

EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERaar

EXAMENNUMMER 2023

Besprekingen van de examens wiskunde
vmbo-gl en -tl, havo (A en B), vwo (A, B en C)

Wiskunde op de Vrije School

Nieuw bewijs stelling Pythagoras door
scholieren

NR.1

JARGANG 99 - SEPTEMBER 2023



Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 99 NR 1



IN DIT NUMMER

EXAMEN VMBO-GL EN -TL
Ilona van Houwelingen

4



EXAMEN HAVO WISKUNDE A
Maarten Müller

7

EXAMEN HAVO WISKUNDE B
Gerrie Stuurman

10

WIS EN WAARACHTIG

14

EXAMEN VWO WISKUNDE A
Henk Hietbrink

16



EXAMEN VWO WISKUNDE B
Marcel Daems

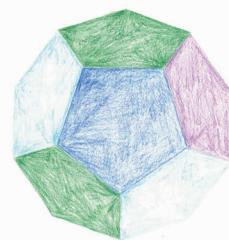
20

EXAMEN VWO WISKUNDE C
Hugo Bronkhorst

24

'WISKUNDE BLIJFT EEN DOE-VAK'
INTERVIEW MET RUUD STOLWIJK,
WISKUNDEDOCENT
OP DE VRIJESCHOOL ZUTPHEN
Constantijn Tilanus

28



BOEKBESPREKING
GIRAF 3: REKEN MAAR
Klaske Blom

30

STELLING VAN PYTHAGORAS:
NIEUW BEWIJS DOOR SCHOLIEREN
Rogier Bos

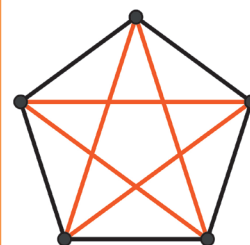
32

UITDAGENDE PROBLEMEN
EEN GLADDE EXAMENOPGAVE
Jacques Jansen

34

GROTE VERWACHTINGEN
Jeroen Spandaw

38



ROEST RUST (NIET)
DODECAËDER
Ab van der Roest

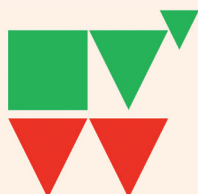
41

Foto voorkant: Doolhof (maze), waarschijnlijk gemaakt door vuurtorenwachters in de 19^e eeuw, op Bryer, Isles of Scilly, Verenigd Koninkrijk. Foto: Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

VERENIGINGSNIEUWS
JAARVERGADERING/STUDIEDAG 2023

42



IN MEMORIAM FRITS GÖBEL

Marja Bos
Klaske Blom

44

PUZZEL

Esther Bod

45

SERVICEPAGINA

46



Kort vooraf

Jaargang 99! Inmiddels is er al enige research verricht voor de 100e jaargang. Zo heeft de Koninklijke Bibliotheek laten weten dat er daar nog acht oudere

Nederlandse tijdschriften bekend zijn, variërend van *De Gids* ('nieuwe vaderlandsche letteroefeningen', opgericht in 1837) tot de *Panorama* ('geïllustreerd weekblad in koperdiepdruk' vanaf 1913). Maar bijvoorbeeld ook *De Ingenieur* ('Orgaan der Vereeniging van Burgerlijke Ingenieurs', sinds 1886). Vreemd genoeg staat het *Nieuw Archief voor Wiskunde* niet in het lijstje van de Koninklijke Bibliotheek, terwijl dat tijdschrift toch al sinds 1875 bestaat.

Maar nu eerst het traditionele examen-nummer. Het is wederom gelukt om van ieder centraal schriftelijk eindexamen een bespreking te kunnen plaatsen. Veel dank daarom aan Ilona van Houwelingen (vmbo), Maarten Müller (havo A), Gerrie Stuurman (havo B), Henk Hietbrink (vwo A), Marcel Daems (vwo B) en Hugo Bronkhorst (vwo C), die in dezelfde tijd dat de examens nagekeken moesten worden ook nog een bespreking schreven. Daarnaast gaat Jacques Jansen dieper in op een wiskunde-B-examenvraag van vorig jaar, over de Bézierkrommen. In maart van dit jaar dook op diverse plaatsen het bericht op dat twee highschool-leerlingen, Calcea Johnson and Ne'Kiya Jackson, een volstrekt nieuw bewijs van de stelling van Pythagoras hadden geconstrueerd. Rogier Bos laat zien hoe dat bewijs eruitziet. Calcea en Ne'Kiya zélf zeggen in interviews dat ze dit nooit zonder hun docenten voor elkaar hadden gekregen: zij waren het die hen aanspoorden om te blijven proberen dit voor elkaar te krijgen. "We have really great teachers", aldus Calcea. Laat dat ons inspireren om er het komende schooljaar weer het mooiste van te maken!

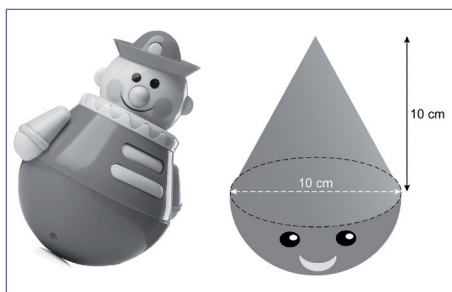
Tom Goris

Examen vmbo-gl en -tl

Ilona van Houwelingen plaatst het wiskunde-examen vmbo-gl en -tl in het perspectief van haar eigen leerlingen en constateert dat de meeste contexten bij de belevingswereld van de technische vmbo-leerlingen passen. De N-term is 1,2.

Inleiding

In mijn werk als wiskundedocent probeer ik al jaren aan te sluiten bij de belevingswereld van de leerlingen die ik les geef. Na vele jaren op brede vmbo-scholen met diverse profielen werk ik dit schooljaar voor het tweede jaar op een technische school. Vanuit de belevingswereld van deze leerlingen heb ik dit examen bekeken. Wat me opvalt is dat er gekozen is voor zeer diverse onderwerpen, waarvan een aantal maatschappelijk zeer relevant is.



figuur 1

Tuimelaar

Wat is dit?! Was mijn eerste reactie bij dit onderwerp, zijn we kleuters of zo.... De start dit jaar ging over speelgoed, niet echt iets wat past/aansluit bij de belevingswereld van mijn leerlingen. De eerste vragen waren redelijk basic, een tweetal formules van het formuleblad invullen. Bij vraag 2 moesten ze nog wel even de stap naar een halve cirkel maken. De verwarring die bij veel docenten ontstond na tweemaal hetzelfde antwoord, omdat de inhoud van de kegel en de halve bol gelijk waren, heb ik niet teruggezien bij de leerlingen.

Bij vraag 3 moest er een aanzicht worden getekend. Op zich een leuke vraag, maar jammer dat dit aanzicht een cirkelboog bevat. Leerlingen die hun passer hadden

meegenomen of die mochten lenen van een docent of leerling hadden geluk. Een veel gehoorde opmerking op het forum is dat leerlingen er een 3D-tekening van maakten. Geen van mijn examenleerlingen heeft dit gedaan. Dan zie je dat aanzichten veel gebruikt worden in de techniek.

Bij vraag 4 moesten de leerlingen een grafiek, formule en uitkomst combineren om zo met inklemmen (meest gebruikt) of een formule met een derde macht terug te rekenen. Hier bleek dat leerlingen bij inklemmen snel vergeten om over de grens te gaan voor ze een juiste conclusie trekken.

Digitale munt

Dit is een onderwerp waar jongeren mee bezig zijn. Wel jammer dat er een percentage van 10940 % als uitkomst gevonden moest worden. De meeste leerlingen hebben hier geen beeld bij.

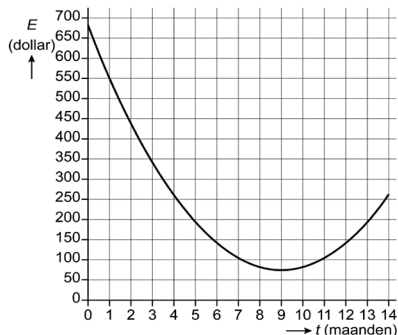
Verder waren vragen redelijk basic met aflezen, invullen, inklemmen. De enige kennis die echt van belang was, was die van de kalender. Gelukkig kwam er een aanvulling op het correctievoorschrift zodat naast (in de loop van) september ook (in de loop van) de negende maand genoemd mocht worden.

De kalenderkennis was ook weer nodig bij vraag 10, want hier moesten ze met de dagen tussen 15 januari en 5 april het hellingsgetal uitrekenen. Verder was het eigenlijk een standaardvraag waarbij ze een lineaire formule moesten opstellen, maar door het rekenen met de kalender is dit vaak niet helemaal gelukt. De formules invullen met behulp van een tabel en hierbij zelf een grafiek tekenen was een vraag die zeer goed gemaakt is. Wel vond ik het jammer dat er niet een duidelijk dal zichtbaar was in de grafiek. Wanneer heeft een leerling nu wel of niet een goede vloeiende lijn getekend? Zie het cv in figuur 2.

11 maximumscore 5

t (maanden)	0	2	4	6	8	10	12	14
E (dollar)	680	440	260	140	80	80	140	260

Voorbeeld van een juiste grafiek:

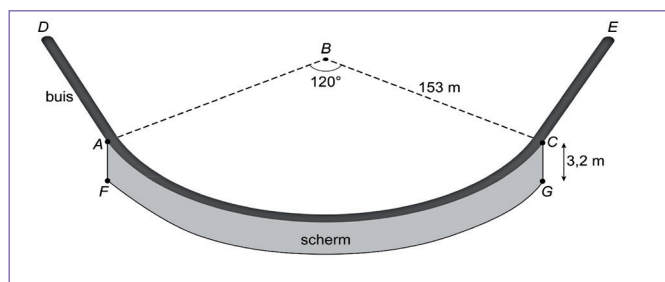


- De juiste waarden invullen van de tabel 2
- Een juiste schaalverdeling bij de verticale as 1
- Het tekenen van de punten uit de tabel 1
- Het tekenen van een vloeiende kromme door de punten 1

figuur 2

Ocean Cleanup

Wederom een onderwerp dat aansluit bij de beleving van de jongeren. De eerste vragen over dit onderwerp passen mooi bij wat de leerlingen zouden moeten kunnen, een vraag over vergroting, procenten gekoppeld aan grote getallen en het meten van een koers.



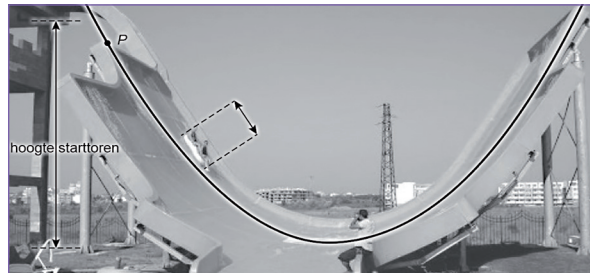
figuur 3

Daarna volgden twee vragen over het scherm zelf, zie figuur 3. Dit was voor veel leerlingen echt een struikelblok. Allereerst vraag 15: de eerste stap is inzien dat de bovenrand/deel van de cirkelboog in feite dus een rechte lijn van rechthoek AFGC is. Dan dit deel van de cirkelboog uitrekenen, dus inzien dat het $\frac{1}{3}$ is van een gehele cirkel. Dan vervolgens nog de oppervlakte van de rechthoek zelf uitrekenen.

Als de leerling dit dan gelukt was, volgde vraag 16. Hier moesten ze met behulp van de sinus de helft van zijde AC uitrekenen en deze dan verdubbelen om zo AC te krijgen. Dus niet de cirkelboog AC die bij vraag 15 gevraagd was. Een gevolg van deze vraag was dat leerlingen na deze

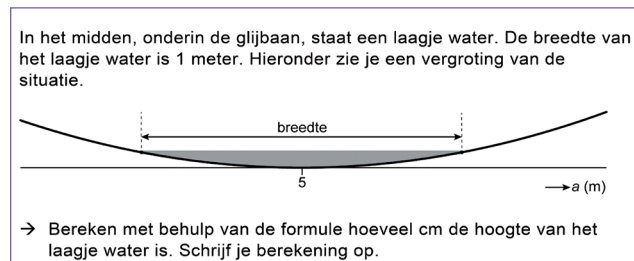
vraag teruggingen naar vraag 15 om met de uitkomst van deze vraag alsnog de vorige te beantwoorden. Dit is uiteraard niet correct, maar ik begrijp deze denkwijze heel goed. Zowel vraag 15 als 16 vereiste naar mijn mening veel inzicht.

Waterglijbaan



figuur 4

Een leuk onderwerp, hier kan eigenlijk iedereen wel een voorstelling van maken, zeker met de foto erbij, zie figuur 4. Het begint met een 'meet-en-vergroot'-vraag, daarna een vraag waarbij ze wederom (was ook al bij vraag 11) een kwadratische formule moesten invullen.

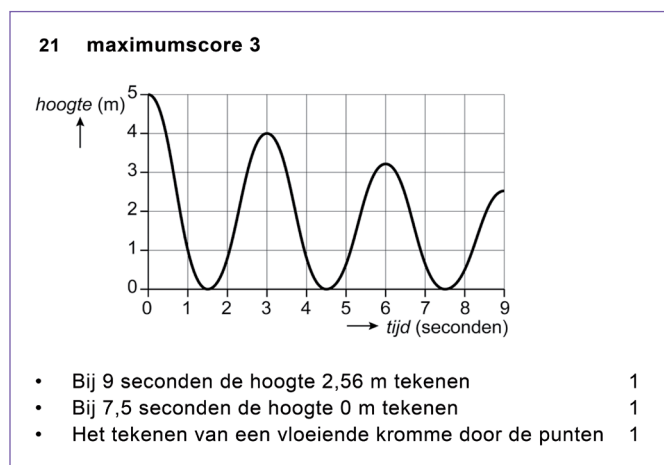


figuur 5

Bij vraag 19 moesten ze vervolgens met behulp van een afbeelding en begrijpend lezen de formule weer invullen maar nu ook omzetten van meter naar cm. Ik zou het prima gevonden hebben als in het plaatje had gestaan breedte = 1 m, want volgens mij is het doel dat ze inzien dat het aan twee kanten is, dat ze dus 4,5 (of 5,5) gaan invullen en het antwoord vervolgens omzetten naar cm. Nu moeten ze eerst de combinatie van 1 m uit de tekst bij de tekening zien. Hierdoor werd het een vraag waarbij ze goed moesten kunnen lezen i.p.v. inzicht hebben in de situatie. Helaas voor mij, maar fijn voor de leerlingen kregen ze toch nog 2 punten als ze 4 of 6 hadden ingevuld en zelfs nog een punt als ze iets onzinnigs hadden ingevuld maar wel goed naar cm hadden omgezet, volgens het correctievoorschrift. Zo kregen de leerlingen die echt vanuit inzicht hadden laten zien wat de bedoeling was maar 1 puntje meer, dan een leerling die niet echt doorhad wat hij aan het doen was. >

Bij vraag 20 heb ik de meest mooie en uitgebreide berekeningen gezien, helaas voor de leerlingen maar 1 punt omdat het natuurlijk ook met een eenvoudige $3,2 \times 0,8$ uitgerekend kon worden. Van het uitrekenen van 20% en dan eraf halen tot gewoon 80% uitrekenen tot het antwoord zoals in het correctiemodel, is langsgelopen.

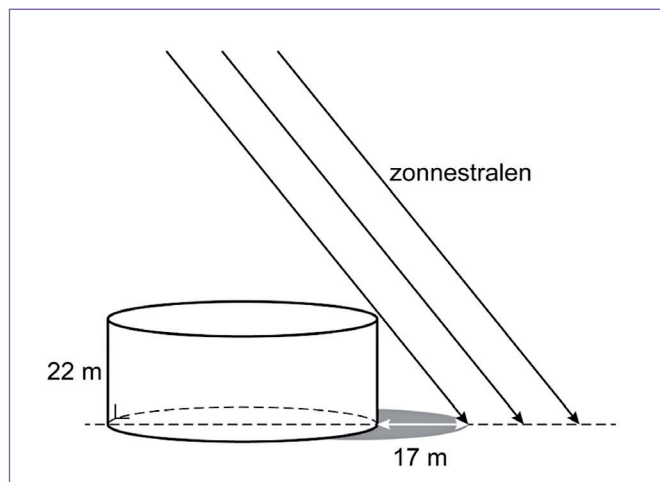
Het had hier misschien mooi gepast om ze er een formule bij te laten opstellen. Er werd echter gevraagd een tekening van een, hoe noemen we dit correct, afnemend periodiek verband te maken. Ook hier heb ik diverse variaties gezien, ook van correctoren. Wat hoofdzakelijk werd goedgekeurd was als de punten correct getekend waren en er een afbuiging/duidelijke top zichtbaar was bij (9; 2,56). Wat echter niet terug te vinden was bij de puntenverdeling in het correctievoorschrift, zie figuur 6.



figuur 6

Tankopslag

Dit onderwerp lag waarschijnlijk voor veel leerlingen niet echt dichtbij, maar was voor onze leerlingen wel prima. De eerste vraag ging over schaal, opmeten en vervolgens omzetten. De stap 1500 m naar 150 000 cm is nogal eens vergeten, maar het opmeten van 10 cm en hiermee gaan rekenen lukte bijna iedereen. Waar bij vraag 23 in het correctievoorschrift staat dat deze wordt opgelost met inklemmen, heb ik dit bij mijn eigen leerlingen bijna niet gezien. Zij zijn gaan terugrekenen met de formule. Maar ik heb ook de oplossing met het gebruik van de schaal zien terugkomen. Leuk om te merken dat er bij deze vraag zoveel verschillende oplosmethoden zijn. En niet zo dat slechts een enkele leerling een andere oplossing gebruikt, maar echt grote groepen. De één-na-laatste vraag was echt een in-koppertje, dacht ik. Even twee gegeven getallen vermenigvuldigen en correct omzetten in liters en wetenschappelijke notatie. Maar dit bleek nog niet zo eenvoudig...



figuur 7

Bij de laatste vraag kwam nog een keer goniometrie aan bod, een duidelijk plaatje, de gegevens erbij, dan de tangens berekenen, zie figuur 7. Een enkele leerling snapt niet dat de hoek van de zonnestrallen met de grond op de grond zit...

