Uitdagende Problemen
Een gladde examenopgave

Jacques Jansen

Uitwerking vraag 7 van het examen

In de rest van deze opgave kijken we naar een ander voorbeeld. Het gaat niet meer om de letter 'a'.
De coördinaten van A, B en C zijn nu als volgt: $A(0,4)$, $B(2,2)$ en $C(3,0)$. Ook nu is C het snijpunt van de raaklijnen in A en B.

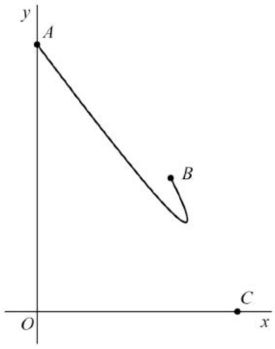
De Bézierkromme van A, B en C is, volgens de formule voor $\overrightarrow{OR}$, te beschrijven met behulp van vectoren. Het is echter ook mogelijk deze Bézierkromme met bewegingsvergelijkingen te beschrijven.

We bekijken het punt L met de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = -4t^2 + 6t \\ y(t) = 6t^2 - 8t + 4 \end{cases} \quad \text{met } 0 \le t \le 1$$

De baan van L is weergegeven in figuur 5.

figuur 5



Er geldt: de baan van L is de Bézierkromme die hoort bij de punten A, B en C.

3p 7 Bewijs dit met behulp van de formule voor $\overrightarrow{OR}$.

We willen graag de formule achterhalen die hoort bij de baan van punt L, zie figuur 5 in de afbeelding van het examen. Kijken we naar de baan, dan ontstaat het vermoeden van een parabool waarvan de symmetrieas niet parallel is met een van de assen van het assenstelsel. De formule achterhalen vereist wat algebrawerk.
We beginnen met kwadraat afsplitsen in de uitdrukking van de x-coördinaat van punt L.

$x(t) = -(2t - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{4}$ $(2t - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} - x$. Hiermee vinden we een uitdrukking voor t in x:

$t = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4} - x}$. Ook met een schuin oog kijkend naar $y(t) = 6t^2 - 8t + 4$ kunnen we schrijven

$4t^2 = 6t - x$ $6t^2 = 9t - 1{,}5x$.

$y(t) = 6t^2 - 8t + 4 = 9t - 1{,}5x - 8t + 4 = t - 1{,}5x + 4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4} - x} - 1{,}5x + 4$

$y = 4{,}75 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4} - x} - 1{,}5x$.

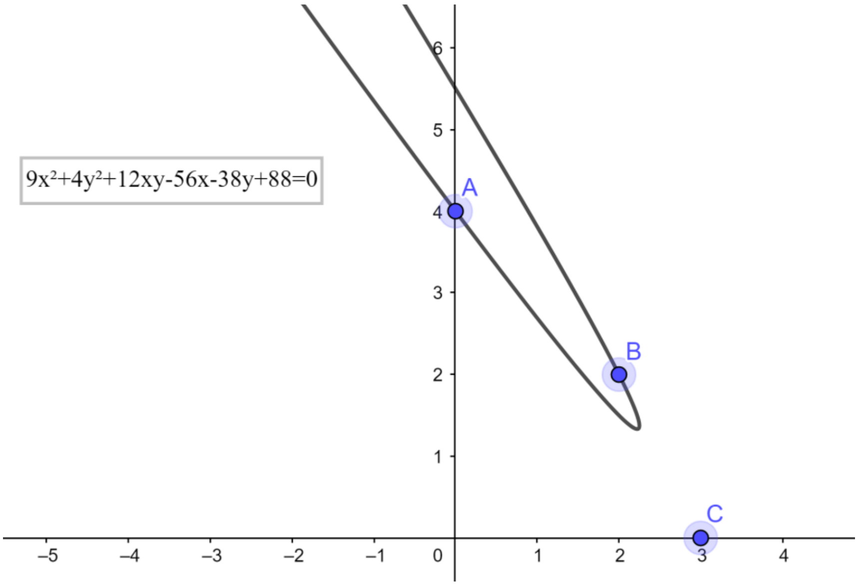
We vermenigvuldigen vervolgens met 2 en zorgen dat de wortelvorm alleen in het rechterlid voorkomt:

$3x + 2y - 9{,}5 = \sqrt{\frac{9}{4} - x}$.

Nu hoeven we alleen nog maar te kwadrateren en verder uit te werken:

$9x^2 + 4y^2 + 12xy - 56x - 38y + 88 = 0$.

Controleer het maar, zie de Geogebra figuur hieronder.



Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde. Hij is sinds 2014 met pensioen. E-mailadres: jacques.jansen@wxs.nl.