

Examen VWO

**2021**

tijdvak 1  
maandag 17 mei  
13.30 - 16.30 uur

**wiskunde B**

Dit examen bestaat uit 14 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 74 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

# Formules

---

## Goniometrie

$$\sin(t + u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$$

$$\sin(t - u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$$

$$\cos(t + u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$$

$$\cos(t - u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$$

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$$

## Parabool en twee lijnen

De functie  $f$  wordt gegeven door  $f(x) = x - x^2$ .

Het punt  $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$  is de top van de grafiek van  $f$ .

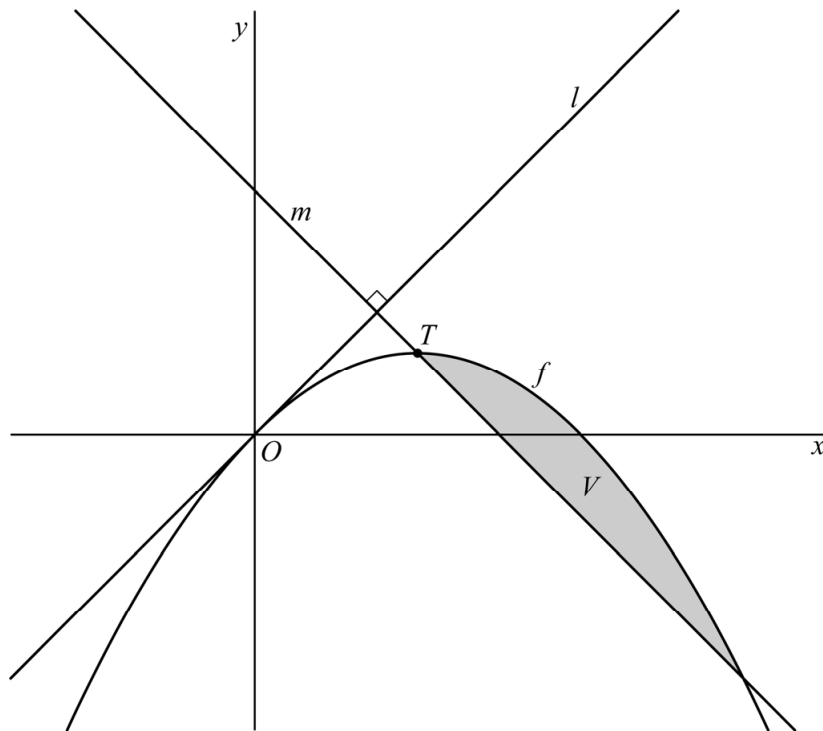
De lijn  $l$  is de raaklijn aan de grafiek van  $f$  in de oorsprong.

De lijn  $m$  staat loodrecht op lijn  $l$  en gaat door  $T$ .

$V$  is het vlakdeel dat wordt ingesloten door lijn  $m$  en de grafiek van  $f$ .

Zie de figuur.

**figuur**



8p 1 Bereken exact de oppervlakte van  $V$ .

## Goniometrische functies

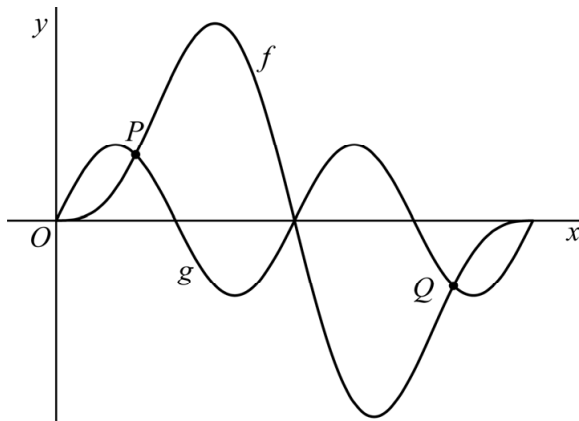
De functies  $f$  en  $g$  worden voor  $0 \leq x \leq 2\pi$  gegeven door:

$$f(x) = 2\sin(x) - \sin(2x)$$

$$g(x) = \sin(2x)$$

De grafieken van  $f$  en  $g$  hebben vijf gemeenschappelijke punten. Drie van deze punten liggen op de  $x$ -as. De andere twee punten zijn  $P$  en  $Q$ . Zie figuur 1.

figuur 1

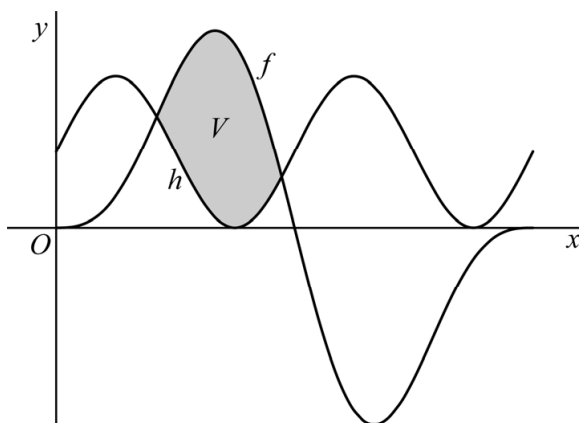


- 4p 2 Bereken exact de  $x$ -coördinaten van  $P$  en  $Q$ .

De grafiek van  $g$  wordt 1 omhoog geschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie  $h$ . Zie figuur 2.

$V$  is het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van  $f$  en  $h$ . In figuur 2 is dit gebied grijs gemaakt.

figuur 2

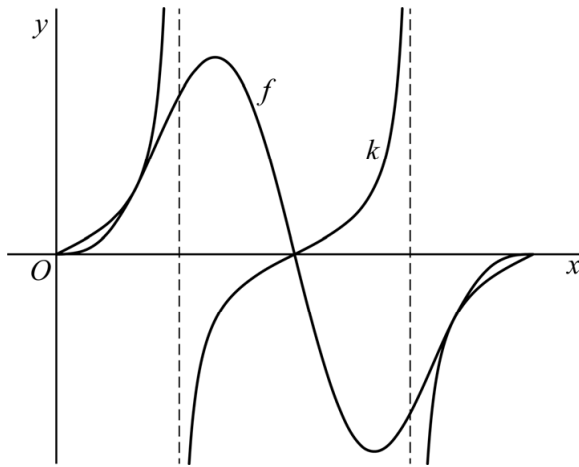


De grafieken van  $f$  en  $h$  snijden elkaar in twee punten. De  $x$ -coördinaten van deze twee punten zijn afgerond 1,33 en 2,97.

- 5p 3 Bereken de oppervlakte van  $V$  met behulp van primitiveren. Geef je eindantwoord in één decimaal.

De functie  $k$  wordt gegeven door  $k(x) = \frac{1}{2} \tan(x)$ . Zie figuur 3, waarin de grafieken van  $k$  en  $f$  zijn weergegeven.

**figuur 3**



De grafiek van  $k$  raakt de grafiek van  $f$  in een punt met  $x$ -coördinaat  $\frac{1}{3}\pi$ .

4p 4 Bewijs dat voor  $x = \frac{1}{3}\pi$  de grafieken van  $k$  en  $f$  elkaar inderdaad raken.

## Aardbevingen

Een aardbeving ontstaat op een plek in de aarde. Het punt recht boven die plek, op het aardoppervlak, heet het **epicentrum** van die aardbeving. We bekijken in deze opgave een model over aardbevingen, waarbij we ervan uitgaan dat de aardbeving in het epicentrum ontstaat.

Bij een aardbeving ontstaan verschillende typen golven in de aarde: primaire golven en secundaire golven. Primaire golven zijn sneller dan secundaire golven. We nemen in deze opgave aan dat een primaire golf een constante snelheid van 6 km/s heeft en een secundaire golf een constante snelheid van 3,5 km/s.

Een seismograaf is een meetinstrument waarmee je primaire en secundaire golven van elkaar kunt onderscheiden. Bij een bepaalde aardbeving registreert een seismograaf in een meetstation dat de eerste secundaire golf 17 seconden na de eerste primaire golf bij het meetstation aankomt. Met deze gegevens kun je de afstand  $d$  (in km) van de seismograaf tot het epicentrum van de aardbeving bepalen.

4p 5 Bereken deze afstand  $d$ .

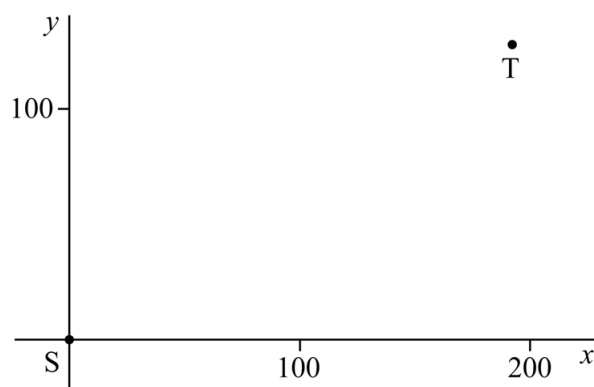
Om de plaats van het epicentrum te bepalen worden de meetgegevens van verschillende meetstations gecombineerd. In een bepaald gebied staan twee meetstations: S en T. Meetstation T ligt 192 km oostelijker en 128 km noordelijker dan meetstation S.

Uit de metingen in meetstation S volgt dat het epicentrum van de aardbeving op een afstand van 240 km van dit meetstation S ligt.

Uit de metingen in meetstation T volgt dat het epicentrum op 80 km van dit meetstation T ligt.

Op grond van deze gegevens zijn er twee mogelijke plaatsen van het epicentrum aan te wijzen. Om deze plaatsen te bepalen worden de meetstations in een assenstelsel geplaatst, waarbij meetstation S in de oorsprong ligt. De coördinaten van meetstation T zijn dan (192, 128). Zie de figuur.

**figuur**



- 6p **6** Bereken algebraïsch de coördinaten van de twee mogelijke plaatsen van het epicentrum in kilometers. Geef de coördinaten in je eindantwoord als gehele getallen.

De zwaarte van een aardbeving wordt uitgedrukt in een getal: de **magnitude**. Een zware aardbeving heeft een grote magnitude, een lichte aardbeving heeft een kleine magnitude. De United States Geological Survey heeft voor verschillende magnitudes onderzocht hoe vaak aardbevingen met die magnitude in een bepaald gebied voorkwamen. Zie de tabel.

