

EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAAR

Geactualiseerde kerndoelen rekenen en wiskunde

Alternatief correctievoorschrift examen vwo B

Wiskunde binnen NLT

Interview met wiskundedocent uit Iran



Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

NR.2

JAARGANG 99 - OKTOBER 2023

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 99 NR2



IN DIT NUMMER

TERUG NAAR DE KERN
VAN ONS VAK

Bea Ros

4



FORMATIEF HANDELEN IN DE WISKUNDELES

5: FORMATIEF TOETSEN BIJ
PROBLEEMOPLOSSEND VERMOGEN

Maarten Müller

23

WISKUNDEONDERWIJS VANUIT
IRAANS PERSPECTIEF

INTERVIEW MET MAHBOUBEH GHASEMZADEH

Constantijn Tilanus

26

ALTERNATIEF CORRECTIEVOORSCHRIFT
VWO WISKUNDE B

Irene van Stiphout

Ruud Stolwijk

8

WIS EN WAARACHTIG

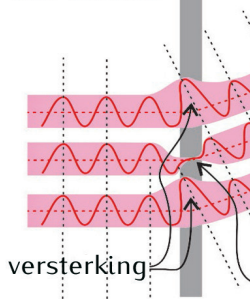
28

WISKUNDE BINNEN NLT:
HOLOGRAFIE

Mart Mojet

12

foto-emulsie

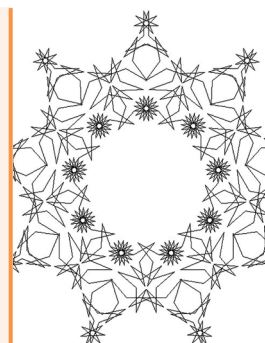


versterking

SPELEN MET ONEINDIGHEID

Hans Zantema

30



EEN GELIJKWAARDIGE
UITDRUKKING VOLGENS ARON

Wilma Broere

16

VAN HIELE: NIVEAUS VAN WISKUNDIG DENKEN

Bert Zwaneveld,

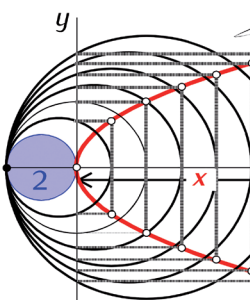
Dirk De Bock

34

DE PARABOL OP SCHOOL (2)

Martin Kindt

18



ROEST RUST (NIET)
KNOOPPUNTEN OF...

Ab van der Roest

37

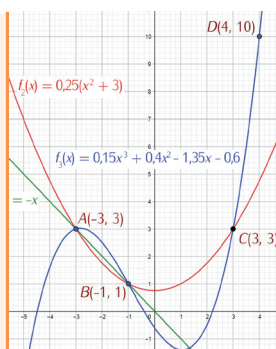
Afbeelding voorkant: Stapfiguur in Python door Hans Zantema.
Zie zijn artikel 'Spelen met oneindigheid'.

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

FUNCTIEVOORSCHRIFT BIJ KROMME DOOR GEGEVEN PUNTEN

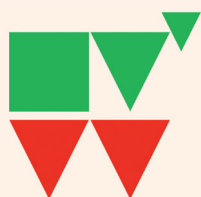
Gerard Koolstra

38



VERENIGINGSNIEUWS NOTULEN NVvW JAARVERGADERING 2022

42



PUZZEL Lieke de Rooij Wobien Doyer

44

SERVICEPAGINA

46



Kort vooraf

In deze *Euclides* kom je twee bijdragen tegen over ontwikkelingen waar je de komende jaren veel mee te maken kunt krijgen. Ten eerste: als het goed is zijn de geactualiseerde conceptkerndoelen inmiddels opgeleverd door slo. Drie betrokkenen bij de samenstelling van deze kerndoelen vertellen hoe en waarom deze kerndoelen tot stand zijn gekomen. Dat doen zij in het openings-artikel met de veelbelovende titel 'Terug naar de kern van ons vak'.

Vervolgens blijven we nog even in examenstemming. Het correctievoorschrift doet al jaren veel stof opwaaien, ook in *Euclides*. Denk bijvoorbeeld aan 'Zorgvuldig met wijsheid en mildheid' van Lidy Wesker en Peter Kop (93-5), de reactie daarop 'Rechtvaardigheid boven alles' van Theo Jan van de Pol en Ab van der Roest (93-7) en 'Een ondersteunend correctievoorschrift' van Maarten Müller (95-1).

En er lijkt iets te gaan gebeuren. Cito heeft zelf een experiment uitgevoerd met een alternatief cv waarin de traditionele 'resultaatbolletjes' vervangen zijn door inzichten die punten kunnen opleveren, zie het artikel van Irene van Stiphout en Ruud Stolwijk. Ik sluit me graag aan bij de oproep van de auteurs om te reageren op de inhoud van het artikel. En daarna gaan we het ook nog over gelijkwaardige uitdrukkingen hebben, die wel eens in een cv genoemd worden. Leerling Aron heeft daar zo zijn eigen opvattingen over, zie de bijdrage van Wilma Broere. Daar mag ook op gereageerd worden, bijvoorbeeld via het forum op de NVvW-site!

Tom Goris

Terug naar de kern van ons vak

Met geactualiseerde kerndoelen krijgt het reken- en wiskundeonderwijs nieuwe impulsen. Ze geven leraren meer houvast om de kern van hun vak te onderwijzen. Daarbij is er expliciete aandacht voor wiskunde herkennen en toepassen in de alledaagse werkelijkheid, het ontwikkelen van een wiskundige attitude en het benutten van wiskunde bij andere vakken. Eind september leverde SLO de conceptkerndoelen^[1] op en vanaf 2024 worden deze doelen op scholen beproefd op bruikbaarheid.

Inleiding

De huidige kerndoelen voor rekenen en wiskunde dateren uit 2006. Sindsdien is de wereld een stuk complexer geworden. Dat vraagt om een actualisatie. Daarnaast zijn er zorgen over het niveau van rekenvaardigheid van leerlingen. Hoofdvraag is: wat hebben leerlingen van nu en de toekomst nodig om zich als gecijferd burger te kunnen redden in de samenleving?

Een ander doel bij de actualisatie is om leraren meer houvast te bieden. De huidige kerndoelen zijn zo algemeen en vaag geformuleerd dat je er alle kanten mee uit kunt. Marc van Zanten, curriculumexpert rekenen en wiskunde bij SLO, geeft een voorbeeld van zo'n algemene formulering in de huidige kerndoelen: 'De leerling leert wiskundetaal gebruiken.' 'Maar wat omvat die wiskundetaal dan precies? En is dat in groep 8 van het primair onderwijs hetzelfde als in 3 havo of vwo? In de conceptkerndoelen expliciteren we dat allemaal.'



Marc van Zanten. Fotografie: Barbra Verbij

Concepten en denkwijzen

Moeten leraren straks een geheel ander curriculum onderwijzen? Nee, want de kern van het leergebied blijft hetzelfde. Het goed beheersen van de wiskundige vaardigheden en concepten blijft een belangrijk element in de geactualiseerde kerndoelen. Wel is de kern van het

leergebied explicieter verwoord, geactualiseerd én ingebed in de wereld van nu. Daarom zijn de conceptkerndoelen beschreven vanuit vier samenhangende domeinen: wiskundige attitude, wiskundige concepten, wiskundige denk/werkwijzen en wiskunde in de wereld. Wiskundige concepten, zoals verbanden, meetkundige vormen en vergelijkingen, zijn inherent aan wiskunde en blijven uiteraard onveranderd. Nieuw is ook dat de geactualiseerde kerndoelen veel concreter zijn beschreven. Bij elke kerndoelzin staat nu een uitwerking 'Het gaat hierbij om...'. Bij het conceptkerndoel 3 over *Vorm en ruimte* staat bijvoorbeeld:

Het gaat hierbij om:

- redeneren met en over eigenschappen van meetkundige figuren en begrippen en deze eigenschappen gebruiken in berekeningen en constructies;
- redeneren met kijklijnen;
- construeren en interpreteren van tweedimensionale representaties van driedimensionale figuren;
- verschuiven, draaien, spiegelen, vergroten en verkleinen van figuren.

Bovendien zijn de conceptkerndoelen voor primair onderwijs (po) en de onderbouw van het voortgezet onderwijs (vo) gelijktijdig door hetzelfde team ontwikkeld. Dat zorgt voor een doorlopende leerlijn van po naar vo. Ook wiskundige denk- en werkwijzen als modelleren, aantonen van wiskundige beweringen en probleemoplossen en het gebruik van meet- en rekeninstrumenten, zullen wiskunde-leraren bekend voorkomen. In de conceptkerndoelen krijgen ze meer expliciete nadruk, omdat dit belangrijke vaardigheden zijn om je staande te houden in een complexe (data)samenleving. Om dezelfde reden wordt ook algoritmisch denken expliciet benoemd.



Martijn Schouw. Fotografie: Barbra Verbij

Wiskundige attitude

De andere twee domeinen – wiskundige attitude en wiskunde in de wereld – zijn nieuw. Ze zijn opgenomen om het belang van wiskundige kennis en vaardigheden voor het leven van alledag en andere leergebieden te benadrukken. Dat is dringend nodig, blijkt onder andere uit internationale peilingsonderzoeken: Nederlandse leerlingen zijn wereldwijd het minst gemotiveerd voor wiskunde. ‘Om dat motivatieprobleem aan te pakken is het belangrijk leerlingen veel meer te laten zien hoe nuttig en alomtegenwoordig wiskunde is’, zegt Van Zanten.

Dat vraagt van leraren om onder andere wiskunde meer in context te plaatsen. ‘En dan niet dat Lisa bij de groenteboer tien procent korting krijgt op appels, maar levens-echte contexten’, stelt Martijn Schouw, leraar wiskunde bij Onderwijsroute 10-14 in Zwolle en lid van het kern-doelenteam. ‘Het gaat in ons vak niet alleen om het leren oplossen van een vergelijking of worteltrekken, we moeten leerlingen ook leren wanneer je dat nodig hebt en hoe je dat kunt toepassen. Dat betekent onder meer dat je in de les vragen en alledaagse problemen van leerlingen betreft en met hen reflecteert op hoe je die aanpakt en oplost. Zo werk je aan een wiskundige attitude.’

Moedig leerlingen bijvoorbeeld aan om vragen te stellen bij getalsmatige informatie die ze tegenkomen, van percentages en grafieken in krantenberichten tot en met vertrektijden op stations. ‘Het is daarmee ook een vorm van *fact-checking* dat in onze samenleving steeds belangrijker wordt. Klopt het wel wat er staat? En wat betekenen die cijfers voor mij?’, aldus Schouw. ‘En als het goed is, leidt dat ertoe dat leerlingen meer plezier en zelfvertrouwen in wiskunde krijgen. Dat ze gaan ervaren dat rekenen en wiskunde meer omvat dan opdrachten maken uit een lesmethode en dat je het juist overal tegenkomt en vaak nodig hebt.’ Leerlingen komen het bijvoorbeeld tegen in andere leergebieden op school en dat is waar het domein wiskunde in de wereld onder meer over gaat. Zoals Schouw het formuleert: ‘Wiskunde is geen bovenliggend,

maar een onderliggend vak. Je hebt het, net als lezen en schrijven, bij alle vakken nodig.’ Alleen is dat niet hoe veel leerlingen het op dit moment ervaren. ‘We weten bijvoorbeeld dat veel leerlingen niet door hebben dat procenten bij economie net zo werken als bij wiskunde’, licht Van Zanten toe. ‘Dat is natuurlijk een gemiste kans.’ Daarom heeft het kerndoelenteam hiervoor kerndoel 15 *Wiskunde in andere leergebieden* geformuleerd: De school ondersteunt het gebruik van wiskunde in andere leergebieden. Zodat leerlingen wél het verband zien tussen dezelfde concepten bij diverse leergebieden en ze daarvan profijt kunnen hebben.

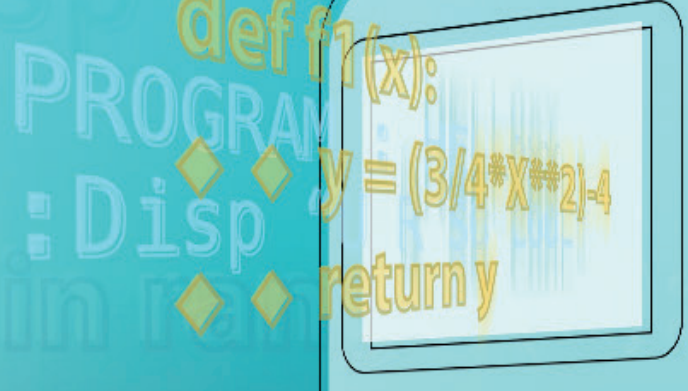


figuur 1 Vier domeinen van de conceptkerndoelen rekenen en wiskunde

Samenhang

De vier domeinen zijn onderscheiden, maar ze grijpen nadrukkelijk in elkaar. Als leraar bied je de inhouden van verschillende kerndoelen in de klas in samenhang aan. ‘Je gaat niet vandaag een lesje geven over attitude en morgen over wiskundig denken’, zo stelt Van Zanten. ‘De domeinen moeten elkaar juist versterken.’ Ook de verschillende leergebieden kunnen elkaar versterken. Bij de actualisatie van de kerndoelen is dat een nadrukkelijke opdracht van de overheid, mede ook om een overladen en ‘los zand’ curriculum te voorkomen. Het kerndoelenteam rekenen en wiskunde heeft bijvoorbeeld expliciet lijnen getrokken naar de twee nieuwe leergebieden burgerschap en digitale geletterdheid. ‘Leerlingen moeten leren omgaan met de steeds grotere hoeveelheden data en hier kritisch naar kunnen kijken’, licht Schouw toe. ‘Ze moeten zich staande kunnen houden in het maatschappelijk debat, leren om kritisch te denken, logisch te redeneren, informatie te doorgronden, opvattingen te onderbouwen en meningen en feiten van elkaar te onderscheiden. Zaken die allemaal ook bij wiskunde aan de orde komen.’

Help leerlingen op weg met programmeren



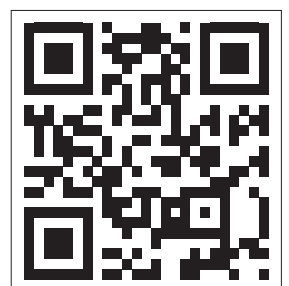
Speciaal hiervoor zijn de gratis lesactiviteiten van TI Coderen!
Leerlingen gebruiken hun eigen grafische rekenmachine voor deze lesjes en leren zo spelenderwijs programmeren.



Leg de basis voor informatica,
robotics en meer!



Start hier met
TI Coderen



education.ti.com/nl

Ten slotte is er gewerkt aan samenhang, doordat het kerndoelenteam tegelijkertijd kerndoelen voor het po, vo en (v)so heeft geformuleerd. Dat zorgt voor een gemeenschappelijk begrippenkader – voor groep 8 gelden dezelfde definities voor wiskundig redeneren als voor de tweede klas in het vo – en is er een stevig fundament om te werken aan een doorgaande leerlijn. “Zo kunnen we in het vo echt voortbouwen op wat er in het po gebeurt, zonder dat er hiaten vallen of er te veel overlap is.” Zoals gezegd zijn conceptkerndoelen uitgewerkt voor zowel po, onderbouw vo en (v)so, zodat duidelijk is wanneer je wat aan de orde moet stellen. En ook op welke onderdelen in het vo onderhoud nodig blijft. Om het compleet te maken loopt parallel aan de actualisatie van de kerndoelen een traject voor de examenprogramma’s in de bovenbouw havo en vwo. Er is afstemming geweest tussen het kerndoelenteam rekenen en wiskunde en de vakvernieuwingscommissie examenprogramma’s wiskunde om ook hier een doorlopende leerlijn te borgen. Voor de bovenbouw vmbo zijn al conceptexamenprogramma’s wiskunde opgeleverd in 2022. Schouw: ‘Ik kan er een glimlach van krijgen: dit is echt iets gezamenlijks van het hele onderwijs.’



Mirjam Brand. Fotografie: Norbert Waalboer

Curriculumbewustzijn

Mirjam Brand, programmamanager actualisatie kerndoelen bij SLO, hoopt en verwacht dat de nieuwe kerndoelen leraren straks helpen bij het geven van goed onderwijs. ‘Deze conceptkerndoelen geven meer richting en houvast door helder en concreet te beschrijven wat leerlingen moeten kennen en kunnen.’ Daarnaast behouden scholen ook ruimte voor eigen invulling, op basis van de eigen identiteit en visie van de school. ‘De conceptkerndoelen gaan over het wat, niet over het hoe. En de school kan eigen accenten aanbrengen.’

De conceptkerndoelen zijn daarmee een belangrijke voorwaarde voor goed onderwijs, maar geen garantie. De werkelijke kwaliteit van het onderwijs vindt immers plaats in de klas. Een goede vertaalslag van kerndoelen naar passende onderwijsactiviteiten, didactiek en toetsing is

duis essentieel. En de rol van leraren en schoolleiders daarin is cruciaal.

Proef op de som

SLO is in opdracht van het ministerie en samen met het onderwijsveld gestart met de actualisatie van de kerndoelen voor Nederlands, rekenen en wiskunde, burgerschap en digitale geletterdheid. In de conceptkerndoelen staat wat leerlingen eind primair onderwijs, onderbouw voortgezet onderwijs en het (voortgezet) speciaal onderwijs moeten ervaren, kennen en kunnen. Er hebben al veel leraren en experts meegekeken bij de totstandkoming van de conceptkerndoelen. Zo werden de kerndoelenteams, bestaande uit leraren po, leraren vo, vakexperts, curriculumexperts van SLO en een onafhankelijke procesregisseur, bijgestaan door een advieskring met vertegenwoordigers van onder meer vakverenigingen (zoals de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren), lerarenopleidingen en wetenschappers. Maar de echte proef is aan de praktijk. In 2024 beproeven scholen de bruikbaarheid van de conceptkerndoelen in de onderwijspraktijk. Daarna gaat SLO met scholen in gesprek over de vraag wat zij nodig hebben om de kerndoelen te implementeren. Wil je dat jouw school meedoet aan het beproeven van de conceptkerndoelen in de praktijk? Geef je interesse door via: actualisatiebeproeven@slo.nl

Met dank aan Marc van Zanten (curriculumexpert SLO), Martijn Schouw (leraar en lid van het kerndoelenteam) en Mirjam Brand (programmamanager actualisatie kerndoelen SLO) voor hun input.

Noten

- [1] Meer informatie over de actualisatie van de kerndoelen is te vinden op:
www.actualisatiekerndoelen.nl en
www.slo.nl/actualisatie.

Over de auteur

Bea Ros is neerlandica en zelfstandig (onderwijs) journaliste. Ze is onder meer wetenschapsredacteur bij onderwijsvakblad *Didactief* en is auteur van *Leer ze rekenen* (TBU, 2022). Ze publiceert behalve over onderwijs over leesbevordering, (jeugd)literatuur en cultuureducatie.

Alternatief correctievoorschrift vwo wiskunde B

Cito voert regelmatig onderzoeken uit rondom de centrale eindexamens. In 2023 is een onderzoek afgerond naar een alternatieve opzet van het correctievoorschrift vwo wiskunde B. Irene van Stiphout en Ruud Stolwijk, beiden toetsdeskundigen wiskunde bij Cito, doen hierover verslag.

Inleiding

Een correctievoorschrift (cv) van een examen natuurkunde ziet er heel anders uit dan dat van wiskunde. In het kader van meer afstemming tussen exacte vakken hebben de toetsdeskundigen van wiskunde daarom gekeken of de aanpak van natuurkunde geschikt zou kunnen zijn voor wiskunde. Wat is het verschil? De opbouw bij natuurkunde is eerst een uitkomst, daarna een voorbeeld van een antwoord, daarna worden bepaalde inzichten uit dat voorbeeld van een antwoord genoemd in een bolletjesstructuur. In het laatste bolletje komen de berekeningen aan de orde in de term 'completeren' dan wel 'completeren van de berekening'. Behalve dat er interesse was in meer afstemming, waren er nog twee redenen om te kijken naar een alternatieve opzet van het cv. We willen nog meer recht willen doen aan de essentie van de wiskundige vaardigheid van leerlingen. Dat betekent dat we leerlingen willen belonen voor hun wiskundige, en niet alleen voor hun algebraïsche en rekenkundige vaardigheden. Daarnaast was er de behoefte om een nieuwe balans te vinden tussen duidelijkheid voor docenten en een gedetailleerd cv. Figuur 1 toont een cv uit de jaren '80 waarin per onderdeel meerdere punten te verdelen zijn naar eigen inzichten van de docent. Dat is nogal een contrast met de huidige cv's waarin soms wel zes verschillende strategieën zijn uitgeschreven voor één vraag. Een nieuwe balans hierin is welkom.

3.	voor	a:	6 punten;	voor de uiterste waarde	4 punten;
		b:		voor het bereik	2 punten;
	voor	b:	4 punten;		
	voor	c:	5 punten;	voor de oplossing van $f(x) = 3$	3 punten.

figuur 1 Minimaal cv van een examen uit de jaren '80

Een alternatief cv

De opzet van natuurkunde bleek niet helemaal te passen bij wiskunde. Het punt van completeren ligt bij wiskunde anders dan bij natuurkunde, omdat het bij wiskunde

vaak ook gaat om de berekening. Ook bleek tijdens de constructie en in gesprekken met de vaststellingscommissie dat er behoefte is om onderscheid te maken in soorten inzicht. Dit heeft geresulteerd in het volgende onderscheid.

Inzicht dat: in de betreffende stap ('cv-bolletje') moet duidelijk zijn dat de leerling over het betreffende inzicht beschikt heeft; een concrete of correcte berekening hoeft niet aangetroffen te worden.

Inzicht hoe: in de betreffende stap ('cv-bolletje') moet duidelijk zijn dat de leerling over het betreffende inzicht beschikt heeft; de essentiële berekeningsstappen dienen wel aanwezig te zijn.

Completeren: het in detail uitwerken van berekeningen. Hierbij moet worden opgemerkt dat *inzicht hoe* en *completeren* met elkaar verweven kunnen zijn. Ook hebben we gezien dat deze omschrijvingen nog verdere afbakening behoeven. Omdat wiskunde meer nog dan natuurkunde op algebraïsch/rekenkundige/technische handelingen gebaseerd is, ontkomen we er niet aan om meer nadruk op deze aspecten te leggen dan bij de natuurkundeaanpak gangbaar is.

