigen op een 1. Zo niet, toon dat aan. Zo ja, bepaal de kleinste.
Uitwerking opgave 2
Als *H* een H-getal is met cijfersom 11 en eindigt op 1 dan geldt: *H* is oneven en deelbaar door 11.
Als je de cijfers om-en-om optelt en aftrekt is het totaal een 11-voud. Desgewenst kunnen we dat aantonen met het hierboven beschreven algoritme.
Als je alle cijfers van *H* optelt is de som 11 (want de cijfersom is 11)
Het verschil van deze 2 uitkomsten is dus weer een 11-voud.
We zoeken dus een getal waarin zowel de som van de cijfers op even posities als de som van de cijfers op oneven posities 0 of 11 is. En omdat de cijfersom 11 is kan dat alleen als ofwel alle cijfers op even posities ofwel alle cijfers op oneven posities 0 zijn.
En omdat het laatste cijfer 1 is zijn alle 10-tallen, duizendtallen etc. (de oneven posities) 0.
Het kleinst mogelijke getal eindigend op 1 dat voldoet is dan 10901

Er bestaan rijtjes van opvolgende H-getallen, zoals bijvoorbeeld 1 tot en met 10 en 510 tot en met 513.
Gerard vond een rijtje van vijf lang waarin de laatste cijfers (eenheden en tientallen) respectievelijk 15,16,17,18 en 19 zijn. We gaan zoeken welke cijfers je daar dan voor kan zetten om er H-getallen van te maken.
Als we hier precies één positief cijfer *a* voor zetten, met een aantal nullen tussen *a* en die laatste twee cijfers, dus bijvoorbeeld met *a*=7 en 4 nullen: 7000015 t/m 7000019 blijkt dat het nooit een rijtje van 5 opvolgende H-getallen kan zijn.

Opgave 3a:
Toon aan dat het inderdaad niet lukt voor *a*=1 tot en met *a*=9.
Uitwerking opgave 3a
Voor *a*= 1 tot en met 4: er is dan steeds één getal uit het rijtje 15 tot en met 19 met cijfersom $10 - a$.
De cijfersom wordt dan 10, maar het getal dat ontstaat is geen 10-voud (eindigt niet op 0).

Voorbeeld: als *a*= 3 dan kiezen we 16. Dan is het getal dat we krijgen 3000....16 met cijfersom 10. Maar 3000....16 is niet deelbaar door 10, dus 3000....16 is geen H-getal.
Voor a=5 tot en met 8: er is dan steeds één getal uit het rijtje 16 tot en met 19 met cijfersom $15 - a$.
De cijfersom wordt dan 15 maar het getal dat ontstaat is geen 15-voud (eindigt niet op 5 of 0).

Blijft over a=9. Dit lukt niet met x=17: De cijfersom is dan 17. Dus moet $9 \bullet 10^n + 17$ deelbaar zijn door 17, en dus moet $9 \bullet 10^n$ deelbaar zijn door 19. Dat lukt natuurlijk niet.

Opgave 3b en 3c gaan over opvolgende rijtjes H-getallen waarin een getal voorkomt met eindcijfers 95. Daarin lukt het wel door één positief cijfer toe te voegen met een aantal nullen.
Op internet is te vinden dat 10000095 tot en met 10000101 alle zeven H-getallen zijn.
Er zijn in het voorbeeld 5 nullen tussen 1 en eindcijfers 95 gebruikt. Maar ook met nog meer nullen kan het soms een opvolgende rijtje opleveren van lengte 7 en misschien nog wel langer
Opgave 3b: Bepaal een formule waaraan het aantal nullen *i* moet voldoen voor een rijtje van 7 opvolgende H-getallen dat begint met 1…95, met *i* >5 nullen op de plaats van de puntjes.
Uitwerking van Opgave 3b:
We noteren de H-getallen als $10^k + 94$, $10^k + 95$, $10^k + 96 \ldots 10^k + 101$, $10^k + 102$. Van een aantal ervan kunnen we vrij simpel nagaan dat het H-getallen zijn. Die bekijken we eerst, en kijken daarna naar de lastigere gevallen:
$10^k + 95$: cijfersom 15. 15 is altijd een deler van $10^k + 95$. (de cijfersom is deelbaar door 3 en het getal eindigt op 5)
$10^k + 96$: cijfersom 16. Als $k \geq 4$ is 16 een deler van $10^k + 96$
$10^k + 98$: cijfersom 18. 18 is altijd een deler van $10^k + 98$ (de cijfersom is 9 en het getal is even).
$10^k + 100$: cijfersom 2. Het getal is even, dus deelbaar door 2.
$10^k + 101$: cijfersom 3. Dus is het getal deelbaar door 3.