Conclusie

Het was een mooi examen, waarin alle onderwerpen aan bod zijn gekomen. Naar mijn mening waren de vragen vrij basic en miste ik soms net even de stap naar wat meer inzicht en diepgang. Die inzichtsvragen kwamen bij vraag 15 en 16 een beetje uit de lucht vallen en had bij vraag 19 wat meer gewaardeerd kunnen worden.

Verder vind ik het jammer dat bepaalde onderwerpen meerdere keren worden getoetst. Vaak formules invullen: een kwadratische formule invullen zelfs bij drie vragen. Vergroten en schaal is bij de laatste drie onderwerpen steeds als eerste vraag gesteld.

Waar ik kansen zie, is bij het opstellen van formules, dit jaar slechts een keer een lineaire. En de koppeling van tekst in de afbeelding zodat de leerlingen wiskundig inzicht kunnen gebruiken in plaats van begrijpend lezen. Uiteraard heb ik dit wel bekeken vanuit mijn huidige schoolsituatie. Dit examen sloot, op het eerste onderwerp na, goed aan bij de beleving van mijn leerlingen.

Over de auteur

Ilona van Houwelingen is wiskundedocent op het Gilde Vakcollege Techniek te Gorinchem, lid van het bestuur en van de werkgroep vmbo van de NVvW en lid van de commissie Onderwijs van het PWN.

E-mailadres: i.vanhouwelingen@nvww.nl

Examen havo wiskunde A

Doelen van wiskundeonderwijs zijn op allerlei manieren in te delen. Een manier om dat te doen is onderscheid te maken in kennis-, vaardigheids- en probleemoplosdoelen. Maarten Müller analyseert het examen havo wiskunde A eerste tijdvak met deze indeling in het achterhoofd. De N-term is 1,3.

Inleiding

Het eerste jaar zonder coronamaatregelen. In 4 havo is het ons vorig jaar niet gelukt om net zo veel stof te behandelen als andere jaren en een groot deel van de leerlingen heeft ook in de tweede en derde klas last gehad van corona, dus het was nog wel spannend of we het allemaal wel zouden halen. Dat zorgde er ook voor dat ik echt moest kiezen waar we de tijd nog in zouden stoppen aan het eind. Pèpe, één van mijn leerlingen zei dan ook na het eindexamen: 'De opgaves met herleiden en beredeneren vond ik het lastigst.' Dit waren ook precies de onderwerpen die een beetje in de verdrukking waren gekomen, hoewel dit andere jaren ook wel als lastig werd aangemerkt. Gelukkig voegde hij nog wel toe: 'Ik vond het wiskunde-A-examen over het algemeen wel goed te doen. Ik hoop op een voldoende.'

Kennisvragen

In dit eindexamen zat een tweetal vragen waarin het hebben van een stukje kennis essentieel en voldoende was om de gestelde vragen te beantwoorden. Dit betrof twee statistiekvragen. In de ene moest uitgelegd worden waarom een steekproef niet aselekt was (vraag 10). In de tweede moesten leerlingen van drie verschillende variabelen aangeven of ze ordinaal waren of niet en hier een toelichting op geven (vraag 11). Gelukkig had ik er bij mijn leerlingen op gehamerd dat ze moesten weten dat een steekproef representatief is als deze voldoende groot is en als elk individu uit de populatie een even grote kans heeft in de steekproef terecht te komen. Mijn leerlingen vroegen steevast of dat hetzelfde is als aselekt, wat ik dan beaamde.

Overigens vond ik dat er ook wel wat aan te merken was op de gekozen variabelen vanuit een maatschappelijk

oogpunt. De variabele 'geslacht' splitste op in slechts twee geslachten en de variabele schoolniveau benadrukte nogmaals dat we spreken van lage en hoge schoolniveaus. Ik was dan ook erg benieuwd of het correctievoorschrift nog de mogelijkheid openliet om de variabele schoolniveau als niet ordinaal aan te duiden met een goede uitleg. Ik zou dat wel mooi hebben gevonden, maar ik zag het niet. Een creatieve nakijker laat hier misschien algemene regel 3.3 (zie figuur 1) op los.

3.3 indien een antwoord op een open vraag niet in het beoordelingsmodel voorkomt en dit antwoord op grond van aantoonbare, vakinhoudelijke argumenten als juist of gedeeltelijk juist aangemerkt kan worden, moeten scorepunten worden toegekend naar analogie of in de geest van het beoordelingsmodel;

figuur 1: Algemene regel 3.3

Vaardigheden

Een aantal bekende basisvaardigheden die vaker langskwamen waren ook dit jaar weer in het eindexamen vertegenwoordigd. Ik tabel 1 op pagina 8 is te zien welke vaardigheden ik ontdekte in dit eindexamen.

Als een vaardigheid wordt gevraagd op een toets, dan zijn daar natuurlijk nog verschillende varianten in. Je kunt de eenvoudige versie van de vaardigheid terugvragen of juist de moeilijke en je kunt de vaardigheid terugvragen terwijl het overduidelijk is dat je die vaardigheid moet toepassen of dat een leerling eerst nog een proces van probleemoplossen door moet om erachter te komen. Dit jaar is er naar mijn inschatting voor gekozen om vaak voor de eenvoudige variant van de vaardigheid te kiezen. Een enkele keer gebeurde dit niet, hieronder enkele voorbeelden.

Vaardigheid	Vraag
getal invullen in een formule	1
rekenen met percentages	1, 5, 7 en 21
vergelijkingen oplossen met de GR	2, 15 en 19
herleiden	3 en 17
lineair extrapoleren	4 en 9
omrekenen van groeipercentages	6
formule van een omgekeerd evenredig verband opstellen	8
betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie opstellen	12
φ -coëfficiënt berekenen	13
minimum bepalen met de GR	18
redeneren over stijgen en dalen	20

tabel 1 Gevraagde vaardigheden

Bij het rekenen met percentages was de vraag meestal erg eenvoudig, maar in één opgave werd er gesproken van een toename van 1050% en moest er ook nog teruggerekend worden naar de 100% (vraag 5, zie figuur 2). Dat vinden leerlingen doorgaans wel lastig. Vraag 7 was wél een erg lastige, maar hier is eigenlijk dan ook geen sprake van het eenvoudig toepassen van een vaardigheid. Over deze vraag kom ik later nog te spreken.

Mobiel dataverbruik

Op de hele wereld gebruiken mensen hun mobiele telefoon steeds meer. De hoeveelheid verbruikte mobiele data neemt daardoor elk jaar toe.

In Nederland was in 2017 het totale mobiele dataverbruik 325 miljoen gigabyte (GB), een stijging van 1050% ten opzichte van 2013.

- 5 Bereken het totale mobiele dataverbruik in Nederland in 2013. Geef je antwoord in hele miljoenen GB.



figuur 2

Bij het herleiden werd duidelijk voor de eenvoudige varianten gekozen, dus niet exponentieel of met negatieve exponenten. Bij de substitutie (vraag 3) moest $A = 1,75 + 0,05 \cdot l$ ingevuld worden in $U = 60 + 10 \cdot A$ en de herleidopgave met breuken was er één waarbij

$T = \frac{0,5 \cdot 0,1 \cdot 60}{n+1} + 20n$ herleid moest worden tot één breuk (vraag 17). Van beide kan gezegd worden dat dat niet het moeilijkste van het moeilijkste is, zou ik denken en zeker vraag 3 lijkt me ronduit eenvoudig, als een leerling het concept substitutie begrepen heeft. Bij vraag 17 heb ik veel leerlingen toch maar 2 van de 4 punten kunnen toekennen, omdat ze de laatste twee stappen in één keer maakten. Ik heb de indruk dat een deel van de leerlingen toch echt wel wist hoe het herleiden moest, maar dat ze het te kort opschreven, waardoor er 2 punten weg waren.

Bij het extrapoleren werd in beide gevallen met de variabele tijd gewerkt, wat voor leerlingen een herkenbare context is. Wel moest één keer doorgerekend worden naar een jaartal in de toekomst (vraag 4), terwijl de tweede keer gevraagd werd in welk jaar een bepaalde hoeveelheid bereikt werd (vraag 9). De formule van een omgekeerd evenredig verband is moeilijk voor veel leerlingen, omdat het een klein onderwerp is, waardoor het niet zo vaak behandeld is, maar de opgaven over de φ -coëfficiënt (vraag 13) en de betrouwbaarheidsintervallen (vraag 12) was rechttoe rechtaan, met dien verstande dat bij de φ -coëfficiënt de oude truc (waar ik mijn leerlingen voor had gewaarschuwd) uit de kast gehaald werd om niet de aantallen per groep te geven, maar de aantallen van één van de groepen en het totaal. Al met al was het examen dus, wat dit betreft, niet zo spannend.

Probleemoplossen

Zat de moeilijkheid dan in het probleemoplossen? Dat valt nog te bezien. Meestal betekende probleemoplossen voor de havo-leerlingen vooral dat ze zich door hoeveelheden tekst, tabellen en grafieken moesten ploegen, maar mijn leerlingen vonden het in deze editie nog wel meevallen. Het lastige is wel dat de meeste methodes daar niet erg goed op voorbereiden. Het deed me goed dat ik van veel van mijn leerlingen hoorde dat ze de laatste opgave (opgave 21) met anderhalf kantje aan tekst toch prima te doen vonden, terwijl ik dacht dat ze daar veel problemen mee zouden hebben. Waar zaten dan de leuke interessante nieuwe dingen? Ik vond er drie, waarbij ze zeker niet alle drie even origineel waren.

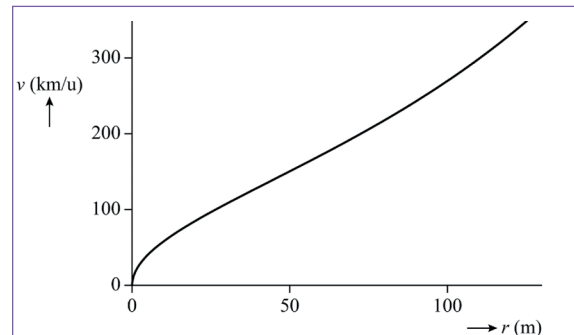


figuur 3

In opgave 7 (zie figuur 3) moesten leerlingen rekenen met procenten, terwijl de aantallen niet gegeven waren. Het correctievoorschrift geeft als suggesties zelf aantallen te kiezen of met verhoudingen te rekenen. Helaas werd middels een aanvulling op het correctievoorschrift medegedeeld dat we bij deze opgave alle punten moesten toekennen aan alle leerlingen.

In opgave 14 moest gerekend worden met de effectgrootte, maar deze keer werd gemeld dat de beide steekproefstandaardafwijkingen gelijk waren en moest er terug-gerekend worden bij welke steekproefstandaardafwijking de conclusie zou zijn dat het verschil middelmatig is. Wat mij betreft een behoorlijk gezochte vraag, aangezien ik me geen echte situatie voor kan stellen waarin je de steekproefstandaardafwijking niet kent en je je dit afvraagt,

maar in ieder geval werd er deze keer niet opnieuw gekozen voor een onbekende steekproefomvang, die vervolgens uitgerekend moest worden, zodat de strategie van het aanleren van dat stappenplan zonder enig begrip afgestraft werd. Tot slot zou ik nog iets willen zeggen over de in mijn ogen mooiste vraag van het eindexamen.



figuur 4: Uitwerkbijlage en vraag 16

In vraag 16 moesten leerlingen in de grafiek op de uitwerkbijlage, zie figuur 4, het *gebied* aangeven waar de coureur uit de bocht vliegt. Ik vind deze vraag in het bijzonder leuk, omdat ik de paragraaf waarin dit onderwerp wordt behandeld in het boek heb overgeslagen, met de mededeling dat ze vragen over dit onderwerp wel zouden kunnen beantwoorden met een goed begrip van grafieken. Ik ben nu heel erg benieuwd of mijn leerlingen deze vraag inderdaad niet slechter maken dan leerlingen bij wie dit onderwerp wel is behandeld. Ik merkte dat sommigen van mijn leerlingen de vraag niet goed begrepen, omdat zij dachten dat het assenstelsel niet tot de grafiek behoort. *Getal & Ruimte* maakt in de brugklas al onderscheid tussen de grafiek en het assenstelsel en spreekt van tekenen in de figuur in plaats van tekenen in de grafiek. Het woord gebied had ze wel weer op het juiste spoor moeten zetten.

Conclusie

Het eindexamen lijkt niet erg origineel, maar daardoor ook niet al te moeilijk.

Over de auteur

Maarten Müller is werkzaam als eerstegraads docent wiskunde aan het Marianum in Groenlo.

E-mailadres: m.muller@marianum.nl

Examen havo wiskunde B

Een examen in balans met één context waar ze minder tevreden over was: zo bespreekt Gerrie Stuurman het havo wiskunde-B-examen. De N-term is 1,7.

Een goed begin

Als onderdeel van de voorbereiding op het examen bespreek ik elk jaar de puntenverdeling van het examen. Bij de meesten van jullie zal het wel bekend zijn, dat je deze informatie uit WOLF kunt halen en dat deze bij het Cito^[1] te vinden is als onderdeel van de examenroosters, zie figuur 1.

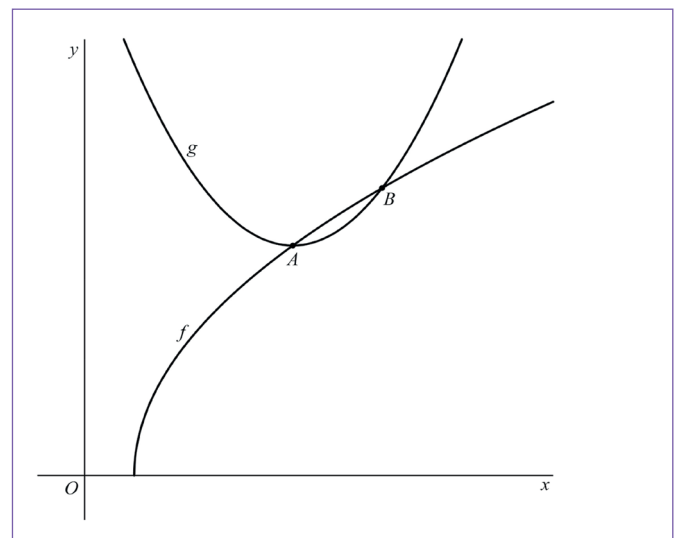
Examen: HAVO wiskunde B 2023 tijdvak 1							
Opbouw examen							
Volg-nummer	Item-label	Vraag-soort	Aantal altern.	Ongewogen max. score	Item gewicht	Gewogen max. score*	Aftrek-punten
1	1	Open		3	1	3	
2	2	Open		8	1	8	
3	3	Open		4	1	4	
4	4	Open		6	1	6	

figuur 1

Mijn leerlingen wisten dus dat ze bij de eerste vier opgaven al 21 van de 75 punten konden gaan halen. Mijn uitleg bij opgaven met veel punten is dat het opgaven zijn met veel stappen, waarbij de stappen zelf allemaal niet heel moeilijk zijn. Wel is het zaak om te zorgen dat er geen ‘domme’ rekenfoutjes worden gemaakt. Bij zo’n fout aan het begin komt de rest van de opgave waarschijnlijk ook niet meer ‘mooi’ uit en moet de leerling zich met ingewikkelde antwoorden nog door een deel van de te verdienen punten heen worstelen. Gebruik bij twijfel je grafische rekenmachine om je antwoorden tussendoor te checken. Mijn advies hebben ze blijkbaar goed in hun oren geknoopt. Bij opgave 2 en opgave 4 halen ze gemiddeld 80% van de punten. Mooi!

Maar goed, waar gaan die opgaven dan over?

De eerste context heet *Parabool en grafiek* van een wortelfunctie. De functies waarmee gewerkt moet worden zien er bekend uit: $f(x) = 2\sqrt{3x-5}$ en $g(x) = a(x-p)^2 + q$, zie figuur 2.