**tabel**

<b>magnitude</b>	<b>gemiddeld aantal aardbevingen per jaar</b>
6,0 – 6,4	210
6,5 – 6,9	56
7,0 – 7,4	15
7,5 – 7,9	3,1
8,0 – 8,4	1,1
8,5 – 8,9	0,3

De onderzoekers Gutenberg en Richter hebben een model ontwikkeld om het aantal aardbevingen per jaar in een gebied te voorspellen. Dit model is van de vorm:

$$N = 10^{a-bM}$$

Hierin is  $M$  de magnitude en  $N$  het te verwachten aantal aardbevingen per jaar met deze magnitude  $M$  **of groter**. De waarden  $a$  en  $b$  zijn constanten.

Uit de tabel kun je afleiden dat er gemiddeld 285,5 aardbevingen per jaar zijn met een magnitude van 6,0 of groter. Ook kun je afleiden dat er gemiddeld 4,5 aardbevingen per jaar zijn met een magnitude van 7,5 of groter.

Met behulp van deze twee gegevens is het mogelijk de waarden van  $a$  en  $b$  uit te rekenen. Vervolgens kun je met dat model een voorspelling doen van het aantal aardbevingen per jaar met een magnitude van 6,5 of groter.

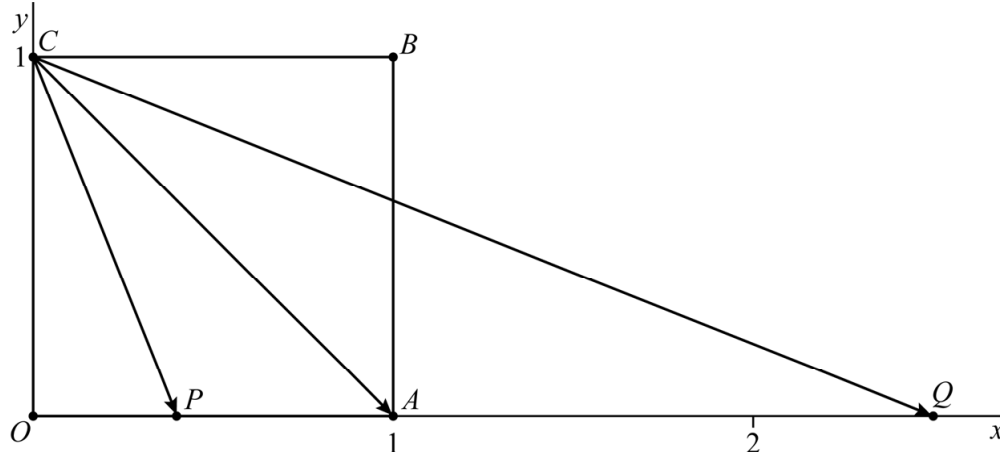
- 6p **7** Onderzoek hoeveel die voorspelling afwijkt van de gegevens in de tabel. Geef je eindantwoord als geheel getal.

## Een vierkant en vier vectoren

Gegeven is het vierkant  $OABC$  met hoekpunten  $O(0, 0)$ ,  $A(1, 0)$ ,  $B(1, 1)$  en  $C(0, 1)$ . Verder zijn gegeven het punt  $P(p, 0)$  en het punt  $Q\left(\frac{1}{p}, 0\right)$ , met  $0 < p < 1$ .

In figuur 1 zijn de vectoren  $\overrightarrow{CP}$ ,  $\overrightarrow{CA}$  en  $\overrightarrow{CQ}$  voor een willekeurige waarde van  $p$  weergegeven.

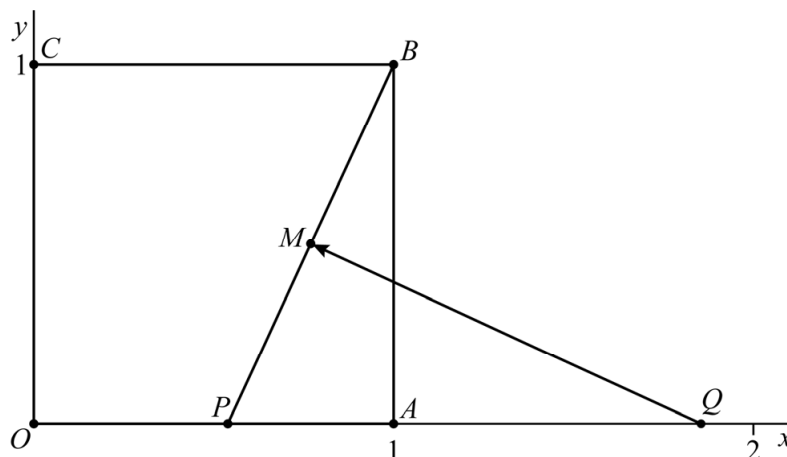
figuur 1



- 6p 8 Bewijs dat voor elke waarde van  $p$  de hoek tussen de vectoren  $\overrightarrow{CP}$  en  $\overrightarrow{CA}$  gelijk is aan de hoek tussen de vectoren  $\overrightarrow{CA}$  en  $\overrightarrow{CQ}$ .

$M$  is het midden van lijnstuk  $PB$ . Zie figuur 2, waarin ook lijnstuk  $PB$  en vector  $\overrightarrow{QM}$  zijn getekend.

figuur 2



In figuur 2 is  $p$  zo gekozen dat vector  $\overrightarrow{QM}$  loodrecht staat op lijnstuk  $PB$ .

- 7p 9 Bereken deze waarde van  $p$ . Geef je eindantwoord in twee decimalen.



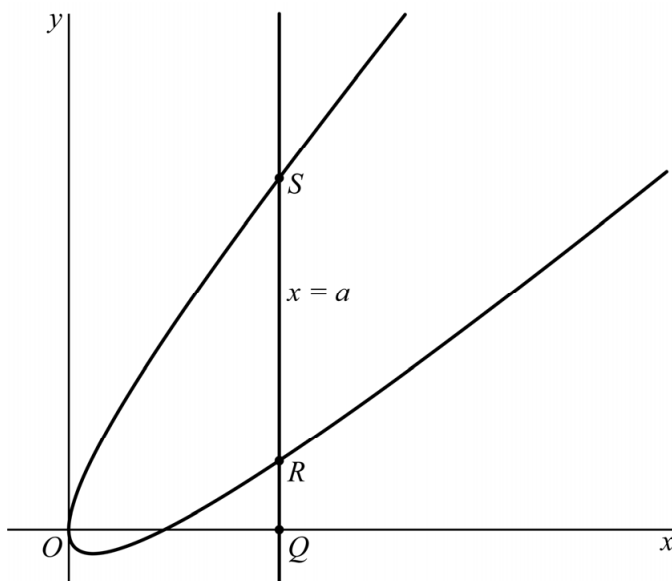
## Limiet van een verhouding

De beweging van een punt  $P$  wordt beschreven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases}$$

Gegeven is de lijn met vergelijking  $x = a$ , waarbij  $a > 0$ . Deze lijn snijdt de  $x$ -as in punt  $Q$  en de baan van  $P$  in de punten  $R$  en  $S$ , waarbij de  $y$ -coördinaat van  $S$  groter is dan de  $y$ -coördinaat van  $R$ . Zie de figuur.

figuur



Als  $a$  onbegrensd toeneemt, nadert de verhouding  $\frac{QR}{QS}$  tot een limiet.

4p 10 Bereken exact deze limiet.

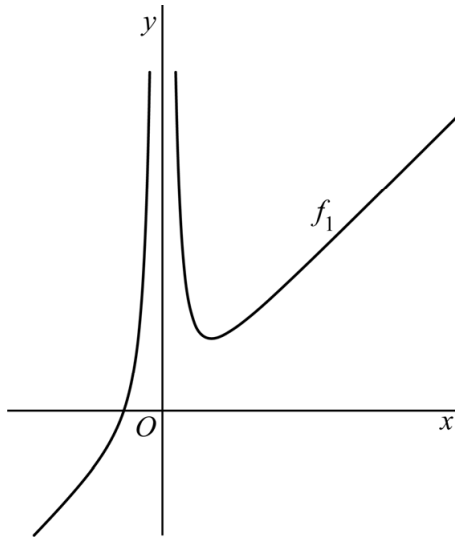
## Gebroken functie met een parameter

Voor  $p > 0$  wordt de functie  $f_p$  gegeven door:

$$f_p(x) = \frac{x^3 + 4p}{x^2}$$

In de figuur is de grafiek van  $f_1$  weergegeven.

**figuur**



De grafiek van  $f_1$  heeft een scheve asymptoot.

3p 11 Bewijs dat de grafiek van  $f_1$  boven deze scheve asymptoot ligt.

Voor elke waarde van  $p > 0$  heeft de grafiek van  $f_p$  één top.

5p 12 Bewijs dat er een lijn is waarop al deze toppen liggen.

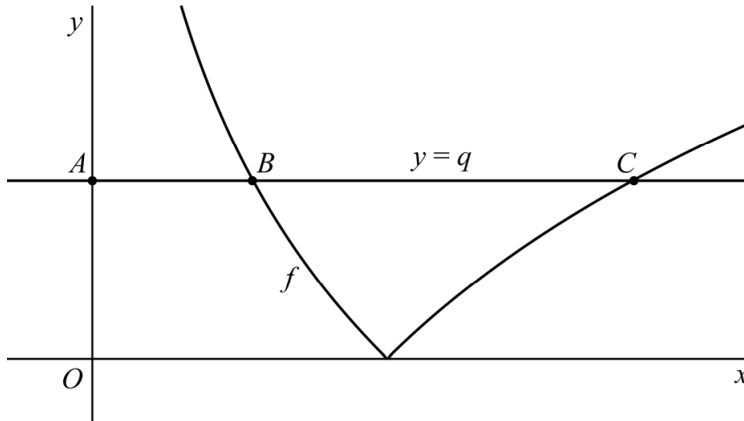
## Absolute natuurlijke logaritme

De functie  $f$  wordt gegeven door  $f(x) = |\ln(x)|$ .

Gegeven is verder de horizontale lijn met vergelijking  $y = q$ , met  $q > 0$ .