Er blijven dan twee over: $10^k + 97$ en $10^k + 99$.
$10^k + 97$: cijfersom 17. Het is een H-getal als 17 een deler is van $10^k + 97$. We kunnen met behulp van het algoritme van opgave 1 bepalen voor welke waarden van *k* dat zo is: *d*=17, *m*=3 zodat $m \bullet d = 51$ eindigt op 1.
Dan is de factor $f = \dfrac{1 - m \bullet d}{10} = \dfrac{1 - 51}{10} = -5$
We weten dat het deeltal bestaat uit een 1, dan een aantal nullen en dan 97. We zetten die 1 in zodra dat een 17-voud oplevert (dus als in *s* een getal -1 mod 17 verschijnt):

k:	7a	7	6	5	4	3	2	1	0	*d*=17	
t:	1	0	0	0	0	0	0	9	7	*f*= -5	
s:	-34	-35	7	-32	37	-38	28	-26	7	.	

Als $k = 7$ is dus $10^k + 97$ een H-getal..

We kunnen hetzelfde doen met $10^k + 99$: cijfersom 19:
d=19, *m*=1 zodat $m \bullet d = 19$ eindigt op 9.
Dan is de factor $f = \dfrac{1 + m \bullet d}{10} = \dfrac{20}{10} = 2$.
We weten dat het deeltal bestaat uit een 1, dan een aantal nullen en dan 99. We zetten die 1 in zodra dat een 19-voud in *s* oplevert:

k:	7a	7	6	5	4	3	2	1	0	*d*=19	

t:	1 0	0	0	0	0	0	9	9	*f*= 2	
s:	19 18	9	14	7	13	16	27	9	.	

Ook hier levert *k*=7 dus een H-getal en is $10^k + 99$ een H-getal

Voor *k*=7 hebben we zo dus een oplossing voor het rijtje 10000095 tot en met 10000101, dat ook op internet te vinden is. Voor andere oplossingen met andere (grotere) aantallen nullen tussen de 1 en de eindcijfers moeten we in het algoritme niet bij de eerste keer dat je (door het inzetten van de 1) een 17- of 19-voud kan maken dat meteen doen. Als je doorgaat met steeds nullen komen er (periodiek) andere mogelijkheden.
Hieronder zetten we de reeks van 17 voort vanaf *k*=7 zonder de 1 in te zetten (we vereenvoudigen nu na elke stap modulo17).
:

k:	23a	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	*d*=17
t:	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*f*= -5
s:	0	-1	7	2	3	-4	-6	8	-5	1	-7	-2	-3	4	6	8	5	-1	7	.

Bij *k*=23 kunnen we weer, zoals we eerder deden bij *k*=1, de 1 inzetten om een 17-voud te krijgen. En dat kan dan natuurlijk weer 16 stappen verder.
Conclusie: $10^k + 97$ is een H-getal als $k = 7 + n \bullet 16$ met $n \geq 0$

> Opmerking: merk op dat de (vereenvoudigde) waarden van *s* tussen *k*=7 en *k*= 14 de omgekeerden zijn van die tussen 15 en 22. En natuurlijk, als de waarde bij *k*=15 het omgekeerde is van die bij *k*=7 dan is dat ook zo bij alle volgende waarden van *k*, want we vermenigvuldigen steeds met *f*. We hadden dus ook kunnen stoppen bij *k*=15, en concluderen dat dat er 8 stappen nodig zijn om van -1 naar 1 te gaan, dus 16 stappen van 1 naar weer 1.

We doen hetzelfde met de 19-vouden:

k:	17	16	15	14	13	12	11	10	8	7	6	*d*=19
t:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*f*= 2
s:	1	10	5	12	6	3	-8	-4	-2	-1	9	

Omdat *s*(17) het omgekeerde is van *s*(7) geldt dat ook voor *s*(18)- *s*(24)
Bij *s*(24) krijgen we dus weer -1 die we met 1 in *t*(23) kunnen veranderen in *s*(23)=0.
Conclusie: $10^k + 99$ is een H-getal als $k = 7 + n \bullet 18$ als $k = 7 + n_1 \bullet 16 = 7 + n_2 \bullet 18$, dus moet dan $n_1 \bullet 16 = n_2 \bullet 18$ en dus $n_1 = 9 \bullet p$ en $n_1 = 8 \bullet p$. Dan is $k = 8 + 9 \bullet p \bullet 16 = p \bullet 144$ of $k = 8 + 8 \bullet p \bullet 18 = 8 + p \bullet 144$ met $n \geq 0$.

We hebben dus H-getallen met $10^k + 95$ tot en met $10^k + 101$ voor $k = 7 + p \bullet 144$ voor $p \geq 0$
Het aantal nullen tussen de 1 en de eindcijfers is dan $5 + p \bullet 144$ voor de eindcijfers 94 - 99, en $4 + p \bullet 144$ voor de eindcijfers 100 – 101.