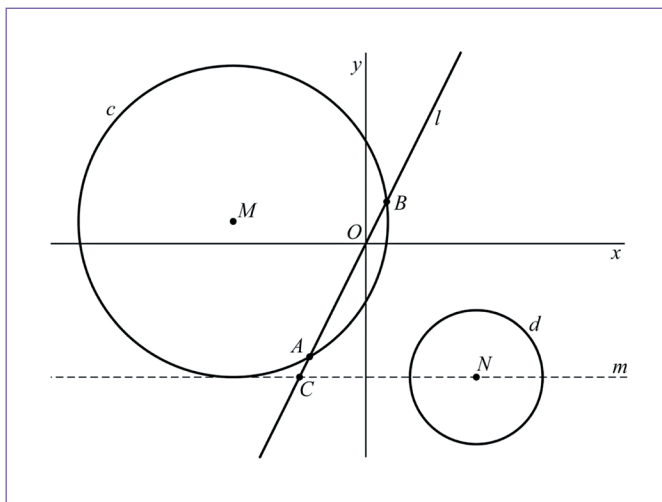
figuur 2

Bij de eerste opgave moet het domein van f exact worden bepaald. Bij opgave 2 moeten de exacte waarden van a , p en q worden bepaald aan de hand van een aantal gegevens: A is de top van de grafiek van g en de helling van de grafiek van f in dat punt is gegeven. Van B is de x -coördinaat gegeven. Er moet gedifferentieerd worden met de kettingregel en er moet een aantal vergelijkingen exact worden opgelost. Het zijn voor de leerlingen fijne opgaven om mee te starten.

Cirkels en lijnen

In deze context met de (uiteraard) toepasselijke titel *Twee cirkels en twee lijnen* is de vergelijking van de cirkel c en lijn l gegeven, zie figuur 3. Bij opgave 3 moeten de leerlingen algebraïsch de x -coördinaat van punt B berekenen. Een standaardopgave waar lekker punten gescoord kunnen worden en dat doen mijn leerlingen dan ook.

Bij opgave 4 wordt nog een tweede lijn en een tweede cirkel geïntroduceerd, zie figuur 3.

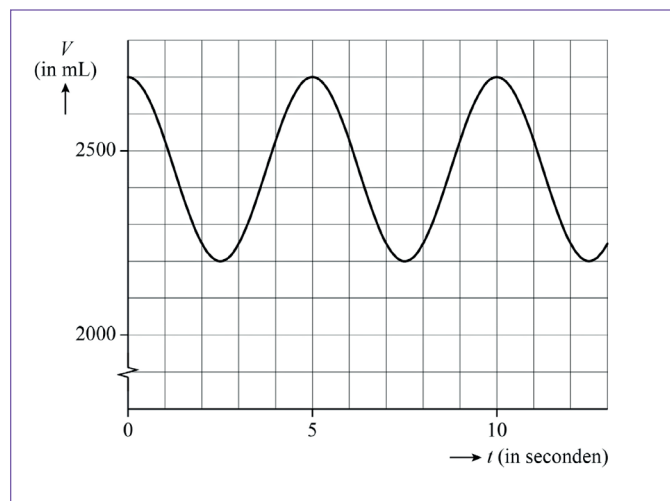


figuur 3

Van deze lijn m is gegeven dat deze de onderkant van cirkel c raakt. Van middelpunt N is gegeven dat hij op lijn m ligt en op afstand 8 rechts van punt C . De straal van cirkel d is 3. Voor 6 punten moet er flink wat 'analytisch-meetkundige'-stappen gezet. Ook dit is bekend terrein voor de leerlingen.

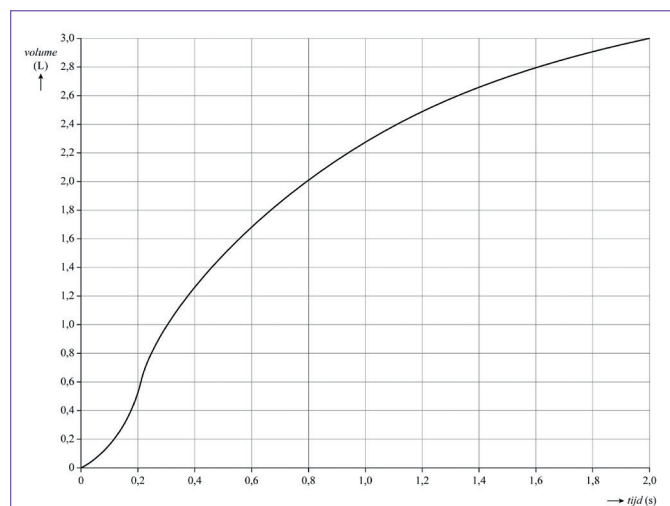
Adem in ..., adem uit ...

Bij de context *Ademhaling* gaat het over longvolume en de snelheid van het ademen. Bij opgave 5 moet een functievoorschrift van een sinusoïde worden opgesteld, zie figuur 4. Dat hebben we heel veel geoefend. Alleen het laatste punt van deze 4-puntsopgave wordt door de meeste leerlingen niet gehaald. In plaats van $r = \frac{2}{5}\pi$, moeten de leerlingen dit omrekenen naar een decimaal antwoord met aangegeven nauwkeurigheid. Of het forum van de NVvW kom ik termen tegen als 'flauw' en 'zuur'. En ik ben het daarmee eens.



figuur 4

Bij opgave 6 wordt gekeken naar de formule die hoort bij het longvolume van iemand die zich aan het inspannen is: $V = 2500 + 1200 \cdot \sin(4,19(t - 0,37))$. Er moet berekend worden hoeveel liters lucht deze persoon inademt per minuut. In de tekst staat het (overbodige) gegeven dat dit volume bijna 100 liter is. Er zijn meerdere leerlingen die hiermee gaan uitrekenen hoe vaak deze persoon dus blijkbaar inademt. Dat snap ik. Was ook eerst heel even mijn gedachte. De bedoeling is natuurlijk dat je die '4,19' omrekent naar het aantal keren dat deze persoon in een minuut inademt. Tezamen met twee keer de amplitude levert dit 96 liter op. Bij opgave 7 moet de maximale snelheid van het inademen benaderd worden door het tekenen van een raaklijn in het juiste punt van de grafiek, zie figuur 5. Volgens mij is dat nog niet eerder gevraagd in een wiskunde-B-examen. Gelukkig hebben al mijn leerlingen ook natuurkunde, dus ze weten hoe het moet. De punten die ze verliezen zijn veelal het niet benoemen of laten zien om welk punt van de grafiek het hier gaat.



figuur 5

Kunstwerkje van beton

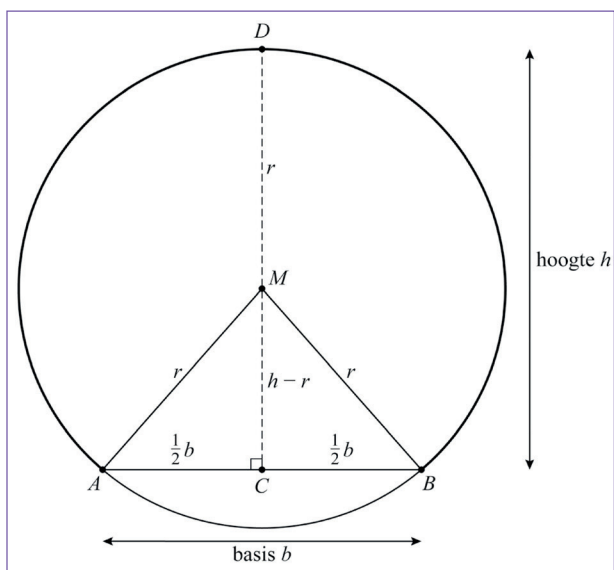


figuur 6

Het kunstwerk *Transition* staat ergens in Nederland langs een autoweg, zie figuur 6. Ik vind deze opgave een voorbeeld van het gebruik van een context die past bij wiskunde B. Ja, je kunt je natuurlijk afvragen hoe vaak zo'n kunstwerk gemaakt wordt, maar de toepassing van een vlakke vloer in een buis komt vast wel vaker voor. Er wordt in ieder geval niet veel tekst gebruikt om dit kunstwerk te 'vertalen' naar een meetkundig probleem. Bij opgave 8 moet de juistheid van de formule

$$r = \frac{\frac{1}{4}b^2 + h^2}{2h}$$

worden aangetoond bij de situatie zoals die in figuur 7 wordt getoond. De stelling van Pythagoras ligt voor het inkoppen. Toch wordt er door mijn leerlingen minder dan 30% van de punten gehaald. Het werkt blijkbaar afschrikwekkend, zo'n formule met drie onbekenden. Toch past zo'n vraag in dit examen.

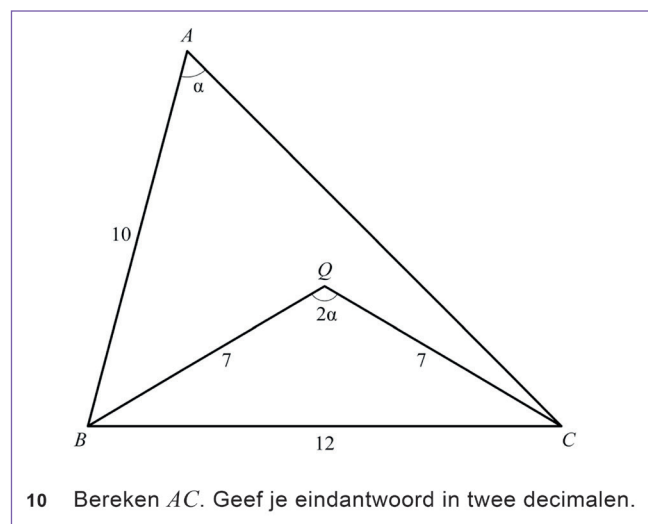


figuur 7

Bij opgave 9 wordt gegeven dat $r = 1,63$ en dat daarmee de bovenstaande formule te herleiden is naar de vorm $b = p \cdot \sqrt{q \cdot h - h^2}$. Met meer 'letters' in de opgave, gaat de opdracht waarschijnlijk nog moeizamer. Maar dat blijkt anders. Bij deze opgave wordt 50% van de punten gescoord. Dat valt weer mee.

Half uit de hoek komen

De context *Halve hoek* bestaat uit één opgave voor 6 punten, zie figuur 8. Het is een mooie meetkunde-opgave waarbij er verschillende manieren zijn om de vraag op te lossen. De cosinusregel, de sinusregel, de stelling van Pythagoras en gelijkvormigheid. Er is volop keuze. De meeste leerlingen weten van deze opgave wel iets te maken. Dit soort opgaven maken leerlingen altijd beter als er geen afleidende (en verwarrende?) context bij staat.



figuur 8

Exponentiële functies

De context *Twee functies* is een mooie context met drie opgaven waarbij kennis van translaties nodig is en waarbij een vergelijking met twee exponentiële functies exact moet worden opgelost. Het zijn mooie vragen. Hier hebben de leerlingen veel op geoefend. Opgave 12, de tweede vraag bij deze context, is met een percentielscore van 0,90 de best gemaakt opgave van het hele examen bij mijn leerlingen. Hiervoor hebben de leerlingen de vergelijking $2 \cdot 2^{x-3} - 4 = 10$ opgelost. Het is ook de enige opgave in het hele examen waarbij een logaritme nodig is. De vergelijking $2 \cdot 2^{x-3} - 4 = -2^{x-3} + 2$ bij opgave 13 vinden de leerlingen een stuk lastiger om exact op te lossen, terwijl dit type opgave ook in de methode geoefend is.

Tienkamp

Bij het omslaan naar de bladzijden met deze context is de eerste indruk dat je in een wiskunde-A-examen bent beland. Dat komt zowel door de hoeveelheid tekst als door het onderwerp *Tienkamp* met de onderdelen hoogspringen en hardlopen. Omdat een en ander mij bekend voorkwam, ben ik op zoek gegaan in oude examens. En jawel. Gevonden! In het examen vwo wiskunde A van 2013 tijdvak 1 komt de context *Zevenkamp* voor met de onderdelen hordenlopen en verspringen. Zelfs het soort vragen is vergelijkbaar bij twee van de drie opgaven.

Bij opgave 14 moeten de waarden van twee parameters a en b worden bepaald door gegevens in te vullen in de formule $P = a \cdot (H - b)$. Een simpel lineair verband, dat lukt best aardig. En inderdaad, je kunt de eerste twee alinea's tekst gewoon overslaan en dan kun je de opgave nog steeds prima maken.

Voor opgave 15 wordt overgestapt naar een machtsverband: $P = 0,8465 \cdot (H - 75)^{1,42}$. Er wordt gevraagd om uit te leggen dat de grafiek van deze formule toenemend stijgend is, zonder deze term te noemen. Er staat dat ze uitleg moeten geven zonder getallen in te vullen en zonder te schetsen of te tekenen. Het overgrote deel van de leerlingen heeft hierdoor geen idee wat dan wel mag. Deze wijze van formuleren kennen ze niet. Ik denk dat als de term 'toenemend stijgend' was gebruikt, dat de leerlingen verder gekomen zouden zijn. Er had hier ook gevraagd kunnen worden om met behulp van de afgeleide te laten zien dat er sprake was van een toenemende stijging. Dat zou dan 'twee-vliegen-in-één-klap' geweest zijn. Het moeten differentiëren van een functie met de kettingregel en een herkenbare vraagstelling. Gelukkig is het maar een 2-punts vraag. De meeste leerlingen gaan 'onder de lat door' met nul punten.

Bij opgave 16 wordt na wat tekst over het altijd naar beneden afronden op gehele getallen bij de punten-telling een tweede formule geïntroduceerd voor het onderdeel 1500 m hardlopen: $Q = 0,03768 \cdot (480 - t)^{1,85}$. Leerlingen moeten berekenen wat de langzaamste tijd is waarmee je méér punten behaalt dan met een sprong van 228 cm. Sommige leerlingen kunnen niets anders bedenken dan de beide formules maar aan elkaar gelijkstellen. 'Beter iets, dan niets', zeg ik altijd. Het antwoord op deze vraag moet in minuten en seconden worden bepaald, waarbij het aantal seconden op twee decimalen moet worden afgerond. En dat laatste gaat bij mijn leerlingen allemaal fout. Het onafgeronde antwoord is 3 minuten en 44,369... seconden. De voor de hand liggende afronding naar 44,37 seconden is niet

correct, want dat levert maar 1071 punten op in plaats van de benodigde 1072 punten. Tja, wat zal ik daar nu eens van vinden...

Cosinusbreuk

Bij de laatste context *Cosinusbreuk* wordt een functie gebruikt met een cosinusfunctie in de noemer van een breuk: $f(x) = \frac{1}{4\cos(2(x - \frac{1}{3}\pi))}$

Zo'n functie is nog nooit eerder gebruikt voor een examen. Maar bij de vragen die gesteld worden zijn bekende vaardigheden nodig.

Bij opgave 17 moeten de vergelijkingen van beide verticale asymptoten exact worden bepaald. Slechts twee van mijn leerlingen hebben paraat dat voor het vinden van een verticale asymptoot bij een gebroken functie, de noemer gelijk aan 0 gesteld moet worden. De rest 'dobbert' wat rond en gaat gelukkig snel verder naar de laatste opgave. Bij deze opgave wordt de y -coördinaat van punt P gegeven. Leerlingen mogen met hun grafische rekenmachine op zoek naar het snijpunt en dan vervolgens, ook met de rekenmachine, de helling benaderen. Dat gaat bij de helft van de leerlingen goed.

Conclusie

Ik vond het een prima examen. Het sloot goed aan bij het examenprogramma. Dat vonden ook mijn leerlingen, die ik direct na afloop van het examen allemaal gesproken heb. Er zat dit keer weinig met 'logaritmen' in en maar één opgave met differentiëren. Zo zijn er elk jaar wel onderwerpen die even wat minder aan bod komen. De hoeveelheid tekst was bij de meeste opgaven in orde. De context Tienkamp vond ik het minst geslaagd, onder andere door de hoeveelheid tekst die deels nodig was, maar deels ook weggelaten had kunnen worden. De hoeveelheid opgaven waarbij opties op de rekenmachine gebruikt moesten/mochten worden was zeer beperkt. En dat vind ik precies goed. Er zaten veel mooie, echte 'wiskunde B'-opgaven in. Een examen-in-balans.

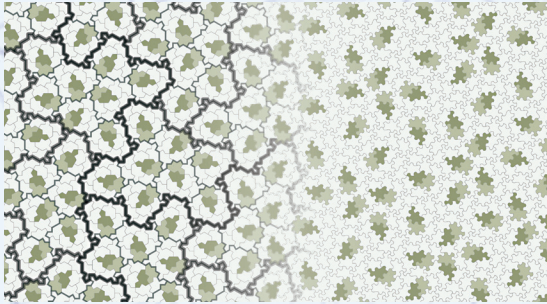
Noot

[1] Zie: https://www2.cito.nl/vo/ce/ex2023_havovwo/frame_builder.htm?havo-tv1.htm

Over de auteur

Gerrie Stuurman is docent wiskunde op Huizermaat te Huizen. E-mailadres: gstuurman@gsf.nl

Nog beter niet-herhalend tegelpatroon



Een deel van een tegelpatroon met spectre-vormen die zich oneindig herhalen zonder reflecties. De spectre-vormen rechts zijn een variant op die links, maar dan met afgeronde hoeken. Beeld: David Smith et al (2023) <https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.17743>

In *Euclides* 98-7 schreven we over de ontdekking van de *hoed*, een vorm waarmee je een oppervlak volledig kunt bedekken zonder ooit een herhalend patroon te vormen. Toch was deze ontdekking nog wat onbevredigend: er was zowel een linkshandige als een rechtshandige versie van de hoed nodig. De vraag bleef of een enkele vorm hetzelfde kon bereiken zonder te hoeven spiegelen. Hetzelfde team wiskundigen heeft nu ontdekt dat een aangepaste versie van de oorspronkelijke vorm dat ook kan, maar dan zonder dat het spiegelbeeld nodig is. De onderzoekers hebben nu de gelijkzijdige veelhoek uit hun eerdere onderzoek aangepast om een nieuwe familie van vormen te scheppen: de *spectres*. De onderzoekers zeggen in hun artikel dat de vorige ontdekking van de hoed duidelijk maakte hoe slecht begrepen tegelpatronen nog zijn. Ze waren verrast dat ze zo snel alweer een doorbraak te pakken hadden.