Deze lijn snijdt de  $y$ -as in het punt  $A$  en de grafiek van  $f$  in de punten  $B$  en  $C$  met  $x_B < x_C$ . Zie de figuur.

figuur



Er is een waarde van  $q$  waarvoor de lengte van lijnstuk  $BC$  drie keer zo groot is als de lengte van lijnstuk  $AB$ .

6p 13 Bereken exact deze waarde van  $q$ .

**Let op: de laatste vraag van dit examen staat op de volgende pagina.**

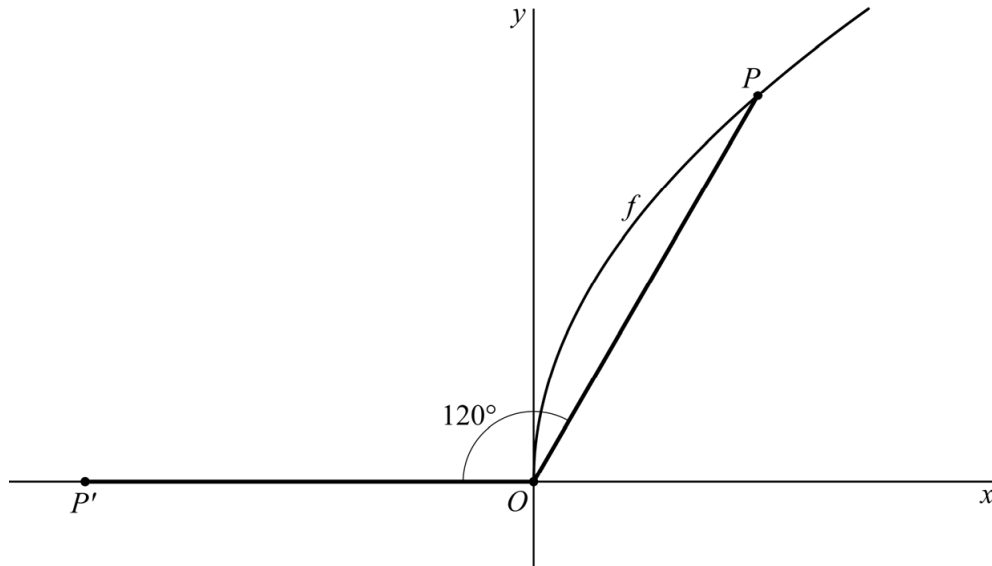
## **$P$ en $P'$**

De functie  $f$  wordt gegeven door  $f(x) = 6\sqrt{x}$ .

Het punt  $P$  is een punt op de grafiek van  $f$  rechts van de  $y$ -as.

Zie de figuur.

**figuur**



In de figuur is het punt  $P$  zo gekozen dat er een punt  $P'$  bestaat met de volgende eigenschappen:

- $P'$  ligt op de negatieve  $x$ -as;
- Lijnstuk  $OP'$  heeft dezelfde lengte als lijnstuk  $OP$ ;
- $\angle POP' = 120^\circ$ .

6p **14** Bereken exact de  $x$ -coördinaat van  $P'$ .

# Correctievoorschrift VWO

# 2021

tijdvak 1

## wiskunde B

Het correctievoorschrift bestaat uit:

- 1 Regels voor de beoordeling
- 2 Algemene regels
- 3 Vakspecifieke regels
- 4 Beoordelingsmodel
- 5 Aanleveren scores

### 1 Regels voor de beoordeling

---

Het werk van de kandidaten wordt beoordeeld met inachtneming van de artikelen 41 en 42 van het Eindexamenbesluit VO.

Voorts heeft het College voor Toetsen en Examens op grond van artikel 2 lid 2d van de Wet College voor toetsen en examens de Regeling beoordelingsnormen en bijbehorende scores centraal examen vastgesteld.

Voor de beoordeling zijn de volgende aspecten van de artikelen 36, 41, 41a en 42 van het Eindexamenbesluit VO van belang:

- 1 De directeur doet het gemaakte werk met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen en het proces-verbaal van het examen toekomen aan de examinerator. Deze kijkt het werk na en zendt het met zijn beoordeling aan de directeur. De examinerator past de beoordelingsnormen en de regels voor het toekennen van scorepunten toe die zijn gegeven door het College voor Toetsen en Examens.
- 2 De directeur doet de van de examinerator ontvangen stukken met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen, het proces-verbaal en de regels voor het bepalen van de score onverwijld aan de directeur van de school van de gecommiteerde toekomen. Deze stelt het ter hand aan de gecommiteerde.

- 3 De gecommiteerde beoordeelt het werk zo spoedig mogelijk en past de beoordelingsnormen en de regels voor het bepalen van de score toe die zijn gegeven door het College voor Toetsen en Examens.  
De gecommiteerde voegt bij het gecorrigeerde werk een verklaring betreffende de verrichte correctie. Deze verklaring wordt mede ondertekend door het bevoegd gezag van de gecommiteerde.
- 4 De examinerator en de gecommiteerde stellen in onderling overleg het behaalde aantal scorepunten voor het centraal examen vast.
- 5 Indien de examinerator en de gecommiteerde daarbij niet tot overeenstemming komen, wordt het geschil voorgelegd aan het bevoegd gezag van de gecommiteerde. Dit bevoegd gezag kan hierover in overleg treden met het bevoegd gezag van de examinerator. Indien het geschil niet kan worden beslecht, wordt hiervan melding gemaakt aan de inspectie. De inspectie kan een derde onafhankelijke corrector aanwijzen. De beoordeling van deze derde corrector komt in de plaats van de eerdere beoordelingen.

## 2 Algemene regels

---

Voor de beoordeling van het examenwerk zijn de volgende bepalingen uit de regeling van het College voor Toetsen en Examens van toepassing:

- 1 De examinerator vermeldt op een lijst de namen en/of nummers van de kandidaten, het aan iedere kandidaat voor iedere vraag toegekende aantal scorepunten en het totaal aantal scorepunten van iedere kandidaat.
- 2 Voor het antwoord op een vraag worden door de examinerator en door de gecommiteerde scorepunten toegekend, in overeenstemming met correctievoorschrift. Scorepunten zijn de getallen 0, 1, 2, ..., n, waarbij n het maximaal te behalen aantal scorepunten voor een vraag is. Andere scorepunten die geen gehele getallen zijn, of een score minder dan 0 zijn niet geoorloofd.
- 3 Scorepunten worden toegekend met inachtneming van de volgende regels:
  - 3.1 indien een vraag volledig juist is beantwoord, wordt het maximaal te behalen aantal scorepunten toegekend;
  - 3.2 indien een vraag gedeeltelijk juist is beantwoord, wordt een deel van de te behalen scorepunten toegekend in overeenstemming met het beoordelingsmodel;
  - 3.3 indien een antwoord op een open vraag niet in het beoordelingsmodel voorkomt en dit antwoord op grond van aantoonbare, vakinhoudelijke argumenten als juist of gedeeltelijk juist aangemerkt kan worden, moeten scorepunten worden toegekend naar analogie of in de geest van het beoordelingsmodel;
  - 3.4 indien slechts één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, wordt uitsluitend het eerstgegeven antwoord beoordeeld;
  - 3.5 indien meer dan één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, worden uitsluitend de eerstgegeven antwoorden beoordeeld, tot maximaal het gevraagde aantal;
  - 3.6 indien in een antwoord een gevraagde verklaring of uitleg of afleiding of berekening ontbreekt dan wel foutief is, worden 0 scorepunten toegekend tenzij in het beoordelingsmodel anders is aangegeven;

- 3.7 indien in het beoordelingsmodel verschillende mogelijkheden zijn opgenomen, gescheiden door het teken /, gelden deze mogelijkheden als verschillende formuleringen van hetzelfde antwoord of onderdeel van dat antwoord;
- 3.8 indien in het beoordelingsmodel een gedeelte van het antwoord tussen haakjes staat, behoeft dit gedeelte niet in het antwoord van de kandidaat voor te komen;
- 3.9 indien een kandidaat op grond van een algemeen geldende woordbetekenis, zoals bijvoorbeeld vermeld in een woordenboek, een antwoord geeft dat vakinhoudelijk onjuist is, worden aan dat antwoord geen scorepunten toegekend, of tenminste niet de scorepunten die met de vakinhoudelijke onjuistheid gemoeid zijn.
- 4 Het juiste antwoord op een meerkeuzevraag is de hoofdletter die behoort bij de juiste keuzemogelijkheid. Als het antwoord op een andere manier is gegeven, maar onomstotelijk vaststaat dat het juist is, dan moet dit antwoord ook goed gerekend worden. Voor het juiste antwoord op een meerkeuzevraag wordt het in het beoordelingsmodel vermelde aantal scorepunten toegekend. Voor elk ander antwoord worden geen scorepunten toegekend. Indien meer dan één antwoord gegeven is, worden eveneens geen scorepunten toegekend.
- 5 Een fout mag in de uitwerking van een vraag maar één keer worden aangerekend, tenzij daardoor de vraag aanzienlijk vereenvoudigd wordt en/of tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.
- 6 Een zelfde fout in de beantwoording van verschillende vragen moet steeds opnieuw worden aangerekend, tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.
- 7 Indien de examinerator of de gecommiteerde meent dat in een examen of in het beoordelingsmodel bij dat examen een fout of onvolkomenheid zit, beoordeelt hij het werk van de kandidaten alsof examen en beoordelingsmodel juist zijn. Hij kan de fout of onvolkomenheid mededelen aan het College voor Toetsen en Examens. Het is niet toegestaan zelfstandig af te wijken van het beoordelingsmodel. Met een eventuele fout wordt bij de definitieve normering van het examen rekening gehouden.
- 8 Scorepunten worden toegekend op grond van het door de kandidaat gegeven antwoord op iedere vraag. Er worden geen scorepunten vooraf gegeven.
- 9 Het cijfer voor het centraal examen wordt als volgt verkregen.  
Eerste en tweede corrector stellen de score voor iedere kandidaat vast. Deze score wordt meegedeeld aan de directeur.  
De directeur stelt het cijfer voor het centraal examen vast op basis van de regels voor omzetting van score naar cijfer.

**NB1** *T.a.v. de status van het correctievoorschrift:*

Het College voor Toetsen en Examens heeft de correctievoorschriften bij regeling vastgesteld. Het correctievoorschrift is een zogeheten algemeen verbindend voorschrift en valt onder wet- en regelgeving die van overheidswege wordt verstrekt. De corrector mag dus niet afwijken van het correctievoorschrift.