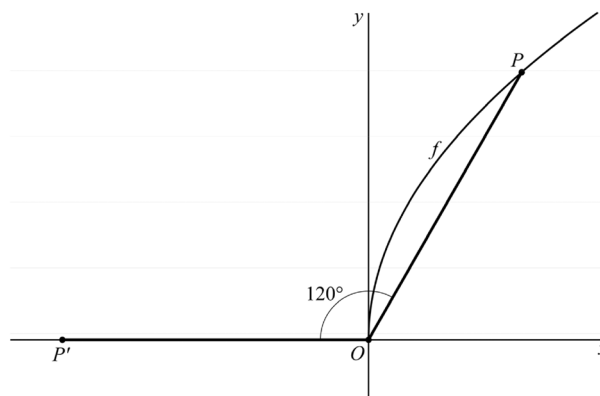
Na wat vingeroefeningen binnen Cito en overleg met het veld op de Nationale Wiskundedagen van 2019 en 2020 is, in samenwerking met de vaststellingscommissie van wiskunde B van het College voor Toetsen en Examens (CvTE) en de constructiegroep van wiskunde B, een alternatief cv gemaakt voor het examen vwo wiskunde B 2021-1. Een logische vervolgstap was om leerlingenwerk te beoordelen met dit alternatieve cv en te onderzoeken in hoeverre dit verschillen oplevert met het reguliere cv. In juni 2021 zijn van 99 leerlingen van vier verschillende scholen uitwerkingen verzameld van dit examen. Deze leerlingwerken zijn nagekeken door de eigen leraar volgens het reguliere cv en door twee verschillende correc-

toren volgens het alternatieve cv. Om praktische redenen zijn de scores volgens het alternatieve cv van beide correctoren gemiddeld. Als eerste is gekeken naar correlaties tussen de totaalscores via beide cv's. Deze bleek (niet onverwacht) hoog: de correlatie tussen de totaalscores van leerlingen volgens het reguliere cv en de gemiddelde score op het alternatieve cv is 0,97. Vervolgens is gekeken naar de verschillen in totaalscores. De 99 leerlingen hebben volgens het reguliere cv gezamenlijk 4317 scorepunten behaald en 4411 volgens het alternatieve cv, een verschil van 94 punten. Gemiddeld gesproken is de totaalscore per leerling dus ongeveer één scorepunt hoger volgens het alternatieve cv. Daarna is geanalyseerd aan welke factoren eventuele verschillen in totaalscores zijn toe te schrijven. Uit het onderzoek kwamen, naast enkele onjuistheden in de beoordeling, twee factoren naar voren. Ten eerste zien we een verschil in scores als gevolg van een juiste aanpak, maar een slordige of onjuiste uitvoering, waar in het reguliere cv minder mogelijkheden liggen om daar punten voor te geven dan in het alternatieve cv. Ten tweede zien we dat de andere opzet van het alternatieve cv een accentverschuiving geeft ten aanzien van bepaalde onderdelen in de uitwerking, hetgeen leidt tot verschillen in de beoordeling. We lichten dit toe aan de hand van twee voorbeelden.

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 6\sqrt{x}$.

Het punt P is een punt op de grafiek van f rechts van de y -as. Zie de figuur.

figuur



In de figuur is het punt P zo gekozen dat er een punt P' bestaat met de volgende eigenschappen:

- P' ligt op de negatieve x -as;
- Lijnstuk OP' heeft dezelfde lengte als lijnstuk OP ;
- $\angle POP' = 120^\circ$.

6p 14 Bereken exact de x -coördinaat van P' .

figuur 2 Vraag 14 vwo wiskunde B 2021-1

stap in de uitwerking reguliere cv	beoordeling volgens reguliere cv	stap in de uitwerking alternatieve cv	beoordeling volgens alternatieve cv
De lijn door O en P heeft hellingshoek $(180 - 120 =) 60^\circ$	0 hellingshoek staat er niet	het inzicht dat een vergelijking van de lijn door O en P moet worden bepaald	1 inzicht dat die vergelijking moet worden bepaald is er (al is de uitvoering onjuist)
De richtingscoëfficiënt van deze lijn is dus $\sqrt{3}$	0 richtingscoëfficiënt is fout	het inzicht hoe de hellingshoek (of de richtingscoëfficiënt) van de lijn door O en P kan worden	0 uitvoering is onjuist en niet onderbouwd
Voor de x -coördinaat van P geldt $\sqrt{3} \cdot x = 6\sqrt{x}$	0 vergelijking is onjuist	het inzicht dat punt P het snijpunt is van deze lijn met de grafiek van f	1 inzicht is er want er wordt een vergelijking opgesteld
Een exacte berekening waaruit volgt $x = 12$ ($x = 0$ voldoet niet)	0 foute vergelijking (is wel juist opgelost)	het inzicht hoe de hieruit volgende vergelijking exact kan worden opgelost	1 hoewel de vergelijking onjuist is, wordt deze wel juist opgelost
Dus $P(12, 6\sqrt{12})$, dus $OP = 24$	0 onjuist	het inzicht hoe de lengte van OP kan worden berekend	0 de lengte van OP wordt niet berekend
Dus $x_{P'} = -24$	0 onjuist	completeren en het juiste antwoord	0 verdere berekening is onjuist dus 0 voor completeren
Totaalscore	0		3

tabel 1 Score van leerlingwerk vraag 14 volgens beide cv's

Voorbeeld van een uitwerking van een leerling

Als eerste kijken we naar een uitwerking van een leerling van vraag 14, zie figuur 2 op pag 9.

In figuur 3 staat de uitwerking van een leerling waarvoor 0 punten zijn gegeven volgens het reguliere cv. Reden hiervoor is waarschijnlijk dat er in iedere stap in de uitwerking iets mis gaat.

In tabel 1 wordt deze correctie vergeleken met het alternatieve cv.

14 $f(x) = 6\sqrt{x}$ $P(16, 24) = (16, 24)$
 $L: y = ax + b$
 $L: y = \frac{1}{2}x$ $P' = (-24, 0)$
 $L = f(x)$ is P
 $6\sqrt{x} = \frac{1}{2}x$ $P'(-24, 0)$
 $36x = 2\frac{1}{4}x^2$
 $x^2 - 16x = 0$
 $x(x - 16) = 0$
 $x = 16$

figuur 3 Uitwerking van een leerling van vraag 14

Dit voorbeeld laat zien dat een andere insteek van het cv andere scores oplevert. De vraag is welke van deze twee het meest recht doet aan de vaardigheid van de leerling. Die afweging laten we graag aan de lezer over.

Voorbeeld van accentverschuiving in cv

De tweede factor die het verschil in scores verklaart tussen het reguliere en alternatieve cv is de accentverschuiving in het alternatieve cv. We illustreren dit aan de hand van vraag 12.

Hierin gaat het over de functie $f_p(x) = \frac{x^3 + 4p}{x^2}$ die is gedefinieerd voor $p > 0$ en waarvan de leerlingen moeten bewijzen dat er een lijn is waarop de toppen liggen van f_p . Het maximum aantal te behalen scorepunten is 5. De beide correctievoorschriften staan in figuur 4 en figuur 5.

In tabel 2 staan de verschillende stappen in de uitwerking beschreven en het aantal scorepunten dat aan die stappen wordt toegekend in beide cv's. Hierbij hebben we ons voor het reguliere cv gebaseerd op het eerste antwoord-alternatief. Voor het bepalen van de afgeleide met de quotiëntregel worden in het reguliere cv twee scorepunten toegekend omdat het veel rekenwerk is, in het alternatieve cv is dat een scorepunt. Het gelijkstellen aan 0 levert in

12 maximumscore 5

- Er geldt $f_p'(x) = \frac{x^2 \cdot 3x^2 - (x^3 + 4p) \cdot 2x}{(x^2)^2}$ 1
- Herleiden tot $f_p'(x) = 1 - \frac{8p}{x^3}$ (of $f_p'(x) = \frac{x^4 - 8px}{x^4}$) 1
- $f_p'(x) = 0$ geeft voor de x -coördinaat van de top $p = \frac{1}{8}x^3$ 1
- Invullen in $x^3 + 4p$ geeft $1\frac{1}{2}x^3$ 1
- Dus de y -coördinaat van de top is $\frac{1\frac{1}{2}x^3}{x^2} = 1\frac{1}{2}x$ (dus de toppen liggen op de lijn met vergelijking $y = 1\frac{1}{2}x$) 1
- of
- Er geldt $f_p(x) = x + \frac{4p}{x^2} = x + 4px^{-2}$ 1
- $f_p'(x) = 1 - \frac{8p}{x^3}$ 1
- $f_p'(x) = 0$ geeft voor de x -coördinaat van de top $x = \sqrt[3]{8p} (= 2p^{\frac{1}{3}})$ 1
- Invullen in $x^3 + 4p$ geeft $12p$ en invullen in x^2 geeft $\left(2p^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 4p^{\frac{2}{3}}$, dus de y -coördinaat van de top is $\frac{12p}{4p^{\frac{2}{3}}} = 3p^{\frac{1}{3}}$ 1
- (Voor elke waarde van $p > 0$ geldt) $\frac{3p^{\frac{1}{3}}}{1} = 1\frac{1}{2}$ (of $3p^{\frac{1}{3}} = 1\frac{1}{2} \cdot 2p^{\frac{1}{3}}$) (dus de toppen liggen op de lijn met vergelijking $y = 1\frac{1}{2}x$) 1

figuur 4 cv vraag 12 vwo wiskunde B 2021-1

12 maximumscore 5

voorbeeld van een antwoord:

$$f_p'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - 2x(x^3 + 4p)}{x^4} (= \frac{x^3 - 8p}{x^3})$$

$$f_p'(x) = 0 \text{ als } x^3 = 8p \text{ dus } p = \frac{1}{8}x^3$$

$$\text{de kromme waarop de toppen liggen heeft vergelijking } y = \frac{x^3 + 4 \cdot \frac{1}{8}x^3}{x^2}$$

herleiden tot $y = 1\frac{1}{2}x$ (dus de toppen liggen op een rechte lijn)

- het inzicht hoe de afgeleide van f_p kan worden gevonden 1
- het inzicht dat de afgeleide van f_p gelijk moet worden gesteld aan nul 1
- het inzicht dat vervolgens p kan worden uitgedrukt in x 1
- het inzicht dat vervolgens y kan worden uitgedrukt in x 1
- completeren en de conclusie 1

figuur 5 Alternatieve cv vraag 12 vwo wiskunde B 2021-1

het alternatieve cv expliciet een scorepunt op terwijl dat in het reguliere cv in een bolletje zit samen met het oplossen van de vergelijking die daaruit ontstaat. Het invullen van p in f levert in het reguliere cv twee scorepunten op en in het alternatieve cv een. Het trekken van een conclusie hoeft in het reguliere cv niet expliciet te gebeuren, in het alternatieve cv wel.

stap in de uitwerking	aantal punten in reguliere cv	aantal punten in alternatieve cv
het bepalen van de afgeleide	2	1
de afgeleide 0 stellen	1	1
vergelijking oplossen		1
p invullen in f	2	1
conclusie trekken	(alleen impliciet)	1
Totaalscore	5	5

tabel 2 verschillen in scorepunten tussen het reguliere cv en het alternatieve cv

Dit voorbeeld laat zien dat denken over een uitwerking vanuit wiskundige inzichten die daarin een rol spelen tot een andere verdeling van de scorepunten kan leiden. Het inzicht dat de afgeleide gelijk moet worden gesteld aan 0 is een belangrijk inzicht, maar als rekenstap niet heel interessant. De wiskundige inzichten als uitgangspunt nemen zorgt dat er een ander onderscheid wordt gemaakt in herkenbare stappen in de uitwerking. Ook hierbij is de vraag welke indeling het meest recht doet aan de (wiskundige) vaardigheid van de leerling. En ook deze afweging laten we aan de lezer.

Conclusie

De verkenning van een alternatieve opzet van het cv had, zoals in de inleiding betoogd, verschillende redenen. Als eerste wilden we meer afstemming met andere exacte vakken als natuur- en scheikunde. Het alternatieve cv sluit aan bij wat daar gebruikelijk is. In onze ogen is dit winst. Een tweede reden was de wens om nog meer recht te willen doen aan de essentie van de wiskundige vaardigheid van leerlingen. We beseffen dat dit een heikel punt is waar de meningen flink over kunnen verschillen. Want wat is precies die essentie en hoe bepaal je dat dan? In onze ogen brengt het alternatieve cv, meer dan het regulier cv, in beeld waar de vraag in de kern over gaat en worden leerlingen daarvoor navenant beloond.

De focus op relevante denkstappen in de uitwerking zou kunnen bijdragen aan het voorkomen van een punten-inflatie. Hiermee bedoelen we het niet toekennen van scorepunten voor onderdelen van een uitwerking omdat het om een kleine rekenstap gaat, zoals het gelijk stellen aan 0 van de afgeleide.

Een derde reden was de behoefte om een nieuwe balans te vinden tussen duidelijkheid voor docenten en een

gedetailleerd correctievoorschrift. Dit onderzoek geeft geen antwoord op de vraag in hoeverre dit is gelukt. Tijdens het corrigeren met het alternatieve cv werd duidelijk dat hierin nog uitzoekwerk ligt. Zo is het verschil tussen *inzicht dat* en *inzicht hoe* nog niet duidelijk genoeg. De intentie was om het correct oplossen onder *inzicht hoe* te laten vallen. Maar hoe ga je dan om met kleine verschrijvingen? Waar vallen die onder? Vraagt dat om een extra 'spelregel', bijvoorbeeld een vakspecifieke regel?

Tot slot

Op het moment van schrijven (juli 2023) is niet duidelijk of, en zo ja hoe, de alternatieve aanpak een vervolg krijgt. Het is aan de vaststellingscommissies van de CvTE om hierover een besluit te nemen. Intussen zijn we zeer geïnteresseerd in de mening van de lezer. We nodigen je dan ook van harte uit jouw mening per mail met ons te delen.

Het alternatieve cv (alsmede het reguliere cv en het examen zelf) is te vinden op de site:



vakbladeuclides.nl/992alternatief_cv

Over de auteurs

Irene van Stiphout en Ruud Stolwijk zijn toetsdeskundigen bij Cito. E-mailadressen:

irene.vanstiphout@cito.nl, ruud.stolwijk@cito.nl.

Wiskunde binnen NLT: holografie

Holografie is nog altijd een beetje een niche. Het wordt gebruikt om waardepapieren te beveiligen, en je kunt er mooie plaatjes mee maken. Maar de tijd is niet ver weg dat holografie breed toegepast gaat worden, bijvoorbeeld in 3d-televisie. Ook binnen de astronomie kom je het woord steeds vaker tegen. Er zit veel goniometrie in holografie, daarom is dit een mooie NLT-module om nader te bekijken.

NLT

De afkorting NLT staat voor Natuur, Leven en Technologie.^[1] NLT wordt wel het vierde bètavak genoemd. Het is een havo/vwo keuze-examenvak dat de soms wat academische kennis van de drie bètavakken natuurkunde, scheikunde en biologie in praktijk brengt. Het is het vak voor de techneuten, en het biedt goede aansluiting met de technische hogescholen en universiteiten. Het vak is modulair, elke periode een andere module vanuit een totaal andere context. Het vak wordt daarom door een team van bèta-docenten gegeven. Vanzelfsprekend komt daar ook wiskunde bij kijken. Naast natuurlijk beschrijvende en toetsende statistiek komen ook onderwerpen als goniometrie, logaritmen, Fourier transformatie en calculus aan de orde (zie ook Den Braber^[2] en Jorna^[3]). Om te laten zien wat er in een NLT-module behandeld wordt, bespreken we in dit artikel de NLT-module *Holografie*.

Wat is holografie?

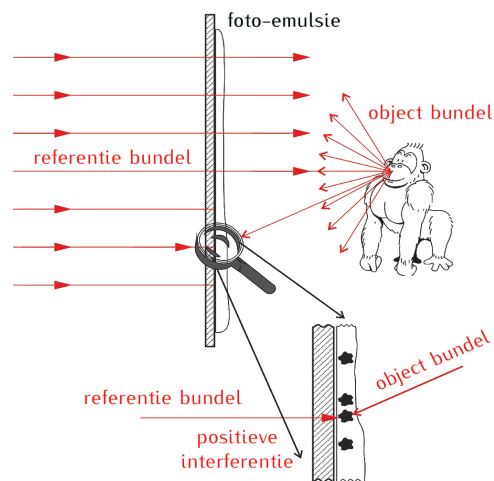
Er is veel rommel op de markt die 'holografie' genoemd wordt. Geribbelde plaatjes die je scheef houdt om een iets ander beeld te zien, hebben niets met holografie te maken. Het *on-stage* brengen van overleden popmusici is het ook niet, dat doen ze met projecties op half-transparante schermen (zie bijvoorbeeld Rikken^[4]). Bij holografie wordt een 3d-beeld vastgelegd in een 2d-plaatje. Op dat 2d-plaatje zie je niets dan een vage veeg. Maar als je die veeg beschijnt met hetzelfde type laser als waarmee het plaatje is gemaakt, dan verschijnt het 3d-beeld weer. Het is alsof je door een glasplaatje naar het origineel kijkt. Als je op een foto recht in de loop van een kanon zou kijken, en geschrokken je hoofd opzij zou bewegen, beweegt de loop met je mee. Bij een hologram zou je uit de baan van de kogel gaan, en een zijwiel zien. *Physics girl* geeft een mooie uitleg op YouTube.^[5]

Opbouw van de module

Hoe leg je zoiets uit? Hoofdstuk 2 in de NLT-module *Holografie* introduceert het principe. Hoofdstuk 3 gaat in op de natuurkunde van buiging en interferentie, en hoofdstuk 4 op de scheikunde van de fotochemie. In hoofdstuk 5 wordt het maken en terugzien van een hologram verklaard vanuit een wiskundige benadering, en in hoofdstuk 6 tot slot gaan de leerlingen een hologram maken. Dat is sinds het beschikbaar komen van *Litiholo hologramkits* niet meer zo moeilijk om te doen op een middelbare school.^[6]

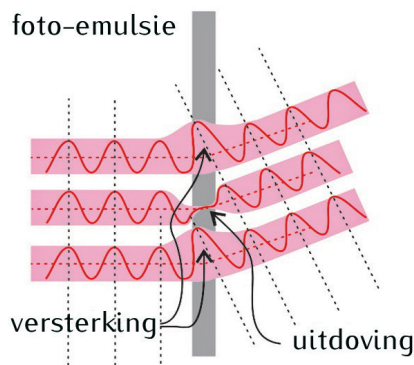
Het registreren van een hologram

Dus hoe zit dat nou, hoe wordt zo'n hologram gemaakt? Men gebruikt laserlicht, niet alleen omdat dit intens is en van één golflengte, maar ook omdat alle golven in fase zijn, coherent. Hieronder zal blijken hoe belangrijk dit is. Er zijn verschillende opstellingen mogelijk, figuur 1 is een goede manier om het principe uit te leggen.



figuur 1 Vastleggen van een hologram

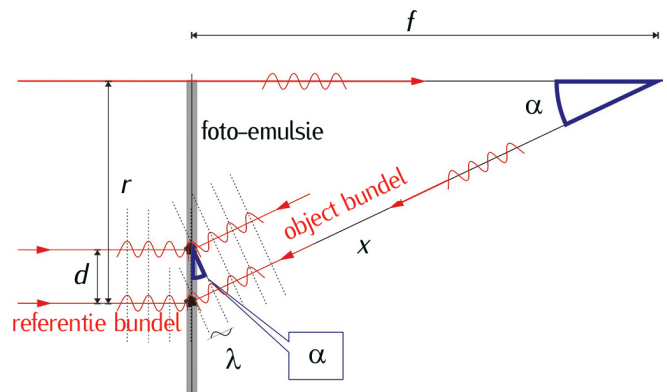
Links komt van de laser de evenwijdige referentiebundel, die door het glaasje met foto-emulsie op het voorwerp valt. Het licht dat door het voorwerp wordt gereflecteerd, wordt de objectbundel genoemd. Deze laatste verspreidt zich in alle richtingen, bolvormig. Op de plaats waar de referentiebundel en de objectbundel elkaar treffen (zoals onder het loepje), ontstaat interferentie. In figuur 2 is te zien hoe botsende golfbergen elkaar versterken. In een foto-emulsie ontstaan dan zwarte korrels. Op plekken waar van de ene kant een golfberg en van de andere kant een golfdal elkaar ontmoeten, doven de golven elkaar juist uit en blijft de foto-emulsie doorzichtig.



figuur 2 Botsende golfbergen versterken elkaar

Omdat de objectbundels zich in een bolvorm verspreiden, heeft de zwarting op het holografisch materiaal de vorm van cirkels rond de centrale as van de opstelling. Een concentrische groep cirkels wordt een *zonelens* genoemd. Voor elk onderdeel van het object ontstaat een aparte zonelens.

Na het belichten moet het holografisch materiaal ontwikkeld worden, net als bij een gewone foto. Hoe ziet daarna zo'n plaatje eruit? Kun je de zonenlenzen met het oog zien? Er zijn heel veel licht reflecterende punten op het object, die allemaal een zonelens veroorzaken, is daar wel ruimte voor op de fotografische plaat? Hier komt de wiskunde tot zijn recht, het antwoord kan berekend worden met behulp van figuur 3. Twee zwarte korrels zijn getekend, samen met de stralen die de positieve interferentie veroorzaken. De stralen zijn in fase, want laserlicht is coherent. Er komt dus pas weer een volgende zwarte korrel als de weglengte van de objectstraal precies één golflengte langer is.



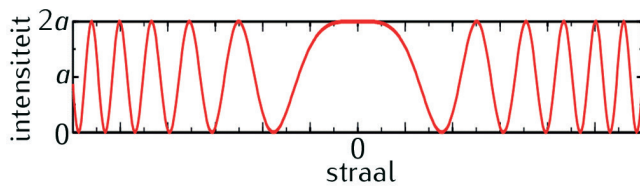
figuur 3 Bepaling van de minimumafstand tussen korrels

Hier hoeft niet uitgeschreven te worden dat de hoek α tussen de centrale as (met lengte f) en de lichtstraal in de objectbundel (met lengte x) gelijk is aan de hoek tussen het holografisch materiaal en het golffront. En de minimale afstand d tussen de twee korrels op een afstand r van het midden, kan berekend worden omdat $\tan(\alpha) = \frac{r}{f}$ en $\sin(\alpha) = \frac{\lambda}{d}$. Stel dat het object 15 cm achter het glaasje stond, de zonelens een straal van 3 cm heeft, en de golflengte van het laserlicht is $650 \text{ nm} = 650 \cdot 10^{-9} \text{ m}$, dan is $d = \frac{\lambda}{\sin(\alpha)} = 3,3 \text{ } \mu\text{m}$. Geen wonder dat op zo'n glaasje hooguit een vage veeg zichtbaar is. En er is genoeg ruimte voor vele zonenlenzen. Het is ook in te zien dat als je verder uit het midden gaat op het fotografische materiaal, met andere woorden als r groter wordt, dat dan α groter wordt en dus de afstand tussen de korrels d kleiner.