‘Er is zeker geen bewijs dat de hoed (en het continuüm van vormen waartoe hij behoort) op de een of andere manier uniek is, en we zouden daarom kunnen hopen dat er in het kielzog een diertuin van interessante nieuwe *einsteins* zal opduiken’, schrijven de onderzoekers in hun nieuwe artikel. ‘Desalniettemin hadden we niet verwacht er al zó snel een te vinden.’ Sarah Hart van de Birkbeck Universiteit in Londen zegt dat het nieuwe resultaat nog indrukwekkender is dan de oorspronkelijke vondst. ‘Het is zeer intellectueel bevredigend om een oplossing te hebben die geen spiegelbeeld nodig heeft. Als je echte tegels zou hebben, dan zijn een tegel en zijn spiegelbeeld ook niet hetzelfde’, zegt ze, ‘Met deze nieuwe tegel zijn er niet zulke beperkingen.’

Bron: <https://www.newscientist.nl/nieuws/wiskundigen-ontdekken-nog-beter-niet-herhalend-tegelpatroon/>

De wonderlijke connecties tussen wiskunde en literatuur

Recent verscheen in de New York Times een artikel van de hand van Sarah Hart, een Brits wiskundige die onlangs het boek *Once Upon a Prime: The Wondrous Connections Between Mathematics and Literature* schreef. Wederom een mooie connectie tussen wiskunde en kunst, zoals eerder het befaamde boek over Gödel, Escher en Bach. Het artikel is te lezen via onderstaande bron.

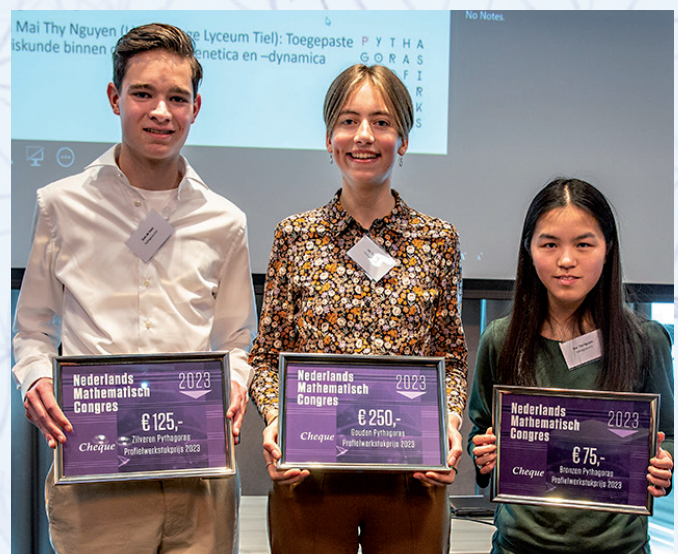
Bron: <https://platformwiskunde.nl/2023/04/10/de-wonderlijke-connecties-tussen-wiskunde-en-literatuur/>

111...11 (getal van 86453 enen) is een uniek priemgetal

De breuk $1/11$ kun je schrijven als 0,090909... met oneindig veel groepjes 09. De ‘periode’ van dit getal is 2, omdat er twee cijfers zijn die zich eindeloos herhalen. Een priemgetal p heet ‘uniek’ als er geen ander priemgetal q bestaat met de eigenschap dat $1/p$ en $1/q$ dezelfde periode hebben. Unieke priemgetallen zijn zeldzaam: 3, 11, 37, 101, 9.091 en 9.901 zijn de enige exemplaren onder de 100.000. Schrijf je 86.453 enen achter elkaar op, dan heb je een uniek priemgetal. Dat werd vorige maand bevestigd na flink wat computergeweld. Het is op dit moment zowel het grootste bekende unieke priemgetal als het grootste bekende priemgetal dat uit louter enen bestaat.

Bron: NRC, 10 juni. Zie ook <https://t5k.org/primes/page.php?id=136044>

Iris Penninga wint Pythagoras Profielwerkstukwedstrijd



Vlnr: Stan de Haas, Iris Penninga en Mai Thy Nguyen

Op 12 april 2023 heeft op het Nederlands Mathematisch Congres de Nationale Pythagoras Profielwerkstukwedstrijd plaatsgevonden. Het aantal ingezonden werkstukken was dit jaar bijna verdubbeld: vijftien tegen acht vorig jaar. Net als vorig jaar was er een grote variatie aan onderwerpen. De jury heeft een keuze van drie finalisten gemaakt. Die drie hebben elk op 12 april een voordracht over hun werk gehouden. Daarna heeft de jury de uiteindelijke uitslag vastgesteld. De finalisten waren: Stan de Haas van het Rijnlands Lyceum in Sassenheim bekeek in *File, File en nog eens File* fileproblemen en hoe deze met behulp van een wiskundig model begrepen en wellicht opgelost zouden kunnen worden. Mai Thy Nguyen van het Lingecollege in Tiel schreef met *Toegepaste wiskunde binnen de populatiegenetica en -dynamica* een doorwrocht werkstuk over het gebruik van de wiskunde in de onderwerpen uit de titel. Iris Penninga van het Odulphuslyceum in Tilburg liet in *Derdegraads vergelijkingen oplossen met origami* zien hoe men met behulp van origami tweede- en vooral derdegraads vergelijkingen kan oplossen. De voordrachten ontlepen elkaar weinig. Ook zagen de werkstukken er goed verzorgd uit. De jury had dan ook enige tijd nodig de prijzen over de drie sprekers te verdelen. De derde prijs ging naar Mai Thy, de tweede prijs naar Stan, en Iris ging met de eerste prijs naar huis.

Bron: <https://www.pyth.eu/verslag-pythagoras-profielwerkstukprijsvraag-2023>

SMART-finale W4Kangoeroe weer groot succes

Op 8 juni werd voor de achtste keer de SMART-finale van W4Kangoeroe georganiseerd. In science center Nemo streken uiteindelijk 57 leerlingen (18 uit groep 7, 21 uit groep 8 en 16 van het vmbo) voor een plaatsje bij de beste drie van hun categorie. De finale werd gespeeld over twee rondes (een met zestien meerkeuzevragen en een met acht open vragen). Na een spannende en enerverende dag was de uitslag in elk van de drie groepen als volgt:

groep 7:

1. Ada Golan met 46 punten
2. Yatharth Aggerwal met 45 punten
2. Pieter Dijkstra met 45 punten

groep 8:

1. Benjamin Butter met 52 punten
1. Hidde Bruggink met 52 punten
3. Abe Lever met 47 punten
3. Chris Lee met 47 punten

vmbo:

1. Raf Nijland met 47 punten
2. Rick Willemsen met 39 punten
3. Floris Raap met 37 punten

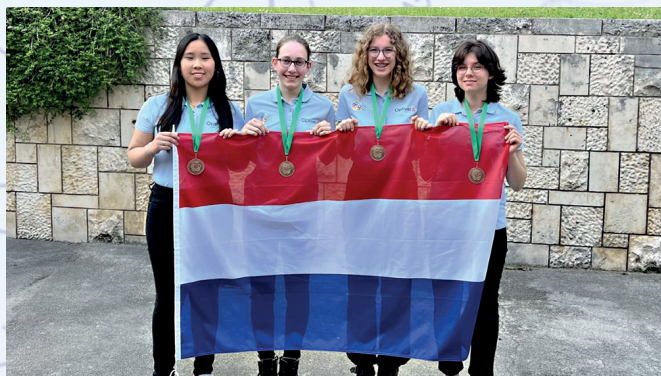
Alle deelnemers kregen dezelfde opgaven en de maximale score was 56 punten.

Het gemiddelde in groep 7 was 35 punten, in groep 8 was dat 40 punten en 29 punten bij het vmbo. De opgaven zijn te vinden in onderstaande bron.

Bron: www.w4kangoeroe.nl

Internationale successen Nederlandse leerlingen

Afgelopen voorjaar presteerden de Nederlandse deelnemers aan de internationale Wiskunde Olympiaden uitstekend. Van 13 tot 19 april namen vier meisjes deel aan de EGMO (European Girls' Mathematical Olympiad) in het Sloveense Portorož. Zij zetten een knappe prestatie neer door alle vier brons te winnen. Zij waren daarmee het eerste Nederlandse team ooit dat vier medailles wist te behalen.



Vlnr: Allie Zong, Lieke van dam, Damaris ter Haar en Katya Nikitchenko

Op elk van de twee wedstrijddagen kregen de leerlingen vier en een half uur de tijd om drie zeer lastige opgaven op te lossen. Voor iedere opgave waren zeven punten te verdienen. De Nederlandse deelnemers hebben de volgende resultaten behaald:

- 24 punten: Allie Zong (17 jaar, 5 vwo, Lorentz Casimir Lyceum Eindhoven)
- 18 punten: Lieke van Dam (18 jaar, 6 vwo, Heerbeek College Best)
- 16 punten: Damaris ter Haar (18 jaar, 6 vwo, Chr. College Groevenbeek Ermelo)
- 16 punten: Katya Nikitchenko (17 jaar, 5 vwo, Huygens Lyceum Eindhoven)

Examen vwo wiskunde A

Henk Hietbrink bespreekt het vwo wiskunde-A-examen in twee delen. Dit artikel is een algemene beschouwing. Op de website bespreekt Henk elke opgave apart. De N-term is 1,4.

Het was weer een mooi examen

Het was een mooi wiskunde-A-examen. De opdrachten waren prachtig uitgewerkt met inleidende tekst, grafieken, handige A3 dubbelgevouwen uitwerkbijlage als omslagmapje, teksten zorgvuldig voorzien van voetnoten en bronvermelding. De uiterlijke verzorging was prima. Ook dit jaar waren er originele contexten met pakkende teksten. Neem het verhaal over whisky. Na dit examen kan iedereen mee praten over het *engelendeel*. Ongelooflijk dat er zoveel whisky verloren gaat tijdens het rijpingsproces. Mocht je niet weten wat het engelendeel is, het examen legt het in heldere woorden uit, zie figuur 1. Ook is er een invoelend verhaal over de teloorgang van de Nederlandse vlinders. Volgend schooljaar kunnen we deze opdrachten prima inzetten bij de nieuwe examenklas. Kortom, ik vind het een mooi examen met prima vragen (op eentje na dan).

Engelendeel

Traditioneel gebrouwen whisky wordt enkele jaren in houten vaten opgeslagen om daarin te rijpen. In het algemeen geldt: hoe langer de whisky rijpt, hoe beter hij smaakt. Lang rijpen heeft echter een nadeel: een deel van de whisky gaat verloren doordat deze in het houten vat trekt of verdampt.

Het deel van de whisky dat tijdens het rijpen verloren gaat, wordt het **engelendeel** genoemd. Het engelendeel wordt uitgedrukt in een percentage per jaar.

figuur 1

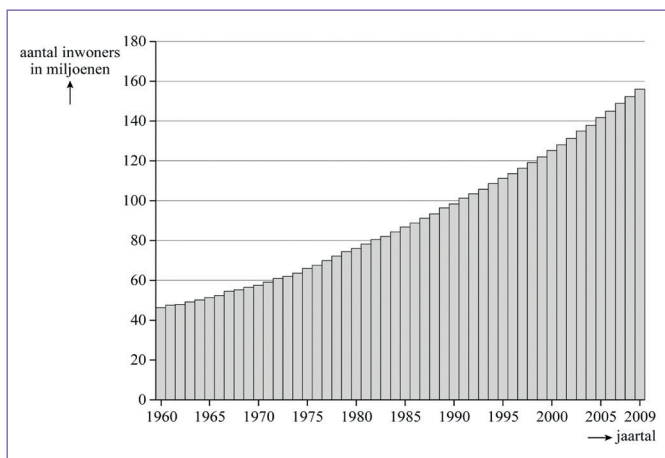
Maar...

Uiteraard is er een maar, een levensgroot maar. Mijn leerlingen is die schoonheid ontgaan. Voor hen was het een zeer lange tekst die hen in tijdnood bracht. Objectief gezien hebben ze gelijk: de lengte van de tekst was een absoluut record met meer dan 2500 woorden. Dat is 10% meer dan het record van twee jaar geleden, 20% meer dan

vorig jaar en 40% meer dan 2018. Mijn leerlingen vonden het daarom helemaal niet mooi, zij wilden wiskunde doen, gewoon rekenen, differentiëren en het liefst een beetje tijd om rustig na te denken over de formulering van de gevraagde redeneringen. Ze hadden alle tijd nodig en hebben opdrachten overgeslagen om op tijd te beginnen aan de korte onderzoeksopdracht. Die opdracht was dit jaar goed te doen.

Onderzoeksopdracht

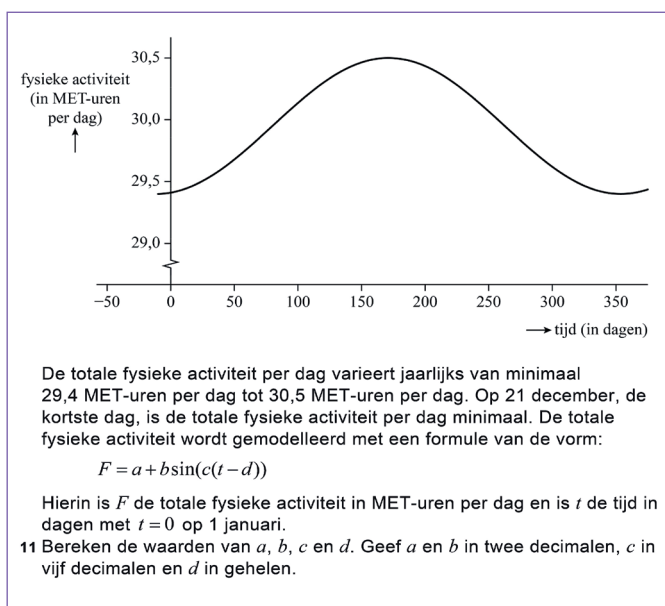
Gerekend moest worden aan de bewering van Frank Wielaard over de WK voetbalwedstrijd tussen IJsland en Nigeria in 2018. Frank stelde 'In Nigeria komen er tijdens de 26 dagen van dit WK minstens zoveel baby's bij als het totale aantal inwoners van IJsland'. Onderzocht moest worden of deze bewering waar is. De rekenpartij bestaat uit een paar stappen. Een van de hindernissen is dat de bevolking verdeeld moet worden in mannen en vrouwen in de verhouding 1 staat tot 1,04. Dat gaat soms goed en vaak fout, maar wie dat verkeerd doet, loopt niet vast en komt toch aardig uit. Kandidaten moeten het aantal inwoners aflezen uit de grafiek, zie figuur 2, met een zekere marge. Het antwoordmodel schrijft wel een marge voor, maar specificeert niet voor welke jaren je moet aflezen. Er zijn kandidaten die twee opeenvolgende jaren pakken en dan met een eigen groeifactor gaan rekenen met een te hoge prognose als gevolg. Geef je als corrector dan wel of niet een punt als de kandidaat tientallen miljoenen inwoners te hoog uitkomt? Uiteraard groeit de bevolking exponentieel. Wie lineair rekent verliest één of twee punten, maar kan toch redelijk uit komen. Geen enkele stap is een showstopper. Dat vind ik knap gedaan door de constructeurs. Sommige leerlingen kregen deze opdracht niet af wegens tijdgebrek. Dat was jammer, want vijf van de zeven punten kon je makkelijk verdienen bij deze slotopdracht.



figuur 2

Gewicht in beweging

Dat brengt me weer op de lengte van de teksten en wat dat met leerlingen kan doen. Ik pak een paar voorbeelden. De vraag naar de a , b , c , d in een periodiek verband $y = a + b \cdot \sin(c(t - d))$ is klassiek. Het zou gewoon goed moeten gaan en toch gebeurt er bij het berekenen van de c iets wonderlijks. Een op de drie kandidaten vult in dat een jaar 350 dagen heeft. Best gek. Nog gekker is dat ze even verderop gewoon rekenen met 365 dagen in een jaar. Hoe kan dat? Ik heb een idee. In de context *Gewicht in beweging* staan drie grafieken. Drie keer is de x -as onderverdeeld in stappen van 50 en is 350 het laatste getal, zie figuur 3.



figuur 3

Ik vermoed dat de suggestie van die 350 zo sterk is dat onder tijdsdruk 350 ingevuld wordt in plaats van 365. Voor de verschuiving d wordt vanzelfsprekend 31 december aangemerkt als dag 365 en omdat 21 december tien dagen eerder is, moet 21 december dag 355 zijn. Helaas is dit net niet helemaal goed. Voor het juiste antwoord moet je goed lezen. Er staat drie keer dat $t = 0$ is op 1 januari. Een weldenkend mens kan dat niet missen, maar een kandidaat met lees-stress dus wel. Die $t = 0$ zorgt voor een verschuiving waardoor 2 januari dag 1 is en dus is 21 december dag 354 (ofwel dag -11). Dit foutje kost helaas een vol punt.