NB2 *T.a.v. het verkeer tussen examinerator en gecommiteerde (eerste en tweede corrector):*  
Het aangeven van de onvolkomenheden op het werk en/of het noteren van de behaalde scores bij de vraag is toegestaan, maar niet verplicht. Evenmin is er een standaardformulier voorgeschreven voor de vermelding van de scores van de kandidaten. Het vermelden van het schoolexamencijfer is toegestaan, maar niet verplicht. Binnen de ruimte die de regelgeving biedt, kunnen scholen afzonderlijk of in gezamenlijk overleg keuzes maken.

NB3 *T.a.v. aanvullingen op het correctievoorschrift:*  
Er zijn twee redenen voor een aanvulling op het correctievoorschrift: verduidelijking en een fout.

*Verduidelijking*

Het correctievoorschrift is vóór de afname opgesteld. Na de afname blijkt pas welke antwoorden kandidaten geven. Vragen en reacties die via het Examenloket bij de Toets- en Examenlijn binnenkomen, kunnen duidelijk maken dat het correctievoorschrift niet voldoende recht doet aan door kandidaten gegeven antwoorden. Een aanvulling op het correctievoorschrift kan dan alsnog duidelijkheid bieden.

*Een fout*

Als het College voor Toetsen en Examens vaststelt dat een centraal examen een fout bevat, kan het besluiten tot een aanvulling op het correctievoorschrift.

Een aanvulling op het correctievoorschrift wordt door middel van een mailing vanuit Examenblad.nl bekendgemaakt. Een aanvulling op het correctievoorschrift wordt zo spoedig mogelijk verstuurd aan de examensecretarissen.

Soms komt een onvolkomenheid pas geruime tijd na de afname aan het licht. In die gevallen vermeldt de aanvulling:

- Als het werk al naar de tweede corrector is gezonden, past de tweede corrector deze aanvulling op het correctievoorschrift toe.  
en/of
- Als de aanvulling niet is verwerkt in de naar Cito gezonden Wolf-scores, voert Cito dezelfde wijziging door die de correctoren op de verzamelstaat doorvoeren.

Dit laatste gebeurt alleen als de aanvulling luidt dat voor een vraag alle scorepunten moeten worden toegekend.

Als een onvolkomenheid op een dusdanig laat tijdstip geconstateerd wordt dat een aanvulling op het correctievoorschrift ook voor de tweede corrector te laat komt, houdt het College voor Toetsen en Examens bij de vaststelling van de N-term rekening met de onvolkomenheid.



### 3 Vakspecifieke regels

---

Voor dit examen zijn de volgende vakspecifieke regels vastgesteld:

- 1 Voor elke rekenfout of verschrijving in de berekening wordt 1 scorepunt in mindering gebracht tot het maximum van het aantal scorepunten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.
- 2 De algemene regel 3.6 geldt ook bij de vragen waarbij de kandidaten de grafische rekenmachine gebruiken. Bij de betreffende vragen geven de kandidaten een toelichting waaruit blijkt hoe zij de GR hebben gebruikt.
- 3a Als bij een vraag doorgerekend wordt met tussenantwoorden die afgerond zijn, en dit leidt tot een ander eindantwoord dan wanneer doorgerekend is met niet-afgeronde tussenantwoorden, wordt bij de betreffende vraag één scorepunt in mindering gebracht. Tussenantwoorden mogen wel afgerond genoteerd worden.
- 3b Uitzondering zijn die gevallen waarin door de context wordt bepaald dat tussenantwoorden moeten worden afgerond.

## 4 Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

### Parabool en twee lijnen

1 maximumscore 8

- $f'(x) = 1 - 2x$ , dus  $rc_l = f'(0) = 1$  1
- $(rc_l \cdot rc_m = -1, \text{ dus}) rc_m = -1$  1
- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$  invullen in  $y = -x + b$  geeft voor  $m$  de vergelijking  $y = -x + \frac{3}{4}$  1
- Uit  $-x + \frac{3}{4} = x - x^2$  volgt  $x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$  1
- Exact oplossen geeft  $x = 1\frac{1}{2}$  ( $x = \frac{1}{2}$  geeft  $T$ ) 1
- De oppervlakte van  $V$  is gelijk aan  $\int_{\frac{1}{2}}^{1\frac{1}{2}} \left( (x - x^2) - \left(-x + \frac{3}{4}\right) \right) dx$  1
- Een primitieve van  $-x^2 + 2x - \frac{3}{4}$  is  $-\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{3}{4}x$  1
- Invullen van de grenzen geeft: de oppervlakte van  $V$  is  $\frac{1}{6}$  1

## Goniometrische functies

### 2 maximumscore 4

- $2 \sin(x) - \sin(2x) = \sin(2x)$  herleiden tot  $\sin(x) = \sin(2x)$  1
- Dit geeft  $x = 2x + k \cdot 2\pi$  (met  $k$  geheel) of  $x = \pi - 2x + k \cdot 2\pi$  (met  $k$  geheel) 1
- Hieruit volgt  $x = k \cdot 2\pi$  (met  $k$  geheel) of  $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$  (met  $k$  geheel) 1
- De  $x$ -coördinaten van  $P$  en  $Q$  zijn  $x = \frac{1}{3}\pi$  en  $x = 1\frac{2}{3}\pi$  (de andere oplossingen geven punten op de  $x$ -as) 1

of

- $2 \sin(x) - \sin(2x) = \sin(2x)$  herleiden tot  $\sin(x) = \sin(2x)$  1
- Dit geeft  $\sin(x) = 2 \sin(x) \cos(x)$  1
- Dit geeft  $\sin(x) = 0$  of  $\cos(x) = \frac{1}{2}$  1
- De  $x$ -coördinaten van  $P$  en  $Q$  zijn  $x = \frac{1}{3}\pi$  en  $x = 1\frac{2}{3}\pi$  (de andere oplossingen geven punten op de  $x$ -as) 1

### 3 maximumscore 5

- De oppervlakte van  $V$  kan berekend worden met  $\int_a^b (f(x) - h(x)) dx$  (met  $a = 1,33$  en  $b = 2,97$ ) 1
- $h(x) = \sin(2x) + 1$  1
- De primitieve van  $f - h$  is  $-2 \cos(x) + \cos(2x) - x$  2
- De gevraagde oppervlakte is 2,6 1

*Opmerking*

*Voor het derde antwoordelement mag voor een niet volledig juist antwoord 1 scorepunt worden toegekend.*

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

**4 maximumscore 4**

- $f\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  en  $k\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  (en zijn dus gelijk) 1
- $f'(x) = 2\cos(x) - 2\cos(2x)$  1
- $k'(x) = \frac{1}{2\cos^2(x)}$  (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- $f'\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2$  en  $k'\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2$  (en zijn dus gelijk) (dus de grafiek van  $k$  raakt de grafiek van  $f$  in een punt met  $x$ -coördinaat  $\frac{1}{3}\pi$ ) 1

## Aardbevingen

### 5 maximumscore 4

- Er geldt  $6 = \frac{d}{t}$  (of een gelijkwaardige vorm) (waarbij  $t$  de tijd is, waarop de eerste primaire golf bij het meetstation aankomt) 1
- (Voor de secundaire golf geldt)  $3,5 = \frac{d}{t+17}$  (of een gelijkwaardige vorm) 1
- Beschrijven hoe dit stelsel kan worden opgelost 1
- Hieruit volgt ( $d =$ ) 142,8 (of 143) (km) 1

of

- De tijd die de primaire golf nodig heeft is  $\frac{d}{6}$  (seconden) 1
- De tijd die de secundaire golf nodig heeft is  $\frac{d}{3,5}$  (seconden) 1
- Er geldt dus  $\frac{d}{3,5} - \frac{d}{6} = 17$  1
- Hieruit volgt ( $d =$ ) 142,8 (of 143) (km) 1

### 6 maximumscore 6

- Voor de coördinaten van het epicentrum geldt  $x^2 + y^2 = 240^2$  en  $(x-192)^2 + (y-128)^2 = 80^2$  1
- Uit het verschil van beide vergelijkingen volgt  $384x - 192^2 + 256y - 128^2 = 240^2 - 80^2$  1
- Herleiden tot  $y = -1,5x + 408$  1
- Invullen (bijvoorbeeld in de vergelijking van de cirkel om  $S$ ) en herleiden geeft  $3,25x^2 - 1224x + 108864 = 0$  1
- De oplossingen van deze vergelijking zijn  $x = 144$  en  $x = 232,6\dots$  1
- De gevraagde coördinaten zijn (144, 192) en (233, 59) 1

of

- $ST = \sqrt{192^2 + 128^2} = 230,75\dots$  1
- Voor de hellingshoek  $\alpha$  van  $ST$  geldt  $\tan(\alpha) = \frac{128}{192}$ , waaruit volgt  $\alpha = 33,69\dots(^{\circ})$  1
- Toepassen van de cosinusregel in driehoek  $STE$  (met  $E$  de plaats van het epicentrum) geeft  $80^2 = 240^2 + 230,75\dots^2 - 2 \cdot 240 \cdot 230,75\dots \cdot \cos(\angle EST)$  1
- Algebraïsch oplossen geeft  $\angle EST = 19,44\dots(^{\circ})$  1
- De hellingshoek van  $SE$  is dus gelijk aan  $33,69\dots + 19,44\dots = 53,13\dots(^{\circ})$  of gelijk aan  $33,69\dots - 19,44\dots = 14,25\dots(^{\circ})$  1
- Dit geeft voor  $E$  ( $240 \cdot \cos(53,13\dots)$ ,  $240 \cdot \sin(53,13\dots)$ ) en ( $240 \cdot \cos(14,25\dots)$ ,  $240 \cdot \sin(14,25\dots)$ ), dus de gevraagde coördinaten zijn (144, 192) en (233, 59) 1

of

Vraag	Antwoord	Scores
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Voor de coördinaten van het epicentrum geldt <math>x^2 + y^2 = 240^2</math> en <math>(x-192)^2 + (y-128)^2 = 80^2</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Uit de eerste vergelijking volgt <math>y = \sqrt{240^2 - x^2}</math>; invullen in de tweede vergelijking geeft <math>(x-192)^2 + (\sqrt{240^2 - x^2} - 128)^2 = 80^2</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dit geeft <math>x^2 - 2 \cdot 192 \cdot x + 192^2 + 240^2 - x^2 - 2 \cdot 128 \cdot \sqrt{240^2 - x^2} + 128^2 = 80^2</math> en hieruit volgt <math>-256\sqrt{240^2 - x^2} = 384x - 104\,448</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Herleiden tot <math>3,25x^2 - 1224x + 108\,864 = 0</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>De oplossingen van deze vergelijking zijn <math>x = 144</math> en <math>x = 232,6\dots</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>De gevraagde coördinaten zijn <math>(144, 192)</math> en <math>(233, 59)</math></li> </ul>	1