In de NLT-module wordt het intensiteitsverloop in het fotochemisch materiaal stapsgewijs formeel afgeleid vanuit de som van de golf functie die de referentiebundel beschrijft, en de golf functie die de objectbundel beschrijft, gebruik makend van de goniometrische vergelijking $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)$. De functie voor de intensiteit op afstand r van het midden wordt dan:

$$I(r) = \frac{1}{2} E_0^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \cdot \cos(2\pi) \left(\frac{r^2}{2\lambda f} \right) \right)$$

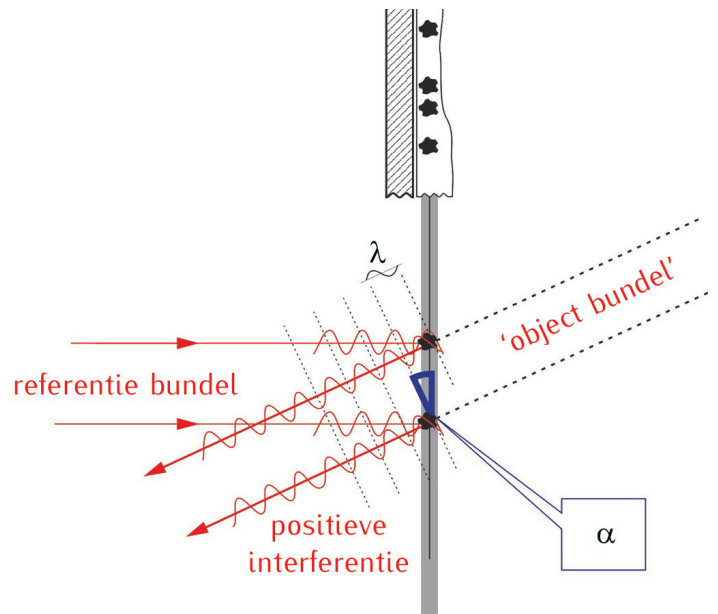
met I = intensiteit (in W/m^2), E_0 = maximale elektrische veldsterkte (in V/m), r = afstand midden tot korrel (in m), x = afstand voorwerp tot korrel (in m), λ = golflengte (in m) en f = afstand voorwerp tot midden (in m). Met deze functie kan het hele verloop van de intensiteit beschreven worden, zie figuur 4 uit de NLT-module. Duidelijk is te zien dat verder uit het midden de afstand kleiner wordt tussen de maxima, dat zijn dus de plaatsen waar de zwarte korrels ontstaan.



figuur 4 Het intensiteitsverloop van het interferentiepatroon op de lichtgevoelige plaat. $a = \text{constante} \cdot E_0^2$

Het opwekken van het hologram

De NLT-module is wat zuinigjes in de uitleg hoe nu een hologram weer zichtbaar gemaakt wordt, terwijl dat juist zo elegant is. De verzameling zonelenzen vormt als het ware cirkelvormige diffractieroosters, zie figuur 5. Als laserlicht van dezelfde golflengte op die zonelenzen valt, zal dat licht reflecteren op de zwarte korrels. Tussen die reflecterende stralen ontstaat weer interferentie, net als bij een tralie. Omdat bij de opname de afstand tussen de korrels is vastgelegd, en dezelfde golflengte laserlicht wordt gebruikt, zal de interferentie zorgen voor lichtstralen in precies dezelfde richting als waar de objectbundel ooit vandaan kwam. Geen wonder dus dat de waarnemer exact hetzelfde beeld ziet als toen het voorwerp er nog wel stond!



figuur 5 Ontstaan van het holografisch beeld

Andere modules

In de NLT-module die hier beschreven is, wordt gebruik gemaakt van goniometrische verhoudingen. Andere modules met een nauwe band met de wiskunde staan

Module (vwo)	Behandelde wiskunde
<i>Metten en interpreteren</i>	beschrijvende- en toetsende statistiek (correlatie, R^2 en lineaire regressie)
<i>Complexe stromen</i>	complexe getallen
<i>Maak het verschil</i>	toetsende statistiek (normale verdeling en overschrijdingskans)
<i>Modelleren</i>	differentiëren
<i>Metten aan melkwegstelsels</i>	ellipsen (perken), logaritmen
<i>Noordzee</i>	differentiaalvergelijking

Module naam (havo)	Behandelde wiskunde
<i>Weet wat je zegt !</i> (nog te certificeren)	beschrijvende statistiek (gemiddelde, standaarddeviatie, grafieken met foutbalken), toetsende statistiek (correlatie en lineaire regressie, normale verdeling en overschrijdingskans)
<i>Wat zeg je?</i>	powerspectra

genoemd in de tabellen op p.14. En er zijn uiteraard drie statistiekmodules binnen NLT (beschrijvend en toetsend). Deze lijst is overigens niet uitputtend.

Met zo'n breed palet aan onderwerpen is het logisch dat NLT gegeven wordt door een team van docenten. Docenten met een eerstegraads bevoegdheid voor wiskunde, natuurkunde, scheikunde en biologie, fysisch geografen en docenten informatica zijn allen bevoegd om NLT te geven. In de opleiding wordt daar tegenwoordig aandacht aan besteed. Dit artikel verschijnt gelijktijdig ook in *NVOX*, het blad van de NVON, dat door de meeste NLT-docenten wordt gelezen. Als dit artikel jouw interesse wekt (en het vak bij je op school gegeven wordt), dan hoop ik dat je dit artikel aankaart bij mijn collega NLT!

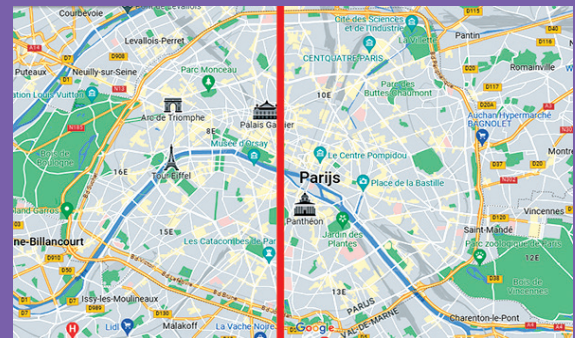
Noten

- [1] Zie: <https://www.verenigingnlt.nl/> voor meer informatie over het vak NLT. Hier wordt elke module kort beschreven.
- [1] Den Braber, N.S. (2018). *Wiskunde en NLT. Euclides*, 94(1), 43-45.
- [2] Jorna, H. (2018). *NLT en wiskunde. Euclides*, 94(5), 24-26.
- [3] Rikken, R. (2022). Pepper's ghost als context bij vlakke spiegels. *NVOX*, 47(2), 6-8.
- [4] *Physics Girl*. Uitleg over holografie: <https://www.youtube.com/watch?v=0ics3RVS9w>
- [5] Litiholo hologramkits: <http://www.litiholo.com/hologram-kits.html#ChooseSection>

Over de auteur

Mart Mojet is docent NLT op de RSG Magister Alvinus in Sneek. Hij is tevens eindredacteur NLT bij *NVOX*, het blad van de NVON. Mart heeft een aantal NLT-modules geschreven en geredigeerd. De focus van zijn ontwikkelwerk ligt nu op het toepassen van *virtual reality* in het voortgezet onderwijs. E-mailadres: martmojetnvox@gmail.com

De rechte lijn



Het lijkt zo eenvoudig het begrip rechte lijn, maar dat is het natuurlijk niet. Is het tekenen van een rechte lijn eigenlijk wel mogelijk? De aarde is tenslotte een bol.

Een bekende 'rechte lijn' in de kunst is de meridiaan van Parijs. Dit is een kunstwerk van Jan Dibbets, die dwars door Parijs van noord naar zuid 135 koperen plaatjes in het plaveisel heeft neergelegd om de nulmeridiaan van Parijs aan te geven. Dit kunstwerk is een vervanging voor het in de tweede wereldoorlog omgesmolten standbeeld van Francois Arago, die de loop van de nulmeridiaan had uitgerekend.



Een gelijkwaardige uitdrukking volgens Aron

Wilma Broere

Leerzame momenten

Het is eind juni en ik begeleid Aron uit 6 vwo. Aron heeft een eindlijst met driemaal vijf voor wiskunde B, natuurkunde en scheikunde. Daarmee ga je het niet redden natuurlijk. Balen voor hem. Toen hij z'n vrienden vertelde dat hij gezakt was, moesten ze hard lachen. Ze dachten dat het een grapje was.

Aron besluit om wiskunde B te gaan herkansen:

z'n cijfer moet van een 5,1 naar een 5,9 en dan heeft hij een diploma. En dus spreken we af om een paar keer het een en ander door te spreken. Nu ga ik je hier geen verslag doen van de aangename uurtjes die we samen hadden. Wel wil ik je deelgenoot maken van de leezame momenten die ik zelf had. En dan met name rondom de zegswijze 'of een gelijkwaardige uitdrukking'.

Eerst maar eens het gemaakte examen inzien. We gaan naar de kamer van de directeur en ik start met de gebruikelijke preambule: het cijfer is wat het is, daar is niets meer aan te veranderen; het doel van de bespreking is om te ontdekken waar ingangen zitten tot verbetering. Aron knikt begrijpend.

maximumscore 3	
$f'(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$	1
$f'(x) = 0$ voor $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ($x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ voldoet niet)	1
$f(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ (dus het minimum van f is $2\sqrt{2}$) (of een gelijkwaardige uitdrukking)	1

$f'(x) = 0$
 $f'(x) = 2 - x^{-2} = 0$
 $2 = x^{-2}$
 $\frac{2}{1} = \frac{1}{x^2}$
 $2x^2 = 1$
 $x^2 = \frac{1}{2}$
 $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ of $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$
 $f(\sqrt{\frac{1}{2}}) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \text{minimum}$
bij $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ is het een maximum

figuur 1

Gelijkwaardig

We pakken het examen, het correctievoorschrift en Arons werk erbij en starten met vraag 1, zie figuur 1. Daar haalt hij alle punten binnen. Hij heeft weliswaar als

antwoord $f(\sqrt{\frac{1}{2}}) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}$ maar dat is

geen probleem, want vergeleken met $2\sqrt{2}$ is dat een gelijkwaardige uitdrukking.

Blijkbaar hoeven wortels niet vereenvoudigd te worden. Is dat iets van de laatste jaren? Het helpt wel natuurlijk, Aron zou zijn uitdrukking waarschijnlijk niet hebben kunnen herleiden tot $2\sqrt{2}$. En hij weet dat het niet hoeft. Want, vertelt hij, dit is hij vaker tegengekomen in de examens die hij samen met z'n vrienden heeft geoefend. Dus.

We gaan door naar de volgende vragen en komen via een gebogen plaat en een gedraaide parabool bij een absolute sinus, met als functievoorschrift $f(x) = \left| \sin(x) + \frac{1}{2}\sqrt{3} \right|$. Volgens het correctievoorschrift zijn de y -coördinaten van de toppen $1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ respectievelijk $1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Aron reageert: mag je daar niet gewoon $|-1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}|$ laten staan? Dat is toch een gelijkwaardige uitdrukking? Nee, zeg ik op mijn leraarstoel, dat moet je natuurlijk wel even uitrekenen. Oké, zegt Aron.

Nu kun je met het woordje oké zo'n beetje alles wel zeggen. Het liefst hoor ik iets als het korte en doortastende oké, met als betekenis 'ik snap het, dat ga ik in het vervolg zo doen'. Maar het klonk meer als een ander soort oké, je weet wel, zo eentje waar de klank bij ké vragend omhooggaat en waar het woord op een j lijkt te eindigen: okeej?

Goed lezen is ook een 'dingetje'

Zo ploeteren we het examen door. Aron komt erachter dat hij het verschil tussen de afgeleide en de primitieve nog eens goed moet bestuderen en dat goed lezen ook wel een dingetje is. Mij valt de voorliefde voor het cijfer 2 bij de examenmakers op: via de antwoorden $2\sqrt{2}$, $\ln(2)$ en 0,02 rollen we het examen in, en later volgen nog $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $2 - \sqrt{20}$ en opnieuw $\ln(2)$. Maar dit terzijde.

Na zo'n anderhalf uur zijn we klaar. Aron heeft aan het einde van de bespreking in zijn speciaal aangelegde herkansingsschrift een heel lijstje aandachtspunten genoteerd. Daarmee kan hij aan de slag. Ik noem hem nog de bladzijden uit het boek die hij zeker moet bestuderen en geef hem een paar geprinte examens mee.

We spreken af dat hij één examen maakt en dat we dat examen de volgende dag zullen doornemen.

Exacte waarden

Zo gezegd, zo gedaan. Goedgemutst komt Aron de volgende dag met zijn schrift en examen. Er is best al veel gelukt, vindt hij zelf, al heeft hij – volgens afspraak – de antwoorden nog niet bekeken. We pakken het correctievoorschrift erbij en inderdaad, hij heeft aardig wat opgaven goed uitgewerkt. Wel wat onzuiverheden in de notatie van limieten en ook ergens iets waar hij het antwoord niet helemaal had uitgerekend: hij had $\sin(\frac{5}{3}\pi)$ laten staan.

Dit moet je uitrekenen hè, zeg ik. Is dat niet een gelijkwaardige uitdrukking, zegt hij. Maar je kent de exacte waarden toch wel, zeg ik. Ja maar het is toch in principe hetzelfde, zegt hij.

En dan begint me iets te dagen. Aron en ik hebben ieder een verschillend idee van wat een gelijkwaardige uitdrukking is! En nu ik erover nadenk, kan ik Arons interpretatie wel volgen. Er is immers sprake van gelijkwaardigheid van de verschillende uitdrukkingen:

$\sin(\frac{5}{3}\pi)$ is gelijkwaardig aan $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$,

en $2\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}$ is gelijkwaardig aan $2\sqrt{2}$. Alleen

vinden we in examens het laatste wel oké en het eerste niet.

Wortels: getal of bewerking?

Hoe zit dat eigenlijk? In m'n pta-toetsen geef ik aan welke vorm het antwoord moet hebben. Zinsneden als 'schrijf het antwoord in de vorm $a + b\sqrt{c}$ waarbij c een zo klein mogelijk geheel getal is' zijn m'n leerlingen niet onbekend. Discussies over welke antwoorden wel en welke antwoorden niet zijn toegestaan behoren daarmee tot het verleden. En het herleiden van wortels, in de onderbouw geleerd en in de vierde klas verdiept, krijgt een plekje in de toetsen. Waarom wortels bij examens niet herleid hoeven worden, begrijp ik niet zo goed. Wellicht is een niet-herleide wortel ooit een keer passabel geacht en wordt daarop inmiddels geanticipeerd in het correctievoorschrift.

Blijft de vraag van Aron: waarom is het ene antwoord wel toegestaan als eindantwoord en het andere antwoord niet? Mijn hypothese is – en ik hou hem voor een betere – dat wij docenten een wortel zien als een getal. Bij ons is $2\sqrt{2}$ een getal, evenals $\sqrt{8}$, dat hetzelfde getal is. Maar bij Aron is het wortelteken een bewerking: het getal 8 moet nog geworteld worden. Arons strategie is: wanneer je rekenmachine een kommagetal geeft en er wordt gevraagd naar een exacte berekening, dan stop je met je berekening.

Dan stop je dus als je $2\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}$

ingetikt hebt, of $|-1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}|$, of $\sin(\frac{5}{3}\pi)$, of $\ln(2)$, want je ziet in elke situatie kommagetallen. En wat je dan hebt staan, dat is altijd een gelijkwaardige uitdrukking met wat het correctievoorschrift aangeeft.

Teaching to the test

Heeft Aron gelijk? Daarover zijn we niet in gesprek gegaan. Hij moet immers een diploma halen! Ik haal de teaching-to-the-testmethode van stal: doe het nou maar zoals ik het zeg, want zo werkt het in examens. Dus alles helemaal uitrekenen, ook de sinussen en cosinussen, breuken herleiden tot een zo eenvoudig mogelijke vorm, en alleen de wortels laten staan als ze niet mooi uitkomen. Aron knoopt het in z'n oren. De dag van de herkansing nadert. Zou het lukken bij de tweede poging? Ja hoor, geen probleem, Aron haalt de benodigde punten glansrijk binnen. Bij het corrigeren maakt hij me nog even zenuwachtig als hij bij de eerste vraag 6/9 als eindantwoord laat staan. Maar verder laat hij veel meer wiskundige vaardigheden zien dan tijdens het eerste tijdvak, ruim voldoende voor een voldoende. Op een donderdagmorgen mag zijn mentor hem het blijde nieuws vertellen. De telefoon gaat over ergens diep in Duitsland, waar hij samen met z'n vrienden aan het fietsen is. Aron is blij en opgelucht, de klus is geklaard. Hij kan zonder problemen aan de politie-academie beginnen.

Over de auteur

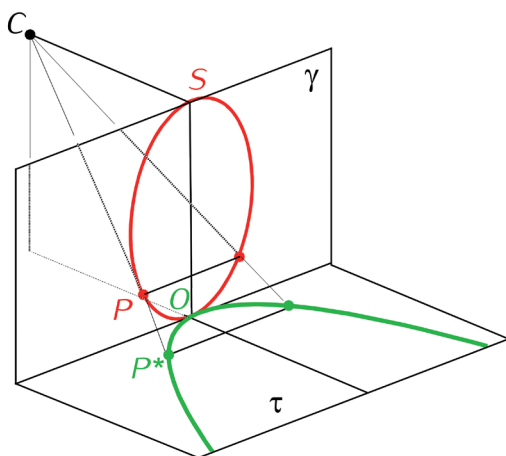
Wilma Broere - den Boer is al bijna dertig jaar wiskundedocent en is werkzaam op csg Prins Maurits te Middelharnis. Tevens is zij examinator bij de staatsexamens, waar zij betrokken is bij het afnemen van mondelinge wiskunde-examens in het speciaal onderwijs.
E-mailadres: wilmadenboer@kpnplanet.nl

De parabool op school (2)

In een vorig artikel over de parabool ben ik niet buiten het 2-dimensionale boekje gegaan.^[1] De Grieken, met name Apollonius, deden dat wel en zagen de parabool primair als kegelsnede.

Van cirkel naar parabool

Dat er manieren zijn om zonder tekenwerk een parabool tevoorschijn te toveren mag eigenlijk niet onvermeld blijven op school. Neem een glazen kegel die afgesloten kan worden met een deksel. Vul die kegel voor de helft met water en leg hem dan zijdelings neer op tafel en zie: de rand van de waterspiegel is een heuse parabool. Of richt met een ouderwetse zaklantaarn op de muur. Zo kun je het licht laten schijnen op de diverse kegelsneden. Een centrale lichtbundel kan gemodelleerd worden als een bundel rechte lijnen en de schaduw van de rand van het lantaarnvenster is dan op te vatten als de *centrale projectie* van een cirkel, zie figuur 1. De rode cirkel in een verticaal vlak γ wordt vanuit een punt C geprojecteerd op een horizontaal *tafereel* τ dat de cirkel aan de onderkant raakt. Het punt C neem ik op een afstand van het tafereel die gelijk is aan de diameter SO van de cirkel. Bovendien: $CS \perp \gamma$.



figuur 1

De (groene) projectie kan worden opgevat als de doorsnede van een (scheve) kegel en een vlak dat parallel is met één beschrijvende (CS) van die kegel. Zo'n kegel-

snede kreeg van Apollonius de naam parabool.

De projectie van de middellijn OS van de cirkel is de symmetrieas van de parabool en de projectie van het punt S verdwijnt als het ware naar het oneindige. Bij het bewijs dat de centrale projectie van de rode cirkel een 'parabool-op-school' is, kan algebra worden gebruikt. Op school wordt tegenwoordig 'meetkunde-met-vectoren' onderwezen, maar waarom beperkt zich dat nu tot het platte vlak? Als leraar zou ik het er wel op wagen om uitstapjes naar de derde dimensie te maken. De situatie van figuur 1 nodigt daartoe uit. Er moet dan wel worden 'gecoördinatiseerd', een waardevolle activiteit die je ook de leerling af en toe zou mogen gunnen.

Wel: de snijlijn van het verticale vlak met het tafereel kies ik hier als x -as. De symmetrieas van de projectie van de cirkel promoveer ik tot y -as en de drager van OS wordt dan de z -as. De punten O , S en C geef ik de coördinaten-tripels $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$ en $(0, -2, 2)$. De cirkel in het Oxz -vlak is nu bepaald door: $x^2 + z^2 = 2z$ én $y = 0$. Hierbij kan een parametervoorstelling worden opgesteld:^[2]

$$(x, y, z) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, 0, \frac{2t^2}{1+t^2} \right)$$

Laat P_t een willekeurig punt van de cirkel zijn. De lijn CP_t heeft nu de parametervoorstelling:

$$(x, y, z) = (0, -2, 2) + \lambda \left(\frac{2t}{1+t^2}, 2, \frac{-2}{1+t^2} \right)$$

Het snijpunt P_t^* met het vlak $z = 0$ vind ik uit:

$$2 - \frac{2\lambda}{1+t^2} = 0$$

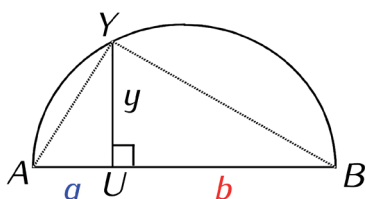
en via $\lambda = 1 + t^2$ komt er: $P_t^* = (2t, 2t^2, 0)$. Hieruit volgt dan dat de vergelijking van de projectie van de cirkel in het Oxy -vlak een parabool is met vergelijking $x^2 = 2y$ (en $z = 0$).

De middelevenredige en de parabool

Het begrip *middelevenredige* of *meetkundig gemiddelde* is helaas in het vergeetboek van de schoolwiskunde geraakt. Even opfrissen:

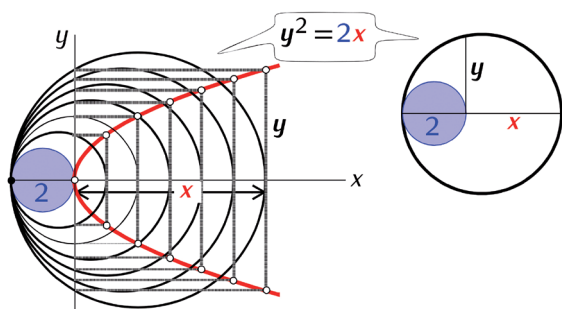
Laat a , b , en y positieve reële getallen zijn. Het getal y is 'meetkundig gemiddelde van' of 'middelevenredige tussen' de getallen a en b als $a : y = y : b$ ofwel $y^2 = a \cdot b$.

Bij door lijnstukken gegeven a en b kan y worden geconstrueerd met behulp van een halve cirkel, zie figuur 2:



figuur 2

Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken AUY en YUB volgt immers $a : y = y : b$. Dit leidt, zie figuur 3, tot een grappige constructie van een reeks punten op de parabool $y^2 = 2x$.