In deze context met periodieke verbanden stond een voor veel lezers (kandidaten en docenten) onbegrijpelijke vraag, zie figuur 4. Onduidelijk is procentueel van wat.

Het grootste verschil in gemiddeld gewicht in een jaar is procentueel gezien kleiner dan het grootste verschil in gemiddelde calorie-inname in een jaar.
12 Toon dit aan met behulp van de formules.

figuur 4

Hoe je het verschil als percentage moest uitdrukken werd pas duidelijk door het correctievoorschrift te lezen. In termen van 'nieuw min oud gedeeld door oud', mochten vele varianten voor 'oud' goed gerekend worden, maar leerlingen bleken creatiever te zijn dan het antwoordmodel als het om het verschil 'nieuw min oud' ging. In plaats van het verschil tussen minimum en maximum, kon je ook rekenen met de amplitude. Komt op hetzelfde neer. Mocht je een andere aanpak honoreren? Het gaf veel discussie.

Kleiner of groter?

Voor een situatie met een fles van 10 liter met een begindruk van 180 bar, een einddruk van 60 bar en een luchtverbruik van een duiker van 25 liter/minuut geldt voor de maximale duiktijd de volgende formule:

$$T = \frac{1200}{2,5d + 25}$$

Deze functie is dalend.

4 Onderzoek met behulp van de afgeleide van T of de maximaal toegestane duiktijd in deze situatie toenemend of afnemend daalt bij grotere duikdiepte.

figuur 5

Ook ontstond er discussie over de redeneervraag bij de afgeleide die negatief was en op den duur naar nul ging, zie figuur 5. Wiskundig gezien wordt de afgeleide groter, maar in de ogen van niet-wiskundigen wordt het verschil

Een goede schoolstart met Texas Instruments!



Met onze programma's en lesmaterialen
breng je wiskunde tot leven in de klas.



Lesmaterialen



Aanbiedingen



**Trainingen en
evenementen**

Meer weten?

Onze educatieve
technologie
consultants
helpen je
graag verder!



Ludovic Wallaart

» l-wallaart@ti.com

Frank van den Berg

» f-vandenberg@ti.com

education.ti.com/nl/leraren

De Vlinderstichting in Nederland houdt jaarlijks vlindertellingen. Het totaal aantal vlinders is in de periode 1992–2017 met 40% afgenomen. Hierbij vermoedt men een exponentiële trend.

- 14 Bereken de jaarlijkse procentuele afname in deze periode, uitgaande van de exponentiële trend. Geef je antwoord in één decimaal.

De heivlinder is een van de vlindersoorten waarvan het aantal sterk is gedaald.



heivlinder

figuur 6

met nul kleiner oftewel de afgeleide wordt kleiner. In het verslag van de centrale examenbespreking staat dat besloten is om geen punt toe te kennen als een kandidaat schrijft dat de afgeleide kleiner wordt. De discussie verschoof zich vervolgens naar het wel of niet toekennen van een punt bij de conclusie afnemend dalend. Gevolg is dat kandidaten die drommels goed weten wat er aan de hand is, maar het puur wiskundig gezien ongelukkig formuleren, hier twee punten kwijtraken. Dat was een harde les voor volgend jaar: kandidaten moeten heel zorgvuldig redeneren en als het eindantwoord niet bij de redenering past, dan kun je de punten van beide bollen verliezen.

In de context *Vlinders in Nederland* wordt gevraagd naar de groeifactor en het groeipercentage, zie figuur 6. Onvoorstelbaar wat er allemaal tot de macht $1/25$ ste gedaan wordt door kandidaten die dit op de school-examens foutloos deden. Zijn ze van de examen-training dommer geworden of komt het door de tijdsdruk? Opvallend is dat een groot aantal kandidaten een vergelijking met de groeifactor opstelt en dit oplost met 'calc intersect' en zo het probleem vermijdt van 'nieuw gedeeld door oud' en 'tot de macht één gedeeld door'. Mijn vraag is wat we hier willen toetsen bij een opdracht die vier punten waard is. Verlangen we dat kandidaten vaardig zijn met machten en algebra of maakt het ons niet uit hoe ze die groeifactor en dat groeipercentage vinden?

Tot slot

Slim lezen is een manier om effectief om te gaan met lange teksten. Ervaren wiskundedocenten weten dat je hele lappen tekst veilig kunt overslaan en dat voetnoten er niet toe doen, maar vwo-leerlingen worden er bij de talen en vakken als geschiedenis op getraind om juist wél alle voetnoten te lezen omdat daar essentiële informatie

kan staan. Joyce las alles en nam ieder woord serieus. Dat waren er 2564 (en dan tellen we alleen de inleidende tekst zonder de opdrachten, zonder tabellen, grafieken en bronvermelding) en dat zijn er ten opzichte van die 1467 van 2019 precies 1097 teveel. Zowel op het forum als in de *wiskundE-brief* (nr 931 van 21 mei 2023) werd verzucht 'meer wiskunde, minder contexten'. Onze examenleerlingen verdienen een faire toets zonder franje die binnen drie uur gemaakt kan worden. Het moet mogelijk zijn om een examen voor te leggen dat minder leestijd vergt zodat er meer tijd is om wiskundig correcte antwoorden te produceren. Het examen 2023 was beslist mooi, maar door de lengte een beetje te mooi. Vanwege de leesbelasting verdient het niet de schoonheidsprijs.

Op de website staat een uitvoerig verslag waarin de opdrachten stuk voor stuk besproken worden.

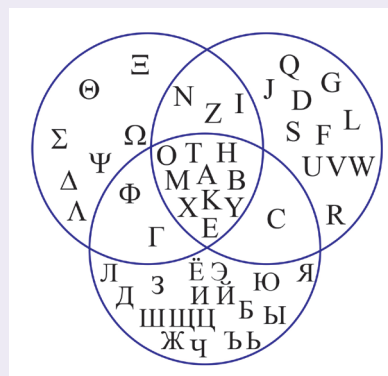


vakbladeuclides.nl/991vwoA

Over de auteur

Henk Hietbrink is docent wiskunde bij KSG De Breul te Zeist en hij is beheerder van de website www.fransvanschooten.nl. E-mailadres: hietbrink.h@planet.nl

Oplossing Winactie Denkwereld



In *Euclides* 98-4 stonden drie puzzels uit *Denkwereld*, een uitgave van *New Scientist*. De drie winnaars van een exemplaar van *Denkwereld* hebben deze intussen per post ontvangen. Benieuwd naar de oplossingen van de puzzels? Deze vind je op de site.



vakbladeuclides.nl/991winactie

Examen vwo wiskunde B

Marcel Daems bespreekt de opgaven van het vwo wiskunde-B-examen. Hij vindt het een stevig examen. De N-term is 1,9.

Inleiding

Donderdag 11 mei was voor velen de aftrap van het examen. Behalve voor de leerlingen met Duits in het pakket was wiskunde het eerste examen. Zoals altijd vind ik het zelf ook spannend. Een examen is voor leerlingen een kroon op het werk van de afgelopen jaren en voor mij als hun docent in zekere zin ook. Voor deze groep is dit examen ook vanwege een andere reden bijzonder. Zij hebben in de leerjaren 3 en 4 heel veel last gehad van de lockdowns vanwege corona, meer dan de leerlingen die de voorgaande twee jaar examen hebben gedaan. Op mijn school begint het schoolexamen in klas 5 en dat betekent dat zij in die jaren heel veel lessen online kregen. Ik ben benieuwd hoe mijn leerlingen het ervan af gaan brengen en of we landelijk nog effecten gaan zien van die vervellende periode.

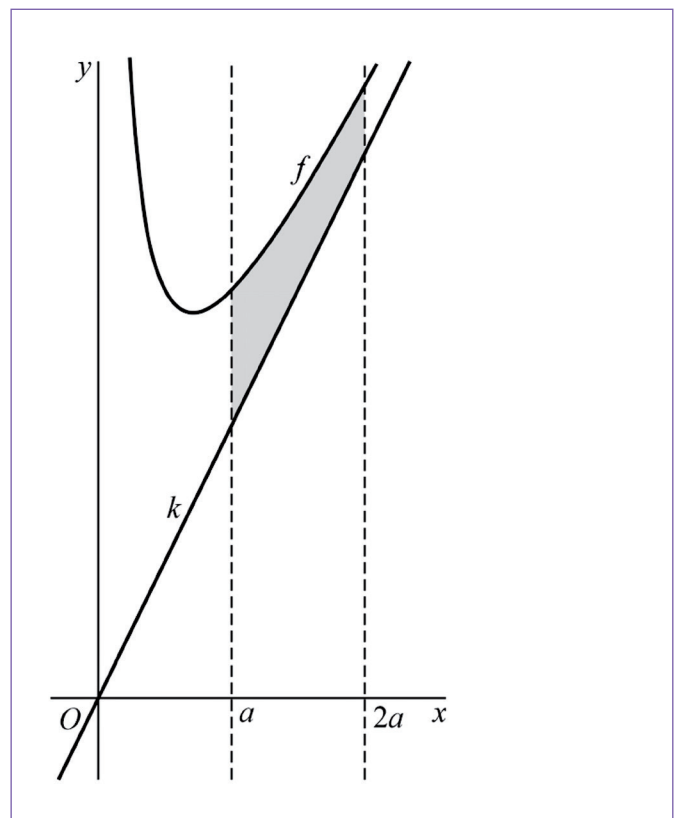
Dan nu het examen

Na het uitdelen en de start kan ik het examen bekijken om een eerste indruk te krijgen. Dit keer bestaat het examen uit 76 punten verdeeld over 19 vragen. Evenveel punten als vorig jaar, maar nu met twee extra vragen. De eerste set opgaven ziet er uitnodigend uit. De tweede is de gebruikelijke contextopgave. Daarna zien we een parameterkromme gevolgd door een sinusoïde met absoluutstrepn. Daar zullen verschillende leerlingen wel moeite mee hebben. We gaan verder met logaritmische functies die elkaar loodrecht snijden waarna we overgaan op meetkunde. De afsluiting betreft een gebroken functie met een exponentiële noemer. Mijn eerste indruk is dat het te doen moet zijn. Het valt me wel op dat het examen weinig goniometrie bevat. Er zijn veel opgaven met weinig punten en de twee grootste opgaven zijn 6 punten waard. Vorig jaar waren er twee 8-punts opgaven en één 7-punts opgave.

Een gebroken functie

De eerste opgave is, zoals gezegd, een uitnodigende opgave. Het gaat om een gebroken functie die niet al te moeilijk is, $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$, die gedifferentieerd moet worden om het minimum te vinden.

De tweede opgave beschrijft een gebied tussen deze functie en zijn scheve asymptoot met grenzen a en $2a$. De opdracht is te bewijzen dat de oppervlakte onafhankelijk van a is, zie figuur 1.

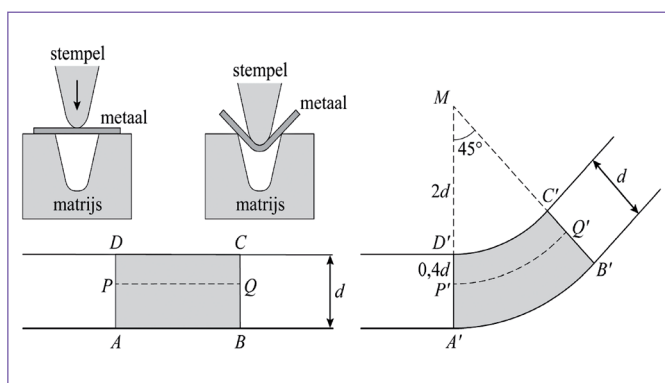


figuur 1

Deze opgave ging goed. Wat bijdraagt is dat het, hoewel het een bewijs is, voldoende is om alleen de asymptoot te benoemen, aldus het correctievoorschrift. Daarna moeten de leerlingen de functie wentelen om de horizontale lijn $y = 3$ en zo de inhoud van het omwentelingslichaam berekenen. De woorden exact en algebraïsch ontbreken en het gaat over wentelen. Twee valkuilen in één opgave.

Buigen van metalen platen

Deze keer gaat de contextopgave over het buigen van een metalen plaat. Een metalen plaat wordt met een stempel in een matrijs verbogen, zie figuur 2.



figuur 2

De opgave legt aan de hand van een vooraanzicht uit wat er met een plaat gebeurt. De binnenkant van de plaat, CD in de figuur, wordt korter, de buitenkant AB van de plaat langer en daartussen bevindt zich een lijnstuk PQ dat niet van lengte verandert. De eerste vraag is uitrekenen in welke mate het metaal vervormt.

De kracht F die nodig is, kan berekend worden met formule 1:

$$F = \frac{R \cdot d^2}{V} \left(1 + \frac{4d}{V}\right).$$

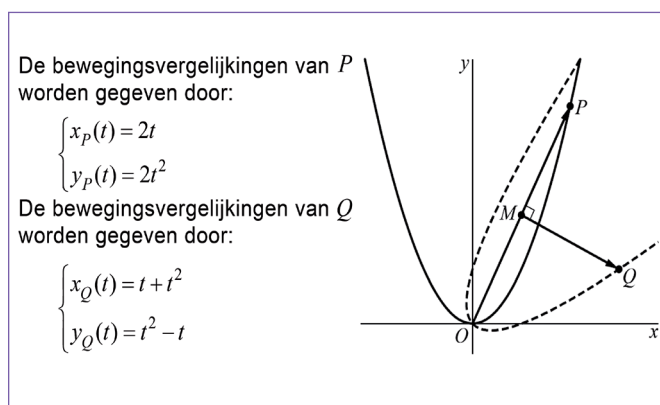
Hiermee moeten de leerlingen uitrekenen welke kracht nodig is in een gegeven situatie. Er bestaat ook een verband tussen de breedte V van de matrijs en de plaatdikte, formule 2: $V = d^{1,75}$. Door de twee formules te combineren kan de dikte van een plaat bij minimale kracht berekend worden.

Op zich waren deze vragen niet moeilijk. Maar leerlingen die na invullen van formule 2 in formule 1 verzuimden te vereenvoudigen hebben zich meer werk op de hals gehaald dan nodig. En in het correctievoorschrift staat niet dat voor $d = 16$ mm een gelijkwaardige uitdrukking ook voldoet. Terecht in dit geval.

Contextopgaven vind ik altijd iets informatiefs hebben en in die zin voegen ze zeker iets toe aan ons vak. In contexten kunnen daarentegen onbedoeld weer foutjes sluipen. In dit geval is de eenheid van kracht uitgedrukt in N/m. Gelukkig is dit niet relevant voor de wiskundige vaardigheden die in deze opgave vereist zijn.

Gedraaide parabool

De volgende vier vragen gaan over een parabool. Een leuke combinatie van parameterkrommen, vectoren, rotatie, snelheden, afstand, absolute waarde en nog een beetje limieten. Een punt P beweegt over een parabool en via een rotatie ontstaat ook een punt Q dat op een gedraaide parabool ligt, zie figuur 3.



figuur 3

De opdracht is om te laten zien dat de bewegingsvergelijkingen van Q volgen uit die van P . De meeste leerlingen zullen dit zonder problemen maken. Dat geldt ook voor vraag 8 waarbij de leerlingen gevraagd wordt de constante verhouding tussen de snelheden van de punten P en Q uit te rekenen. Het vervolg is het bewijs van een formule voor de lengte van lijnstuk

$$PQ: L = |t| \cdot \sqrt{2t^2 + 2}.$$

Op $t = 0$ vallen de punten P , Q en M samen in de oorsprong en daar heeft de formule voor de lengte L een knik. De laatste vraag in deze reeks gaat over de waarde van de afgeleide van L als t vanaf links tot nul nadert. Een aardig probleem voor menig leerling. De moeilijkheid wordt bepaald door de absolute waarde en niet door de uitdrukking onder de wortel. De afgeleide voor waarden van $t < 0$ is namelijk:

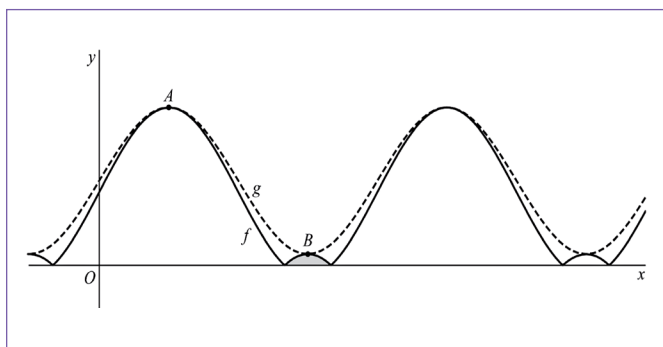
$$\frac{dL}{dt} = -\sqrt{2t^2 + 2} - t \cdot \frac{4t}{2\sqrt{2t^2 + 2}}$$

De noemer wordt niet nul. Het bepalen van de limiet van t naar 0 is voor het merendeel dan ook geen uitdaging. >

Absolute sinus

Twee opgaven over een sinus tussen absoluutstrepen.
Gegeven is de functie:

$$f(x) = |\sin(x) + \frac{1}{2}\sqrt{3}|$$



figuur 4

De stippellijn, zie figuur 4, hoort ook bij een sinusöide en de eerste vraag is de formule van deze sinusöide te bepalen door gebruik te maken van de punten A en B. In de figuur is een deel gearceerd en hiervan moet de oppervlakte exact bepaald worden. Leerlingen die rekenen met $y = -\sin(x) - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ komen geen enkele moeilijkheid tegen. Verdubbelingsformules of andere goniometrische formules zijn niet nodig. Leerlingen die wel met absoluutstrepen blijven werken, kunnen het zichzelf moeilijk maken. Als na het bepalen van de primitieve de absoluutstrepen niet op de juiste plaats staan, klopt het niet meer. Leerlingen die de originele functie zonder absoluutstrepen gebruiken, krijgen een negatieve uitkomst van de integraal. Dit is het enige deel in het examen waar goniometrie nodig is en dat is dan ook nog eens vrij eenvoudig. Ik vind dat het examen op dit onderdeel tekortschiet. In het examenprogramma neemt goniometrie een belangrijke plaats in, waar veel aandacht aan is besteed. Dat is helaas niet teruggekomen in het examen.