**7 maximumscore 6**

- Er geldt  $4,5 = 10^{a-b \cdot 7,5}$  en  $285,5 = 10^{a-b \cdot 6}$  1
- Het stelsel  $\begin{cases} a - 7,5b = \log(4,5) \\ a - 6b = \log(285,5) \end{cases}$  moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe dit stelsel kan worden opgelost 1
- Dit geeft  $a = 9,66\dots$  en  $b = 1,20\dots$  1
- $N = 10^{9,66\dots - 1,20\dots \cdot 6,5} = 71,5\dots$  1
- $(56 + 15 + 3,1 + 1,1 + 0,3 =) 75,5$ , dus de voorspelling wijkt  $(-)4$  af 1

*Opmerking*

*Als doorgerekend wordt met waarden van  $a$  en  $b$  die zijn afgerond op twee decimalen (resultierend in het eindantwoord  $(-)1$ ) of meer dan twee decimalen, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.*

## Een vierkant en vier vectoren

### 8 maximumscore 6

- $\overline{CP} = \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix}$  en  $\overline{CA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  1

- $\cos(\angle PCA) = \frac{\begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}$  1

- Dit is gelijk aan  $\frac{p+1}{\sqrt{p^2+1} \cdot \sqrt{2}}$  1

- ( $\overline{CQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} \\ -1 \end{pmatrix}$  dus) ( $p$  vervangen door  $\frac{1}{p}$  geeft)

$$\cos(\angle ACQ) = \frac{\frac{1}{p} + 1}{\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 1} \cdot \sqrt{2}} \quad 1$$

- Teller en noemer van  $\frac{\frac{1}{p} + 1}{\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 1} \cdot \sqrt{2}}$  vermenigvuldigen met  $p$  geeft

$$\frac{1+p}{\sqrt{p^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 1} \cdot \sqrt{2}} \quad 1$$

- Dit is gelijk aan  $\frac{1+p}{\sqrt{1+p^2} \cdot \sqrt{2}}$ , (dus  $\cos(\angle ACQ) = \cos(\angle PCA)$ ), dus (in deze situatie)  $\angle ACQ = \angle PCA$  (dus de hoek tussen de vectoren  $\overline{CP}$  en  $\overline{CA}$  is gelijk aan de hoek tussen de vectoren  $\overline{CA}$  en  $\overline{CQ}$ ) 1

of

Vraag	Antwoord	Scores
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix}</math> en <math>\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\cos(\angle PCA) = \frac{\begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left  \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix} \right  \cdot \left  \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right }</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dit is gelijk aan <math>\frac{p+1}{\sqrt{p^2+1} \cdot \sqrt{2}}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• (<math>\overrightarrow{CQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} \\ -1 \end{pmatrix}</math>) dus (<math>p</math> vervangen door <math>\frac{1}{p}</math> geeft)</li> </ul>	
	$\cos(\angle ACQ) = \frac{\frac{1}{p} + 1}{\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 1} \cdot \sqrt{2}}$	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Gelijkstellen van beide uitdrukkingen en vervolgens kruislings vermenigvuldigen geeft (dat bewezen moet worden):</li> </ul>	
	$\sqrt{p^2} \sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 1} + \sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{p^2}} \sqrt{p^2 + 1} + \sqrt{p^2 + 1}$	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dit geeft <math>\sqrt{1+p^2} + \sqrt{\frac{1}{p^2}+1} = \sqrt{1+\frac{1}{p^2}} + \sqrt{p^2+1}</math>, (en dit is inderdaad aan elkaar gelijk, dus <math>\cos(\angle ACQ) = \cos(\angle PCA)</math>,) dus (in deze situatie) <math>\angle ACQ = \angle PCA</math> (dus de hoek tussen de vectoren <math>\overrightarrow{CP}</math> en <math>\overrightarrow{CA}</math> is gelijk aan de hoek tussen de vectoren <math>\overrightarrow{CA}</math> en <math>\overrightarrow{CQ}</math>)</li> </ul>	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• De richtingscoëfficiënt van de lijn door <math>C</math> en <math>Q</math> is <math>\frac{-1}{\frac{1}{p}} = -p</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Het snijpunt <math>R</math> van de lijn door <math>C</math> en <math>Q</math> en lijnstuk <math>AB</math> heeft dus <math>y</math>-coördinaat <math>1-p</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>PA = 1-p</math>, dus <math>PA = RA</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\angle PAC = \angle RAC (= 45^\circ)</math> (want <math>AC</math> is een diagonaal van een vierkant)</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ook geldt <math>CA = CA</math>, dus <math>\triangle CAP</math> is gelijkvormig met <math>\triangle CAR</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Uit deze gelijkvormigheid volgt dat <math>\angle ACQ = (\angle ACR =) \angle ACP</math> (dus de hoek tussen de vectoren <math>\overrightarrow{CP}</math> en <math>\overrightarrow{CA}</math> is gelijk aan de hoek tussen de vectoren <math>\overrightarrow{CA}</math> en <math>\overrightarrow{CQ}</math>)</li> </ul>	1
	of	



Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

- $\frac{OC}{OP} = \frac{1}{p}$  1
- $\frac{OQ}{OC} = \frac{\frac{1}{p}}{1} = \frac{1}{p}$  1
- Ook geldt  $\angle POC = \angle COQ$ , dus  $\triangle OPC$  is gelijkvormig met  $\triangle OCQ$  1
- $\angle OQC = \angle BCQ$  (Z-hoeken), dus  $\angle OCP = \angle OQC = \angle BCQ$  1
- $\angle ACP = 45^\circ - \angle OCP$  en  $\angle QCA = 45^\circ - \angle BCQ$  1
- Dus  $\angle ACP = \angle QCA$  (dus de hoek tussen de vectoren  $\overrightarrow{CP}$  en  $\overrightarrow{CA}$  is gelijk aan de hoek tussen de vectoren  $\overrightarrow{CA}$  en  $\overrightarrow{CQ}$ ) 1

**9 maximumscore 7**

- De coördinaten van  $M$  zijn  $(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  1
- $\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 1-p \\ 1 \end{pmatrix}$  1
- $\overrightarrow{QM} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  1
- $\overrightarrow{PB}$  staat loodrecht op  $\overrightarrow{QM}$  als  $\begin{pmatrix} 1-p \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$  1
- De vergelijking  $(1-p) \cdot (\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}) + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$  moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $p \approx 0,54$  (want  $0 < p < 1$ ) 1

of

- De richtingscoëfficiënt van de lijn door  $P$  en  $B$  is  $\frac{1}{1-p}$  1
- De richtingscoëfficiënt van de lijn door  $M$  loodrecht op  $PB$  is  $p-1$  1
- De coördinaten van  $M$  zijn  $(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  1
- Hieruit volgt dat een vergelijking van de lijn door  $M$  loodrecht op  $PB$  is  $y = (p-1)x - \frac{1}{2}p^2 + 1$  1
- Deze lijn gaat door  $Q$  als  $0 = (p-1) \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{2}p^2 + 1$  1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $p \approx 0,54$  (want  $0 < p < 1$ ) 1

of

Vraag	Antwoord	Scores
	<ul style="list-style-type: none"> <li>In dit geval is de lijn door <math>M</math> en <math>Q</math> de middelloodlijn van lijnstuk <math>PB</math></li> </ul>	2
	<ul style="list-style-type: none"> <li>(Omdat <math>Q</math> op deze middelloodlijn ligt, geldt) <math>PQ = BQ</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>PQ = \frac{1}{p} - p</math> en <math>AQ = \frac{1}{p} - 1</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>BQ = \sqrt{\left(\frac{1}{p} - 1\right)^2 + 1}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Beschrijven hoe de vergelijking <math>\frac{1}{p} - p = \sqrt{\left(\frac{1}{p} - 1\right)^2 + 1}</math> kan worden opgelost</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>p \approx 0,54</math> (want <math>0 &lt; p &lt; 1</math>)</li> </ul>	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>De coördinaten van <math>M</math> zijn <math>\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>PM^2 = \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - p\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>QM^2 = \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>PQ^2 = \left(\frac{1}{p} - p\right)^2</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>De vergelijking <math>\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - p\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{p} - p\right)^2</math> moet worden opgelost</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>p \approx 0,54</math> (want <math>0 &lt; p &lt; 1</math>)</li> </ul>	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>De coördinaten van <math>M</math> zijn <math>\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\overline{PB} = \begin{pmatrix} 1-p \\ 1 \end{pmatrix}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Een vergelijking van een normaalvector van <math>\overline{PB}</math> is <math>(1-p)x + y = c</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Invullen van <math>Q\left(\frac{1}{p}, 0\right)</math> geeft voor de normaalvector door <math>Q</math> dat</li> </ul>	
	$(1-p) \cdot \frac{1}{p} = c$	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>De normaalvector moet door <math>M</math> gaan, dus er moet gelden</li> </ul>	
	$(1-p) \cdot \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = (1-p) \cdot \frac{1}{p}$ (en deze vergelijking moet worden opgelost)	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>p \approx 0,54</math> (want <math>0 &lt; p &lt; 1</math>)</li> </ul>	1
	of	

Vraag	Antwoord	Scores
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Er moet gelden <math>PQ \cdot AB = PB \cdot QM</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>PQ = \frac{1}{p} - p</math> (en <math>AB = 1</math>)</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>PB = \sqrt{(1-p)^2 + 1}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>QM = \sqrt{\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• De vergelijking <math>\left(\frac{1}{p} - p\right) \cdot 1 = \sqrt{(1-p)^2 + 1} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}</math> moet worden opgelost</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>p \approx 0,54</math> (want <math>0 &lt; p &lt; 1</math>)</li> </ul>	1

