

Bespreking vwo examen wiskunde A 2023 tijdvak 1

In *Euclides* verschijnt een samenvatting van het vwo-examen-wiskunde-A waarin ik mijn mening geef over de lengte en taligheid van het examen. Ik vond het beslist een mooi examen met knap geformuleerde teksten en gevarieerde opdrachten. Vanwege de lengte (20% meer woorden dan vorig jaar, 10% meer dan het recordjaar 2021 en 40% meer dan in 2018) vond ik de leesbelasting erg hoog. Naar mijn mening moet en kan het korter. Vorig jaar hebben verschillende mensen een poging gedaan, waaronder Peter Kop en ik in een blog op de NVvW-website.^[1] In deze online bijdrage focus ik inhoudelijk op de wiskunde achter de aangeboden opdrachten.

De eerste context gaat over Karima die een duikcursus volgt en leert rekenen aan de maximale duiktijd. Op de eerste bladzijde wordt de context rustig geïntroduceerd en worden alle variabelen beschreven. De tekst kan wellicht ingekort worden, maar er staat niets te veel. Alleen de voetnoot dat er ook andere formules zijn is overbodig. De eerste opdracht is simpelweg rekenen. Zoek de getalswaarde van vijf variabelen op en bereken de maximale duiktijd met de formule. Herkenbaar is het verzoek om af te ronden op hele minuten en dat moet in dit geval naar beneden. Opdrachten als deze komen vaak terug en 90% van de kandidaten doet dit foutloos. Bij de tweede opdracht is de maximale duiktijd gegeven en moet de waarde van één van de variabelen uitgerekend worden. Dat kan met algebra, maar de meesten doen het veilig met de GR. Aandachtspunt is dat in de gegeven tabel de waarde voor de druk niet gegeven is voor de opgegeven duikdiepte van 15 meter. Op de eerste bladzijde staat dat het verband lineair is. Zouden alle kandidaten dat gezien hebben of gaan ze spontaan halverwege interpoleren?

De derde opdracht doet een beroep op de vaardigheid van substitueren. Het correctievoorschrift geeft bij de tweede bol een punt voor het correcte verband. In de centrale examenbespreking is besproken dat wie begint met het omgekeerde, het verband tussen diepte d en druk p , ook goed bezig is. In het verslag staat dat het opschrijven van een lineaire formule, al dan niet met andere letters of een andere volgorde passabel is. Voor sprokkelende collega's stond toen de deur wagenwijd open om kandidaten die niet verder kwamen dan het opschrijven van $y = ax + b$ toch een punt toe te kennen. De meeste van mijn kandidaten deden precies wat gevraagd werd en noteerden de substitutie met haakjes en al. Gelukkig deed bijna niemand een poging om de haakjes weg te halen. Toch laat de helft van alle examenkandidaten hier veel punten liggen.

Vierde opdracht is ook een vertrouwde. Opdracht is om met behulp van de afgeleide te onderzoeken of de maximaal toegestane duiktijd toenemend of afnemend daalt. Het antwoord is bijna gegeven, het gaat dus om de uitvoering: differentiëren en redeneren. De formule is basaal. Eerdere jaren moesten kandidaten functies met e en \ln differentiëren. Veel kandidaten kiezen vanwege de breukvorm voor de quotiëntregel. Bij een constante teller geef ik zelf de voorkeur aan de kettingregel. In de les behandel ik bij een dergelijke formule beide oplossingsrichtingen en laat de leerlingen bewust een keuze maken. Uiteindelijk gaat het erom dat ze het linksom of rechtsom goed doen. De redenering is slechts één punt waard en het verslag beveelt aan om goed te kijken naar de zorgvuldigheid van de redenering. Bij grotere duikdiepte gaat de afgeleide naar nul, het verschil met de x -as wordt steeds kleiner, maar de afgeleide is negatief

en wordt, daar komt het, steeds groter. Veel kandidaten gaan kort door de bocht en schrijven op dat de afgeleide steeds kleiner wordt. Dat is dus fout en dus krijgt een bijna correcte redenering nul punten. Persoonlijk had ik er moeite mee dat kandidaten dan ook geen punt kregen voor de laatste bol want als een negatieve afgeleide steeds kleiner wordt, is er sprake van toenemende daling. Wat mij steekt is dat een leerling die het best goed uitlegt, op één enkel ongelukkig woord na, net zoveel punten krijgt (nul) als iemand die niets doet of iets belachelijks doet. Dat vind ik erg streng.