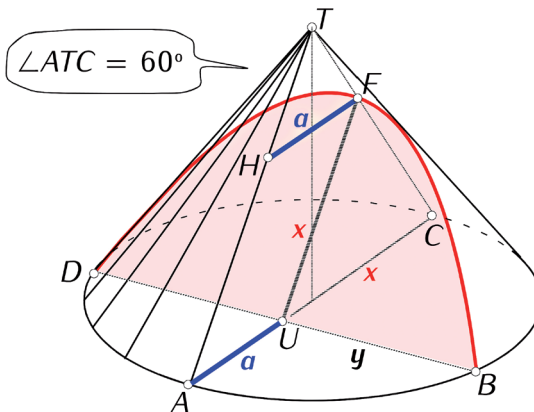
figuur 3

Bij elke x is het meetkundig gemiddelde y van 2 en x geconstrueerd via cirkels die inwendig raken aan de blauwe cirkel met diameter 2.

Opnieuw de parabool als kegelsnede

De Grieken zagen een kegel wel als voortgebracht door een rechthoekige driehoek die om één van zijn rechthoekszijden draait. Rotatie van de 30-60-90-driehoek om de

langste rechthoekszijde levert dan een kegel op met een tophoek van 60° als in figuur 4.



figuur 4

Het vlak DBF in figuur 4 is parallel met één beschrijvende (TA) van de kegel. Verder is AC die middellijn van de cirkel DAB die loodrecht op DB staat. FU is als snijlijn van de vlakken TAC en DBF , evenwijdig aan TA . De driehoeken TAC en FUC zijn gelijkzijdig. In het vlak DAB is dan te zien dat $y^2 = ax$. Bij verticale verschuiving van het vlak DAB veranderen x en y maar verandert a niet!

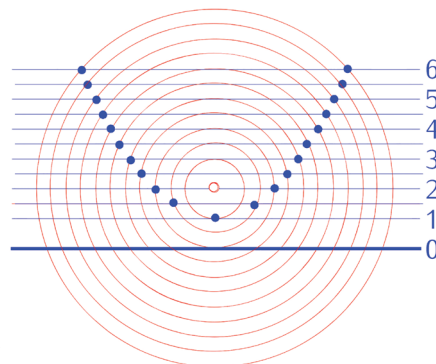
Beschouw in het rode vlak DBF nu de drager van FU als x -as en F als oorsprong. Voor elk punt (x, y) op de rode kegelsnede geldt blijkbaar: $y^2 = ax$. Ja, parabool!^[3]

Dit wat hybride bewijs kan worden gezien als een moderne vertaling van de aanpak van Apollonius (262–190).

Hoogtekaartje met parabool

Dat een parabool kan worden beschouwd als de verzameling snijpunten van een serie concentrische cirkels met een evenwijdige lijnenbundel, beschreef ik eerder.^[1]

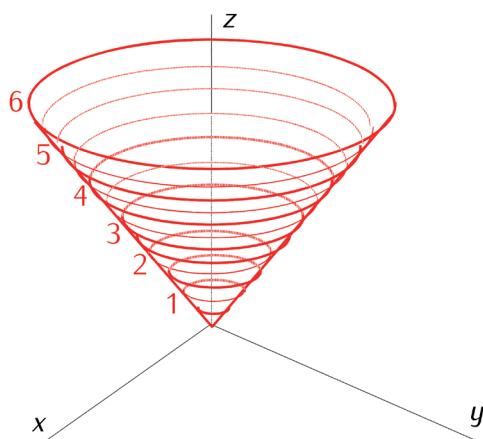
Figuur 5 laat dit nog eens zien.



figuur 5

>

De verzameling cirkels in figuur 5 kan worden gezien als het hoogtekaartje van een kegel κ met een tophoek van 90° en waarvan de as loodrecht staat op het vlak van tekening.



figuur 6

De vergelijking van de kegel in figuur 6 is mooi, namelijk $x^2 + y^2 = z^2$.

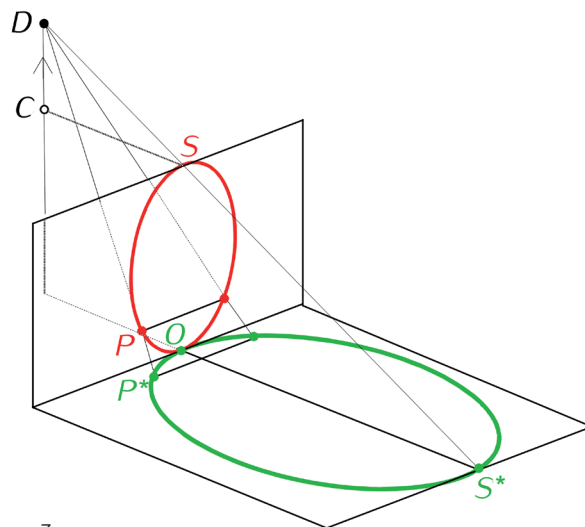
De verzameling rechte lijnen in figuur 5 kan op zijn beurt worden opgevat als het hoogtekaartje van een vlak α dat een hoek van 45° maakt met het Oxy -vlak. Dit vlak α is parallel met één beschrijvende van κ en snijdt κ dus volgens een parabool. De parabool bedoeld in figuur 5 is dan de loodrechte projectie van deze snijkromme op het Oxy -vlak.^[4]

Merk op dat die projectie de doorsnede is van een parabolische cilinder met een vlak dat niet parallel is met een beschrijvende van de cilinder. Of dit een parabool oplevert, daar kun je over nadenken, het is wel zo.

Terzijde: in de laatste decennia van de vorige eeuw werd in de vwo-wiskunde op school ook aan hoogtekaartjes gedaan, bij zowel wiskunde A als B. Is het een goed idee om dit weer terug te laten komen in het curriculum?

Limiet van een serie ellipsen

Terug naar de centrale projectie van de cirkel als in figuur 1. Als het projectiecentrum C over de verticale lijn omhoog schuift naar D wordt de projectie van de cirkel een gesloten kegelsnede: een ellips. Hoe hoger D hoe kleiner die ellips.

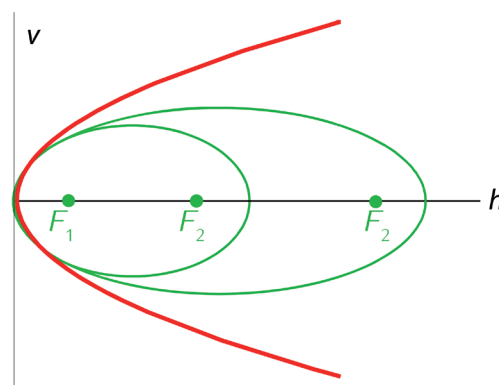


figuur 7

Omgekeerd, hoe dicht D naar C toe kruipt, hoe groter de ellips, die bij aankomst van D in C verandert in een parabool. Zakt C nog wat verder omlaag dan verschijnt op het tafereel aan de 'voorkant' een halve hyperbool, maar dit laat ik hier voor wat het is. De parabool in figuur 1 kan worden opgevat als de limiet van een verzameling groeiende ellipsen.

Ik kijk nu met een 2-dimensionale blik naar dit fenomeen en beschouw een serie ellipsen waarvan de lange as op de horizontale lijn h ligt en die raken aan de verticale lijn v , en die bovendien één brandpunt (zeg F_1) gemeenschappelijk hebben, zie figuur 8.

Het tweede brandpunt beweegt naar rechts over de horizontale lijn. Hoe verder het tweede brandpunt naar rechts ligt, hoe beter de ellips aansluit bij de rode parabool die F_1 als brandpunt heeft en waarvan v de topaaklijn is. Die parabool kan dan worden opgevat als de limietkromme van de serie ellipsen. Dit kan worden aangetoond met klassieke analytische meetkunde.



figuur 8

Neem de lijnen h en v respectievelijk als x - en y -as en geef F_1 het coördinatenpaar $(1, 0)$. De vergelijking van een ellips waarvan de lange as langs de x -as valt en die raakt aan de y -as is:

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ofwel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2x}{a} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

waarbij a de lengte van de halve lange as en b die van de halve korte as voorstelt.

Als c de halve brandpuntsafstand is, geldt: $a^2 = b^2 + c^2$.

Omdat $F_1 = (1, 0)$ geldt $a = c + 1$ en daaruit volgt:

$$b^2 = 2c + 1.$$

De parameters a en b in de vergelijking van een willekeurige groene ellips uit figuur 8 kunnen worden uitgedrukt in c en dit leidt tot:

$$\frac{x^2}{(c+1)^2} - \frac{2x}{c+1} + \frac{y^2}{2c+1} = 0$$

ofwel:

$$\frac{x^2}{c+1} - 2x + \frac{(c+1)y^2}{2c+1} = 0.$$

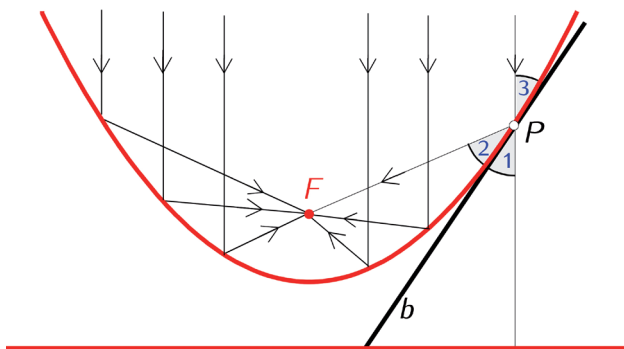
Voor $c \rightarrow \infty$ krijg ik de 'limietvergelijking' $-2x + \frac{1}{2}y^2 = 0$ ofwel $y^2 = 4x$.

Duidelijk een parabool met brandpunt $(1, 0)$!

Trogspiegels en telescopen

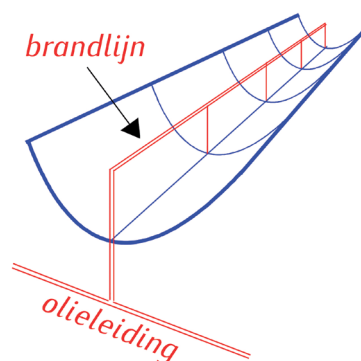
De Grieken wisten dat bij een spiegel in de vorm van een parabool een bundel stralen parallel aan de as van de parabool na terugkaatsing convergeert in het punt F dat niet voor niets de naam brandpunt draagt.

Deze mooie en nuttige eigenschap volgt uit de wetenschap dat de raaklijn in P aan de parabool de bissectrice is van de hoek tussen PF en de loodlijn uit P op de richtlijn f .^[1] Zie hiertoe figuur 9.



figuur 9

Het is een staaltje van elementaire meet- en natuurkunde: de hoeken van inval en uitval zijn beide gelijk aan $\angle P_1$. Een mooie toepassing van deze eigenschap is de zogenaamde trogspiegel. Deze wordt gevormd door een symmetrisch paraboolsegment verschoven in de richting loodrecht op het vlak van de parabool. De brandpunten van alle deelsegmenten vormen de brandlijn van de cilinder, zie figuur 10.



figuur 10

Als op die brandlijn een olieleiding wordt aangebracht en de spiegel richt zich steeds naar de richting van de zonnestralen, dan vindt er een sterke verhitting in die leiding plaats. In de Nevada-woestijn (VS) wordt dit op grote schaal toegepast, zie figuur 11.



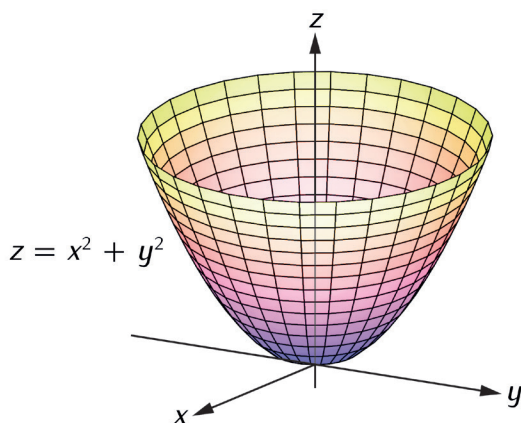
figuur 11

>

Andere toepassingen van de terugkaatseigenschap van de parabool zijn: de *schotelantenne* en de *radiotelescoop*, zie figuur 12. Die hebben de vorm van een omwentelingsparaboloïde, zie figuur 13. Ik val in herhaling, maar waarom zouden we deze vorm, inclusief zijn algebraïsche voorstelling, niet op school behandelen?

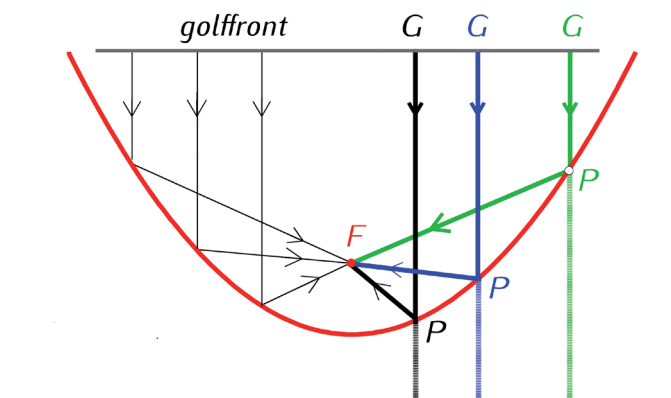


figuur 12



figuur 13

Als gevolg van de gelijke afstanden tot brandpunt en richtlijn komen de golven van een front dat zich loodrecht op de as beweegt na terugkaatsing op hetzelfde moment aan in het brandpunt. Zie figuur 14: de afstand GPF is constant!



figuur 14

Tot zover dit tweede artikel over de parabool. Er valt nog zoveel meer te zeggen over het fenomeen parabool, denk bijvoorbeeld aan de 'kogelbaan'. Daarom: wordt vervolgd.

Noten

- [1] Zie Kindt, M. (2023). De parabool op school (1). *Euclides*, 98(7), 20-25.
- [2] Een algebraïsche parametervoorstelling van een cirkel kan worden opgesteld door een lijn met richtingscoëfficiënt t te laten draaien om de 'zuidpool' van de cirkel en het tweede snijpunt uit te drukken in t .
- [3] Bij een kegel met een andere tophoek zijn de lijnstukken UF en UC niet gelijk, maar is de lengte van UF een constante maal de lengte van UC .
- [4] Zie Doorman, M. (1995). Conflictlijnen, moiré en kegelsneden. *Nieuwe Wiskrant*, 14.

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: M.Kindt@uu.nl

Formatief handelen in de wiskundeles

Deel 5: Formatief toetsen bij probleemoplossend vermogen

Formatief handelen..., heeft er weer een onderwijsgoeroe iets uit zijn hoge hoed getoverd en kunnen we rustig afwachten tot de hype is overgewaaid of hebben we hier iets blijvends te pakken? Dit artikel is het vijfde deel van een serie waarin betoogd wordt dat formatief handelen een essentiële toevoeging is aan je les en behoort tot gewoon goed lesgeven. In dit deel de nadruk op doelen op het niveau van probleemoplossend vermogen.

Inleiding

In de eerste twee delen van deze serie heb ik verteld dat het indelen van doelen in kennis-, vaardigheids- en probleemoplosdoelen helpt om de juiste methode van formatief toetsen te kiezen bij elk leerdoel, aangezien die voor elk type doel anders is. In deel 3 hebben we gekeken naar kennisdoelen, in deel 4 zijn de vaardigheidsdoelen aan bod gekomen en in deel 5 worden doelen voor probleemoplossen besproken.

Vragen die in dit deel centraal staan, zijn *'Hoe hangen kennis, vaardigheden en probleemoplossend vermogen met elkaar samen'*, *'Hoe meet je probleemoplossend vermogen?'* en *'Welke werkvormen zijn geschikt om leerlingen beter te maken in het oplossen van problemen?'* Maar eerst moeten we antwoord geven op de vraag wat we precies verstaan onder een probleem en probleemoplossen.

“Een vraagstuk dat voor een leerling eerst een probleem was, kan later een routinevraagstuk zijn.”

Samenhang kennis, vaardigheden en probleemoplossend vermogen

Op de site van SLO lezen we: 'Een probleem is een vraagstuk dat een leerling niet op routine op kan lossen (of zou moeten kunnen oplossen). Over een probleem moet altijd worden nagedacht: welke stappen moet ik zetten om een oplossing te vinden? Een vraagstuk dat voor een leerling eerst een probleem was, kan later een routine-

vraagstuk zijn, omdat hij routines geleerd heeft om het vraagstuk op te lossen. Over een routine hoeft een leerling niet meer na te denken. Die is geautomatiseerd en is vlot op te roepen uit het geheugen van de leerling.'^[1]

Dat plaatst probleemoplossen enerzijds lijnrecht tegenover het toepassen van een vaardigheid, maar anderzijds heb je vaardigheden nodig om het probleem op te lossen. Uit alle beschikbare kennis en vaardigheden moet een leerling een selectie maken en met die stukjes kennis en vaardigheden zelf een stappenplan ontwerpen. Je zou dus kunnen zeggen dat het behalen van kennis- en vaardigheidsdoelen vóór het probleemoplossen komt.

Aan de andere kant lezen we ook dat iets dat eerst probleemoplossen is, later een routinevraagstuk kan zijn; een vaardigheid dus. Het probleemoplossen komt dus soms ook voor de vaardigheid. Dat betekent dat we leerlingen in onze lessen op twee momenten kunnen leren probleemoplossen. Dit kan bij het aanbrengen van nieuwe kennis en vaardigheden, dus aan het begin van het leerproces. Maar het kan ook aan het eind van het leerproces op het moment dat de leerling de kennis en vaardigheden al bezit en hiermee een nieuw stappenplan moet ontwerpen. Als het stappenplan dat hieruit voortkomt, een stappenplan is dat vaker gebruikt gaat worden, is daarmee het eind van het leerproces ook weer het begin van een nieuw leerproces geworden.

Wat maakt een goede probleemoplosser?

Onderzoek van Perkins en Salomon^[2] laat zien dat generieke vaardigheden zich niet eenvoudig laten vertalen naar specifieke contexten. Het artikel begint met een verhaal over een land X dat in oorlog is met een naburig land Y. Land X heeft helaas een kleiner leger, dus het zal niet lukken om te winnen met pure kracht, ze zullen dus de tegenstander te slim af moeten zijn. Gelukkig woont in >

land X de wereldkampioen schaken. Wat nu als ze hem wat militaire en politieke kennis bijbrengen om daarna zijn grote probleemoplossend vermogen te gebruiken om de tegenstander te slim af te zijn,...

Als je bovenstaande leest, klinkt het meteen al niet logisch dat dit zo zou werken. Dit kun je vertalen naar wiskundeonderwijs. Om een goede probleemoplosser te zijn, heb je veel kennis van het specifieke domein nodig waar je het op wilt toepassen. Een goede probleemoplosser bij meetkunde hoeft nog geen goede probleemoplosser bij combinatoriek te zijn. Het vereist kennis en vaardigheden binnen het specifieke domein en daarna heel veel training.

Antwoord op de vraag of een leerling (of wie dan ook) een goede probleemoplosser kan zijn, is dus zowel ja als nee. Een leerling kan een goede probleemoplosser zijn binnen een domein, maar als een leerling een goede probleemoplosser is binnen dat domein, betekent dat nog niet dat hij een goede probleemoplosser is in elke context. Dat moet steeds opnieuw getraind worden.

Heuristieken

Om problemen op te lossen kun je zogenaamde heuristieken inzetten. Heuristieken zijn strategieën om problemen op te lossen. Het is mogelijk vele tientallen strategieën te onderscheiden. Om dit concreet te maken, neem ik als voorbeeld het domein combinatoriek. Bij combinatoriek leer ik mijn leerlingen altijd twee belangrijke heuristieken als ze een probleem voorgeschoteld krijgen. De eerste is *maak (een deel van) een boomdiagram* om daarna de berekening op te kunnen schrijven. De tweede is *noteer systematisch een deel van de mogelijkheden en zoek naar een structuur* waaruit wederom de berekening volgt. Deze twee heuristieken leiden meestal tot het juiste antwoord. Hieronder een tweetal voorbeelden. De figuren komen uit *Getal & Ruimte* 12^e editie, vwo A/C deel 1 hoofdstuk 4.

12

In deze opgave gaat het om getallen van vier cijfers, waarin alleen maar de cijfers 3, 4, 5, 6, 7 en 8 voorkomen.

Hoeveel van die getallen zijn er in het geval

- a elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden
- b elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden en het getal kleiner dan 6000 moet zijn
- c elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden en het getal groter moet zijn dan 6500?

figuur 1 Maak een deel van een boomdiagram

Bij opgave 12 a en b zou je kunnen spreken van een routineopgave. Bij opgave c is dat niet het geval, want het is zeker de eerste keer dat een leerling zo'n opgave tegenkomt. Mijn leerlingen komen meestal met de berekening $3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6$ aanzetten. Een boomdiagram geeft al snel het inzicht dat achter de 6 een andere vertakking ontstaat dan achter de 7 en de 8. Het is daarna voor de meeste leerlingen niet meer nodig om al die vertakkingen ook daadwerkelijk te tekenen.

65

Tijdens een ckv-les kleuren de leerlingen de vlakverdeling hieronder. Van de tien rechthoeken moeten er vier gekleurd worden met rood, geel, blauw en zwart. Elke kleur moet één keer gebruikt worden. De andere rechthoeken blijven wit. Zo ontstaat een Mondriaan-compositie. Hoeveel composities zijn mogelijk?



figuur 2 Noteer systematisch een deel van de mogelijkheden en zoek naar een structuur.

Ook opgave 65 is voor de meeste leerlingen geen routineopgave. Uiteraard is het mogelijk om de simpele berekening $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ te gebruiken, maar mijn leerlingen bedenken dat zelden. Bij deze opgave is het ook mogelijk een boomdiagram te maken, maar het is voor leerlingen, die de eerder genoemde berekening niet zien, nagenoeg onmogelijk om een boomdiagram te tekenen. Beginnen met systematisch noteren kunnen ze allemaal. Er kunnen nu allerlei keuzes gemaakt worden, maar na enig uitproberen komen leerlingen vaak tot het inzicht dat je de kleuren onderling kunt verwisselen (4!) en dat je keuze voor welke vakjes gekleurd moeten worden $\left(\binom{10}{4}\right)$ anders kunt kiezen. Dit leidt dan tot de berekening $4! \cdot \binom{10}{4}$.

Dit maakt ook heel erg duidelijk dat leerlingen binnen elk domein opnieuw moeten leren problemen op te lossen. Als een leerling goed is in probleemoplossen bij combinatoriek en een meetkundig probleem wil oplossen, zullen de genoemde heuristieken weinig opleveren. Dan werken heuristieken als *teken een plaatje* weer veel beter. Het is dus belangrijk om deze heuristieken expliciet te maken

voor leerlingen en hen ook duidelijk te maken wanneer ze vaardigheden aan het oefenen zijn en wanneer ze met probleemoplossen bezig zijn.