*Opmerking*

*In het derde antwoordalternatief mogen voor het eerste antwoordelement uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.*

## Limiet van een verhouding

**10 maximumscore 4**

- $t^2 = a$  geeft  $t = -\sqrt{a}$  of  $t = \sqrt{a}$  1
- $y_S = y(-\sqrt{a}) = a + 2\sqrt{a}$  en  $y_R = y(\sqrt{a}) = a - 2\sqrt{a}$  1
- $\frac{QR}{QS} = \frac{a - 2\sqrt{a}}{a + 2\sqrt{a}} = \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{a}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{a}}}$  1
- $\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right)$  nadert naar 0 als  $a$  onbegrensd toeneemt, dus) de limiet is 1 1  
 (of  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{a}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{a}}} = 1$ )

## Gebroken functie met een parameter

### 11 maximumscore 3

- $f_1(x) = x + \frac{4}{x^2}$  1
- (Als  $x$  onbegrensd toeneemt, nadert  $\frac{4}{x^2}$  tot 0, dus) de vergelijking van de scheve asymptoot is  $y = x$  1
- Omdat ( $4 > 0$  en)  $x^2 > 0$ , geldt  $x + \frac{4}{x^2} > x$  (dus ligt de grafiek van  $f_1$  boven de scheve asymptoot) 1

### 12 maximumscore 5

- Er geldt  $f_p'(x) = \frac{x^2 \cdot 3x^2 - (x^3 + 4p) \cdot 2x}{(x^2)^2}$  1
  - Herleiden tot  $f_p'(x) = 1 - \frac{8p}{x^3}$  (of  $f_p'(x) = \frac{x^4 - 8px}{x^4}$ ) 1
  - $f_p'(x) = 0$  geeft voor de  $x$ -coördinaat van de top  $p = \frac{1}{8}x^3$  1
  - Invullen in  $x^3 + 4p$  geeft  $1\frac{1}{2}x^3$  1
  - Dus de  $y$ -coördinaat van de top is  $\frac{1\frac{1}{2}x^3}{x^2} = 1\frac{1}{2}x$  (dus de toppen liggen op de lijn met vergelijking  $y = 1\frac{1}{2}x$ ) 1
- of

Vraag	Antwoord	Scores
	• Er geldt $f_p(x) = x + \frac{4p}{x^2} = x + 4px^{-2}$	1
	• $f_p'(x) = 1 - \frac{8p}{x^3}$	1
	• $f_p'(x) = 0$ geeft voor de $x$ -coördinaat van de top $x = \sqrt[3]{8p}$ ( $= 2p^{\frac{1}{3}}$ )	1
	• Invullen in $x^3 + 4p$ geeft $12p$ en invullen in $x^2$ geeft $\left(2p^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 4p^{\frac{2}{3}}$ , dus de $y$ -coördinaat van de top is $\frac{12p}{2} = 3p^{\frac{1}{3}}$	1
	• (Voor elke waarde van $p > 0$ geldt) $\frac{3p^{\frac{1}{3}}}{2p^{\frac{1}{3}}} = 1\frac{1}{2}$ (of $3p^{\frac{1}{3}} = 1\frac{1}{2} \cdot 2p^{\frac{1}{3}}$ ) (dus de toppen liggen op de lijn met vergelijking $y = 1\frac{1}{2}x$ )	1

## Absolute natuurlijke logaritme

### 13 maximumscore 6

- $|\ln(x_C)| = \ln(x_C) = q$  (want  $\ln(x_C) > 0$ ), dus  $x_C = e^q$  1
  - $|\ln(x_B)| = -\ln(x_B)$  (want  $\ln(x_B) < 0$ ) 1
  - $-\ln(x_B) = q$ , dus  $\ln(x_B) = -q$ , dus  $x_B = e^{-q}$  1
  - De vergelijking  $(e^q - e^{-q} = 3e^{-q})$ , dus  $e^q = 4e^{-q}$  moet worden opgelost 1
  - Hieruit volgt  $e^{2q} = 4$  1
  - Dus  $q = \frac{1}{2}\ln(4)$  (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- of
- Er moet gelden  $(x_C - x_B = 3 \cdot x_B)$ , dus  $x_C = 4 \cdot x_B$  1
  - De vergelijking  $|\ln(b)| = |\ln(4b)|$  moet worden opgelost, waarbij  $b$  de  $x$ -coördinaat van  $B$  is 1
  - $|\ln(b)| = -\ln(b)$  (want  $\ln(b) < 0$ ) en  $|\ln(4b)| = \ln(4b)$  (want  $\ln(4b) > 0$ ) 1
  - Uit  $-\ln(b) = \ln(4b)$  volgt  $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(4b)$  1
  - $\frac{1}{b} = 4b$ , dus  $1 = 4b^2$  1
  - Dit geeft  $b = \frac{1}{2}$  ( $b = -\frac{1}{2}$  voldoet niet), dus  $q = \ln(2)$  (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

**P en P'****14 maximumscore 6**

- De lijn door  $O$  en  $P$  heeft hellingshoek  $(180 - 120 =) 60^\circ$  1
- De richtingscoëfficiënt van deze lijn is dus  $\sqrt{3}$  1
- Voor de  $x$ -coördinaat van  $P$  geldt  $\sqrt{3} \cdot x = 6\sqrt{x}$  1
- Een exacte berekening waaruit volgt  $x = 12$  ( $x = 0$  voldoet niet) 1
- Dus  $P(12, 6\sqrt{12})$ , dus  $OP = \sqrt{12^2 + (6\sqrt{12})^2} = 24$  1
- Dus  $x_{P'} = -24$  1

of

- $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p \\ 6\sqrt{p} \end{pmatrix}$  en een richtingsvector van  $OP'$  is  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  (of een andere vector van de vorm  $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$  met  $a < 0$ ) 1

- $\cos(120^\circ) = \frac{\begin{pmatrix} p \\ 6\sqrt{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} p \\ 6\sqrt{p} \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}$  1

- Dus  $-\frac{1}{2} = \frac{-p}{\sqrt{p^2 + 36p}}$  1

- Een exacte berekening waaruit volgt  $p = 12$  1
- Dus  $P(12, 6\sqrt{12})$ , dus  $OP = \sqrt{12^2 + (6\sqrt{12})^2} = 24$  1
- Dus  $x_{P'} = -24$  1

of

- Als  $P(p, 6\sqrt{p})$ , dan is  $OP = \sqrt{p^2 + 36p}$  1

- Dan geldt  $x_{P'} = -\sqrt{p^2 + 36p}$  1

- De lijn door  $O$  en  $P$  heeft hellingshoek  $(180 - 120 =) 60^\circ$  1

- De richtingscoëfficiënt van deze lijn is dus  $\sqrt{3}$  1

- Als  $Q$  de loodrechte projectie van  $P$  op de  $x$ -as is, dan geldt  $PQ = p\sqrt{3}$ ; er moet gelden  $OP^2 = OQ^2 + PQ^2$ , dus  $p^2 + 36p = p^2 + 3p^2$ ; dit geeft  $3p^2 = 36p$ , dus  $p = 12$  ( $p = 0$  voldoet niet) 1

- Dus  $OP = \sqrt{12^2 + 36 \cdot 12} = 24$ , dus  $x_{P'} = -24$  1

of

Vraag	Antwoord	Scores
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Als <math>P'(-p, 0)</math>, dan is <math>OP = p</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>De lijn door <math>O</math> en <math>P</math> heeft hellingshoek <math>(180 - 120 =) 60^\circ</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Als <math>Q</math> de loodrechte projectie van <math>P</math> op de <math>x</math>-as is, dan is <math>OQP</math> een <math>1-2-\sqrt{3}</math>-driehoek</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Hieruit volgt dat <math>OQ = \frac{1}{2}p</math> en <math>PQ = \frac{1}{2}p\sqrt{3}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dus <math>6\sqrt{\frac{1}{2}p} = \frac{1}{2}p\sqrt{3}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Een exacte berekening waaruit volgt <math>p = 24</math> (<math>p = 0</math> voldoet niet), dus <math>x_{P'} = -24</math></li> </ul>	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Als <math>P(p, 6\sqrt{p})</math>, dan is <math>OP = \sqrt{p^2 + 36p}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dan geldt <math>\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} -\sqrt{p^2 + 36p} \\ 0 \end{pmatrix}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math display="block">\cos(120^\circ) = \frac{\begin{pmatrix} p \\ 6\sqrt{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{p^2 + 36p} \\ 0 \end{pmatrix}}{\left  \begin{pmatrix} p \\ 6\sqrt{p} \end{pmatrix} \right  \cdot \left  \begin{pmatrix} -\sqrt{p^2 + 36p} \\ 0 \end{pmatrix} \right }</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dus <math>-\frac{1}{2} = \frac{-p \cdot \sqrt{p^2 + 36p}}{p^2 + 36p}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Een exacte berekening waaruit volgt <math>p = 12</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dus <math>OP = \sqrt{12^2 + 36 \cdot 12} = 24</math>, dus <math>x_{P'} = -24</math></li> </ul>	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Als <math>P'(-p, 0)</math>, dan ligt <math>P</math> op de cirkel met middelpunt <math>O</math> en straal <math>p</math>, en die heeft vergelijking <math>x^2 + y^2 = p^2</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Invullen van <math>y = 6\sqrt{x}</math> geeft <math>x^2 + 36x = p^2</math> voor de <math>x</math>-coördinaat van <math>P</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>De lijn door <math>O</math> en <math>P</math> heeft hellingshoek <math>(180 - 120 =) 60^\circ</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>x_P = p \cdot \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}p</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Invullen in <math>x^2 + 36x = p^2</math> geeft <math>\left(\frac{1}{2}p\right)^2 + 36 \cdot \frac{1}{2}p = p^2</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Een exacte berekening waaruit volgt <math>p = 24</math> (<math>p = 0</math> voldoet niet), dus <math>x_{P'} = -24</math></li> </ul>	1

## 5 Aanleveren scores

---

Verwerk de scores van de alfabetisch eerste vijf kandidaten per examinerator in de applicatie Wolf. Cito gebruikt deze gegevens voor de analyse van de examens. Om de gegevens voor dit doel met Cito uit te wisselen dient u ze uiterlijk op 31 mei te accorderen.