Opgave 3c: Is het mogelijk om met meer dan 5 nullen het rijtje nog langer dan 7 te maken? (Dus bijvoorbeeld vanaf 1….94 of met ook eindcijfers 102? Leg je antwoord uit.
Uitwerking opgave 3c:
We tonen aan dat het rijtje H-getallen niet langer kan worden.
We moeten daarvoor nagaan of we van $10^k + 94$ of van $10^k + 10$2 H-getallen kunnen maken als $k = 7 + p \bullet 144$
$10^k + 94$ heeft cijfersom 14. Dus moet $10^k + 94$ deelbaar zijn door 14. Omdat 14. $10^k + 94$ even is is dat het geval als $10^k + 94$ deelbaar is door 7.
Maar ook moet gelden $k = 7 + p \bullet 144$, dus in elk geval moet *k* oneven zijn.

We maken weer gebruik van ons algoritme en kijken eerst naar uitbreiding naar boven, dus dus $10^k + 94$
Voor deelbaarheid door 7 kunnen we $f = -2$ gebruiken.
Om te zorgen dat *k* oneven is moeten we de 1 alleen inzetten in een kolom waarvan *k* oneven is. Immers, 10^k is die 1 gevolgd door zoveel nullen als het aantal kolommen in ons algoritme na de 1 die we inzetten

k:	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	*d*=7
t:	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	4	*f*= -2

s:					1	3	2	6	4	5	1	4	

We zien dus dat de eerste keer dat we de 1 zouden kunnen inzetten (6 +1 in kolom k=4) dat niet mag omdat dan k even is.
In kolom 7 krijgen we s=1 , en dat hadden we ook in kolom1. Dat gaat zich steeds herhalen, met periode 6.,
En dus gaat ook de 6 in kolom 4 zich steeds herhalen met periode 6.
Steeds als we de 1 zouden kunnen inzetten is dat dus in een kolom waarvan k even is en dat mag dus niet.
Naar boven kunnen we het rijtje H-getallen dus niet langer maken.

Naar beneden is de eerstvolgende $10^k + 102$. De cijfersom is 4 en dus geen deler van $10^k + 102$.
Het is dus niet mogelijk om het rijtje langer te maken.

We gaan weer terug naar de rijtjes H-getallen van Gerard Bouwhuis die eindigen op 15 t/m 19. We zagen dat met één positief cijfer en een aantal nullen het niet lukt. Maar met twee of meer positieve cijfers kan het wel en zijn er zelfs meerdere mogelijkheden. Hoewel Gerard in het midden liet wat de cijfersommen worden verklappen we dat het lukt met cijfersommen vanaf 15 tot en met 19.

Opgave 4a:
Bepaal een rijtje opvolgende H-getallen van lengte 5 dat eindigt op 15 tot en met 19 met cijfersommen 15 tot en met 19 en leg uit hoe je dat hebt gevonden.

Voor de uitwerking van opgave 4a en 4b gebruiken we de methode die gebruikt is door de inzenders Monica Woldinga en Bart Bosma. Die methode is veel simpeler dan die wij zelf in gedachten hadden, en die ook de meeste inzenders gebruikt hebben.

Uitwerking opgave 4a:
We schrijven de H-getallen als 100K+i, waarin i de waarden 15, 16, 17, 18 en 19 kunnen aannemen.
De cijfersommen moeten 15 tm 19 zijn. Omdat de cijfersommen van de i gelijk zijn aan $i - 9$ (cijfersom van 15 is $6 = 15 - 9$) moet de cijfersom van 100K 9 zijn.

We zoeken dus een getal K met cijfersom 9 zodat 100K+i deelbaar is door i voor $15 \leq i \leq 19$
Dat betekent dat 100K deelbaar moet zijn door 15 tot en met 19, dus 100K moet een veelvoud zijn van het kleinste gemene veelvoud (KGV.) van 15 tot en met 19. Omdat 100 al 2 factoren 5 en 2 factoren 2 bevat is K een veelvoud van $17 \bullet 19 \bullet 9 \bullet 4 = 11628$
Met een spreadsheet kunnen we de veelvouden van 11628 bekijken en zoeken naar veelvouden waarvan de cijfersom 9 is. We vinden dan diverse oplossingen, de kleinsten zijn $43 \bullet 11628 = 500004$, of $86 \bullet 11628 = 500008$, of $172 \bullet 11628 = 2000016$.
De kleinste is dus 500004 met het rijtje 50000415, 50000416, 50000417, 50000418, 50000419.

Extra opgave buiten de puntentelling.
Opgave 4b: Maar, hoewel met wat meer rekenwerk, lukt het ook met cijfersommen van 35 tot en met 39. Kan je daar een rijtje van lengte minstens 5 van maken die eindigen op 15 tot en met 19?