Meten van probleemoplossend vermogen

Het feit dat kennis, vaardigheden en probleemoplossend vermogen zo met elkaar verbonden zijn, maakt het moeilijk om het probleemoplossend vermogen te meten. Kennis kun je meten door (diagnostische) vragen te stellen over kenniselementen, vaardigheden kun je meten door leerlingen te vragen een vaardigheid te laten zien, maar bij probleemoplossend vermogen gaat het om het maken van een slimme keuze uit beschikbare kennis en vaardigheden.

Als een vraag in de categorie probleemoplossen valt en het lukt een leerling niet om de vraag goed te beantwoorden, dan kan dat zijn omdat de kennis niet op orde is, dat er bepaalde vaardigheden ontbreken of doordat het niet lukt om het plan te ontwerpen dat tot de oplossing moet leiden.

Bij ons op school maken we tegenwoordig toetsen waarin eerst kennisvragen (12,5 %), dan vaardigheidsvragen (37,5 %) en tot slot probleemoplosvragen (50 %) gesteld worden. We kunnen bij elke leerling zien hoe deze scoort op elk van de onderdelen. Als kennis en vaardigheden goed gaan en probleemoplossen niet, weet je dat daar het probleem zit. Lukken ook kennis en vaardigheden niet, dan moet dat eerst opgelost worden voordat het probleemoplossend vermogen echt goed gemeten kan worden. Dat geeft ook duidelijke handvatten voor leerlingen ten aanzien van waar zij moeten beginnen met leren; eerst zorgen dat je de kennis en vaardigheden op orde hebt en dan kun je daarna kijken of je er problemen mee op kunt lossen.

Hetgeen ik hierboven beschrijf komt voort uit uitproberen in de praktijk. Ook de literatuur biedt handvatten. Zo schrijven Evans en Swan^[3] dat probleemoplossen bij voorkeur geleerd wordt in groepjes samenwerkende leerlingen onder supervisie van een docent. Zo zien leerlingen veel verschillende strategieën. Ook Liljedahl beschrijft in zijn boek *Building Thinking Classrooms*^[4] een werkwijze waarin leerlingen in groepen van drie aan problemen werken. Ze doen dit op whiteboards die aan de muur hangen. Liljedahl heeft het met name over probleemoplossen tijdens het verkennen van nieuwe concepten en het ontwikkelen van nieuwe vaardigheden. Liljedahl doet ook de suggestie om opgaven in te delen op drie niveaus. Dit kan voor leerlingen zichtbaar maken waar zij ongeveer staan. Als de relatief eenvoudige opgaven allemaal lukken

en de opgaven van een gemiddeld niveau niet, dan hoeven ze nog niet aan de moeilijke opgaven te beginnen. Maar dan nog is het belangrijk dat leerlingen inzicht krijgen in waarom het niet lukt. Zit het hiaat bij kennis, vaardigheden of probleemoplossend vermogen?

Zelf breng ik deze manier van werken inmiddels bijna een schooljaar lang in de praktijk in mijn klassen en ik zie dat het onderzoek dat in Canada is uitgevoerd in tal van klaslokalen zich goed laat vertalen naar de Nederlandse context.

Samenvattend

Om schriftelijk vast te stellen of leerlingen goede probleemoplossers zijn binnen een domein, is het nodig om eerst te checken of zij de kennis en vaardigheden op peil hebben. Om in een les vast te stellen waar leerlingen staan, is het verstandig ze op whiteboards te laten werken om zodoende te kunnen zien waarom het bij een bepaalde opgave niet lukt. Het indelen van opgaven op verschillende niveaus kan ook helpend zijn.

Om leerlingen beter te laten worden in probleemoplossen kun je ze het best laten werken in groepjes van drie leerlingen, waarbij de docent kan ondersteunen.

Noten

- [1] Zie: <https://www.slo.nl/thema/vakspecifieke-thema/rekenen-wiskunde/toekomstbestendig-probleemoplossen/>
- [2] Perkins, D. & Salomon, G. (1989). Are cognitive skills context bound? *Educational Researcher*, 18(1), 16–25.
- [3] Evans, S., Swan, M. (2014). Developing Students' Strategies for Problem Solving. *Educational Designer*, 2(7).
- [4] Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms*. Sage Publications Inc.

Over de auteur

Maarten Müller is werkzaam als eerstegraads docent wiskunde aan het Marianum in Groenlo en verzorgt scholingen aan docenten of secties.

E-mailadres: m.muller@marianum.nl

Wiskundeonderwijs vanuit Iraans perspectief

Interview met Mahboubeh Ghasemzadeh

De Perzisch/Iraanse wiskundige traditie is meer dan duizend jaar oud, en nog steeds springlevend. Nieuwkomer in Nederland Mahboubeh Ghasemzadeh studeerde wiskunde aan de prestigieuze universiteit van Shiraz, en doceerde aan middelbare scholen en universiteiten in Iran. Zij geeft sinds dit jaar les op het Gemeentelijk Gymnasium Hilversum.



Mahboubeh Ghasemzadeh

Wil je iets vertellen over je achtergrond?

Ik ben geboren in Iran (Perzië) en ben op mijn 18^e wiskunde gaan studeren aan de Ahvaz universiteit en Shiraz universiteit, en deed mijn master aan de Mashhad universiteit van mijn land. Daarnaast hield ik van bergbeklimmen en basketbal. Mijn afstudeerscriptie heb ik geschreven over meting van eindige groepen. Toen die klaar was vroeg mijn hoogleraar of ik wilde gaan promoveren in Hongarije, maar ik wilde niet naar het buitenland, want ik was inmiddels zwanger van onze oudste dochter. Toen ben ik gaan lesgeven, met veel plezier.

Wat heeft jouw keuze voor de wiskunde bepaald?

Ik vond wiskunde altijd al leuk, vooral het nadenken over ingewikkelde problemen. Wiskunde geldt in Iran als een heel moeilijk vak, en die uitdaging trok me aan. Er gingen van mijn universiteit ook regelmatig studenten

naar de beste instituten in de Verenigde Staten, zoals Fields-winnares Maryam Mirzachani, die later hoogleraar aan Harvard werd.

“Ik vind dat de mensen hier heel serieus leven, en te weinig genieten.”

Een vraag die je al vaak gehoord zult hebben: hoe ben je in Nederland terechtgekomen?

Door politieke problemen moest mijn man vluchten: dat was een zware tijd, met veel ondervragingen door politie en bedreigingen. Uiteindelijk na tweeëneenhalf jaar ben ik hem met de kinderen achterna gereisd naar Nederland. Daardoor moest ik mijn familie achterlaten. Dat was in de zomer van 2018, dus nu al vijf jaar geleden. Het was lastig dat ik opeens mijn baan en alles kwijt was, want ik was gewend om altijd te werken. Ik heb mij gemeld bij de gemeente om een baan te vinden. Een medewerker van de Gemeente Utrecht zei: ‘We hebben tekort aan schoonmakers, dus ga dat maar doen.’ Mijn wiskundeachtergrond werd totaal genegeerd, zonder enig argument. Ik had alle benodigde documenten en bewijzen al aangeleverd, dus daar lag het niet aan. Een jaar later kwam er een andere contactpersoon van de gemeente Utrecht, die mij in contact bracht met het UAF (Stichting voor vluchteling studenten (red)): toen mocht ik opeens wél een taalcursus doen, en stage lopen. Ik heb toen mijn B2-examen Nederlands gehaald, terwijl ik twee dagen per week stage liep.

Was het Nederlandse schoolsysteem niet heel anders?

Er zijn natuurlijk wel verschillen. In Iran heb je van 7:30 – 14:30 lessen van telkens 1 ½ uur, waarbij de docent vooral doceert en aan het woord is. Tussen die lessen zijn korte pauzes, waarin je zwarte thee drinkt, gezellig kletst met collega's enzo. Per schooljaar zijn er drie grote toetsen, en het eindexamen is net als hier landelijk geregeld. Inhoudelijk is het wiskundeonderwijs eigenlijk alleen wiskunde B met veel meetkunde – de onderverdeling in A, B, C, D kennen we in Iran niet. Ook is er geen speciale begeleiding voor dyslecten, leerlingen met een moeilijke thuissituatie of andere problemen. Maar de indeling in drie niveaus komt aardig overeen met het Nederlandse systeem van mavo/vmbo, havo en vwo. En één keer per jaar is er een grote conferentie van een paar dagen, over allerlei wiskundige onderwerpen, en natuurlijk een tijdschrift zoals *Euclides*.



In gesprek met prinses Beatrix



In gesprek met minister Dijkgraaf

Wat vind je van de Nederlandse leerlingen? Wij horen vaak dat die zo onbeleefd zijn: vind je dat ook?

Nou ik vind dat ze niet onbeleefd zijn en tegen mij doen ze heel aardig ... In mijn land hebben sommige kinderen

“Goed contact met alle leerlingen is voor mij heel belangrijk.”

ook heus wel gedragsproblemen. Er wordt vanuit de regering veel negatieve informatie over het buitenland verspreid: die klopt lang niet altijd.

Bij het warme weer van de laatste tijd, dat ik erg lekker vind, zou ik eigenlijk naar buiten willen gaan om met de leerlingen een ijsje te kopen – beetje flexibel met de regels omgaan: in Iran kan dat gewoon, maar hier is dat niet zo makkelijk. Ik vind dat je soms de regels niet zo strikt moet interpreteren, want goed contact met alle leerlingen is voor mij heel belangrijk. Dat contact is er ook met hoge pieten. Wat me heel erg verbaasde, is dat belangrijke mensen hier zonder beveiliging rondlopen, en echt geïnteresseerd zijn in gewone mensen. Afgelopen week ontmoette ik zo prinses Beatrix en minister Dijkgraaf op een symposium van het UAF; heel bijzonder!

Hoe gaat het met communiceren met de leerlingen?

Heb je daar wel eens problemen mee?

O nee hoor! Ik vraag aan het begin van het schooljaar of ze mijn Nederlands willen verbeteren, en dat vinden de meesten erg leuk. Ook leggen ze me soms uit wat iets betekent, dus dat gaat goed. Ik heb helemaal niets met taal, ben een echt wiskundemens, maar zo redden we ons prima. Het klopt wel dat Nederlands voor buitenlanders echt lastig is in het begin. Thuis praten we gewoon lekker Farsi – onze dochters groeien tweetalig op.

Heb je nog een goede tip voor je collega's?

(Denkt even na.) Ik heb in mijn jeugd acht jaar lang een oorlog meegemaakt, en vind dat de mensen hier heel serieus leven, en te weinig genieten. Maar het leven is te kort om alleen maar te werken, al moet je natuurlijk wel je verantwoordelijkheid nemen. Dus ik zou zeggen: 'leef hartstochtelijk!'

Over de auteurs

Mahboubeh Ghasemzadeh is docent wiskunde aan Gemeentelijk Gymnasium Hilversum. Ze heeft in Iran wiskunde gestudeerd en gewerkt als docent wiskunde. Constantijn Tilanus is wiskundeleraar op het Descart, onderdeel van het Gregorius college. Daarnaast is hij redacteur van *Euclides*.

E-mailadres: c.tilanus@gregorius.com

Plein met bijzondere geometrische 'bol' heropend in Knokke



Wie Knokke zegt, denkt aan dure handtassen, golfkarretjes en verboden frigoboxen, maar niet noodzakelijk aan wiskunde. Deze zomer heropende echter het nieuw aangelegde Albertplein, alias *Place Matuvu*, met centraal een bijzondere geometrische vorm. Architect Ridder Philippe Samyn won de openbare aanbesteding voor de heraanleg van het Albertplein. Hij had een paviljoen voorgesteld in de vorm van een halve 'bol' gevormd door kristalglazen driehoeken die afwisselend gespiegeld en ontspiegeld zijn. Het ligt in een wateroppervlak, waardoor het spiegelbeeld in het water de halve 'bol' vervolledigt tot een volledige 'bol'. Het water kan trouwens afgevoerd worden zodat er een evenementenplein tevoorschijn komt. In de tegels van het plein zijn muntstukken uit de hele wereld verwerkt, niet alleen om later eventueel vastgekleefde kauwgoms te verhullen, maar ook als een knipoog naar de kosmopolitische bezoeker van Knokke, voor wie geld niet onbelangrijk is. Interessanter vanuit wiskundig standpunt is echter de precieze structuur van de 'bol', die te vinden is in onderstaande bron.

Bron: www.eoswetenschap.eu

Koninklijke onderscheiding Wil Schilders

Op 23 juni 2023 ontving Wil Schilders, directeur Platform Wiskunde Nederland, de Koninklijke Onderscheiding *Officier in de Orde van Oranje-Nassau*, ter gelegenheid van zijn formele pensionering als bijzonder hoogleraar *Scientific Computing for Industry* aan de Technische Universiteit Eindhoven. De onderscheiding is toegekend vanwege Wils buitengewone verdiensten voor de Nederlandse en internationale wiskundegemeenschap. Voor wiskundelaren is Wil bekend als voorzitter van



de programmacommissie van de jaarlijkse vakantie cursus. Daarnaast bedient hij het grote publiek met tentoonstellingen over de schoonheid en praktische relevantie van wiskunde en met informatie over het oplossen van Sudoku-puzzels. Hij heeft drie veel vertaalde boekjes over dit onderwerp geschreven.

Bron: www.platformwiskunde.nl

Arthur Bakker hoogleraar Didactiek en Curriculum in het Bètadomein



foto: Kirsten van Santen

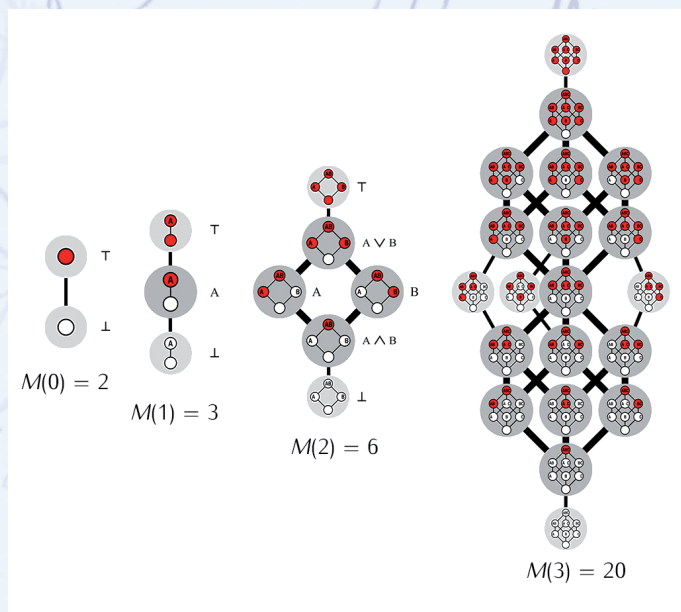
Arthur Bakker is benoemd tot hoogleraar Didactiek en Curriculum in het Bètadomein aan de Universiteit

van Amsterdam. Bakker gaat leiding geven aan het nieuwe Research Center for Curriculum Studies (RCCS). In dit centrum werkt de afdeling Pedagogische en Onderwijswetenschappen samen met het landelijk expertisecentrum voor het curriculum SLO, dat de leerstoel sponsort.

De leerstoel gaat 1 januari a.s. van start. Tot die tijd is Bakker universitair hoofddocent aan het Freudenthal Instituut. Zijn belangrijkste expertisegedebiet daar is wiskundeonderwijs, maar hij heeft er ook bijgedragen aan theorievorming over *boundary crossing* en de ontwikkeling van ontwerponderzoek als aanpak om onderwijs te verbeteren. Hij wil met relevant onderwijsonderzoek bijdragen aan inclusief en samenhangend bètaonderwijs dat betekenisvol is voor leerlingen. Hij geeft colleges over onderzoeksmethoden en begeleidt diverse onderzoeksprojecten van masterstudenten en promovendi, onder andere op het gebied van meertaligheid binnen het bètaonderwijs.

Bron: www.uva.nl

Het negende Dedekindgetal: een getal van 42 cijfers



Bron: Wikipedia

Het n -de Dedekindgetal $M(n)$ is gelijk aan het aantal monotone booleanse functies met n variabelen. Voor twee of drie variabelen is het Dedekindgetal nog redelijk eenvoudig met de hand te berekenen, zie de figuur hierboven.

Voor grotere n wordt het al snel onmogelijk: het aantal mogelijkheden groeit met een dubbele exponentiële snelheid.

In 1991 vond Doug Wiedemann het achtste Dedekindgetal door 200 uur lang getallen te kraken op een van de krachtigste machines destijds.

Dit voorjaar vonden twee groepen onafhankelijk van elkaar het negende Dedekindgetal: 286.386.577.668.298.411.128.469.151.667.598.498.812.366, een getal van 42 cijfers.

Bron: www.newscientist.nl

Belgische wiskundige bereikt baanbrekend resultaat in Ramsey-theorie



Sam Matheus (foto: Carnegie Mellow-universiteit)

Stel je wilt een groep mensen vinden waarin gegarandeerd een drietal onderling bevriend is óf allemaal geen vrienden van elkaar zijn. Dat lukt gegarandeerd als je zes willekeurige personen uitkiest. Kies je er slechts vijf, dan vervalt die garantie. Het Ramseygetal $r(3, 3)$ is daarom 6. Zoek je naar een deelgroepje van vier vrienden of een deelgroepje van een variërend aantal niet-vrienden, dan noemen we het aantal mensen in de groep $r(4, t)$. De 29-jarige Sam Matheus van de VU Brussel combineerde zijn kennis over de eindige meetkunde met de klassieke grafentheorie en loste daarmee, in samenwerking met prof. Jacques Verstraete van de University of California San Diego, niet alleen een decennia-oud probleem op, maar vond ook een oplossing voor het Ramseyprobleem $r(4, t)$.

Bron: www.newscientist.nl

Spelen met oneindigheid

Rijen nullen en enen kunnen weergegeven worden als *stapfiguren*. Dit artikel laat zien hoe dat werkt, en wat voor verrassende figuren daar uit kunnen komen, vooral hoe oneindige rijen stapfiguren op kunnen leveren die symmetrisch en eindig zijn.

Rijen en stapfiguren

Alles wat op een computer wordt opgeslagen wordt eerst vertaald naar een rij nullen en enen, of het nu muziek is, een foto, een tekstbestand of een hele film. In dit artikel gaan we een manier bekijken om zo'n rij nullen en enen op een bepaalde manier zichtbaar te maken: met *stapfiguren*. Dit doen we niet alleen voor eindige rijen, maar ook voor oneindige rijen. Het idee is dat je twee hoeken kiest, $h(0)$ en $h(1)$, en dat je dan de nullen en enen van de rij een voor een doorloopt. Een robot begint op een positie in het platte vlak in een bepaalde richting. Als je een 0 leest draait de richting $h(0)$ graden naar links, en als je een 1 leest draait de richting $h(1)$ graden naar links. In beide gevallen doet de robot daarna een stap van lengte 1, in de zojuist aangepaste richting. In het Engels wordt de robot traditioneel *turtle* genoemd, en het hele mechanisme van draaien en stappen zetten *turtle graphics*. Sommige programmeertalen hebben hier speciale commando's voor. Wij verstaan onder *stapfiguur* de route die de robot aflegt bij het verwerken van een eindige of oneindige rij, deze is dus altijd opgebouwd uit lijnstukken van lengte 1. Een eindige rij symbolen wordt ook wel *woord* genoemd.

Een voorbeeld

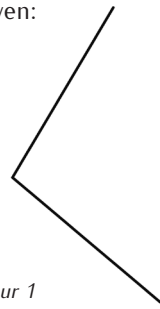
Laten we als eerste voorbeeld kiezen

$h(0) = 140$ en $h(1) = -80$, en de volgende oneindige rij nemen:

0101010101

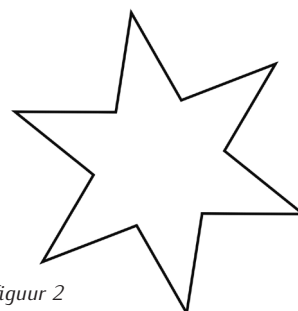
Ingewikkeld is deze rij zeker niet: hij begint met 01, en vervolgens wordt datzelfde woord 01 oneindig vaak herhaald. We nemen aan dat de startrichting horizontaal naar rechts is. Dan wordt die richting bij de eerste 0 van de rij dus 140° naar links gedraaid, waarmee de richting schuin links naar boven gaat, en wordt de eerst stap

gezet. Daarna wordt het tweede element van de rij gezien, een 1, en daarmee draait de robot -80° naar links, oftewel 80° naar rechts, en doet weer een stap. Hiermee is de volgende weg afgelegd, zie figuur 1, beginnend onderin, dan schuin links naar boven, en dan schuin rechts naar



figuur 1

Na deze twee stappen is de draairichting eerst 140° naar links en dan 80° naar rechts gedraaid, in totaal dus 60° naar links. Bij elke volgende twee stappen gebeurt weer precies hetzelfde: twee stappen worden volgens hetzelfde patroon gezet, en samen draait de draairichting daarmee 60° naar links. Dat betekent dat na zesmaal dit patroon, dus na twaalf stappen, de draairichting in totaal 360° is gedraaid, en je weer terechtkomt in het startpunt, en de draairichting precies hetzelfde is als in het begin. De afgelegde weg is dan de sterfiguur in figuur 2, waarin het startpunt het meest rechtse punt is:



figuur 2

Als we na deze twaalf stappen verder gaan, zien we dat er niets nieuws meer bij komt, want vanaf dat punt worden alleen maar dezelfde stappen gezet die al eerder zijn gezet. Deze sterfiguur noemen we de *stapfiguur* van de oneindig lange rij waarmee we begonnen, oftewel de route die de robot aflegt. In dit geval is deze eindig, want na de eerste twaalf stappen worden de eerste twaalf lijnstukken steeds opnieuw overgetekend en komt er niets nieuws meer bij.

Periodieke rijen

Dit idee gaat veel algemener op: een rij die bestaat door een eindig woord u van nullen en enen oneindig vaak te herhalen noemen we *periodiek*. Aan u kunnen we ook een hoek $h(u)$ toekennen, namelijk de som van $h(0)$ en $h(1)$ van de nullen en enen die in u voorkomen. Als $h(u)$ dan als hoek niet 0 is, maar wel rationaal, dan kun je net als hierboven beredeneren dat die oneindige periodieke rij een eindige stapfiguur geeft.

