Olympiadepuzzel

Euclides 98 nummer 7

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Oplopende en aflopende getallen

Opgave

We noemen een positief geheel getal *oplopend* als elk cijfer groter of gelijk is aan het cijfer dat er direct voor staat. Een getal is *aflopend* als elk cijfer juist kleiner of gelijk is aan het cijfer er direct voor is. Er geldt bijvoorbeeld dat 1336 oplopend is en 5440 aflopend. Het getal 222 is zowel oplopend als aflopend, en 1332 is noch oplopend, noch aflopend.

Hoeveel oplopende getallen n van hooguit vier cijfers lang (dus $0 < n < 10000$) bestaan er waarvoor $n + 2023$ juist aflopend is?

Uitwerking

Stel dat $n + 2023$ vijf cijfers lang is. Dan is $10000 \leqslant n + 2023 < 12023$, dus het eerste cijfer van $n + 2023$ is een 1. Nu kan $n + 2023$ alleen een aflopend getal zijn als het gelijk is aan 10000, 11000, 11100, 11110 of 11111. Dan is n gelijk aan 7977, 8977, 9077, 9087 of 9088. Geen van deze getallen is oplopend. We concluderen dat $n + 2023$ ook hooguit vier cijfers lang is. Omdat $n + 2023 > 2023$, is $n + 2023$ zelfs precies vier cijfers lang.

Schrijf $n = \overline{abcd}$, waarbij a, b, c en d de cijfers van n zijn en de eerste cijfers 0 mogen zijn. Omdat n oplopend is, geldt $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ (dit geldt ook als de eerste cijfers 0 zijn). Schrijf verder $n + 2023 = \overline{efgh}$. Er geldt dat $e \geqslant f \geqslant g \geqslant h$ omdat $n + 2023$ aflopend is.

We kunnen de relatie tussen $\overline{abcd}$ en $\overline{efgh}$ nu als volgt weergeven:

$$\begin{array}{r} abcd \\ 2023 \\ \hline efgh \end{array} +$$

Als $d \leqslant 6$, dan springt er geen 1 over van h naar g bij berekening van de bovenstaande som en is dus $h = d + 3$. Er geldt nu dat $g = c + 2$ (als er ook geen 1 overspringt van g naar f), of $g = c + 2 - 10 = c - 8$ (als er wel een 1 overspringt). Daarom is $c + 2 \geqslant g \geqslant h = d + 3$, zodat $c \geqslant d + 1$. Dit is in tegenspraak met het gegeven dat $c \leqslant d$ omdat n oplopend is. Hieruit volgt dat $d \geqslant 7$. Er springt dus een 1 over van h naar g, zodat $\boxed{h = d - 7}$ en $g = c + 3$ of $g = c - 7$.

Als $g = c + 3$, dan is $f = b$. Nu geldt dat $b = f \geqslant g = c + 3$, wat in tegenspraak is met $b \leqslant c$. We concluderen dat $\boxed{g = c - 7}$. Ook van g naar f springt er dus een 1 over, dus $f = b + 1$ of $f = b - 9$.

Het is niet mogelijk dat $f = b - 9$, want dan zou $b = f + 9 \geqslant g + 9 = c + 2$, in tegenspraak met $b \leqslant c$ omdat n oplopend is. Er geldt dus dat $\boxed{f = b + 1}$. Er springt dus geen 1 over van f naar e. Omdat $n + 2023$ precies vier cijfers heeft, springt er ook geen 1 over vanuit e en geldt dat $\boxed{e = a + 2}$.

We weten nu dat $e = a+2$, $f = b+1$, $g = c-7$ en $h = d-7$. De ongelijkheden $e \geqslant f \geqslant g \geqslant h$ gaan nu over in $a+2 \geqslant b+1 \geqslant c-7 \geqslant d-7$, oftewel $a+1 \geqslant b$ en $b+8 \geqslant c$ en $c \geqslant d$. Gecombineerd met $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ vinden we dat $a = b$ of $a = b-1$, $c-8 \leqslant b \leqslant c$ en $c = d$. Omdat a, b, c, d, e, f, g en h cijfers zijn, moet gelden dat $0 \leqslant a \leqslant 7$ en $0 \leqslant b \leqslant 8$ en $7 \leqslant c = d \leqslant 9$.

We gaan nu alle mogelijkheden af. Als $d = 7$, dan is $c = 7$, dus wegens $c-8 \leqslant b \leqslant c$ en $0 \leqslant b \leqslant 8$ geldt $0 \leqslant b \leqslant 7$. Met $a = b$ vinden we 8 mogelijkheden voor n, namelijk $0077, 1177, \ldots, 7777$. Er zijn 7 mogelijkheden met $a = b-1$, namelijk $0177, 1277, \ldots, 6777$.

Voor $d = c = 8$ vinden we op dezelfde manier dat $0 \leqslant b \leqslant 8$ en $a = b$ of $a = b-1$. Omdat $a \leqslant 7$ geeft dit de 8+8=16 mogelijkheden $0088, 1188, \ldots 7788$ en $0188, 1288, \ldots, 7888$. Ten slotte geeft $d = c = 9$ dat $1 \leqslant b \leqslant 9$ en $a \leqslant 7$, zodat er 7+8=15 mogelijkheden zijn: $1199, 2299, \ldots, 7799$ en $0199, 1299, 2399, \ldots, 7899$.

Er zijn dus 15+16+15 = 46 oplopende getallen n van hooguit vier cijfers lang zodat $n+2023$ aflopend is.

Inzenders met de juiste oplossing

Gé Groenewegen, Matthijs Schukking en Piet Smal

Winnaar van de cadeaubon

Matthijs Schukking