Logaritmische functies

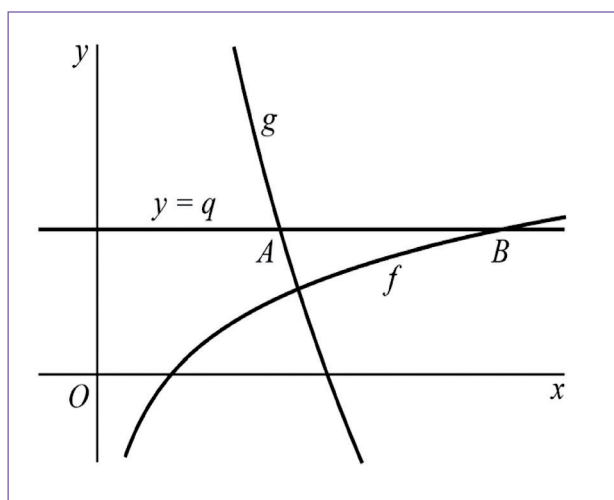
De volgende twee vragen gaan over het loodrecht snijden van twee grafieken. In dit geval grafieken van twee logaritmische functies:

$$f(x) = \ln(x) \text{ en } g(x) = 1 + e^2 \cdot (1 - \ln(x)).$$

De grafieken van deze twee functies snijden elkaar loodrecht en dat moest bewezen worden. Prima om dit weer eens te vragen. In de examens van 2021 en 2022 kwamen vooral raakproblemen voor.

Leerlingen die beginnen met gelijkstellen van de functies om zo $x = e$ te vinden, hebben wat meer rekenwerk dan

de leerlingen die kiezen om eerst het product van de afgeleiden gelijk te stellen aan -1 en zo aan $x = e$ komen. Een vraag die mooi tijdens een toets gebruikt kan worden. De tweede vraag in dit deel kan ook zo in een toets opgenomen worden. De twee grafieken worden op een hoogte doorsneden zodanig dat de horizontale afstand tussen de twee snijpunten gelijk is aan 3, zie figuur 5.

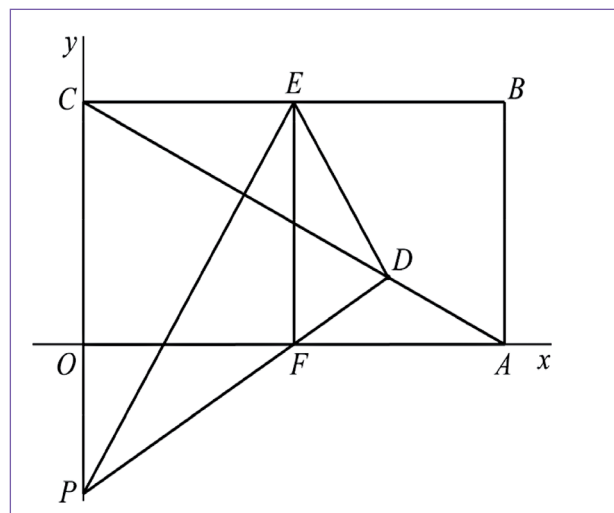


figuur 5

Omdat gegeven is dat B rechts van A ligt, is er maar een waarde van q te berekenen. De opgave had wat uitdagender mogen zijn. Bijvoorbeeld door ook te vragen naar de waarde van q als B links van A ligt.

Bissectrice in een rechthoek

Meetkunde, jawel! Altijd een uitdaging. Gegeven is de situatie zoals getekend in figuur 6.



figuur 6

$OABC$ is een rechthoek met de coördinaten van O , A en C gegeven. E en F zijn de middens van de zijden OA en BC . Daarnaast snijdt de lijn door P en F de lijn door A en C in het punt D .

Voor vraag 15 is punt P ook gegeven en nu is de opdracht te bewijzen dat EF een bissectrice is van $\angle PED$. Bij meetkunde leiden vele wegen naar Rome. Het correctievoorschrift bevat vier mogelijke oplossingen. Daarnaast is de afstandsformule ook te gebruiken om de afstand van F tot de lijn door E en P en de afstand van F tot de lijn door E en D te bepalen. Die zijn gelijk en dus volgt dan dat EF een bissectrice is. Vraag 16 was een stuk moeilijker. In dit geval moest de positie van punt P zo bepaald worden dat de cirkel door D met middelpunt M precies in de rechthoek past. Ook hier zijn verschillende manieren om tot een oplossing te komen. Omdat gegeven is dat P op de negatieve y -as ligt is de waarde p negatief. En bij het antwoord moet hier rekening mee gehouden worden. Prima om zo'n detail in de opgave te verwerken.

Exponentiële breuk

De laatste drie vragen gaan over een gebroken functie met in de noemer een e -macht: $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$

De grafiek van deze functie heeft twee asymptoten en allereerst moet de afstand tussen deze twee asymptoten berekend worden, dat moet exact. Hier maakt het correctievoorschrift het onnodig moeilijk, of de functie is voor deze vraag eigenlijk te eenvoudig. Natuurlijk ligt het voor de hand om de twee asymptoten te bepalen, ieder een punt waard, om vervolgens het verschil tussen deze twee uit te rekenen, en dat is het derde punt. Bovendien gaat het om standaardsituaties. Als x naar oneindig gaat, gaat e^x naar oneindig en dus gaat $1/e^x$ naar nul. En als x naar min-oneindig gaat, gaat e^x naar nul. Vragen naar een exacte berekening is in dit geval zoiets als het intrappen van een open deur.

Een leerling die schrijft: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x + 1} = 0$

heeft de juiste asymptoot gevonden. En de andere asymptoot volgt ook vanzelf:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x + 1} = 1$. Volgens het correctievoorschrift levert

dit niets op.

Vervolgens is de functie $F(x) = x - \ln(e^x + 1)$ als primitieve van f gegeven. Vraag 18 vraagt om een bewijs daarvan.

“Het examen is stevig en vraagt veel werk van de leerlingen.”

Nu verdient het correctievoorschrift juist weer een compliment. Duidelijk is dat een bol met een waarde van meer dan een punt toch 1 punt kan opleveren.

De afsluitende vraag is een mooie denkoefening. De oppervlakte onder de grafiek van f met als linkergrens een willekeurige positieve waarde a is begrensd door $\ln(2)$. De vraag is dit te bewijzen.

De meeste leerlingen weten wel de juiste integraal op te stellen en met behulp van de functie F komen ze wel tot de uitdrukking $a - \ln(e^a + 1) - \ln(2)$ voor de gevraagde oppervlakte, die moet dan afgeschat worden tot $\ln(2)$. Dit laatste is geen standaardwerk en is een prima afsluiting van het examen.

Tot slot

Het examen is stevig en vraagt veel werk van de leerlingen, maar het is naar mijn idee niet te moeilijk of te lang. Ik vind het examen, ondanks de beperkte hoeveelheid goniometrie, evenwichtig met genoeg mogelijkheden voor de minder sterke leerling om punten te scoren en een uitdaging voor de sterke leerling om een perfecte score te halen. De leerlingen die alle punten hebben gescoord, verdienen dan ook een groot compliment. Dit examen mag er zijn.

Over de auteur

Marcel Daems is docent wiskunde aan Christelijk Gymnasium Sorghvliet te Den Haag en is lid van de Olympiade-commissie.
E-mailadres: da@gymnasium-sorghvliet.nl

Examen vwo wiskunde C

Hugo Bronkhorst bespreekt het vwo wiskunde-C-examen en geeft lessuggesties om het gesprek over Venn- en Eulerdiagrammen in de klas een impuls te geven. De N-term is 1,2.

Indruk en reactie leerlingen

“Meneer, dit is echt niet normaal! Dit kan gewoon niet. Ik heb drie volledige vragen niet kunnen maken. Dat kost me gewoon 13 punten.” Deze reactie is exemplarisch voor de lengte van het examen wiskunde C. Leerlingen hebben over het algemeen tot het eind gezeten en waren verbaasd over de lengte. Je ziet het ook aan het handschrift: de laatste vragen werden afgeraffeld. Zelf had ik ook het idee dat ik wat langer bezig was met het examen dan normaal. Toch speelt hier misschien een breder probleem: lezen en schrijven de leerlingen nog net zo snel als een paar jaar geleden? We lezen allemaal in de media dat de lees- en schrijfvaardigheid van de leerlingen achteruit holt. Het zou zonde zijn als dat van invloed is op de wiskundige prestaties.

Leerlingen waren blij met de introductieopgave. Ik was ook blij verrast dat het examen met een echte wiskunde-C-opgave opende: logisch redeneren. Ook de overige onderwerpen kwamen goed aan bod in afwisselende contexten. Opvallend was de logaritmische schaal zonder dat logaritmisch papier was gebruikt (vraag 7). In tabel 1 zie je een overzicht van de puntenverdeling per domein. Sommige vragen besloegen meerdere domeinen en daarvan heb ik de punten op basis van het correctievoorschrift opgesplitst.

Uit reacties op het forum van de NVvW blijkt dat wordt betreurd dat er drie keer ‘in welk jaar’ gevraagd werd. Als leerlingen hier drie keer naar beneden afronden, kost ze dit dus 3 punten. Dat is 4% op het totaal en kan net het verschil maken tussen een voldoende en een onvoldoende. Dit, in combinatie met de lengte, verklaart misschien de voor wiskunde C relatief hoge N-term van 1,2. Alleen in 2014 was de N-term hoger, maar dat was nog met het oude examenprogramma. In dit artikel bekijken we twee

opgaven in detail.

Domein	Punten	
B1: Rekenen en algebra	22	29,3%
B2: Telproblemen	6	8%
C: Verbanden	24	32%
D: Veranderingen	4	5,3%
F: Logisch redeneren	9	12%
G: Vorm en ruimte	10	13,3%
Totaal	75	100%
Overlap met wiskunde A	20 (23)	27% (31%)

tabel 1 Verdeling punten over domeinen CE

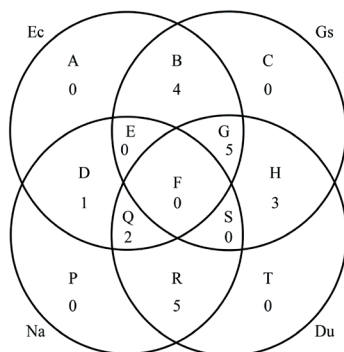
Toetsrooster

Het examen opent met een echt wiskunde-C-domein met een vraag over toetsroosters, zie figuur 1.

Mijn aandacht is meteen getrokken: zouden roostermakers dit diagram echt gebruikt hebben? We weten dat Venn- en Eulerdiagrammen krachtige hulpmiddelen zijn om relaties tussen verschillende verzamelingen weer te geven. Een voorbeeld binnen de wiskunde is de weergave van deelverzamelingen en doorsnedes van vierhoeken, zie figuur 2^[1]. Aangezien één van de doelen van het domein ‘logisch redeneren’ juist focust op het verifiëren en analyseren van redeneringen in het maatschappelijk debat, is het ook belangrijk toepassingen van Venn- en Eulerdiagrammen uit de dagelijkse realiteit met leerlingen te bespreken. Dat had bijvoorbeeld heel goed gekund tijdens de Provinciale Statenverkiezingen. Overeenkomsten en verschillen tussen partijen kunnen inzichtelijk gemaakt worden in een Venn-diagram. In figuur 3 zie je een gedeelte van

Toen toetsroosters nog met de hand werden gemaakt, gebruikte de roostermaker soms een diagram als hulpmiddel. In de figuur zie je zo'n diagram voor 5 vwo voor de dinsdag in een toetsweek. Op die dinsdag worden alleen toetsen gegeven voor de volgende vakken: economie (Ec), geschiedenis (Gs), natuurkunde (Na) en Duits (Du). In het diagram zijn de gegevens weergegeven voor de 20 leerlingen uit 5 vwo voor deze vier vakken. Zo kun je bijvoorbeeld aflezen dat er 5 leerlingen zijn die van deze vier vakken alleen natuurkunde en Duits hebben: gebied R in het diagram.

figuur



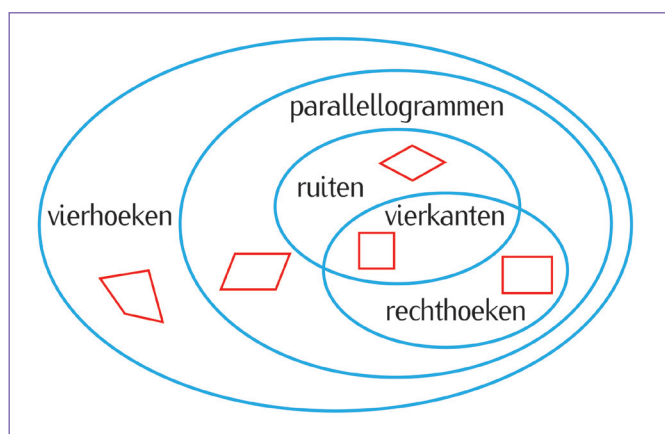
Niemand van de 20 leerlingen uit 5 vwo hoeft op dinsdag vier toetsen te maken.

1 Leg uit hoe je dit in het diagram kunt zien.

Voor een roostermaker kan het handig zijn om meer toetsen tegelijkertijd in te roosteren.

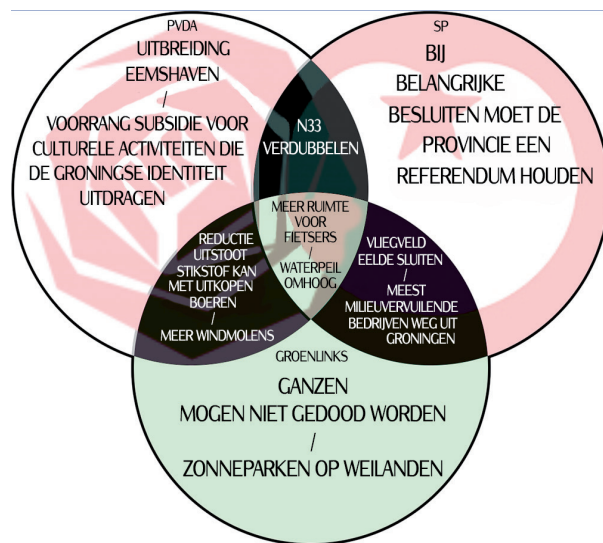
2 Onderzoek met behulp van het diagram welke toetsen tegelijkertijd ingeroosterd kunnen worden.

figuur 1 Introductievraag examen wiskunde C 2023



figuur 2 Eulerdiagram vierhoeken^[1]

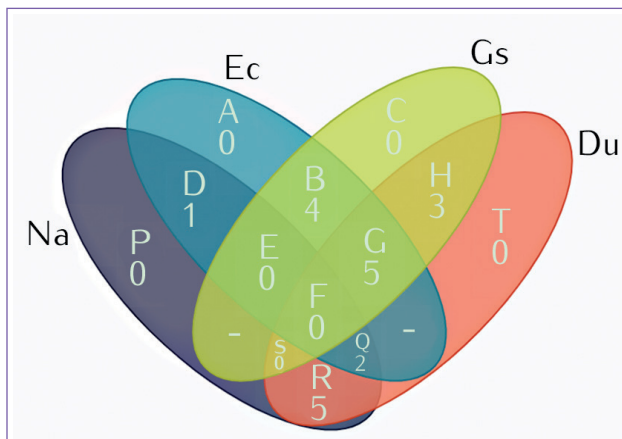
de standpunten op links, uitgebeeld voor de provincie Groningen. Hier zou de samenwerking met maatschappijleer gezocht kunnen worden.



figuur 3 Venn-diagram verkiezingen

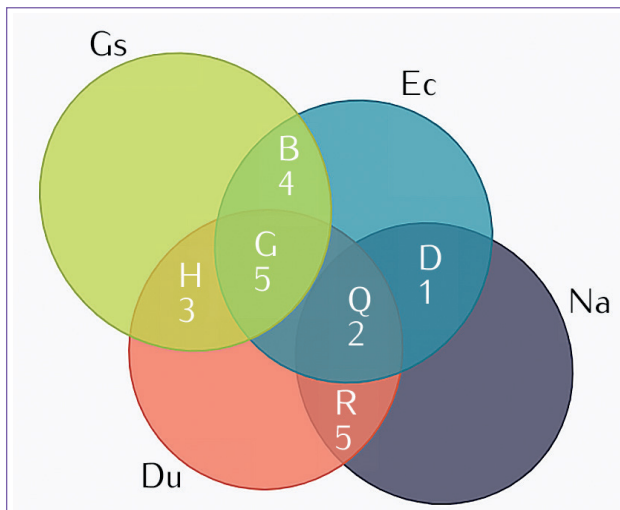
Ik heb aangetoond dat er een sterke correlatie (significant) bestaat tussen het gebruik van Venn- en Eulerdiagrammen en de kwaliteit van redeneringen van wiskunde-C-leerlingen.^[2] Laten we het diagram uit deze examensom daarom eens nader gaan bekijken. In spreektaal (en ook door auteurs van wiskundeboeken voor het voortgezet onderwijs) wordt het diagram in figuur 1 vaak een Venn-diagram genoemd. Het examen noemt het gelukkig gewoon 'diagram'. Als het namelijk een volwaardig Venn-diagram zou zijn geweest, dan waren alle mogelijke combinaties weergegeven. Bij drie verzamelingen is dat goed te doen, maar hoe groter het aantal verzamelingen, des te complexer het diagram wordt. Bij vier lukt dit echter nog heel aardig. In figuur 4 heb ik dit diagram gemaakt en zie je ook direct de twee missende combinaties: Duits-Economie en Natuurkunde-Geschiedenis waar later in het examen (vraag 4) naar gevraagd wordt. Daar moeten leerlingen alle theoretische combinaties uitschrijven.