Morfische rijen

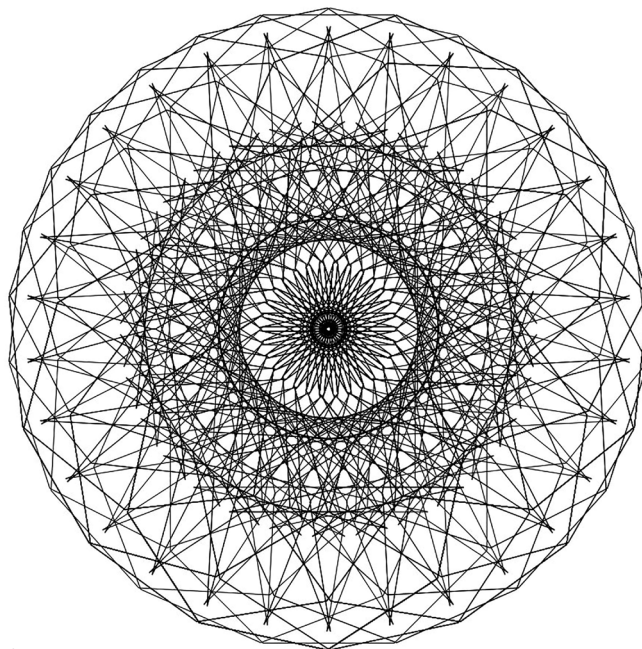
Veel spannender wordt het als we oneindige rijen bekijken die niet periodiek zijn: rijen die beschreven worden door een *morfisme*, en daarom ook wel *morfische* rijen worden genoemd. Zo'n morfisme is niets anders dan een afbeelding f die 0 en 1 elk op een woord afbeeldt. Laten we een voorbeeld geven met $f(0) = 010$ en $f(1) = 11$. Behalve op de losse symbolen 0 en 1 kun je zo'n morfisme ook op rijen symbolen loslaten.

Zo krijg je

$$\begin{aligned} f(0) &= 010 \\ f^2(0) &= f(f(0)) = 01011010 \\ f^3(0) &= f(f(f(0))) = 010110101111011010 \\ &\dots \end{aligned}$$

We zien hier iets bijzonders: voor elke n is $f^n(0)$ een beginstuk van $f^{n+1}(0)$. Op deze manier kunnen we een oneindige rij maken door oneindig vaak f op 0 los te laten, en dat is de morfische rij die bij f hoort, en die we noteren met $f^\infty(0)$.

Van deze rij gaan we nu een stapfiguur maken. Als we zomaar willekeurig wat hoeken kiezen zal heel vaak de stapfiguur van de oneindige rij $f^\infty(0)$ ook oneindig groot worden, maar bij $h(0) = 168$ en $h(1) = -45$ krijgen we de stapfiguur van figuur 3:



figuur 3

Deze stapfiguur is zeer symmetrisch, en ook eindig: na een eindig beginstuk van de rij bewandelt de robot alleen stukken waarover hij al eerder gelopen is, en er komen geen nieuwe stukken bij. Dus net zoals bij periodieke rijen, maar deze rij is helemaal niet periodiek. We gaan nu beredeneren waarom deze stapfiguur eindig is, misschien is het aardig om daar eerst zelf over na te denken voordat je verder leest.

Eindigheid van de stapfiguur

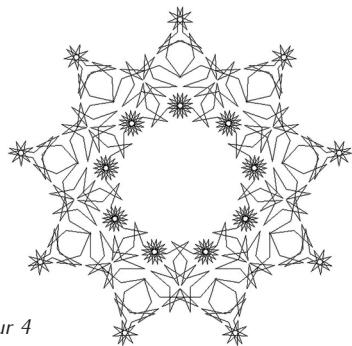
De rij $f^\infty(0)$ heeft de eigenschap dat als je f erop loslaat, dat het resultaat weer $f^\infty(0)$ is. Maar dan is dat ook het geval als je f er driemaal na elkaar op loslaat. En daarmee gaat elke 0 over in $f^3(0) = 010110101111011010$, en elke 1 over in $f^3(1) = 11111111$. De hele rij $f^\infty(0)$ is dus opgebouwd uit oneindig veel kopieën van deze twee woorden, in een of andere volgorde. Het zal blijken dat deze volgorde er helemaal niet toe doet, we zullen zien dat elke rij die zo is opgebouwd een eindige stapfiguur heeft. Hoe zien de stapfiguren van deze twee woorden eruit? Omdat $h(1) = -45$ en $f^3(1)$ uit acht enen bestaat, is de stapfiguur van $f^3(1)$ een regelmatige achthoek, en is de positie en richting van de robot na het verwerken van $f^3(1)$ precies dezelfde als daarvoor. En nu komt de cruciale observatie: omdat $f^\infty(0)$ is opgebouwd uit oneindig veel kopieën van de twee woorden $f^3(0)$ en $f^3(1)$, is de stapfiguur van $f^\infty(0)$ gelijk aan de stapfiguur van de periodieke rij die oneindig vaak $f^3(0)$ herhaalt, met daar op allerlei plaatsen de regelmatige achthoek van $f^3(1)$ aan toegevoegd. De hoek horende bij het woord $f^3(0)$ blijkt ongelijk aan 0 te zijn, en daarom heeft die periodieke

>

rij een eindige stapfiguur. En als we daaraan op allerlei posities een regelmatige achthoek toevoegen, blijft die stapfiguur eindig. Deze redenering is nog schetsmatig, maar kan heel precies gemaakt worden. Het is zeker de moeite waard om dat te doen, en uit te zoeken voor welke morfische rijen en welke hoeken je met een soortgelijke redenering een eindige stapfiguur krijgt. Want dan kun je allerlei voorbeelden maken die eindige stapfiguren geven, en met een eenvoudig programmaatje die stapfiguren laten tekenen. Dat die figuren eindig zijn en een bepaalde symmetrie hebben is nog wel te beredeneren, maar hoe ze er dan daadwerkelijk uit zien is elke keer weer een verrassing. De verrassende figuren die daar uiteindelijk uitkomen waren we zonder de zorgvuldige analyse van de wiskundige redenering nooit op het spoor gekomen. In mijn boek *Spelen met oneindigheid: verrassende figuren en patronen* wordt dit allemaal uitgewerkt, waarbij niet meer voorkennis verwacht wordt dan vwo wiskunde B.

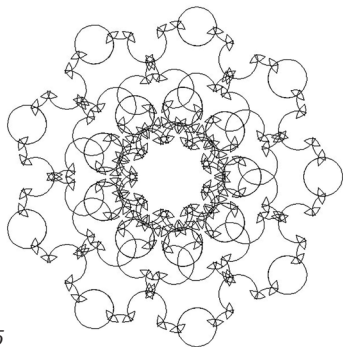
Meer voorbeelden

We geven nog enkele voorbeelden. Dezelfde morfische rij $f^\infty(0)$ geeft met hoeken $h(0) = 50$ en $h(1) = -157\frac{1}{2}$ de stapfiguur van figuur 4:



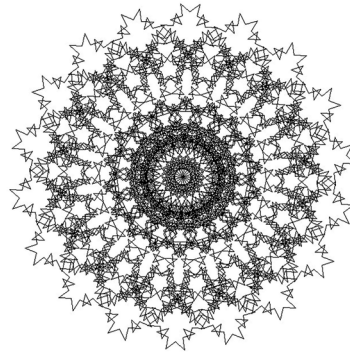
figuur 4

Hier heb je f^4 nodig in plaats van f^3 : $f^4(1)$ bestaat uit 16 enen, en geeft een 16-punts ster als stapfiguur, die we negen keer in de stapfiguur van $f^\infty(0)$ zien verschijnen. Bij de hoeken $h(0) = 125$ en $h(1) = 16\frac{7}{8}$ geeft dezelfde rij $f^\infty(0)$ de stapfiguur van figuur 5:



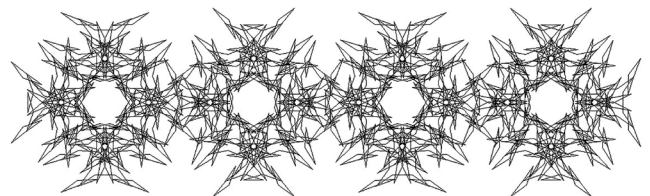
figuur 5

Andere morfische rijen geven vaak ook eindige stapfiguren. Zo geeft de morfische rij gedefinieerd door $f(0) = 01$ en $f(1) = 00$, en hoeken $h(0) = 140$ en $h(1) = -80$ de stapfiguur van figuur 6:



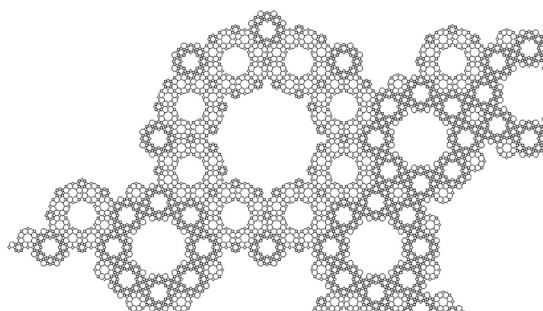
figuur 6

Soms krijg je ook andere soorten symmetrie, zo levert de morfische rij gedefinieerd door $f(0) = 01$ en $f(1) = 10$, die wel de *Thue-Morse rij* wordt genoemd, en hoeken $h(0) = 33\frac{3}{4}$ en $h(1) = 164\frac{17}{32}$ de stapfiguur van figuur 7:



figuur 7

Waarom dit allemaal het geval is, samen met nog veel meer voorbeelden, is in het genoemde boek te vinden. Behalve deze voorbeelden van eindige stapfiguren zijn er ook interessante stapfiguren die oneindig groot zijn, en *fractaal* gedrag vertonen. Het voert te ver om er hier in detail op in te gaan, we beperken ons tot een voorbeeld. De morfische rij gedefinieerd door $f(0) = 011111$ en $f(1) = 00$ geeft met hoeken $h(0) = 45$ en $h(1) = -90$ de stapfiguur van figuur 8, die oneindig lang doorloopt naar rechts, en ook naar beneden en boven:



figuur 8

Karakter van onderzoek

De mooie plaatjes waren niet de enige reden om dit boek te schrijven. Als wiskundige en theoretisch informaticus heb ik veel onderzoek gedaan, waarbij het grootste deel van de resultaten niet geschikt is om aan een breder publiek uit te leggen. Voor de meeste mensen is het dan ook moeilijk voor te stellen hoe leuk dergelijk, voor hen onbegrijpelijk, onderzoek kan zijn. De hier beschreven oneindige rijen en stapfiguren kwamen ook in mijn onderzoek naar voren, maar zijn vanwege de mooie plaatjes wel toegankelijk voor een breder publiek. Aan de andere kant heeft de ontdekkingsreis van deze stapfiguren wel het karakter van echt onderzoek: aan de hand van observaties aan specifieke voorbeelden kom je eigenschappen op het spoor, en met een zorgvuldige wiskundige analyse blijken die om te zetten te zijn naar algemene stellingen die veel breder toepasbaar zijn dan het specifieke voorbeeld. Het spelen met dergelijke eigenschappen en experimenteren

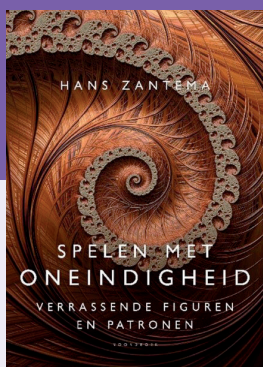
met allerlei nieuwe voorbeelden is de leidraad van wat in het boek beschreven is, en is qua werkwijze erg vergelijkbaar met theoretisch onderzoek. In mijn onderzoek ben ik door de jaren heen zo nu en dan meer observaties tegengekomen die voor een breder publiek begrijpelijk kunnen zijn. Die zijn dan ook in het boek opgenomen, eerst als opgave, terwijl de oplossing verderop in het boek gegeven wordt. Het is voor mij dan ook een grote eer dat de organisatie van de Nederlandse Wiskunde Olympiade besloten heeft alle 180 finalisten van dit jaar een exemplaar van dit boek cadeau te doen: dit is wel de meest ideale doelgroep die ik me voor kan stellen. Een groot deel van deze mensen staat in de startblokken voor een wetenschappelijke carrière waarin ik ze net zoveel plezier toewens als ikzelf heb mogen beleven.

Op de volgende website is de Python code om een stapfiguur te tekenen te vinden en een link naar een uitgebreider programma met toelichting.

<https://www.win.tue.nl/~hzantema/stap.html>

Over de auteur

Hans Zantema is gepromoveerd in de zuivere wiskunde, en was tot zijn emeritaat in 2022 werkzaam als hoofddocent aan de TU Eindhoven en hoogleraar aan de Radboud Universiteit in Nijmegen, in de theoretische informatica. Hij publiceerde meer dan 100 wetenschappelijke artikelen. E-mailadres: h.zantema@tue.nl



Titel: Spelen met oneindigheid
Ondertitel: Verrassende figuren en patronen

Auteur: Hans Zantema

Uitgever: Uitgeverij Noordboek

ISBN: 9789464710212

Prijs: € 22,90 (240 pagina's)

Verschenen

Alles wat we opslaan op de computer wordt vertaald naar eindige rijen nullen en enen. Maar wat als zo'n rij, net als de simpele getallenrij 1, 2, 3, ..., oneindig lang doorgaat? Hoe kunnen we dat dan toch op een eindige manier beschrijven? Wat voor patronen zijn daarin te vinden? En zijn er verschillende soorten oneindigheid?

Wiskundige Hans Zantema neemt ons mee op een speelse reis door de wiskundige oneindigheid. Hij laat onder meer zien hoe je oneindige rijen kunt omzetten in verrassende figuren, met soms prachtige symmetrieën of fractale patronen. Ieder hoofdstuk eindigt met een pittige wiskundige puzzel, waarover je niet oneindig lang na hoeft te denken.

Van Hiele: niveaus van wiskundig denken

Bert Zwaneveld onderzocht of de niveautheorie van Pierre van Hiele deel uitmaakt van de vakdidactiekprogramma's op de lerarenopleidingen in Nederland. In dit artikel doet hij verslag van zijn bevindingen, inclusief een kleine opfriscursus niveautheorie.

Aanleiding

Naar aanleiding van de laatste *International Conference on the History of Mathematics Education* (ICHME7) in 2022 in Mainz sprak ik met Maurice O'Reilly, een Ierse collega. Ik vertelde hem dat ik samen met Dirk De Bock al een tijdje onderzoek verricht naar aspecten van de geschiedenis van het wiskundeonderwijs in Nederland en wereldwijd. Voor ICHME8 (in 2024) bereiden wij een bijdrage voor over Pierre van Hiele en zijn theorie over de niveaus van wiskundig denken. Maurice O'Reilly ging ervan uit dat Van Hiele een prominente plaats in de Nederlandse opleidingen tot wiskundeleraar zou bekleden. Ik dacht toen: dat wil ik wel eens weten! Ik nam het initiatief alle opleidingen, dus de universitaire (eerstegraads) en de bachelor- en masteropleidingen hbo (respectievelijk tweede- en eerstegraads), aan te schrijven en vroeg in welk deel van de opleiding aandacht wordt besteed aan Pierre van Hiele en zijn niveautheorie. In deze bijdrage breng ik verslag uit van de reacties, maar eerst een woordje over het werk van Pierre van Hiele en zijn vrouw Dieke van Hiele-Geldof, in het bijzonder dus over de door hen ontwikkelde theorie van de niveaus van wiskundig denken. Omdat Pierre van Hiele die theorie heeft opgeschreven, is die theorie algemeen bekend als Van Hieles niveautheorie.



figuur 1 Pierre van Hiele

Van Hieles niveautheorie

Pierre van Hiele (1909 – 2010) en zijn vrouw Dieke van Hiele-Geldof (1912 – 1958), beiden wiskundeleraar, promoveerden in 1957 onmiddellijk na elkaar aan de Universiteit Utrecht op een wiskunde-didactisch onderwerp. Titel van Pierres proefschrift: *De problematiek van het inzicht, gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in de meetkunde-leerstof*. Titel van Diekes proefschrift: *De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het vmbo*.

Pierres proefschrift, met daarin de lesobservaties van zijn vrouw die een belangrijke rol in haar proefschrift spelen, bevat in essentie zijn niveautheorie, maar in een artikel in *Paedagogische* (nu: *Pedagogische*) *Studiën* had Van Hiele die theorie al twee jaar eerder beschreven. Maar pas nadat op een internationale conferentie een Australische collega het belang van Van Hieles ideeën had verwoord in termen van een wetenschappelijke theorie erkende Pierre dat hij iets had ontwikkeld en gevalideerd dat als een zelfstandige theorie kan worden beschouwd.

De theorie bestaat uit de volgende niveaus; hierbij zij opgemerkt dat elk niveau nader ingaat op wat in het eraan voorafgaande niveau bereikt is. Er mag dus geen niveau worden overgeslagen.

Niveautheorie

Niveau 0 (grondniveau):

De leerlingen ontwikkelen ideeën over waar het nieuwe terrein over zal gaan.

Niveau 1 (visuele niveau):

De leerlingen leren de eigenschappen van het object of de objecten van het nieuwe terrein.

Niveau 2 (beschrijvende niveau):

De structuur die op niveau 1 is ontwikkeld, is onderwerp van nadere studie, zo worden bijvoorbeeld relaties gelegd tussen objecten op basis van hun eigenschappen.

Niveau 3 (theoretische niveau):

De leerlingen abstraheren de (concrete) redeneringen van niveau 2 en focussen op de logische structuur.

Niveau 4 (theoretisch-deductieve niveau):

De nadruk ligt op speciale aspecten van het redeneren op niveau 3.

Voorbeeld

Het volgende voorbeeld kan de niveautheorie verduidelijken. Het is ontleend aan een mogelijk begin van het meetkundeonderwijs in het voortgezet onderwijs. Een ruit is een vierhoek met vier gelijke zijden. Op niveau 0 zullen leerlingen dit met hun handen aangeven, of verwijzen naar een wybertje. Op niveau 1 zullen leerlingen het hebben over de symmetrie van een ruit, bijvoorbeeld twee onderling loodrechte symmetrieassen die samenvallen met de diagonalen. En die diagonalen halveren elkaar. Op niveau 2 worden verbanden met andere vierhoeken gelegd: vierkant, parallellogram, rechthoek, en welke eigenschappen door verschillende vierhoeken worden gedeeld en welke uniek zijn voor een bepaalde groep vierhoeken. Verbanden van niveau 2 worden op niveau 3 geëxpliciteerd en vragen als 'is elke vierhoek waarvan de diagonalen onderling loodrecht zijn een ruit?' worden beantwoord en

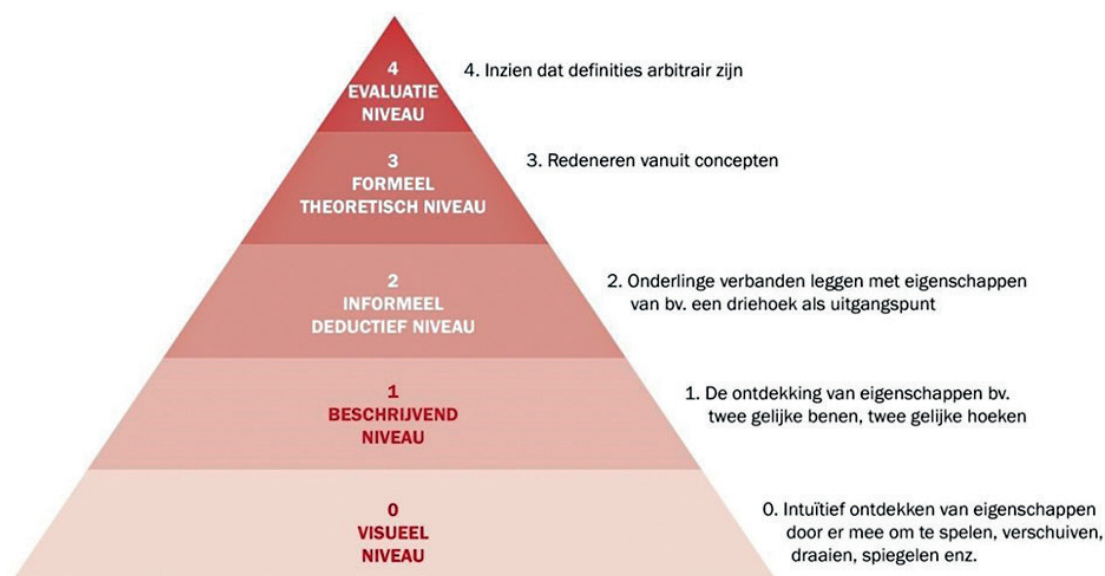
beredeneerd. Ten slotte, op niveau 4 komen zaken aan de orde als: 'uit bewering A volgt bewering B, volgt nu ook bewering B uit bewering A?'

Terzijde merk ik op dat Pierre van Hiele, als redacteur van *Euclides*, een kleine twintig artikelen heeft geschreven, in het begin vrijwel meestal samen met zijn vrouw en vrijwel altijd in meer of mindere mate gerelateerd aan zijn niveautheorie.

Van Hieles niveautheorie in lerarenopleidingen

De vraag aan de docentenopleiders was hoeveel tijd er in hun opleiding aan Van Hieles niveautheorie besteed wordt (in procenten van de totale opleidingstijd in de lerarenopleiding) en te beargumenteren waarom zij dit zo doen. Ik citeer uit enkele van de reacties. Verwijzingen naar personen of instituten zijn weggelaten.

- Mijn promotieonderzoek naar het scaffolden van kleine heterogene groepen tijdens wiskundige discussies is gebaseerd op de Van Hiele niveaus. In mijn vakdidactiekcolleges leer ik studenten groepsopdrachten te ontwerpen en de groepjes leerlingen die met deze opdrachten werken te scaffolden op groepsniveau. Ik begin mijn uitleg altijd met de Van Hiele niveautheorie en stap dan over op de niveautheorie van Freudenthal (die op de niveautheorie van Van Hiele is gebaseerd). Bovenstaande doe ik uitgebreider bij de eerstegraads (master). Bij de ... staat een deel van 5 EC in het teken van het ontwerpen, uitvoeren van de groepsopdrachten en scaffolden van de groepjes, terwijl ik op de ... en ... maar een college hieraan kan besteden.

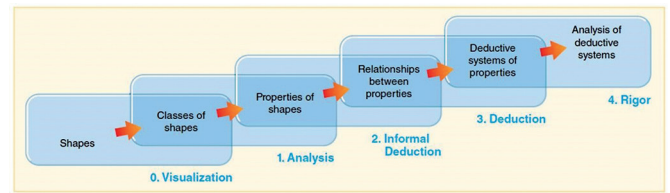


figuur 2 bron: SLW-bundel Meetkunde; deze weergave komt niet één-op-één overeen met beschrijving van de niveautheorie in de tekst

Daarnaast besteed ik op de ... (samen met ...) en de ... (samen met ...) bij de vakdidactiekcolleges tijd aan de Van Hiele niveaus bij de introductie van geometrie. Dit is de meest uitgebreide reactie.