Ook na 31 mei kunt u nog tot en met 9 juni gegevens voor Cito accorderen. Deze gegevens worden niet meer meegenomen in de hierboven genoemde analyses, maar worden wel meegenomen bij het genereren van de groepsrapportage.

Na accordering voor Cito kunt u in Wolf de gegevens nog wijzigen om ze vervolgens vrij te geven voor het overleg met de externe corrector. Deze optie is relevant als u Wolf ook gebruikt voor uitwisseling van de gegevens met de externe corrector.



# Alternatief Correctievoorschrift VWO 2021

tijdvak 1

Wiskunde B

Dit correctievoorschrift is tot stand gekomen in samenwerking met de vaststellingscommissie van wiskunde B.

## Parabool en twee lijnen

### 1 maximumscore 8

voorbeeld van een antwoord:

$$f'(x) = 1 - 2x \text{ dus } rc_l = f'(0) = 1$$

$$rc_l \cdot rc_m = -1 \text{ dus } rc_m = -1$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \text{ invullen geeft een vergelijking voor } m: y = -x + \frac{3}{4}$$

$$\text{uit } -x + \frac{3}{4} = x - x^2 \text{ volgt } x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$$

$$\text{de exacte oplossing is } x = 1\frac{1}{2} \text{ (} x = \frac{1}{2} \text{ geeft } T)$$

$$\text{de oppervlakte van } V \text{ is gelijk aan } \int_{\frac{1}{2}}^{1\frac{1}{2}} \left( (x - x^2) - \left(-x + \frac{3}{4}\right) \right) dx$$

$$\text{een primitieve van } -x^2 + 2x - \frac{3}{4} \text{ is } -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{3}{4}x$$

$$\text{invullen van de grenzen geeft: de oppervlakte van } V \text{ is } \frac{1}{6}$$

- het inzicht dat de richtingscoëfficiënt van  $m$  berekend kan worden met behulp van de richtingscoëfficiënt van  $l$  1
- het inzicht hoe de richtingscoëfficiënt van  $l$  berekend kan worden 1
- het inzicht hoe een vergelijking van  $m$  kan worden opgesteld 1
- het inzicht dat de snijpunten van lijn  $m$  met de parabool moeten worden berekend 1
- het inzicht hoe de  $x$ -coördinaat van dat snijpunt moet worden berekend 1
- het inzicht dat de integraal  $\int_{\frac{1}{2}}^{1\frac{1}{2}} \left( (x - x^2) - \left(-x + \frac{3}{4}\right) \right) dx$  moet worden berekend 1
- het inzicht hoe een passende primitieve gevonden kan worden 1
- completeren en het juiste antwoord 1

## Goniometrische functies

### 2 maximumscore 4

voorbeeld van een antwoord:

uit  $f(x) = g(x)$  volgt  $\sin(x) = \sin(2x)$

hieruit volgt  $x = k \cdot 2\pi$  of  $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

de oplossingen zijn  $x = 0$ ,  $x = \frac{1}{3}\pi$ ,  $x = \pi$ ,  $x = \frac{5}{3}\pi$  en  $x = 2\pi$

de  $x$ -coördinaten van  $P$  en  $Q$  zijn  $\frac{1}{3}\pi$  en  $\frac{5}{3}\pi$

- het herleiden tot een vergelijking van de vorm  $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$  1
- het inzicht hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- het inzicht dat moet worden gecontroleerd welke oplossingen bij  $P$  en  $Q$  horen 1
- completeren en het juiste antwoord 1

### 3 maximumscore 5

voorbeeld van een antwoord:

$h(x) = \sin(2x) + 1$

de oppervlakte van  $V$  is  $\int_{1,33}^{2,97} (f(x) - h(x)) dx$

een primitieve van  $f(x) - h(x)$  is  $-2\cos(x) + \cos(2x) - x$

$[-2\cos(x) + \cos(2x) - x]_{1,33}^{2,97} = 2,6$

- het inzicht dat de integraal  $\int_{1,33}^{2,97} (f(x) - h(x)) dx$  moet worden berekend 1
- het inzicht hoe het functievoorschrift van  $h$  gevonden kan worden 1
- het inzicht hoe de primitieve van  $\sin(2x)$  kan worden berekend 1
- het inzicht hoe de primitieve van  $f - h$  kan worden berekend 1
- completeren en het juiste antwoord 1

#### 4 maximumscore 4

voorbeeld van een antwoord:

$$f\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ en } k\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ (en zijn dus gelijk)}$$

$$f'(x) = 2\cos(x) - 2\cos(2x) \text{ en } k'(x) = \frac{1}{2\cos^2(x)}$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2 \text{ en } k'\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2 \text{ (en zijn dus gelijk)}$$

(dus de grafiek van  $k$  raakt de grafiek van  $f$  in een punt met  $x$ -coördinaat  $\frac{1}{3}\pi$ )

- het inzicht dat voor  $x = \frac{1}{3}\pi$  moet gelden dat  $f(x) = k(x)$  én  $f'(x) = k'(x)$  1
- het inzicht hoe de afgeleide van  $f$  kan worden berekend 1
- het inzicht hoe de afgeleide van  $k$  kan worden berekend 1
- completeren en de conclusie 1

## Aardbevingen

### 5 maximumscore 4

voorbeeld van een antwoord:

$$6 = \frac{d}{t} \text{ (met } t \text{ de tijd waarop de eerste primaire golf bij het meetstation aankomt)}$$

$$3,5 = \frac{d}{t+17} \text{ (voor de secundaire golf)}$$

uit  $d = 6t$  en  $d = 3,5(t+17)$  volgt  $6t = 3,5(t+17)$  en  $t = 23,8$

hieruit volgt  $d = 142,8$

- het inzicht hoe voor de primaire golf tijd, snelheid en afstand in een formule kunnen worden gecombineerd 1
- het inzicht hoe het tijdverschil van 17 seconden moet worden verwerkt 1
- het inzicht hoe het stelsel vergelijkingen voor de primaire en secundaire golf kan worden opgelost 1
- completeren en het juiste antwoord 1

### 6 maximumscore 6

voorbeeld van een antwoord:

voor de coördinaten van het epicentrum geldt:  $x^2 + y^2 = 240^2$  en

$$(x-192)^2 + (y-128)^2 = 80^2$$

$$384x - 192^2 + 256y - 128^2 = 240^2 - 80^2$$

$$y = -1,5x + 408$$

invullen en herleiden geeft  $3,25x^2 - 1224x + 108\ 864 = 0$

de oplossingen zijn  $x = 144$  en  $x = 232,6\dots$

de coördinaten zijn (144, 192) en (233, 59)

- het inzicht dat er twee cirkels moeten worden gebruikt 1
- het inzicht hoe vergelijkingen van cirkels met middelpunten  $S$  en  $T$  kunnen worden opgesteld 1
- het inzicht dat het stelsel kan worden herleid tot één vergelijking / het inzicht hoe uit het stelsel één van de variabelen kan worden geëlimineerd 1
- het inzicht dat hieruit een kwadratische vergelijking kan worden herleid met één variabele 1
- het inzicht hoe deze kwadratische vergelijking kan worden opgelost 1
- completeren en het juiste antwoord 1

of

voorbeeld van een antwoord:

voor de coördinaten van het epicentrum geldt:  $ST = \sqrt{192^2 + 128^2} = 230,75\dots$

$\tan(\alpha) = \frac{128}{192}$  geeft  $\alpha = 33,69\dots$  met  $\alpha$  de hoek tussen de  $x$ -as en  $ST$

cosinusregel geeft dus  $\angle EST = 19,44\dots$

de hellingshoek van  $SE$  is dus  $33,69\dots + 19,44\dots = 53,13\dots$  of

$33,69\dots - 19,44\dots = 14,25\dots$

dit geeft  $E(240 \cdot \cos(53,13\dots), 240 \cdot \sin(53,13\dots))$  en

$E(240 \cdot \cos(14,25\dots), 240 \cdot \sin(14,25\dots))$ , dus  $E(144, 192)$  en  $E(233, 59)$

- het inzicht dat de cosinusregel in driehoek  $STE$  (met  $E$  het epicentrum) kan worden toegepast 1
- het inzicht hoe afstand  $ST$  kan worden berekend 1
- het inzicht hoe de hellingshoek van  $ST$  kan worden berekend 1
- het inzicht dat  $\angle EST$  kan worden berekend 1
- het inzicht hoe de mogelijke hellingshoeken van  $SE$  berekend kunnen worden 1
- completeren en het juiste antwoord 1

## 7 maximumscore 6

voorbeeld van een antwoord:

er geldt:  $4,5 = 10^{a-b-7,5}$  en  $285,5 = 10^{a-b-6}$

het stelsel  $\begin{cases} a - 7,5b = \log(4,5) \\ a - 6b = \log(285,5) \end{cases}$  moet worden opgelost

beide vergelijkingen aftrekken geeft  $-1,5b = \log(4,5) - \log(285,5) = -1,802\dots$

dit geeft  $b = 1,20\dots$  en  $a = 9,66\dots$

$N = 10^{9,66\dots - 1,20\dots \cdot 6,5} = 71,5\dots$

$56 + 15 + 3,1 + 1,1 + 0,3 = 75,5$  dus de voorspelling wijkt 4 af

- het inzicht dat de punten  $(7,5; 4,5)$  en  $(6; 285,5)$  kunnen worden ingevuld in het gegeven model 1
- het inzicht dat een stelsel in  $a$  en  $b$  kan worden opgesteld door de logaritme te nemen van beide vergelijkingen 1
- het inzicht hoe dit stelsel kan worden opgelost 1
- het bepalen van bijbehorende waarden van  $a$  en  $b$  1
- het inzicht hoe het aantal aardbevingen met een magnitude van 6,5 of groter kan worden voorspeld 1
- completeren en het juiste antwoord 1

*Opmerking: als één van de waarden van  $a$  en  $b$  onjuist is berekend, voor deze vraag maximaal 5 scorepunten toekennen.*