De tweede context gaat over het engelen deel van whisky die rijpt in houten vaten. Tijdens het rijpen verdampt een deel van de whisky. Het deel dat verdwijnt heet het engelen deel. Ook hier een prettig leesbare introductie. Opdracht is om uit te rekenen wanneer nog maar de helft van de whisky over is. Veel kandidaten lossen de exponentiële vergelijking op met de grafische rekenmachine. Wat zou er gebeurd zijn als gevraagd was naar de halveringstijd? Zouden onze kandidaten dan iets met logaritmes gaan doen?

Vervolgopdracht is om uit te rekenen hoeveel flessen je kunt vullen wanneer je begint met 200 liter. Ook de insteek van deze opdracht is goed begrepen, maar het regent slordigheidsfoutjes.

Ook opdracht 7 is niet moeilijk als je maar netjes werkt en de tabel afmaakt. Opvallend is de neiging om kort door de bocht te willen gaan. De Max Verstappen fans weten hoe dom dat is, want daar ligt de grindbak. Volgens CITO was de p-waarde 50%. Dat betekent dat de kandidaten de helft van de punten heeft laten liggen. Meer informatie over de berekening van p-waarden staat op de website van het CITO.^[2]

De tabel met notaties als n , $n - 1$, $n - 2$, $n - 3$ etc. sorteert al voor op vraag 8, de laatste vraag. In de inleiding staat een somformule met een sommatieteken. De kandidaat stond voor de keuze: weet ik hoe ik een somformule intyp op de GR of kan ik het zonder. Het correctievoorschrift lijkt een voorkeur te hebben voor de GR, maar wie bedenkt dat de gevraagde som het complement is van iets simpels, is snel klaar. Sommige correctoren hadden er moeite mee dat gevraagd werd naar dit soort knoppentrucs, terwijl anderen er moeite mee hadden om alle punten toe te kennen wanneer de kandidaat niet de GR-vaardigheid toonde. Komende jaren zal ik bij de examenvorbereiding deze opdracht op beide manieren behandelen. De ene leerling kiest voor de GR en de knoppen, de andere kiest voor de logische modelbenadering. Ik vind beide prima. Met een p-waarde van 30% is deze opdracht ronduit slecht gemaakt.

Derde context is *Gewicht in Beweging*. De inleiding is een lang verhaal met veel overbodige informatie. Opdracht 9 is een kort onderzoek. Dat doen de kandidaten goed. Gemiddeld genomen pakken leerlingen 4,5 van de 5 punten. Opdracht 10 dekt combinatoriek af. Hier viel men over de woordkeuze "op dinsdag, woensdag en/of donderdag". Over de interpretatie van de opgave is een vraag aan CvTE gesteld. Het CvTE liet, tot hilariteit van de sectie Nederlands, weten dat er geen scorepunten in mindering gebracht hoeven worden als een kandidaat ervan is uitgegaan dat een activiteit sowieso op de dinsdag moet plaatsvinden. In het nieuwe jaar gaan we maar eens samen op ontdekkingsreis welke dagcombinaties er mogelijk zijn onder de ene en onder de andere definitie en of je het ook op een nog andere manier kunt interpreteren. Omdat teksten zo gevoelig zijn voor interpretatieverschillen, stimuleer ik mijn leerlingen om eerst op te

schrijven wat ze denken dat er staat. Dat is de stap van context naar wiskunde. Alleen dan ben ik bereid om op een toets een afwijkend antwoord te bekijken. In de les wijs ik erop dat ze later in hun carrière de tijd moeten nemen om een probleemstelling met hun opdrachtgever af te stemmen. De kans is groot dat de opdrachtgever het verschil tussen nPr en nCr niet kent (en ook niet wil weten). De rekenmachineknopjes zijn daarom geen goed begin van een antwoord. Met een p-waarde van 60% is dit een opdracht die ik op deze manier niet snel in een schoolexamen zal verwerken.