In het Venn-diagram van figuur 4 is te zien dat er een hoop gebieden leeg zijn (lees: 0 leerlingen bevatten). We kunnen dit diagram iets overzichtelijker maken door niet strikt vast te houden aan het weergeven van alle mogelijke relaties. Hiervoor transformeren we figuur 4 van een Venn-diagram in een Eulerdiagram zoals te zien in figuur 5. Voor de roostermaker is zo direct te zien dat er geen overlap is tussen geschiedenis en natuurkunde en deze vakken dus gelijktijdig geroosterd kunnen worden. Aangezien vraag 2 in het examen een onderzoeksvraag >



figuur 4 Venn-diagram met alle theoretische combinaties

is, kan deze transformatie komend schooljaar een mooie wiskundige denkactiviteit zijn voor in de klas als afsluiting van de paragraaf Venn- en Eulerdiagrammen.



figuur 5 Eulerdiagram met relevante combinaties

Een toetsrooster bestaat echter vaak uit meer dan vier vakken. Voor een roostermaker is het dus van belang in ieder geval de doorsnedes te zien van elk tweetal vakken. Zelf lijkt mij een tabel met het aantal leerlingen per tweetal dan overzichtelijk. Er kan dan snel bekeken worden welke combinaties géén leerlingen bevatten. Of, als slechts één leerling een bepaalde combinatie heeft, de vakken toch tegelijkertijd te roosteren en voor die leerling een andere oplossing te zoeken. In tabel 2 zie je dat voor de situatie uit het examen ook in één oogopslag te zien is dat de combinatie natuurkunde-geschiedenis inderdaad geen leerlingen bevat.

	Na	Ec	Gs	Du
Na	8	3	0	7
Ec		12	9	7
Gs			12	8
Du				15

tabel 2 Combinaties twee vakken

Het blijkt dat roosterprogramma's als Zermelo en Unio dit soort doorsnedes in een tabel kunnen leveren: niet alleen voor elk tweetal vakken, maar ook zogenaamde triple doorsnedes voor een bepaald vak. In figuur 6 staat een voorbeeld uit de handleiding van het roosterpakket Unio^[3].

Doorsnedendiagram per vak

Handig om te kijken welke proefwerken er tegelijkertijd kunnen worden ingeroosterd tijdens de proefwerkweek. In dit voorbeeld kan dat met fatl en biol.

	A	B	C	D
1		stam	ak	biol
2	stam	112	46	34
3	ak	46	46	13
4	biol	34	13	34
5	dutl	32	10	3
6	econ	81	35	10
7	fatl	16	6	0

Tripeldoorsnedes per vak

Hier ziet u dat geen enkele leerling alle 3 de vakken schk, ak en dutl heeft. Ook dit soort informatie is handig tijdens het plannen van proefwerkweken.

===== De doorsnedes met het vak schk =====				
schk	stam	ak	biol	dutl
stam		40	13	34
ak		13	13	13

figuur 6 Doorsnedes roosterprogramma Unio^[3]

Kortom: de introductievraag past goed bij het wiskunde-C-programma, heeft relevantie in de dagelijkse schoolpraktijk en is bruikbaar als wiskundige denkactiviteit voor komend schooljaar.

Engelendeel

De opgave *Engelendeel* gaat over whisky die tijdens het rijpen verloren gaat. De meeste vragen komen overeen met het wiskunde-A-examen. Alleen eindigt de opgave bij wiskunde A met een sommatie die gewoon ingetikt kan en mag worden op de grafische rekenmachine (GR), terwijl wiskunde-C-leerlingen een recursieformule moeten opstellen. Somrijen behoren niet tot de wiskunde-C-

examenstof, dus dit is logisch verklaarbaar. Toch lijkt het erop, doordat het voor wiskunde A gewoon een GR-vraag is, dat deze twee punten daar gemakkelijker te verdienen zijn. Ook bij een herleiding eerder in het examen lijkt de wiskunde-A-leerling in het voordeel aangezien daar, naar de mening op het forum van de NVvW, delen van de herleiding impliciet gegeven mogen worden. De wiskunde-C-leerling moet echter alle stappen laten zien omdat het eindantwoord al gegeven is.

Laten we de rij uit het wiskunde-C-examen (vraag 12) eens nader bekijken. Gegeven is de rij: 3; 2,91; 2,82; 2,74; Gevraagd is 'stel een recursieve formule op van deze rij'. Laten we dat eerst eens doen zonder de verdere context van de opgave te bekijken. Leerlingen hebben veel gewerkt met lineaire (rekenkundige) en exponentiële (meetkundige) rijen. In tabel 3 zie je een onderzoek naar deze verbanden. Wat vinden we een goede recursieformule? Is het $u(n+1) = u(n) - 0,09$ met $u(1) = 3$ of juist $u(n+1) = u(n) \cdot 0,97$ met $u(1) = 3$?

n	$u(n)$	$\Delta u(n) = u(n+1) - u(n)$	$u(n+1) / u(n)$
1	3		
2	2,91	-0,09	0,97
3	2,82	-0,09	0,969
4	2,74	-0,08	0,972

tabel 3 Onderzoek verband: lineair of exponentieel

Als je de context van de gehele opgave in ogenschouw neemt, weet je dat het de exponentiële rij moet zijn en dat je de groeifactor (reden) ook uit de tekst had kunnen halen. Op de vorige bladzijde van het examen staat tenslotte: 'Voor het vervolg van de opgave gaan we ervan uit dat het engelendeel *ieder jaar* 3% is.' Ik snap dat het voor leerlingen verwarrend kan zijn aangezien er specifiek naar deze rij wordt verwezen en ze hierdoor een nieuw onderzoek starten. Doordat de groeifactor door afrondingen in de oorspronkelijke rij niet steeds netjes op 0,97 uitkomt, snap ik de keuze voor een lineaire rij. Daar wijkt tenslotte alleen het laatste verschil één honderdste af. Ook als leerlingen vervolgens in vraag 13 onterecht lineair verder rekenen blijkt hun antwoord nauwelijks af te wijken van het juiste antwoord. Kortom: Mooi dat het opstellen van een recursieformule expliciet teruggevraagd wordt in het examen. De vraagstelling had misschien iets duidelijker gekund waardoor leerlingen niet per ongeluk een lineaire rij maken. Wat mij betreft had deze vraag ook gewoon onderdeel kunnen zijn van het wiskunde-A-examen. De somrij had daar dan een extra vraag kunnen zijn.

Conclusie

Over het algemeen was het een gevarieerd examen. De wiskunde-C-onderdelen waren duidelijk herkenbaar. Ook het domein *telproblemen* kwam terug in de vragen, maar was niet oververtegenwoordigd. Wel was er vrij veel overlap met wiskunde A. Dat is op zich niet erg, maar een C-leerling moet dan bij een net andere vraagstelling, fouten of onvolledigheid niet harder afgestraft worden dan een A-leerling. Ook de lagere N-term voor wiskunde C dan voor wiskunde A helpt niet mee om het dalen van het aantal wiskunde-C-leerlingen van de laatste jaren een halt toe te roepen. Naar mijn idee wordt het tijd dat het ministerie van OCW doorpakt met de invoering van het nieuwe examenprogramma voor wiskunde. Het is zonde dat bepaalde domeinen nu nog exclusief zijn voorbehouden aan een steeds kleiner groepje wiskunde-C-leerlingen. Met de invoering van *wiskunde maatschappij* en *wiskunde natuur* lijkt logisch redeneren bijvoorbeeld bij de basis-kennis voor iedereen te gaan horen. Laat de uitgevers vervolgens snel aan de slag gaan. Wellicht kunnen ze met katernen op onderwerp gaan werken i.p.v. boeken per vak, zodat er op scholen gemakkelijker gecombineerd kan worden bij overlappende onderwerpen en het wiskunde-onderwijs ook betaalbaar blijft. Voor nu kunnen mijn leerlingen terugkijken op de luxe van een eigen wiskunde-C-klas met alleen maar voldoende (eind)examencijfers.

Noten

- [1] Zie: <https://sysmod.tbm.tudelft.nl/wiki/index.php/VennDiagram>
- [2] Bronkhorst, H., Roorda, G., Suhre, C., & Goedhart, M. (2022). Students' use of formalisations for improved logical reasoning. *Research in Mathematics Education*, 24(3), 291-323. Zie: <https://doi.org/10.1080/14794802.2021.1991463>
- [3] Zie blz. 42: <http://download.untis.nl/U-Handboeken/Unio.pdf>

Over de auteur

Hugo Bronkhorst is docent wiskunde aan CS Vincent van Gogh in Assen en gepromoveerd aan de Rijksuniversiteit Groningen op de logisch redeneervaardigheden van leerlingen. Zie: <http://www.hugobronkhorst.nl/onderzoek/>. E-mailadres: BTH@csvg.eu

Interview met Ruud Stolwijk, wiskundedocent op de Vrijeschool Zutphen

'Wiskunde blijft een doe-vak'

Nederland telt 28 middelbare Vrijescholen. Op deze scholen wordt onderwijs gegeven vanuit een antroposofische visie. Wat betekent dat in de praktijk? En hoe ziet het wiskundeonderwijs eruit?

Ruud Stolwijk geeft sinds 1987 met veel plezier wiskunde op de Vrijeschool in Zutphen. Een gesprek over wiskunde op de Vrijeschool.



Ruud Stolwijk

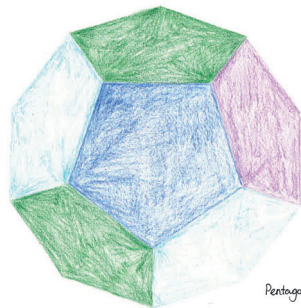
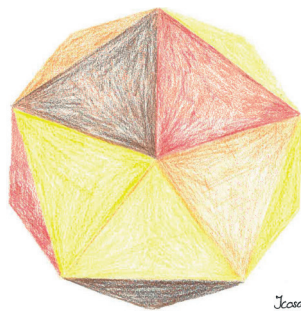
Hoe ben je op de Vrijeschool in Zutphen beland?

Het begon met een IB'er (intern begeleider) op de (vrije)basis-school van onze zoon, die mij benaderde voor uitdagend reken- en wiskundemateriaal. Ik ben toen kleinschalig begonnen met wat voorbereidende lessen, waarin ik bijvoorbeeld Kangoeroe-opgaven behandelde. Vanuit de leerlingen kwam de vraag of er ook aan

de Kangoeroe-wedstrijd werd meegedaan. Allengs werd de vraag naar uitdagende wiskunde groter. Een paar telefoontjes later bleek er een vacature voor wiskunde D in de bovenbouw te zijn, en die heb ik met veel plezier ingevuld. Dat is inmiddels al meer dan tien jaar geleden.

Wat is voor jou het meest bijzondere van het onderwijs op de Vrijeschool?

Zonder twijfel zijn dat de zogenaamde periodelessen. Voor het vak wiskunde zijn er één of twee periodes per jaar. In een periode wordt in drie weken, vijf dagen per week, anderhalf uur per dag, één onderwerp helemaal uitgespit, aan de hand van door de docent zelf ontwikkeld materiaal, dus niet uit een boek. De leerlingen maken zelf aantekeningen in hun periodeschrift, wat daarmee hun eigen persoonlijke naslagwerk voor dat onderwerp wordt. Aan het eind van de periode wordt dat weliswaar ook beoordeeld, maar het belangrijkste is eigenlijk dat ze zelf de stof verwerken, en zich daarmee beter eigen maken. Je kunt het vergelijken met het maken van een uitgebreide spiekbrief: als je die af hebt, hoef je hem niet meer te gebruiken. Zo wordt een stevig fundament gelegd,



Pagina uit een periodeschrift over het thema projectieve meetkunde

dat dan vervolgens in de gewone lessen (de 'vaklessen') wordt uitgebouwd en ingeoefend. Onderwerpen die aan bod komen vanuit de wiskunde zijn bijvoorbeeld cirkelmeetkunde, combinatoriek en kansrekening, differentiëren en integreren – compleet met Riemannsommen en uiteraard tekeningen.

Hoe verhoudt zich deze projectmatige aanpak tot het reguliere vo-programma, waarin precies omschreven eindtermen en domeinen de dienst uitmaken?

Lastig, inderdaad. Tot ongeveer het jaar 2000 was het Vrijeschool-onderwijs met recht vrij te noemen, in de zin van vrij van overheidsbemoeienis. Na twaalf jaar kreeg de leerling een getuigschrift, en die kon dan in een dertiende jaar (voor de mavo al eerder) een officieel schoolexamen afleggen (staatsexamen). Om allerlei redenen is dat toen afgeschaft, en daarmee is voor sommigen de kern van het Vrijeschool-onderwijs verloren gegaan. Wat wél behouden is, is de zesjarige havo – en die blijkt voor veel leerlingen uitermate heilzaam: er zit veel minder druk op het programma, en er zijn meer overstapmogelijkheden. Daarnaast bieden we binnenkort ook een vijfjarig havo-traject aan, omdat dat helaas moet van de overheid.

Zijn er nog andere aspecten die voor jou het Vrijeschool-onderwijs aantrekkelijk maken?

Jazeker! Wat ik erg goed vind, is dat je vanuit het ‘gehele-mens-principe’ ieder vak benadert, en dus niet puur vanuit je hoofd. Vandaar ook de ruime keuze in culturele en expressieve vakken, zoals houtbewerken, smeden, drama, dans, koor (verplicht!), en natuurlijk euritmie – een soort kruising tussen expressieve vorm van dans en dichten. Bij een toch abstract vak als wiskunde D blijkt zo’n aanpak ook te kunnen: als ik bijvoorbeeld ruimtemeetkunde behandel, begin ik met de leerlingen een piramide te laten maken van drie geodriehoeken die ze met plakband aan elkaar plakken. Hoe hoog is zo’n piramide nou? Dan gaan ze vanzelf op zoek naar rechthoekige driehoeken in de echte ruimtelijke figuur die ze voor zich hebben. Ik laat ze rustig stoeien, en stuur zo min mogelijk. De *Wageningse methode* (waar ik het geodriehoekenvoorbeeld vandaan heb) heeft ook veel van dit soort voorbeelden, en omdat die gratis verkrijgbaar zijn, put ik daar dankbaar uit.

42	45	43	11	10	46
82	48	39	47	43	12
48	16	50	10	50	41
11	15	16	52	14	10
12	43	14	50	10	48
11	14	49	12	38	11
43	40	46	10	40	42
40	38	11	13	12	45
5	12	5	12	12	12

Statistiek met echte data. Dit zijn de leeftijden van de bezoekers van de open dag. Hoe schep je orde in die brij aan getallen?

Klinkt heel boeiend om het zo aanschouwelijk en tastbaar aan te bieden. Lukt dat ook met statistiek?

Natuurlijk! We hebben daar ook mee geëxperimenteerd. Op de onlangs gehouden open dag, die goed bezocht werd, hebben we aan alle bezoekers gevraagd om hun leeftijd op een flipovervel te zetten, zie figuur 3. Vervolgens hebben we die brij aan getallen, meer dan vijfhonderd, aan de leerlingen van de 9^e klas (wij tellen dóór, dus dat zou klas 3 zijn) voorgelegd. Tja, hoe schep je vervolgens orde in die chaos? Frequentietabellen worden zo een heel logisch iets, om een beetje overzicht te krijgen. En als je het gemiddelde uitrekent kom je op 27 uit – wat dan weer een interessante discussie oplevert, omdat er geen enkele deelnemer van 27 was. Iemand had 102 als leeftijd vermeld – wat doe je daarmee? Enzovoorts: het doel is dat de leerlingen leren om met verstand te kijken naar gegevens, die ‘uit het leven gegrepen’ zijn, en dus nuttige informatie opleveren. Vervolgens is het

de bedoeling dat ze daar ook iets mee gaan doen, want wiskunde blijft in mijn beleving zeker ook een doe-vak.