Uitwerking opgave 4b :
Dit gaat analoog aan 4a. We schrijven de H-getallen weer als 100K+i, waarin i de waarden 15, 16, 17, 18 en 19 kan aannemen.
De cijfersommen moeten nu 35 tm 39 zijn. Omdat de cijfersommen van de i gelijk zijn aan $i - 9$ (cijfersom van 15 is 6=15-9) moet de cijfersom van 100K 29 zijn.

We zoeken dus een getal K met cijfersom 29 zodat 100K+i deelbaar is door i voor $15 \leq i \leq 19$
Dus moet voor elke i gelden: $100K + i \equiv 0 \pmod{29 + i - 9} \equiv 0 \pmod{20 + i}$.
Dan is $100K \equiv -i \pmod{20+i} \equiv -i + 20 + i \pmod{20+i} \equiv 20 \pmod{20+i}$
Dus is $100K \equiv 20 \pmod{20+i}$ voor alle waarden van $20 + i$, dus voor 35 tot en met 39.
Daaraan wordt voldaan als $100K \equiv 20 (\text{mod KGV. } (35, 36, 37, 38, 39))$.

We berekenen KGV . (35, 36, 37, 38, 39)= 11515140, dus $100K \equiv 20 \pmod{11515140}$ of $100K = 20 + n \cdot 11515140$

Natuurlijk moeten we n zo kiezen dat 20 + $n \cdot 11515140$ een honderdvoud is dus $n = 2 + 5m$.
We kunnen weer een spreadsheet gebruiken om waarden van $20 + (2 + 5m) \cdot 11515140$ te genereren en er een kiezen waarvoor de cijfersom 29 is.

We vinden dan als eerste 138181700 en die voldoet, maar er zijn er nog veel meer.

Er waren twee inzenders die nog langere rijtjes van H-getallen maakten: Gerard Bouwhuis verlengde het bovenstaande voorbeeld met extra H-getal met eindcijfers 14 en 13 en merkt dan op: zo kan je doorgaan.
Bart Bosma begon zelfs bij de eindcijfers 10 (dus *i*=10 tot en met 19), en met de methode hierboven is dat ook vrij eenvoudig te doen.
We laten dat graag zien!

De H-getallen zijn 100*K*+*i*, waarin *i* de waarden 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 en 19 kan aannemen.
De redenering en de berekening zijn hetzelfde als hierboven, met als enig verschil dat *i* meer waarden kan aannemen, dus ook nu
is $100K \equiv 20 \left(\mathrm{mod}\ 20+i\right)$ voor alle waarden van 20+*i*, nu dus dus voor 30 tot en met 39, en daaraan wordt voldaan als $100K \equiv 20\left(\mathrm{mod\ KGV}\ .\ (30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39)\ \right)$

We berekenen $\mathrm{KGV}(30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39)$ =534.026.132.640 dus
$100K \equiv 20\left(\mathrm{mod}\ 534.026\ .\ 132.640\ \right)$ of $100K = 20 + n \cdot 534.026\ .\ 132.640$

We kiezen weer *n* zo dat $20 + n \cdot 534.026\ .\ 132.640$ een honderdvoud is, dus $n\ = 2 + 5m$
En met behulp van een spreadsheet genereren we waarden van $20 + (2 + 5m) \cdot 534.026\ .\ 132.640$ en we zoeken oplossingen waarvoor de cijfersom 29 is.

Bart Bosma vond zo een rijtje H-getallen van lengte 10: Te beginnen met 105.203.148.130.110 tot en met 105.203.148.130.119, met cijfersommen 30 tot en met 39.

Wij zelf hebben die gemist, maar vonden een rijtje van lengte 10 met grotere getallen met *m*=936 en

K= 25003103530205 met cijfersom 29 . We geven daarvan de bijbehorende berekeningen.

De H-getallen zijn dan:
$100K + 10 = 2500310353020510$ met cijfersom 30 en $2500310353020510/30 = 83.343\ .\ 678.434\ .\ 017$
$100K + 11 = 2500310353020511$ met cijfersom 31 en $2500310353020511/31 = 80.655\ .\ 172.678\ .\ 081$
...
$100K + 19 = 2500310353020519$ met cijfersom 39 en $2500310353020519/39 = 64.110\ .\ 521.872\ .\ 321$

De oplossing van Gerard Bouwhuis voor een rijtje met eindcijfers 13 tot en met 19 kan met wat minder grote getallen toe:
$100K + 13 = 325153008213$ met cijfersom 33 en $325153008213/33 = 9.853\ .\ 121.461$
$100K + 14 = 325153008214$ met cijfersom 33 en $325153008214/34 = 9.563\ .\ 323.771$
...
$100K + 19 = 325153008219$ met cijfersom 39 en $325153008219/39 = 8.337\ .\ 256.621$