De context is ook benut voor het afdekken van het onderdeel periodieke verschijnselen. Twee pijnpunten hebben de kandidaten punten gekost. Als $t = 0$ op 1 januari, dan is $t = 364$ op 31 december en dus is $t = 365$ op 1 januari het jaar erop en 21 december is dan $t = 354$. Onder de grafiek staan op de x-as veelvoud van 50, met het getal 350 als laatste, maar dat wil niet zeggen dat een jaar 350 dagen heeft. Opdracht 12 is ongelukkig geformuleerd: 'Het grootste verschil in gemiddeld gewicht in een jaar is procentueel gezien kleiner dan het grootste verschil in gemiddelde calorie-inname in een jaar'. Er staat namelijk niet ten opzichte van wat dat percentage is uitgedrukt. Het correctievoorschrift benoemt expliciet drie verschillende mogelijkheden, maar kandidaten wisten nog wel andere, gelijkwaardige alternatieven. Dat gaf discussie onder correctoren. Moet je je beperken tot de drie genoemde of bied je ruimte aan alternatieven. Volgens mij geeft algemene regel 3.3 uitsluitel: 'indien een antwoord op een open vraag niet in het beoordelingsmodel voorkomt en dit antwoord op grond van aantoonbare, vakinhoudelijke argumenten als juist of gedeeltelijk juist aangemerkt kan worden, moeten scorepunten worden toegekend naar analogie of in de geest van het beoordelingsmodel'. Korte samenvatting luidt: 'als het goed is, dan is het goed'. Met p-waardes van rond de 60% zal ik deze opdrachten niet in een schoolexamen verwerken, maar wel gebruiken in de examenvorbereiding.

Opdracht 13 is de laatste bij deze context. De vraag is kort en bondig: bereken hoeveel dagen het een later is dan het ander. Het probleem van $t = 0$ speelt niet meer. Twee keer calc max op de GR is genoeg. Wel moeten de kandidaten stilstaan bij wat eerder en wat later is. Het ene maximum is bij $t = 27$, het andere bij $t = 319$. Het verschil is niet $319 - 27$ maar $27 + 365 - 319 = 73$. Prettig is dat het correctiemodel al aangeeft dat eventuele verschillende antwoorden als gevolg het van al dan niet tussentijds afronden geen reden zijn tot het in mindering brengen van scorepunten. Ook wordt gevraagd om niet moeilijk te doen over precisie als schrikkeljaren. Op deze manier geven de examenmakers duidelijk aan wat de intentie is van de opdracht: de kandidaat kan met de GR werken en de kandidaat begrijpt wat het gevraagde verschil is. Dit soort duidelijkheid is erg prettig voor de correctoren en voorkomt misplaatste scherpslijperij. Ook hier geeft een p-waarde van 55% aan dat het een lastige opgave was.

Vierde context zijn de vlinders in Nederland. De opdracht is opgeleukt met de foto van een vlinder. Sommige kandidaten zagen er een visje in. Wat mij betreft is een volgend examen spaarzamer met illustraties.

Bij opdracht 14 kun je vier punten krijgen voor het uitrekenen van een groeifactor. Zowel bij de examenbespreking als op het forum als bij overleg met de collega-corrector ontstond discussie

over hoe schappelijk scorepunten gegeven mogen worden. Vwo-kandidaten die niet in staat zijn om fatsoenlijk een groeifactor uit te rekenen konden hier al rommelend toch punten bij elkaar sprokkelen. De toonzetting van de vorige zin geeft al aan wat ik daarvan vind. Je kunt het of je kunt het niet en een vwo-kandidaat moet het gewoon kunnen (vind ik).

Opdracht 15 combineert twee vaardigheden: aflezen van logaritmisch papier en het rekenen met een macht van 10. In het correctiemodel staat nadrukkelijk dat de kandidaat 1,6 cm moet opmeten en dat de kandidaat werkt met de schaalverdeling van 2 cm. De discussie op het forum deed vermoeden dat correctoren die ruimte hebben gepakt door iedere kandidaat die het getal 8 opschrijft een punt toe te kennen. Dat vind ik wel heel ruimhartig want die 8 kan net zo goed gevonden zijn door de schaal lineair af te lezen. Wanneer de kandidaat verder gaat met 10 tot de macht 0,8 (= 6,3) dan wil ik die 8 wel laten passeren, maar als de kandidaat dat niet doet, dan vind ik die 8 gewoon hartstikke fout. Het is sprokkelen als punten toegekend worden voor zonder uitleg alleen 8 opschrijven. Correctiemodel en verslag zijn helder: de vaardigheid is opmeten. Toch, de ene corrector gaf wel één punt en de andere niet. Enige verzachtende omstandigheid is de tijdsdruk die kandidaten ervaren waardoor antwoorden en berekeningen korter zijn dan als hen meer tijd gegund werd. Gelukkig heeft het forum niet het laatste woord want een p-waarde van 0,18 geeft aan dat de meerderheid van de correctoren niet gesjoemeld heeft door ruimhartig het eerste punt van de eerste bol toe te kennen.