- We gebruiken een voorbeeld van een vlieger, en we laten ontdekken dat je het herkennen van een voorwerp als een vlieger op verschillende niveaus kunt doen, van meer aanschouwelijk naar analyserend, bewijzend. We proberen studenten ervan te overtuigen dat het nuttig is tijd door te brengen op het tussenniveau waarin leerlingen experimenteren, meten, vergelijken zonder dat het meteen abstract bewijzen wordt. Persoonlijk vind ik de niveautheorie interessanter dan zogenoemde realistische wiskunde, die in de meer platvloerse varianten soms ertoe leidt dat leerlingen lang rond-dobberen in gekunstelde realiteiten. Bij de niveautheorie is er meer nadruk op de leidinggevende hand van de docent.
- In het *Handboek Wiskundendidactiek*, hoofdstuk 1, wordt kort iets gezegd over de Van Hiele niveaus. Dit hoofdstuk is verplichte kost. In de opleiding is wel aandacht voor zaken als concreet-schematisch-abstract. Niet precies de niveautheorie maar er zijn zeker raakvlakken. Altijd is de vraag hoe abstracte notaties/concepten, door input op een 'lager niveau van abstractie' verduidelijkt kunnen worden.
- In de bachelor krijgt niveautheorie een beetje aandacht. Met name omdat het in de SLW-bundel over meetkunde staat. Het is daarmee een klein onderwerpje in een 5EC-cursus.
- Een groot spanningsveld in de lerarenopleiding is hoeveel en welke theorie studenten in hun dagelijkse praktijk echt helpt. Wat dat betreft lijkt het wel op niveaus voor leraren: Je kunt best allerlei theorie bespreken, maar als die los staat van concrete praktijk-situaties, is het betekenisloze kennis. De uitdaging is om theorie aan te laten sluiten op concrete praktijken. Van Hiele is voor veel van de studenten ver van de dagelijkse praktijk.

Wat de tijdsbesteding voor de niveautheorie betreft, variëren de antwoorden van 0 tot 10%. Omdat niet iedereen een percentage aangaf, schat ik dat het gemiddelde binnen die 0 tot 10% in de buurt van 5% ligt. We besluiten dat in de Nederlandse opleidingen tot wiskundeleraar (nog steeds) aandacht wordt besteed aan Van Hiele's niveautheorie, maar deze theorie blijkt er geen prominente plaats te bekleden.



figuur 3 Uit: *Elementary and Middle School Mathematics* (van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2019); ook deze weergave komt niet precies overeen met de beschrijving in de tekst

Over de auteurs

Bert Zwaneveld is emeritus hoogleraar van de Open Universiteit. E-mailadres: zwane013@planet.nl

Dirk De Bock is als hoogleraar verbonden aan de KU Leuven. E-mailadres: dirk.debock@kuleuven.be

FIETSEMAKER

Het bandenplakken vond hij niets.
Hij had een hekel, aan die klus.
Dus om de wielen van zijn fiets,
deed hij een band van Möbius.

Dat was beslist, het moet gezegd,
een uitermate slim idee.
Want elke band, aldus gelegd,
ging zeker twee keer langer mee.

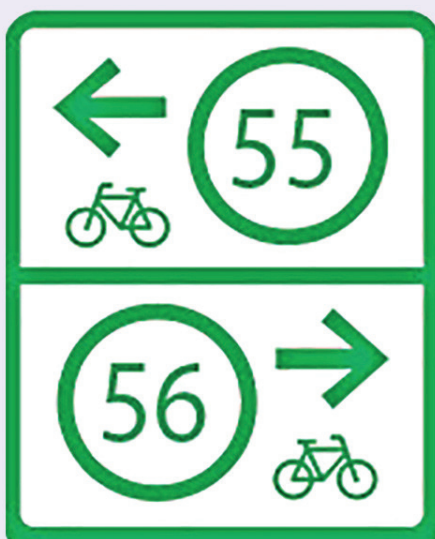
Marjolein Kool



De dichtbundel Wis- en natuurlyriek van Drs. P. en Marjolein Kool is herzien en uitgebreid.

Knooppunten of...

Als je wel eens fietst heb je ze vast wel eens gezien. Bordjes met één of meerdere getallen erop. Knooppunten die je helpen om een mooie route te fietsen. Vaak verkeersluw en langs mooie weggetjes. Ooit bedacht in België en nu in Nederland ook helemaal gewoon.



figuur 1

Na de fietsknooppunten kwamen er ook wandelknooppunten. Systeem is hetzelfde en je kunt zo makkelijk een route uitzetten en wandelen zonder te verdwalen. Ik vraag me wel af of je in zo'n klein land als Nederland wel kunt verdwalen; soms kom je niet uit waar je verwacht dat je uitkomt, maar is dat verdwalen?

Toen ik jong was, waren er nog niet van die wandelknooppunten, maar wel gemarkeerde paaltjes. Ze zijn er nog steeds en regelmatig loop ik nog de gele en de rode paaltjesroute. Gewoon een paaltje met een pijltje of met een gekleurde kop.

Op vakantie in België ontdekte ik weer een andere manier: zie figuur 2.



figuur 2

Mijn wiskundehart ging meteen open. Wat een mogelijkheden, droomde ik, als ik hier met mijn kleinkinderen zou wandelen. 'Wat is de tweede van boven?' En je hoort het antwoord al: 'Een oranje rondje.' Nee, dat noemen we een cirkel. Je kunt niet zeggen een oranje cirkel, want dan zou alleen de rand oranjegekleurd zijn. Het is een oranje cirkelschijf. 'En die driehoek? Zie je er iets bijzonders aan?' Het antwoord dat je dan verwacht is: 'Ja die is rood.' 'Verder niets?' 'Nee, ik zie niets anders.' En je kunt meteen uitleggen dat het een gelijkzijdige driehoek is, omdat alle zijdes even lang zijn. Daardoor zijn ook alle hoeken even groot en wel 60° . 'De drie hoeken zijn dus bij elkaar?' En jouw kleinkind zegt dan natuurlijk meteen: '180 graden'. En je vertelt weer dat het in elke driehoek zo is. 'En die gele figuur, hoe zou je die noemen?' 'Een zeshoek.' 'Hoeveel graden zouden die hoeken bij elkaar zijn? En als je nu alle punten met elkaar verbindt, hoeveel lijnen teken je dan?' Wat een mogelijkheden om al wandelend je kleinkind alvast iets van wiskunde bij te brengen. Die Belgen hebben het toch maar mooi voor elkaar. Er is nog een klein probleem dat mijn droom uit elkaar deed spatten: mijn kleinkinderen houden niet van wandelen.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde in ruste.

E-mailadres: a.b.vanderroest@ziggo.nl

Functievoorschrift bij kromme door gegeven punten

Hoe stel je het functievoorschrift op van een polynoom door een aantal gegeven punten? Dat kan door een stelsel vergelijkingen op te lossen maar, veel inzichtelijker, ook door een stapsgewijze benadering. Gerard Koolstra legt uit hoe dat werkt.

Inleiding

Het opstellen van een functievoorschrift bij een lijn door twee punten is een standaardroutine in een groot deel van het vo. Het opstellen van een functievoorschrift bij een parabool die gegeven is door drie punten, wordt voor zover ik weet meestal niet systematisch behandeld, en krommen van hogere graad blijven wat dit betreft helemaal buiten beschouwing – afgezien van een enkel profielwerkstuk.^[1] Wel is het in de onderbouw gangbaar te controleren of een verband kwadratisch is bij een tabel met x -waarden met een vast verschil. Als de verschillen van de verschillen constant zijn is er sprake van een kwadratisch verband. Zie tabel 1.

x	-4	-1	2	5	8
y	-1	-2,5	5	21,5	47
Δy	-1,5	7,5	16,5	25,5	
$\Delta(\Delta y)$	9		9	9	

tabel 1

De waarde van dit verschil van de tweede orde $\Delta(\Delta y)$ hangt nauw samen met de coëfficiënt van x^2 , en natuurlijk met het vaste verschil Δ van de reeks x -waarden. We gaan dit eens wat nader bekijken.

Uitgaande van $y = ax^2 + bx + c$ en drie punten $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ en $(x_3; y_3)$ op de bijbehorende grafiek geldt:

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \quad [1]$$

$$y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \quad [2]$$

$$y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \quad [2]$$

[2] – [1] geeft:

$$y_2 - y_1 = a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1)$$

Dit is ook te schrijven als:

$$y_2 - y_1 = a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) + b(x_2 - x_1) \quad [4]$$

[3] – [2] geeft:

$$y_3 - y_2 = a(x_3 + x_2)(x_3 - x_2) + b(x_3 - x_2) \quad [5]$$

Omdat we afgesproken hadden dat

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \Delta x$$

kunnen we dit ook schrijven als:

$$y_2 - y_1 = a(x_2 + x_1)\Delta x + b\Delta x \quad [6]$$

en

$$y_3 - y_2 = a(x_3 + x_2)\Delta x + b\Delta x \quad [7]$$

[7] – [6] geeft links $y_3 - y_2 - (y_2 - y_1)$ oftewel $\Delta(\Delta y)$, het verschil van de verschillen van de y -waarden. Rechts krijgen we $a(x_3 - x_1)\Delta x$. Omdat $x_3 - x_1 = 2\Delta x$ kunnen we schrijven:

$$\Delta(\Delta y) = 2(\Delta x)^2 \cdot a \quad [8]$$

In ons voorbeeld (tabel 1) geldt: $2 \times 3^2 \cdot a = 9$

Hieruit is a eenvoudig te berekenen, en de berekening van b en c daarna is niet moeilijk. Ik kom daar nog op terug.

Wanneer de x -waarde met stappen van 1 toeneemt geldt $\Delta(\Delta y) = 2a$. De overeenkomst met de tweede afgeleide van $y = ax^2 + bx + c$ is natuurlijk geen toeval:

$$y' = 2ax + b \text{ en dus } y'' = 2a.$$

Ook is het niet verrassend dat verschil van de tweede orde bij een kwadratische functie evenredig is met het kwadraat van de stapgrootte.

Bij polynomen van een hogere graad is het goed de aanpak wat preciezer te beschrijven.

Ik licht dit toe aan de hand van de rij:

1; 0; 3; 13; 33; 63; ...

De vraag hoe de rij moet worden voortgezet heeft uiteraard geen eenduidig antwoord, maar wanneer we weten dat het gaat om een polynoom met een zo laag mogelijke graad ligt het wat anders.

Om de graad te weten te komen, berekenen we net zo lang verschillen (van verschillen) totdat we een constante rij krijgen.

In dit geval blijkt het te gaan om een derdegraads polynoom, zie tabel 2.

Voor de x -waarden nemen het rangnummer: 1, 2, 3..

x	1	2	3	4	5	6
y	1	0	3	13	33	66
Δy	-1	3	10	20	33	
$\Delta(\Delta y)$	4		7	10	13	
$\Delta^3 y$		3	3	3		

tabel 2

Het derde orde verschil van $y = ax^3$ bij een stapgrootte van 1 is gelijk aan $6a$ zoals ook het driemaal differentiëren laat zien. In dit geval geldt $6a = 3$, dus $a = \frac{1}{2}$. De polynoom begint dus met $\frac{1}{2}x^3$.

Om de andere coëfficiënten te bepalen gebruiken we een beproefde methode. We verminderen alle y -waarden met $\frac{1}{2}x^3$, zodat we een tweedegraads polynoom overhouden, zie tabel 3.

x	1	2	3	4	5	6
y	1	0	3	13	33	66
$y - \frac{1}{2}x^3$	$\frac{1}{2}$	-4	$-10\frac{1}{2}$	-19	$-29\frac{1}{2}$	-43
Δy	$-4\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{2}$	$-8\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{2}$	$-12\frac{1}{2}$	
$\Delta(\Delta y)$	-2	-2	-2	-2		

tabel 3

Van deze polynoom bepalen we de coëfficiënt door naar de verschillen van de tweede orde te kijken.

Om tijd te besparen kan men zich beperken tot (bijvoorbeeld de eerste) drie waarden. Zoals we eerder zagen, is het tweede-orde-verschil gelijk aan het dubbele van de coëfficiënt van x^2 . Die laatste is dus -1.

Aftrekken van $-x^2$, of te wel optellen van x^2 (bij $y - \frac{1}{2}x^3$) geeft vervolgens een eerstegraads vorm die eenvoudig te bepalen is, met behulp van de verschillen Δy .

We krijgen als polynoom $y = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 1\frac{1}{2}x + 3$.

Voor $x = 6$ krijgen we inderdaad als uitkomst 66, en het volgende getal blijkt 115 te zijn.

Op deze wijze is stapsgewijs elke polynoom te bepalen wanneer er voldoende punten zijn gegeven, en is elke rij aan te vullen.

Maar wat nu als we te maken hebben met gegeven punten waarvan de x -coördinaten geen mooie rekenkundige (lineaire) rij vormen?

Het ligt voor de hand om dan gebruik te maken van de differentiequotiënten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

We gaan uit van de gegevens in tabel 4.

x	-4	2	4
y	1	-1	9
Δy	-2	10	
Δx	6	2	
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$-\frac{1}{3}$	5	

tabel 4

De waarde van a is nu te bepalen met wat ik het *differentiequotiënt van de tweede orde* noem:

$$a = \frac{\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1} \quad [9]$$

Het verschil van twee 'opvolgende' differentiequotiënten wordt gedeeld door het (totale) verschil van de x -waarden. Omdat we vanaf nu te maken hebben met verschillende differentiequotiënten is het handig een paar afkortingen af te spreken:

$$\Delta_1 x = x_2 - x_1; \Delta_1 y = y_2 - y_1;$$

$$a_1 = \frac{\Delta_1 y}{\Delta_1 x}; \Delta_2 x = x_3 - x_2; \text{ etc.}$$

Met de gegevens van tabel 2 geeft dat:

$$a = \frac{a_2 - a_1}{x_3 - x_1} = \frac{5 - (-\frac{1}{3})}{8} = \frac{2}{3}.$$

De juistheid van formule [9] is met wat kleine aanpassingen op de afleiding van [8] in te zien.

We starten weer met:

$$y_2 - y_1 = a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) = a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) + b(x_2 - x_1) \quad [4]$$

en

$$y_3 - y_2 = a(x_3^2 - x_2^2) + b(x_3 - x_2) = a(x_3 + x_2)(x_3 - x_2) + b(x_3 - x_2) \quad [5]$$

Gebruik makend van de afkortingen kunnen we schrijven:

$$\Delta_1 y = a_1 \cdot \Delta_1 x, \text{ en vervolgens [4] en [5] als:}$$

$$a_1 \cdot \Delta_1 x = a(x_2 + x_1)\Delta_1 x + b\Delta_1 x \quad [10]$$

en

$$a_2 \cdot \Delta_2 x = a(x_3 + x_2)\Delta_2 x + b\Delta_2 x \quad [11]$$

>

Dit kan weer vereenvoudigd worden (we gaan uit van $\Delta_1 x$, $\Delta_2 x \neq 0$) tot:

$$a_1 = a(x_2 + x_1) + b \quad [12]$$

en

$$a_2 = a(x_3 + x_2) + b \quad [13]$$

Aftrekken geeft $a_2 - a_1 = a(x_3 - x_1) \Leftrightarrow a = \frac{a_2 - a_1}{x_3 - x_1}$
en dit is de korte notatie voor [9].

Bovenstaande aanpak wordt aangeduid met de methode van *gedeelde differenties* (in het Engels *divided differences*) en wordt vaak genoemd naar Newton.

Via de aanpak van gedeelde differenties kan de kopcoëfficiënt (de coëfficiënt van de hoogste macht) van elke polynoom worden bepaald. Dat gaat via een aantal stappen die ik toelicht aan de hand van een derdegraads functie, die bepaald wordt door vier punten, zie tabel onderaan de pagina.

Eerst worden op basis van de vier gegeven punten drie differentiequotienten van opeenvolgende punten berekend:

$$\frac{1-3}{(-1)-(-3)} = \frac{-2}{2} = -1;$$

$$\frac{3-1}{3-(-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{10-3}{4-3} = 7.$$

Van deze drie differentiequotienten worden weer de opeenvolgende verschillen bepaald, en gedeeld door de afstand van de bijbehorende x -coördinaten:

$$\frac{\frac{1}{2} - (-1)}{3 - (-3)} = \frac{\frac{3}{2}}{6} = 0,25;$$

$$\frac{7 - \frac{1}{2}}{4 - (-1)} = \frac{\frac{13}{2}}{5} = 1,3.$$

De kopcoëfficiënt (tevens het derde orde differentiequotiënt) kan nu berekend worden:

$$\frac{1,3 - 0,25}{4 - (-3)} = \frac{1,05}{7} = 0,15.$$

We weten nu dat het functievoorschrift er als volgt uit ziet: $f(x) = 0,15x^3 + \dots$

Om het hele functievoorschrift te pakken te krijgen beginnen we 'onderaan'.

Stap 0

$x_1 = -3$; $y_1 = 3$. $y = 3$ is een horizontale lijn door het eerste punt $(-3; 3)$.

Stap 1

Het eerste differentiequotiënt is ook de richtingscoëfficiënt van de rechte lijn door de eerste twee punten. De bijbehorende vergelijking kan geschreven worden $y = -x$. We kunnen dit zien als een eerste (lineaire) benadering van de gezochte derdegraads functie: $f_1(x) = -x$.

Stap 2

Het eerste 2^e orde differentiequotiënt is, zoals we eerder hebben laten zien, de kopcoëfficiënt van de tweedegraadsfunctie die bepaald wordt door de eerste drie punten. We noemen de functie: f_2 .

Om het hele functievoorschrift te pakken te krijgen, kijken we eerst naar het verschil $v_2(x) = f_2(x) - f_1(x)$.

Deze functie is gelijk aan nul voor $x = -3$ en voor $x = -1$ omdat daar geldt: $f_2(x) = f_1(x)$.

Daarom is $v_2(x)$ te schrijven als $a(x + 3)(x + 1)$. Maar a is bekend ($= 0,25$) dus we weten:

$$f_2(x) - f_1(x) = 0,25(x + 3)(x + 1), \text{ en dus } f_2(x) = 0,25(x + 3)(x + 1) + f_1(x).$$

En omdat we ook weten dat $f_1(x) = -x$ volgt: $f_2(x) = 0,25(x + 3)(x + 1) - x$.

Dit is te herschrijven als $f_2(x) = 0,25(x^2 + 3)$.

We hebben nu een tweedegraads benadering van de gezochte derdegraadsfunctie.

Nummer punt	k	1	2	3	4
x -coördinaat	x_k	-3	-1	3	4
y -coördinaat	y_k	3	1	3	10
differentiequotiënt	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	-1		$\frac{1}{2}$	7
2 ^e orde differentiequotiënt		0,25		1,3	
3 ^e orde differentiequotiënt	kopcoëfficiënt	0,15			

tabel 5

Stap 3

f_2 heeft de eerste drie punten gemeenschappelijk met gezochte derdegraadsfunctie f_3 . Dat kan desgewenst nog even gecontroleerd worden door voor x de waarden -3 , -1 (en $+3$) in te vullen.

In lijn met het voorgaande kijken we nu naar $v_3(x) = f_3(x) - f_2(x)$. Deze verschilfunctie heeft -3 , $+3$ en -1 als nulpunten, en de kopcoëfficiënt is bekend: $0,15$.

We kunnen dus schrijven

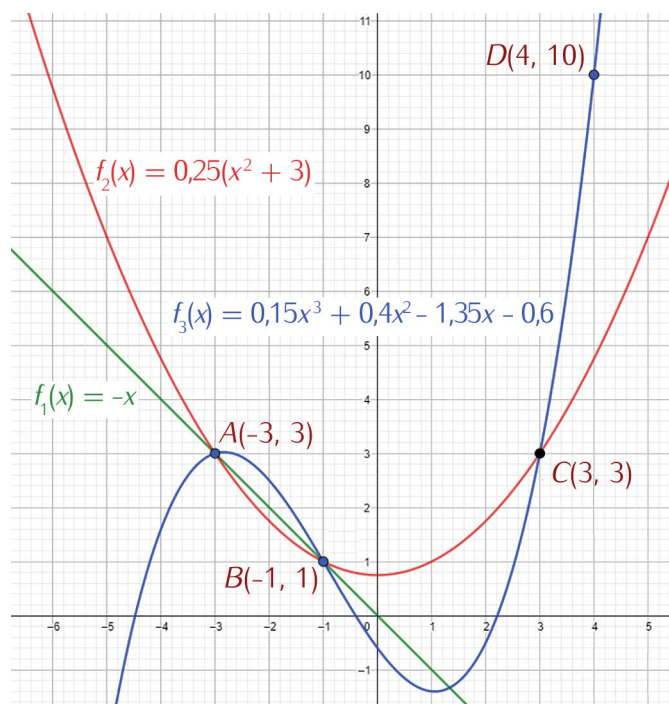
$$v_3(x) = 0,15(x+3)(x-3)(x+1) = 0,15(x^2-9)(x+1).$$

Omdat $f_3(x) = f_2(x) + v_3(x)$ volgt:

$$f_3(x) = 0,15(x^2-9)(x+1) + 0,25(x^2+3).$$

Dit weer herleiden tot $f_3(x) = 0,15x^3 + 0,4x^2 - 1,35x - 0,6$.

Figuur 1 illustreert deze stapsgewijze benadering.



figuur 1

Deze aanpak is uiteraard ook te gebruiken voor polynomen van een hogere graad. Om de gewenste functie kort en krachtig te kunnen beschrijven is het handig om differentiequotiënten van verschillende ordes op eenzelfde manier te noteren. Gebruikelijk is $D[x_1, \dots, x_k]$ waarbij k maximaal gelijk is aan het aantal punten.

Afspraak is $D[x_1] = y_1$ de y -waarde van het eerste punt. Je zou dit het differentiequotiënt van de nulde orde kunnen noemen. Het (eerste) gewone differentiequotiënt wordt genoteerd als $D[x_1, x_2]$, het eerste differentiequotiënt van de tweede orde als $D[x_1, x_2, x_3]$ enz.

Een functievoorschrift van een polynoom van graad n

waarvan de punten $(x_i; y_i)$ t/m $(x_{n+1}; y_{n+1})$ op de bijbehorende grafiek liggen kan nu kort genoteerd worden als een som van producten:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (D[x_1, \dots, x_k] \prod_{j=1}^{k-1} (x - x_j))$$

Het is ook mogelijk om met een variant op de hierboven geschetste aanpak een functievoorschrift vast te stellen zonder gebruik te maken van differentiequotiënten van hogere orde.

We gaan weer uit van een derdegraadsfunctie door de punten $(-3, 3)$, $(-1, 1)$, $(3, 3)$ en $(4, 10)$.