## Een vierkant en vier vectoren

### 8 maximumscore 6

voorbeeld van een antwoord:

$$\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{CQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\angle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CP}) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{p+1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{p^2+1}} \text{ en}$$

$$\cos(\angle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CQ}) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{p} \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{p} \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\frac{1}{p}+1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{p^2}+1}}$$

$$\frac{\frac{1}{p}+1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{p^2}+1}} \cdot \frac{p}{p} = \frac{1+p}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{p^2}+1} \cdot \sqrt{p^2}} = \frac{p+1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{p^2+1}}$$

Dus  $\cos(\angle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CP}) = \cos(\angle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CQ})$  en dus zijn beide hoeken gelijk

- het inzicht hoe de vectoren  $\overrightarrow{CP}$ ,  $\overrightarrow{CA}$  en  $\overrightarrow{CQ}$  gevonden kunnen worden 1
- het inzicht dat de formule  $\cos(\angle \vec{a}, \vec{b}) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$  kan worden gebruikt 1
- het inzicht hoe het inproduct moet worden uitgewerkt 1
- het inzicht hoe de lengtes van de vectoren  $\overrightarrow{CP}$  en  $\overrightarrow{CQ}$  bepaald moet worden 1
- een herleiding waaruit volgt dat beide uitdrukkingen gelijk zijn 1
- completeren en de conclusie dat beide hoeken gelijk zijn 1

of

voorbeeld van een antwoord:

punt  $S$  is het snijpunt van lijnstuk  $AB$  en  $CQ$

driehoek  $OQC$  en driehoek  $BCS$  zijn gelijkvormig met vergrotingsfactor  $p$

de lengte van lijnstuk  $BS$  is  $p$

driehoek  $OPC$  en driehoek  $BCS$  zijn congruent

omdat diagonaal  $CA$  het vierkant verdeelt in twee congruente driehoeken, zijn driehoek

$PCA$  en driehoek  $SCA$  ook congruent

de hoeken tussen de vectoren zijn dus gelijk

- het inzicht dat het snijpunt  $S$  van lijnstuk  $AB$  en  $CQ$  gebruikt moet worden 1
- het inzicht dat op basis van gelijke hoeken gelijkvormigheid gebruikt moet worden 1
- het inzicht dat driehoek  $OQC$  en driehoek  $BCS$  gelijkvormig zijn 1
- het inzicht dat driehoek  $OPC$  en driehoek  $BCS$  congruent zijn 1
- het inzicht dat driehoek  $PCA$  en driehoek  $SCA$  congruent zijn 1
- completeren en de conclusie dat beide hoeken gelijk zijn 1



## 9 maximumscore 7

voorbeeld van een antwoord:

$$\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 1-p \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } M \left( \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \text{ dus } \overrightarrow{QM} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{QM} \text{ als geldt } \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{QM} = 0, \text{ dit geeft } (1-p) \left( \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) + \frac{1}{2} = 0$$

deze vergelijking kan worden opgelost met de grafische rekenmachine,  $p = 0,54$

- het inzicht hoe vector  $\overrightarrow{PB}$  (of de rc van de lijn door  $P$  en  $B$ ) gevonden kan worden 1
- het inzicht hoe de coördinaten van punt  $M$  gevonden kunnen worden 1
- het inzicht hoe vector  $\overrightarrow{QM}$  (of de rc van de lijn door  $Q$  en  $M$ ) gevonden kan worden 1
- het inzicht dat twee vectoren loodrecht op elkaar staan als hun inwendig product gelijk is aan nul (of: als het product van de rc's gelijk is aan  $-1$ ) 1
- het inzicht hoe hieruit een vergelijking in  $p$  gevonden kan worden 1
- het inzicht hoe deze vergelijking met de grafische rekenmachine opgelost kan worden 1
- completeren en het juiste antwoord 1

## Limiet van een verhouding

### 10 maximumscore 4

voorbeeld van een antwoord:

$$t^2 = a \text{ geeft } t = -\sqrt{a} \text{ of } t = \sqrt{a}$$

$$\text{dus } y_S = y(-\sqrt{a}) = a + 2\sqrt{a} \text{ en } y_R = y(\sqrt{a}) = a - 2\sqrt{a}$$

$$\frac{QR}{QS} = \frac{a - 2\sqrt{a}}{a + 2\sqrt{a}} = \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{a}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{a}}} \text{ en } \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{a}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{a}}} = 1$$

- het inzicht hoe de bij  $R$  en  $S$  horende waarden van  $t$  moeten worden berekend 1
- het inzicht hoe  $QR$  en  $QS$  kunnen worden uitgedrukt in  $a$  1
- het inzicht dat in de breuk  $\frac{QR}{QS}$  elke (deel)term door  $a$  gedeeld moet worden 1
- completeren en het juiste antwoord 1

## Gebroken functie met een parameter

### 11 maximumscore 3

voorbeeld van een antwoord:

$$f_1(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2} = x + \frac{4}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0, \text{ dus de scheve asymptoot van } f_1 \text{ heeft vergelijking } y = x$$

voor alle  $x$  geldt:  $\frac{4}{x^2} > 0$ , dus de grafiek ligt in zijn geheel boven de asymptoot

- het inzicht hoe het functievoorschrift van  $f_1$  kan worden herschreven 1
- het inzicht hoe de vergelijking van de scheve asymptoot kan worden bepaald 1
- een redenering die aangeeft waarom hieruit volgt dat alle functiewaarden boven de asymptoot liggen 1

### 12 maximumscore 5

voorbeeld van een antwoord:

$$f_p'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - 2x(x^3 + 4p)}{x^4} \quad (= \frac{x^3 - 8p}{x^3})$$

$$f_p'(x) = 0 \text{ als } x^3 = 8p \text{ dus } p = \frac{1}{8}x^3$$

de kromme waarop de toppen liggen heeft vergelijking  $y = \frac{x^3 + 4 \cdot \frac{1}{8}x^3}{x^2}$

herleiden tot  $y = 1\frac{1}{2}x$  (dus de toppen liggen op een rechte lijn)

- het inzicht hoe de afgeleide van  $f_p$  kan worden gevonden 1
- het inzicht dat de afgeleide van  $f_p$  gelijk moet worden gesteld aan nul 1
- het inzicht dat vervolgens  $p$  kan worden uitgedrukt in  $x$  1
- het inzicht dat vervolgens  $y$  kan worden uitgedrukt in  $x$  1
- completeren en de conclusie 1

## Absolute natuurlijke algoritme

### 13 maximumscore 6

voorbeeld van een antwoord:

uit  $BC = 3 \cdot AB$  volgt  $f(b) = f(4b)$  met  $b$  de  $x$ -coördinaat van punt  $B$ .

$f(b) = |\ln(b)| = -\ln(b)$  (want punt  $B$  ligt links van het nulpunt van de grafiek van  $f$ )

$f(4b) = |\ln(4b)| = \ln(4b)$  (want punt  $C$  ligt rechts van het nulpunt van de grafiek

van  $f$ )

uit  $-\ln(b) = \ln(4b)$  volgt  $\frac{1}{b} = 4b$

dit geeft  $b = \frac{1}{2}$  ( $b = -\frac{1}{2}$  voldoet niet)

hieruit volgt  $q = \ln(2)$  (of een gelijkwaardige uitdrukking)

- het inzicht dat  $x_C = 4 \cdot x_B$  1
- het inzicht dat de vergelijking  $f(x_B) = f(x_C)$  moet worden opgelost 1
- het inzicht hoe de functiewaarden van  $x_B$  en  $x_C$  zonder absolute waardestrepen kunnen worden geschreven 1
- het inzicht hoe de vergelijking zonder logaritmen kan worden geschreven 1
- het inzicht hoe deze vergelijking zonder logaritmen exact kan worden opgelost 1
- completeren en het juiste antwoord 1

## ***P en P'***

### **14 maximumscore 6**

voorbeeld van een antwoord:

de lijn door  $O$  en  $P$  heeft hellingshoek  $(180^\circ - 120^\circ =) 60^\circ$

de richtingscoëfficiënt van deze lijn is dus  $\sqrt{3}$

punt  $P$  is het snijpunt van de lijn  $y = \sqrt{3} \cdot x$  met de grafiek van  $f$

voor punt  $P$  geldt dus  $\sqrt{3} \cdot x = 6\sqrt{x}$

kwadrateren geeft  $3x^2 = 36x$

hieruit volgt  $x = 12$  ( $x = 0$  voldoet niet)

$$OP = \sqrt{12^2 + (12\sqrt{3})^2} = 24$$

dus is de  $x$ -coördinaat van punt  $P'$  gelijk aan  $-24$

- het inzicht dat een vergelijking van de lijn door  $O$  en  $P$  moet worden bepaald 1
- het inzicht hoe de hellingshoek (of de richtingscoëfficiënt) van de lijn door  $O$  en  $P$  kan worden berekend 1
- het inzicht dat punt  $P$  het snijpunt is van deze lijn met de grafiek van  $f$  1
- het inzicht hoe de hieruit volgende vergelijking exact kan worden opgelost 1
- het inzicht hoe de lengte van  $OP$  kan worden berekend 1
- completeren en het juiste antwoord 1

of

voorbeeld van een antwoord:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p \\ 6\sqrt{p} \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

voor de hoek tussen deze twee vectoren geldt  $\cos(120^\circ) = \frac{\left| \begin{pmatrix} p \\ 6\sqrt{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} p \\ 6\sqrt{p} \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}$

dit geeft de vergelijking  $-\frac{1}{2} = \frac{-p}{\sqrt{p^2 + 36p}}$

kruislings vermenigvuldigen en kwadrateren geeft  $p^2 + 36p = 4p^2$

hieruit volgt  $p = 12$  ( $p = 0$  voldoet niet)

$OP = \sqrt{12^2 + 36 \cdot 12} = 24$  en dus is de  $x$ -coördinaat van punt  $P'$  gelijk aan  $-24$

- het inzicht dat de formule voor de hoek tussen twee vectoren kan worden gebruikt 1
- het inzicht hoe de richtingsvectoren van  $OP$  en  $OP'$  kunnen worden opgesteld 1
- het inzicht hoe hieruit een tweedegraads vergelijking volgt 1
- het inzicht hoe de  $x$ -coördinaat van  $P$  exact kan worden berekend 1
- het inzicht hoe de lengte van  $OP$  kan worden berekend 1
- completeren en het juiste antwoord 1