Opdracht 16 vraagt om een vergelijking met rechterlid $\log(2)$ uit te rekenen, een gewone logaritme met grondtal 10. Ooit moest dat exact kunnen, nu volstaat de GR. Wel moet netjes naar boven afgerond worden want 'voor het eerst', maar de gekozen getallen met uitkomst $t = 57,6$ sturen al aan op afronden naar boven, waardoor kandidaten die voorbijgaan aan 'voor het eerst' toch goed uitkomen. Dit lijkt me geen moeilijke opdracht, maar de p-score is slechts 50%.

Opdracht 17 vraagt om een exacte herleiding. Van de logaritmische functie is de inverse een exponentiële. De keuze voor afronden van de beginhoeveelheid op een geheel getal en de groeifactor in drie decimalen is vrij logisch. Hier pakken onze kandidaten gemiddeld bijna drie van de vier punten.

Vijfde context gaat over de puntenberekening bij wedstrijdzwemmen. De voorraad opdrachten over sportprestaties lijkt wel onuitputtelijk. De eerste opdracht (opdracht 18) is een gewone rekenopdracht, maar de volgende doet een beroep op het inzicht dat het verschil tussen de gezwommen tijd T en de basistijd B slechts 0,01 seconde is. Wanneer de kandidaat de substitutie doet $T = B - 0,01$ ligt het voor de hand om de oplossing met de GR te berekenen. Hier wreekt zich het numerieke algoritme, want afhankelijk van type machine en de gekozen vensterinstellingen kon je op zowel 30,01 als op 30,02 uitkomen. Het correctieverslag plaatst een opmerking en bij de centrale examenbespreking is aan het CvTE gevraagd of beide antwoorden goedgekeurd mochten worden. Gevolg was discussie op het forum en discussies tussen correctoren die vermeden had kunnen worden als de examenmakers zich meer bewust zijn van de precisie van de GR. De GR is prachtig maar heeft zo zijn beperkingen. Als anekdote terzijde, afgelopen jaar veranderde een collega iets in een onderdeel voor een schoolexamen.

Toen we het antwoordmodel maakten, bleek dat de grafiek bij het gevraagde punt zo vlak liep dat de GR geen minimum of maximum kon vinden. De GR is dus best wel een dingetje om rekening mee te houden. Met een lage p-score van 33% is dit weer een voorbeeld van een lastige opdracht. Bij het maken van een schoolexamen is het zaak om een balans te vinden tussen opdrachten met een lage en met een hoge p-waarde.

In opdracht 20 wordt de algebraïsche vaardigheid van de kandidaat getest: hoe ga je van een derde macht naar een derdemachtswortel en wat heeft dan die 1000 met die 10 te maken. Als je niet zeker bent van de regels en er even voor gaat zitten om de juiste regels te vinden, dan moet dat goed komen, maar onder tijdsdruk schrijven sommige kandidaten direct de juiste stappen op, waar anderen er een potje van maken. Kandidaten kregen hier slechts de helft van de punten ($p = 0,5$). Van een havo-groep accepteer ik dat ze bij deze vaardigheid fouten maken, maar van een vwo-groep mag je toch wel iets meer verwachten. Als mijn klas er rustig voor gaat zitten, dan kunnen ze het, dat hebben ze laten zien. Nu laten ze het niet zien. Vandaar mijn opmerking over het effect van de lengte van de examentekst. Het lijkt erop dat het examen selecteert op de snelheid van parate kennis, ten koste van geduldig de juiste aanpak zoeken.