De eerste stappen zijn hetzelfde als hierboven. Alleen vanaf $v_2(x) = a(x+3)(x+1)$ gaan we anders te werk. We berekenen de uitkomst van $v_2(3)$, we gebruiken dus het derde punt $(3, 3)$.

We weten $v_2(x) = f_2(x) - f_1(x)$ dus $v_2(3) = f_2(3) - f_1(3)$.

Ook weten we $f_1(x) = -x$, dus $f_1(3) = -3$. Maar we weten ook dat $f_2(3) = 3$, omdat de eerste drie punten allemaal op de grafiek van f_2 moeten liggen. Hieruit volgt $v_2(3) = 3 - (-3) = 6$.

Invullen geeft: $a(3+3)(3+1) = 6$. Hieruit is te berekenen dat a gelijk is aan $0,25$.

Uiteraard zijn er allerlei andere aanpakken mogelijk, zoals het oplossen van een stelsel van vergelijkingen, al dan niet met behulp van matrixrekening, maar ik wilde aanpakken vanuit stapsgewijze benadering van de functie eens in het zonnetje zetten. Als de punten allemaal liggen op een deel van de grafiek waar de functie monotoon (stijgend of dalend) is, doet de uitdrukking 'benadering' wat beter zijn naam eer aan.

Noten

- [1] Max van Horssen heeft in dit verband een zeer interessant profielwerkstuk geschreven, waarin hij diverse aanpakken met elkaar vergelijkt. In *Nieuw Archief voor Wiskunde* (5/20 nr. 4, december 2019) is hierover meer te lezen.

Over de auteur

Gerard Koolstra houdt zich na een dienstverband van veertig jaar als docent, bezig met allerlei zaken binnen en rond het wiskundeonderwijs, onder meer als redacteur van de *Wiskunde-brief*. E-mailadres: gerardk@xs4all.nl

Opening

De voorzitter, Ebrina Smallegange, heet alle aanwezigen welkom op deze jaarvergadering, die als vanouds gehouden wordt op het Ichthus College te Veenendaal. Bestuurslid Sharon Calor kan helaas niet aanwezig zijn.

Jaarrede

Het verslag van de vakvernieuwingscommissie vmbo is klaar. Ter voorbereiding op de invoering zullen komend jaar onderdelen van het herziene programma in de praktijk worden beproefd.

Voor havo/vwo is een ontwikkelteam gestart dat op basis van een herziene vakkenstructuur een nieuw examenprogramma voorbereidt. Los daarvan verkent het CvTE de mogelijkheid om, naast de grafische rekenmachine, ook andere softwaretools toe te staan bij het examen.

Ook is een team gestart dat de kerndoelen voor de basisschool en de onderbouw van het vo onder de loep neemt. De NVvW is bij die curriculumvernieuwingen betrokken via diverse advieskringen.

De minister heeft daarnaast het verbeteren van basisvaardigheden rekenen tot speerpunt gemaakt. Maar welke vaardigheden worden daaronder verstaan? Welk niveau willen we dat leerlingen daarin bereiken? Hoe verhoudt zich dat tot bijvoorbeeld de referentieniveaus, maar ook tot ons wiskundecurriculum?

Er zijn het afgelopen jaar meer nieuwe leden bijgekomen in vergelijking met het jaar ervoor. Deels zijn dat collega's die via Docent Vluchteling voor De Klas in het Nederlandse onderwijs zijn gaan werken, deels nieuwe docenten of studerend daarvoor. De voorzitter benadrukt het belang om (startende) docenten voor het vak te behouden en benoemt op welke manieren de NVvW daaraan kan bijdragen. Onder meer door een speciaal ontwikkelde *Welkomst Euclides*, die door de eindredacteur van *Euclides* ter plekke aan een van de nieuwe leden wordt overhandigd.

Notulen van de jaarvergadering van 2021

De indiener van de rondvraag tijdens de jaarvergadering van 2020 meldt dat zijn vragen beantwoord zijn, en hoewel teleurgesteld over het antwoord, laat hij het erbij. De notulen worden daarbij vastgesteld.

Jaarverslagen 2021/2022

Zowel het jaarverslag van de NVvW, als het jaarverslag van *Euclides* worden ongewijzigd vastgesteld.

Financiën

De jaarrekening en begroting worden door de penningmeester gepresenteerd in een nieuw format waarin de hoofdlijnen van het financiële beleid zichtbaar moeten worden en tegelijk de transparantie over het gevoerde beleid behouden blijft. Enkele leden geven aan een gedetailleerdere uitwerking naast de hoofdlijnen op prijs te stellen, daar waar anderen de globale opzet voldoende vinden. Suggesties ter verbetering kunnen aan de penningmeester doorgegeven worden.

Uit de toelichting op de jaarrekening en balans 2021/2022 blijkt dat het financiële jaar wordt afgesloten met een positief resultaat van ruim € 4.000,- na aftrek van € 24.000,- aan reserveringen voor projectenfonds, jubileum, ict-investeringen, *Euclides*-special en promotie. Door meer onlinebijeenkomsten werd er minder uitgegeven aan reis- en vergaderkosten voor werkgroepen en bestuur. De kascontrolecommissie, bestaande uit Harm Bakker en Marco ten Hof, heeft geconstateerd dat de jaarrekening op juiste wijze is verantwoord en de commissie stelt voor het bestuur te dechargeren voor het gevoerde financiële beleid. De aanwezigen stemmen in met applaus en uiten daarmee tegelijk hun waardering voor het werk dat Peter en Heleen van der Ree rond de financiële administratie hebben verricht.

Voor de jaargang 23/24 is realistisch en scherp begroot. Voor promotie wordt structureel meer geld vrijgemaakt, omdat het werven van nieuwe leden onverminderd belangrijk blijft. De studiedag wordt hoger begroot vanwege inflatie en het blijvend kunnen aanbieden van een gratis lunch voor de deelnemers. De reis- en vergaderkosten voor bestuur en werkgroepen worden met ongeveer 1/3 verminderd vanwege de mogelijkheid van het benutten van onlinemogelijkheden voor bijeenkomsten.

Sinds enkele jaren bestaat bij wijze van proef de mogelijkheid om *Euclides* uitsluitend digitaal te ontvangen. Inmiddels is er een duidelijker beeld van het aantal leden dat van deze mogelijkheid gebruik maakt. De penningmeester stelt daarom voor om de korting van € 14,50, die



de afgelopen jaren jaarlijks werd vastgesteld voor leden die alleen een digitale *Euclides* ontvangen, structureel te maken en af te ronden tot € 15,-.

Het bestuur beraadt zich op de vraag in hoeverre dit van toepassing is op de contributie van gepensioneerde leden. De aanwezigen stemmen in met de voorgestelde begroting en contributie.

De nieuwe kascontrolecommissie wordt benoemd en bestaat uit Marco ten Hof en Zwaantje Warmelink.

Bestuursverkiezing

De aftredende bestuursleden Jörgen van Remoortere en Claudia Konert worden door de voorzitter bedankt voor hun inspanningen en enthousiasme waarmee ze hun rol in het bestuur hebben vormgegeven.

De bestuursleden Corwin van Schendel, Sharon Calor en Joanne de Jager worden onder applaus benoemd voor een tweede termijn. De nieuwe bestuursleden Ilona van Houwelingen en Lonneke Boels worden eveneens onder applaus benoemd voor een eerste termijn.

Rondvraag

Vooraf zijn er geen vragen voor de rondvraag ingediend. Sieb Kemme maakt van de gelegenheid gebruik om zijn zorg over de kwaliteit van contexten in vmbo-examens

te uiten. De voorzitter antwoordt dat de NVvW goede examens voor alle leerlingen op alle niveaus bepleit.

Sluiting

De voorzitter dankt de aanwezigen voor hun belangstelling en wenst ons allen een inspirerende studiedag toe.

Jaarverslagen NVvW en *Euclides*

Tijdens de jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 4 november 2023** staan de jaarverslagen van de NVvW en *Euclides* op de agenda. Deze verslagen zijn opgenomen in de digitale editie van *Euclides* jaargang 99 nummer 2.



vakbladeuclides.nl/992nvvw



vakbladeuclides.nl/992euclides

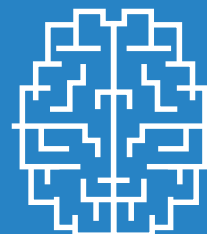
Verschenen



Titel: Figurenfestival
Ondertitel: Spelen met vierhoeken
Auteur: Els Franken
Doelgroep: vmbo, onderbouw havo/vwo
Uitgever: Epsilon uitgaven
ISBN: 6011432330324
Prijs: € 7 (48 kaarten)

Van de uitgever:

Je kunt met dit kaartspel vijf verschillende activiteiten rondom de eigenschappen van vierhoeken doen. Elke activiteit heeft zijn eigen kleur, de achterkant van de kaarten doen ook mee! De activiteiten kunnen groepsgewijs, individueel of in tweetallen worden gedaan.



Wellicht is het *vermoeden van Collatz* bekend: je stopt een willekeurig getal in een 'machientje' dat dan volgens recept een nieuw getal uitspuugt. Door het proces te herhalen ontstaat een rij getallen die altijd op 1 lijkt te eindigen. Het recept is simpel: een even g wordt $g/2$ en een oneven getal g wordt $3g + 1$. Vooralsnog is dit vermoeden noch bewezen, noch weerlegd en dat gaan wij ook niet proberen. Onze puzzel gaat over iets dergelijks, met een ander recept waar echter wel keuzemogelijkheden in zitten.

De vraag die we aanvankelijk stellen is: kun je vanuit een gegeven geheel positief startgetal s alle positieve gehele getallen n maken? In dat geval noemen we alle getallen n maakbaar vanuit s .

We noteren het resultaat met een rij

$$h(0) = s, h(1), h(2), \dots, n.$$

We kiezen voor de eerste vier opgaven voor $h(0) = s = 4$.

Recept A

Van s naar n met getal $h(i)$ naar $h(i + 1)$ met de volgende keuzemogelijkheden:

- a) $h(i + 1) = h(i) / 2$ mits $h(i)$ even is.
- b) $h(i + 1) = h(i) \times 10$ dus plak een 0 achter $h(i)$.
- c) $h(i + 1) = h(i) \times 10 + 4$ dus plak een 4 achter $h(i)$.

Je mag steeds kiezen uit a, b of c, hoewel a alleen kan als het getal even is.

Een voorbeeld met $n = 51$:

4, 2, 20, 204, 102, 51 maar ook bijvoorbeeld 4, 40, 20, 204, 102, 51.

We zeggen dat n *maakbaar* is als het bereikbaar is met dit recept. Het getal 51 is dus maakbaar en ook alle andere getallen in die rijtjes.

Stelling

Elk positief geheel getal n is maakbaar met startgetal $s = 4$.

Eerst wat proberen:

Opgave 1: Onderzoek of $n = 38$ en $n = 99$ maakbaar zijn. Zo ja hoe?

Om te onderzoeken of een getal n maakbaar is kan het handig zijn de omgekeerde route te volgen. Voor $n = 51$ kun je dan krijgen: 51, 102, 204, 20, 2, 4, of bijvoorbeeld 51, 102, 204, 20, 40, 4.

We noemen die rijtjes: $t(0) = n, t(1), t(2), \dots, s$. (Niet h van heenweg, maar t van terugweg).

Om de stelling te bewijzen kunnen we eerst aantonen dat je vanuit elk positief geheel getal $n > 4$ altijd een omgekeerd rijtje kunt maken waarin een getal verschijnt dat kleiner is dan n . Omgekeerd recept:

Recept B

Van n naar s met getal $t(i)$ naar $t(i + 1)$ met de volgende keuzemogelijkheden:

- a) $t(i + 1) = t(i) \times 2$. Dat mag altijd.
- b) Als $t(i)$ op een 0 eindigt: $t(i + 1) = t(i) / 10$.
- c) Als $t(i)$ op een 4 eindigt: $t(i + 1) = [t(i) - 4] / 10$, behalve als $t(i) = 4$, want we willen alleen positieve getallen.

Dus ook hier zijn keuzemogelijkheden.

Lemma

Voor elke $n > 4$ kun je in het rijtje $t(i)$ met recept B altijd een getal krijgen dat kleiner is dan n .

Voor het bewijs van het lemma gebruiken we recept B.

Opgave 2a: Laat zien dat elk getal $t(i) > 4$ (dus ook $t(0) = n$) dat eindigt op 0, 2, 4, 6 of 8 met recept B altijd een getal kan opleveren kleiner dan $t(i)$.

Opgave 2b: Idem voor eindcijfers 1, 3, 5 en 7.

Maar voor n met eindcijfer 9 is het lastiger.

Opgave 3a: Toon aan dat je toch met recept B $n = 249$ kleiner kunt maken en ten slotte eindigt op 4.

We zagen dat als n op een 9 eindigt, het met recept B aanvankelijk groter wordt. De vraag is of het daarna altijd kleiner kan worden dan n .

Of zou het weer op een 9 kunnen eindigen zodat het weer groter wordt? Het antwoord is dat het inderdaad lukt om een getal te krijgen kleiner dan n .

We gaan nu het lemma bewijzen. Dan moet het dus, ook als n op een 9 eindigt en je dus aanvankelijk een (of meer) getallen krijgt groter dan n , altijd mogelijk zijn om daarna een getal te krijgen kleiner dan n .

Opgave 3b: Laat zien dat ook als n op een 9 eindigt je met recept B altijd een rijtje $t(i)$ kunt krijgen waarin een $t(i)$ kleiner is dan n . Geef ook aan hoe lang het rijtje maximaal is vanaf n tot en met het eerste getal kleiner dan n bij jouw oplossing van deze opgave. Als je opgave 2 en 3b kunt aantonen, dan is het lemma bewezen. Zo niet, dan mag je dat aannemen.

Opgave 4: Geef nu het bewijs dat elk getal n maakbaar is (dus ook 1, 2 en 3).

We gaan nu onderzoeken of we ook kleinere getallen s als startgetal kunnen gebruiken. We weten nu (of nemen dat aan) dat met startgetal $s = 4$ alle getallen maakbaar zijn, ook 1, 2 en 3. Als we dus vanuit 1, 2 en 3 met recept A op 4 kunnen uitkomen, hadden we ook 1, 2 of 3 als startgetal kunnen kiezen.

Opgave 5: Toon aan $s = 2$, $s = 3$ en $s = 1$ ook startgetallen kunnen zijn, waarmee alle getallen maakbaar zijn.

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kun je mailen naar liekewobien@hotmail.nl of sturen naar Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk.

Er zijn 20 punten te verdienen, en een boekenbon ter waarde van 20 euro voor de aanvoerder van de ladder. Inzendingen moeten uiterlijk op 13 december 2023 binnen zijn.

Voor de uitwerking van puzzel 98-6:



vakbladeuclides.nl/992puzzel

Voor de volledige ladderstand en de uitwerkingen van eerdere puzzels: <https://nvww.nl/euclides/puzzel/>

We feliciteren Jan van Doorn van harte met de ladderprijs.

Top 10 ladderstand t/m puzzel 98-6

1	J. van Doorn	182
2	G. Bouwhuis	156
3	J. Remijn	128
4	H. Huisman	117
5	M. Schukking	92
6	B. Dopheide	79
7	H. Bakker	77
8	R. Stolwijk	71
9	L. Cizkova	61
10	S. Zondervan	61



Titel: De kabouterformule
Ondertitel: Logische raadsels over gekleurde mutsen
Auteur: Alex van den Brandhof
Uitgever: Uitgeverij Prometheus
ISBN: 9789044653793
Prijs: € 19,99 (208 pagina's)

Verschenen

Van de uitgever:

In dit boek presenteert Alex van den Brandhof in twintig hoofdstukken problemen over kabouters die de kleur van hun muts moeten raden – zich houdend aan strikte spelregels. Meestal denk je in eerste instantie: dat kán toch niet! En dan blijkt er toch een geniale oplossing te bestaan. Het boek is meer dan gewoon een bundel raadsels, vanwege de diepe en onverwachte connecties met wiskunde in de meest pure vorm. Getaltheorie, coderingstheorie, grafentheorie: het zijn maar een paar deelgebieden van de wiskunde die bij de oplossingen van pas komen. Er zijn zelfs raakvlakken met vragen waar wiskundigen nog geen antwoord op hebben

Alex van den Brandhof is wetenschapsjournalist met een passie voor wiskunde. Hij schrijft onder meer voor NRC. Eerder verscheen van zijn hand *Priemwoestijnen*. Ook was hij medeauteur van *De Pythagoras Code* en *De zeven grootste raadsels van de wiskunde*.

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn, voorzitter
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck
Martijn Schouw
Constantijn Tilanus

Inzenden bijdragen

Tom Goris,
Molenbochtplein 38, 5014 EJ Tilburg
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvw.nl

Voorzitter

Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06-155 045 76 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau, Tel. 0345 531 324
E-mail: evers.rechtspositie@gmail.com
Vermeld bij je contact je lidnummer en telefoonnummer.

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt

met ingang van 1 augustus 2018

- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 73,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWC: € 65,00

Bijdrage WvF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen Euclides niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang

Personen (niet-leden van de NVvW): € 90,00

Instituten en scholen: € 150,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkwijk 63, 3901 EC Veenendaal,
Tel. (0318) 555 075

E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2023/2024

Za
04/11

VEENENDAAL

NVvW jaarvergadering en studiedag

05/02
t/m
16/02

LANDELIJK

Scholen kiezen zelf een dag

Op de scholen: Onderbouw Wiskundedag (3hv) en
vmbo Wiskundedag (3 vmbo-gt)

Organisatie: Freudenthalinstituut

Do
21/03

LANDELIJK

Op de scholen: W4Kangoeroewedstrijd,
wereldwijde wiskundewedstrijd

Organisatie: Stichting Wiskunde Kangoeroe

Vr
5/04
Za
6/04

NOORDWIJKERHOUT

Nationale Wiskundedagen

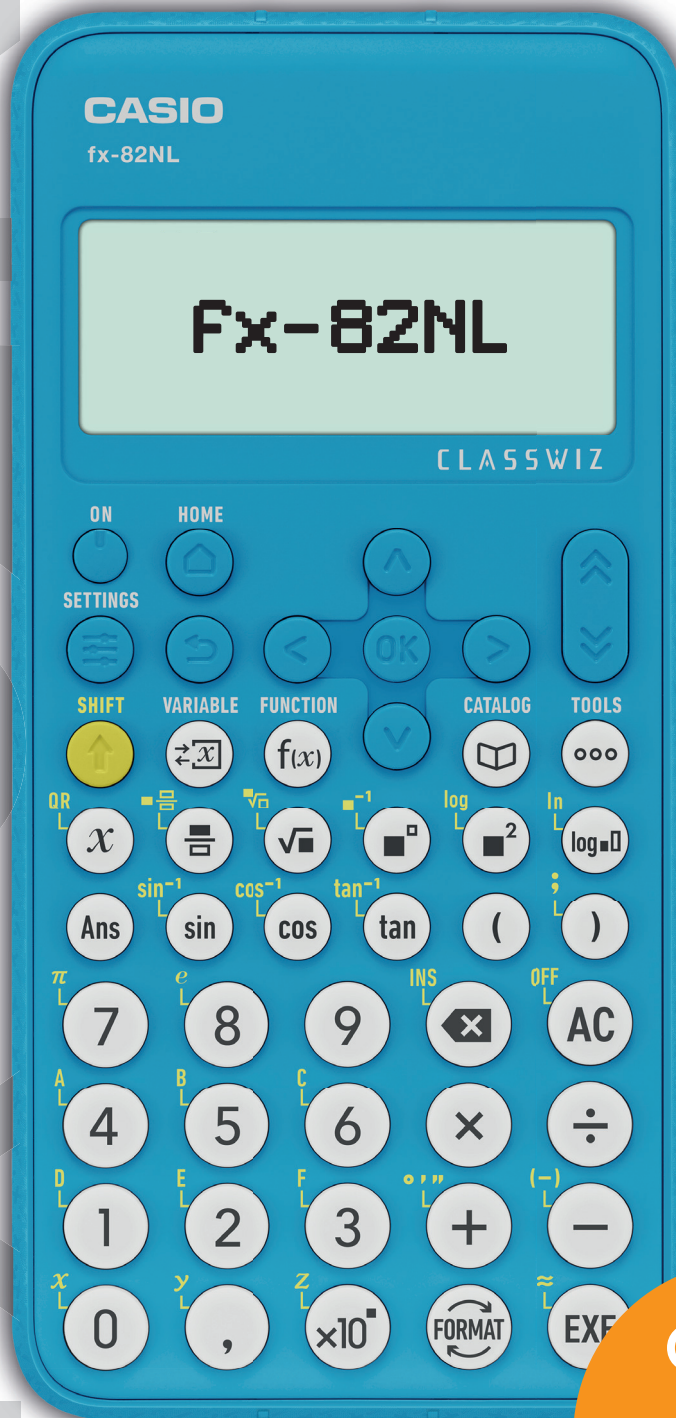
Organisatie: Freudenthalinstituut

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook vakbladeuclides.nl

JAARGANG 99

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
3	13 december 2023	9 oktober 2023
4	31 januari 2024	13 november 2023
5	13 maart 2024	2 januari 2024
6	1 mei 2024	26 februari 2024
7	19 juni 2024	22 april 2024

CASIO®



Opvolger van:
fx-82MS
fx-82EX

**Voor Nederlands
curriculum gemaakt**

Webinars vol inspiratie!

Ben jij op zoek naar extra inspiratie voor jouw wiskundelessen? Dit najaar starten we met een gloednieuwe reeks wiskunde webinars vol tips en tools! Toegespitst op hedendaagse wiskunde, ICT en de nieuwste ontwikkelingen binnen het vakgebied.

Meld je aan via de QR-code

Breng wiskunde tot leven

Wiskunde is overal. Met deze tips maak jij wiskunde nog leuker en actueler voor jouw leerlingen

Dinsdag 31 oktober | 15:30 - 16:15



getal & ruimte

Zo haal je alles uit de ICT bij Getal & Ruimte!

Met Algebrakit worden je leerlingen stapsgewijs met de opgaven geholpen. In dit webinar laten we zien hoe je dit toepast.

Dinsdag 21 november | 15:30 - 16:15



MODERNE WISKUNDE

Zo haal je alles uit de ICT bij Moderne Wiskunde!

Met Algebrakit worden je leerlingen stapsgewijs met de opgaven geholpen. In dit webinar laten we zien hoe je dit toepast.

Dinsdag 21 november | 15:30 - 16:15



Activerende werkvormen

Het webinar vol praktische tools om jouw wiskundelessen spelenderwijs begrijpelijk en interactiever te maken.

Dinsdag 12 december | 15:30 - 16:15



Meer informatie over de webinars én aanmelden kan op
Noordhoff.nl/wiskundewebinars



Noordhoff

Brengt je verder