De context sluit af met opdracht 21 waarin weer gevraagd wordt om een machtsfunctie te differentiëren, voor twee puntenaantallen de waarde uit te rekenen, aan te tonen dat het verschil een factor twee is en om aan dat verschil een praktische betekenis te geven. Vooral dat laatste is een struikelblok. Het antwoord in het correctievoorschrift is onbevredigend omdat de zin niet compleet is: 'Een zwemster met een score van 300 FINA-punten moet meer van haar persoonlijk record afzwemmen om een FINA-punt te stijgen dan een zwemster met een score van 500 FINA-punten'. Ik doel op 'meer', want ik denk dat het gaat om 'meer tienden van seconden', maar ben daar niet zeker van want de afgeleide gaat om ΔP op ΔT en dat betekent punten op tijd. Bij sport gaat het om een prestatie neerzetten in minder seconden, maar de afgeleide zegt iets over het verschil in prestatie bij meer seconden. Oftewel, wie bij 300 punten een tiende seconde langzamer zwemt, levert twee keer zoveel punten in als iemand die een tiende seconde langzamer zwemt bij 500 punten. Best lastig en wie het beter weet mag het zeggen. De p-score was slechts 40%.

Laatste context is de onderzoeksopdracht. Ook als je niet van voetbal houdt en niet naar het WK gekeken hebt, is het beslist een leuk verhaal rond de uitspraak 'In Nigeria komen er tijdens de 26 dagen van dit WK minstens zoveel baby's bij als het totale aantal inwoners van IJsland'. De opdracht doet een beroep op een aantal vaardigheden. Grappig is dat het uitrekenen van de groefactor nu maar één punt waard is (bij opdracht 14 kreeg je er vier punten voor en dat zijn er daar echt te veel). De bevolking verdelen in man-vrouw in de verhouding 1,04 staat tot 1 ging niet bij iedereen goed. Het betekent namelijk dat 49% vrouw is (en niet 46% of 48%). Verder lekker doorrekenen. Moeilijk vond ik het niet. Kandidaten die de tijd goed verdeeld hadden, konden hier zo maar 5 of 6 van de 7 punten verdienen. De gemiddelde kandidaat pakte 4 van de 7 punten.

Samengevat, veel van de verplichte stof was in het examen verwerkt. Het was veel leeswerk, maar, op enkele opdrachten na, waren de vragen niet echt moeilijk. De onderwerpen e en ln

zaten er niet in, ook niet in het tweede tijdvak. Geen garantie dat die onderwerpen er volgend jaar weer niet in zitten. De formulering van de whiskycontext suggereerde dat je moest werken met rijen, maar daar kon je makkelijk om heen, in tegenstelling tot het groeimodel van het tweede tijdvak waar je echt een rijtje getallen uit moest rekenen.

Het begrip p-waarde heb ik vaak genoemd. Op zich is er niets mis met lage p-waardes. Alleen hoge p-waardes zou betekenen dat iedere kandidaat een 8 of een 9 had. Dat kan de bedoeling niet zijn. Zelf leg ik de p-waarde van mijn kandidaten tegen die van de rest van Nederland. Deden ze het beter of slechter en kan ik dat verklaren. Ik stel mezelf vragen over de keuzes die ik in mijn lessen maakte. Had ik aan een bepaald onderwerp meer tijd moeten besteden? De somrij op de GR heb ik niet geoefend. Prioriteit gaf ik aan het differentiëren en redeneren. Achteraf gezien had ik me de moeite met e en ln kunnen besparen, maar als ik het volgend schooljaar niet behandel, dan zal je zien dat e en ln er prominent in staan.

Een andere discussie is of we bij vragen omtrent basale dingen als een groeifactor een lage p-waarde accepteren. Lag het aan de vraagstelling, was het de tijdsdruk, of waren de kandidaten dommer dan ooit. Misschien is het iets voor een studiedag. Samen met collega's praten over wat essentieel is in de les, wat onderdeel moet zijn van een toets, hoe hoog de lat ligt.

Tot slot zou ik willen afsluiten met een pleidooi voor onderzoek naar een verschuiving van kwantiteit naar kwaliteit. Minder tekst, minder vragen, minder voetnoten en minder poespas, meer tijd per antwoord, lat hoger leggen, geen raffelwerk maar complete berekeningen en helder geformuleerde antwoorden.

Noten

[1] zie: <https://www.nvww.nl/2022/04/over-de-lengte-van-introductieteksten-in-vwo-wiskunde-a-examen-van-2021/>

[2] zie: https://www2.cito.nl/static/oenw/ttb_oko/OKO_begrippenlijst.html#P