Zitten er ook nadelen aan de Vrijeschool-aanpak?

Dat is maar hoe je het bekijkt. De relatief grote nadruk die er op expressievakken ligt, maakt dat er minder tijd is voor reguliere, ‘klassieke’ vakken. Je zou dus kunnen stellen dat de verbreding ten koste gaat van de diepgang. Lang niet voor alle leerlingen is dat geschikt of ideaal: van leerlingen wordt een vrij grote mate van zelfstandigheid gevraagd, en dat vraagt in zekere zin extra inspanning. Ze moeten immers altijd zelf precies weten wat ze moeten doen, want ze doen meer dan op een reguliere middelbare school.

Leren ze dat zelfstandig werken niet op de Vrije basisschool?

Wonderlijk genoeg is ongeveer de helft van onze instroom afkomstig uit het reguliere primair onderwijs, en dus niet bekend met het Vrijeschool-gedachtegoed. Kennelijk heeft het aanbod van kunst- en ambachtvakken toch een aantrekkelijke kant, die leerlingen over de streep haalt. Ze kiezen er over het algemeen zélf voor, hoewel de ouders natuurlijk wel achter die keuze moeten staan.

Nu we het toch over ouders hebben – zijn die meer betrokken dan bij een reguliere school?

Ik denk niet dat je dat in het algemeen kunt zeggen: op de basisschool wél, maar in het voortgezet onderwijs is dat, zeker in de bovenbouw, denk ik, vergelijkbaar met het reguliere onderwijs. Wel zijn de ouderavonden relatief druk bezocht.

Heb je nog een tip voor je collega's om een snuffe Vrijeschool in hun lessen in te bouwen?

Zoals ik al zei, probeer ik altijd regelmatig iets praktisch in te bouwen, en de stof te behandelen vanuit de werkelijkheid van de leerling, in plaats van uit het droge boek. Iedereen kan dat op zijn of haar eigen manier invullen, toch?

Over de auteur en de geïnterviewde

Ruud Stolwijk is wiskundeleraar op de Vrijeschool Zutphen. Daarnaast werkt hij bij het Cito, is hij al 20 jaar betrokken bij de Wiskunde Olympiade, en is hij lid van het Expert Panel van de International Mathematical Modeling Challenge (IMMC).

Constantijn Tilanus is wiskundeleraar op het Gemeentelijk Gymnasium Hilversum. Daarnaast is hij redacteur van *Euclides*. E-mailadres: cctilanus@hotmail.com



Giraf 3: Reken maar



Titel: REKEN maar

Ondertitel: een doeboek met stokjes, muntjes en symbolen

Auteurs: Marijke Hassefras-Zuidbroek, Jeanine Daems en Peter Lanser

Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam, 2022

Giraf-reeks, deel 3, 40 pagina's, paperback

ISBN: 978-90-5041-192-9

Prijs: € 8,00

Op een dag kreeg de Zebra gezelschap van de Giraf

Het zou zo maar een openingszin kunnen zijn uit een van de boeken van Toon Tellegen, ware het niet dat zijn dierenverhalen zich meestal in het bos en niet op de steppe afspelen. Toch, op die steppe is de uitbreiding een feit: naast de Zebra-reeks verschijnt nu al het derde deel in de Giraf-reeks, uitgebracht door de NVvW samen met Epsilon Uitgaven.

De Giraf-reeks is bedoeld voor leerlingen en docenten in het vmbo en onderbouw havo/vwo. *Reken maar* is geschreven aan de leerling in begrijpelijke taal. Het is een leerwerkboek met ruimte om opgaven te maken en bevat knipbladen voor het concretere werk. Op de Epsilon-website is een docentenhandleiding te vinden, inclusief antwoorden van de opgaven.

Reken maar kan op uiteenlopende manieren worden ingezet: in het kader van differentiëren voor individuele of groepjes leerlingen, als lesmateriaal door de docent te gebruiken in een klassikale les, of bijvoorbeeld om een project inhoud te geven.

De drie hoofdstukken zijn elk geschreven door een andere auteur; ze kunnen onafhankelijk van elkaar doorgenomen worden in een zelf te kiezen volgorde. Elk hoofdstuk biedt een oude historische rekenaanpak die weer nieuw leven ingeblazen is.

Rekenen met stokjes

In hoofdstuk 1 (auteur Marijke Hassefras-Zuidbroek) gaan leerlingen rekenen met stokjes, de 16^e-eeuwse stokjes van Napier wel te verstaan! Het hoofdstuk neemt de leerlingen mee op een leuke verkenning, helder uitgelegd, enthousiasmerend, nieuwsgierigheid wekkend. Leerlingen worden uitgenodigd zelf stokjes te maken (van papier met het knipblad of met echte (grote) ijslollystokjes). Ik kan me voorstellen dat er met name voor zwakke rekenaars een verrassende wereld opengaat.

Twee stokjes?

$8 \times 99 =$

Waarom heb je niet voldoende aan de door jou gemaakte stokjes?

Drie stokjes

Bekijk nu 5×238 .

Hoe zou jij dit met behulp van de stokjes van Napier uitrekenen?

$5 \times 238 =$

Reken uit

Maak nu de onderstaande vermenigvuldigingen. Gebruik je eigen "stokjes van Napier".

$6 \times 753 =$

$2 \times 346 =$

figuur 1

Vermenigvuldigen

Het vermenigvuldigen was bij de Egyptenaren gebaseerd op herhaald verdubbelen. Verdubbelen is goed te doen in dit systeem, zoals we al gezien hebben.

Hoe vermenigvuldig je een getal dan door herhaald te verdubbelen? Dat gaat zo. Stel je wilt 13×34 uitrekenen. Dan reken je eerst 1×34 , 2×34 , 4×34 (dat is dus het dubbele van 2×34) en 8×34 (weer het dubbele van 4×34) uit. Dan stop je, want 16×34 is meer dan je nodig hebt. En daarna kijk je welke van die uitkomsten je nodig hebt om in totaal 13×34 te maken. Hieronder staat het voorbeeld in een schema, in gewone getallen en dezelfde berekening in Egyptische getallen. Het schuine streepje voor de 1, 4 en 8 betekent dat dat de uitkomsten zijn die je mee moet tellen, want $1 + 4 + 8 = 13$. Dat betekent dat je 34, 136 en 272 moet optellen om de uitkomst 442 te vinden.

\	1	34	\	I	𐍌𐍌𐍌𐍌
\	2	68	\	II	𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌
\	4	136	\	IIII	𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌
\	8	272	\	IIIIIIII	𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌
totaal		442	totaal		𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌𐍌

figuur 2

Rekenen met hiëroglfen

Hoofdstuk 2 (auteur Jeanine Daems) behandelt het Egyptisch rekenen. Ook hier een opbouw in opgaven waardoor leerlingen zelf ontdekken hoe ze met hiëroglfen kunnen rekenen (en ze daarvoor eerst zelf moeten tekenen). Daarnaast leren ze wat het verschil is met ons huidige rekenen in een positiestelsel. Dit hoofdstuk is iets historischer van opzet dan het eerste met een paar korte stukjes informatie over de oude Egyptenaren. Voor de liefhebber, en vast ook voor leerlingen, heel leuk om hier de Egyptische 'bier-en-brood-problemen' weer tegen te komen.

“Heel leuk om de Egyptische bier- en brood-problemen weer tegen te komen.”

Vervangen en doorschuiven

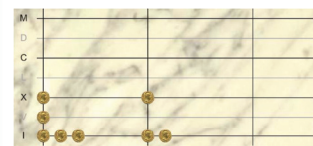
Op een telbord vervang je vijf muntjes op de dikgedrukte lijn (op de I, X, C, M) door één muntje in de tussenruimte, op de lichtgedrukte lijn erboven.



Twee muntjes op een lichtgedrukte lijn (V, L, D in de tussenruimte) vervang je door één muntje op de bovenliggende dikgedrukte lijn.



Tellen op het telbord



Op het telbord hierboven zie je in de eerste twee kolommen twee getallen staan. Welke getallen zijn dat? Leg deze twee getallen op jouw telbord.

Het optellen van de getallen doe je door de muntjes horizontaal naar de derde kolom te verschuiven. Je werkt van beneden naar boven. Daarna wissel je ze, als dat nodig is, in. De uitkomst van de optelling staat dan in de derde kolom.

Nog meer optellen

Bereken met het telbord:

XXVIII plus XXXI

LX plus LVI

CCCXII plus DCXIV

Controleer je antwoord door de getallen op onze wijze te schrijven en ze bij elkaar op te tellen.

Als je nog meer met optellingen wilt oefenen, dan kun je zelf een aantal optellingen bedenken en deze op het telbord uitvoeren.

figuur 3

Romeinse getallen

Hoofdstuk 3 (auteur Peter Lanser) gaat over rekenen met Romeinse getallen. Via de inleidende opgaven worden leerlingen ingewijd in het gebruik van Romeinse getallen. Helaas zijn er foutjes geslopen in de eerste antwoorden, en bij met name de optelling van XIV + XVIII tot XXXIV ontstaan er misconcepten die m.i. juist vermeden zouden moeten worden. Het werken met een telbord ziet er erg leuk en praktisch uit (zeker als het met drop of kruidnootjes gebeurt), maar ik vraag me af of het plezier behouden blijft in het woud van rekenregels. Het lijkt me pittige materie voor de doelgroep.

Toepassingen

Ik kan me alle drie de toepassingen van deze Giraf-reeks voorstellen, maar zou er zelf voor kiezen om het als lesmateriaal te gebruiken met een eigen didactiek i.p.v. als zelfstandig door te nemen materiaal. Mijn inschatting is dat dit doeboek nogal wat leeswerk bevat dat lastig is door te komen en ondanks de tweekleurendruk en de mooie illustraties vermoedelijk toch enigszins saai oogt voor leerlingogen. Met een enthousiaste docent lijkt me dit minieme bezwaar als sneeuw voor de zon te verdwijnen. Aanschaffen dus!

Over de auteur

Klaske Blom, werkzaam als wiskundedocente vmbo en havo bij het Heliomare College, school voor vso in Heemskerk, e-mailadres: klaskeblom@gmail.com

Stelling van Pythagoras: nieuw bewijs door scholieren

Rogier Bos

Ne'Kiya Jackson en Calcea Rujean Johnson hebben mogelijk een nieuw bewijs voor de stelling van Pythagoras gevonden. De twee scholieren van de St. Mary's Academy in New Orleans raakten geïnspireerd door de bonusopgave van een wiskundewedstrijd in de kerstvakantie, die ze als enigen wisten te beantwoorden. Ze mochten hun ontdekking op een regionale bijeenkomst van de American Mathematical Society presenteren. Ze werden hier aangespoord hun resultaten te publiceren, zodat het mogelijk is hun bewijs te controleren.

Het nieuwe bewijs van de stelling, dat hieronder wordt geschetst, is erg bijzonder, omdat het een trigonometrisch bewijs is dat de sinusregel gebruikt. Het bewijs is daarmee onafhankelijk van de pythagorische identiteiten, die juist gebaseerd zijn op de stelling van Pythagoras. Dit laatste maakt het moeilijk trigonometrische argumenten te gebruiken voor het bewijs van de stelling, omdat deze vaak leiden tot cirkelredeneringen. Door het gebruik van de sinusregel, oneindige reeksen en een fractal van gelijkvormige driehoeken wisten de twee studenten een cirkelredenering te voorkomen. De scholieren uit New Orleans blijken overigens niet de eersten met een trigonometrisch bewijs die de pythagorische identiteiten niet gebruiken: Jason Zimba, destijds verbonden aan het Bennington College in Vermont, toonde in 2009 aan dat de pythagorische identiteiten zonder de stelling van Pythagoras bewezen kunnen worden. Zijn bewijs gebruikt echter heel andere technieken.

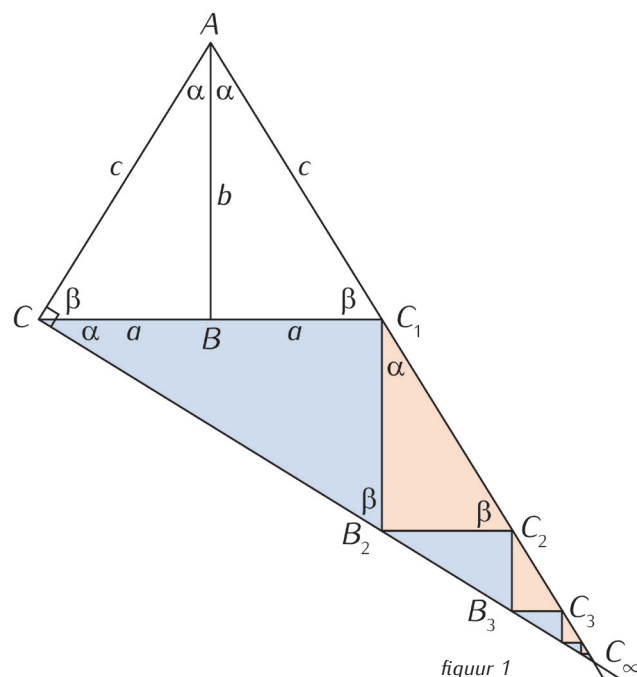
Bron: Nieuw Archief voor Wiskunde, juni 2023.

Zie ook: https://www.theguardian.com/us-news/2023/mar/24/new-orleans-pythagoras-theorem-trigonometry-prove?CMP=oth_b-aplnews_d-1

Samenvatting van het bewijs in opgaven

Voor de liefhebber voegen we een samenvatting van het bewijs toe in de vorm van een serie opgaven. Dit is gebaseerd op een YouTube-video van polymathematic,^[1] die zich weer baseert op de AMS-presentatie van Jackson en Johnson. Het bewijs is gebaseerd op figuur 1. Het begint met een willekeurige rechthoekige driehoek ABC , met de gebruikelijke notaties en $b > a$. Spiegelen in zijde AB geeft de congruente driehoek ABC_1 . Punt C_∞ is het snijpunt van de loodlijn van AC door C en lijn AC_1 .

Het bewijs hangt op de berekening van de sinus van de tophoek, $\sin(2\alpha)$, op twee manieren.



Opgave 1

Eerste manier: gebruik de sinusregel in driehoek ACC_1 , om aan te tonen dat $\sin(2\alpha) = \frac{2ab}{c^2}$.

Voor de tweede manier gebruiken Jackson en Johnson dat ook geldt $\sin(2\alpha) = \frac{|CC_\infty|}{|AC_\infty|}$

De benodigde lengtes van de zijden berekenen ze met behulp van een fractal en een meetkundige reeks. De fractal wordt gevormd door een herhaald patroon van loodlijnen binnen de driehoek die driehoek ACC_∞ opdeelt in oneindig veel driehoeken (blauw en rood), alle gelijkvormig aan de driehoek waarmee we begonnen (zie figuur 1).

Opgave 2

a Ga na dat $|B_2C| = \frac{2ac}{b}$ en $|B_2C_1| = \frac{2a^2}{b}$

b Ga na dat $|B_2C_2| = \frac{2a^2}{b^2}$ en $|C_1C_2| = \frac{2a^2c}{b^2}$

De vergrotingsfactor van driehoek B_2C_1C naar $B_3C_2B_2$ is $\frac{|B_2C_2|}{|CC_1|} = \frac{a^2}{b^2}$. Dat is dus ook de vergrotingsfactor van iedere blauwe driehoek naar de eerstvolgende kleinere blauwe driehoek, en van iedere rode driehoek naar de eerstvolgende kleinere rode driehoek, want blauw en rood delen telkens een zijde. Er geldt dus

$$|CC_\infty| = \frac{2ac}{b} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} + \left(\frac{a^2}{b^2} \right)^2 + \dots \right)$$

En

$$|AC_\infty| = c + \frac{2a^2c}{b^2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} + \left(\frac{a^2}{b^2} \right)^2 + \dots \right)$$

Hierop passen Jackson en Johnson de meetkundige reeks

$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$ toe, want $\frac{a^2}{b^2} < 1$ (de figuur is zo getekend dat $b > a$).

Opgave 3

Ga na dat dan volgt dat

$$|CC_\infty| = \frac{2abc}{b^2 - a^2} \text{ en } |AC_\infty| = \frac{(a^2 + b^2)c}{b^2 - a^2}$$

$$\text{Vul dit in bij } \sin(2\alpha) = \frac{|CC_\infty|}{|AC_\infty|},$$

en gebruik vervolgens opgave 1 om het bewijs verder af te maken. Dat is knap verzonnen van Jackson en Johnson, toch?

Noot

[1] <https://www.youtube.com/watch?v=p6j2nZKwf20>

Over de auteur

Rogier Bos werkt als universitair docent wiskundeonderwijs aan het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht en is redactielid van de Euclides. E-mailadres: r.d.bos@uu.nl

Wiskunde Olympiade

Unieke teamprestatie



Bij de Internationale Wiskunde Olympiade in Chiba, Japan hebben alle Nederlandse teamleden voor het eerst in de geschiedenis minimaal de helft van de 42 punten behaald.

De Internationale Wiskunde Olympiade is 's werelds meest prestigieuze wiskundewedstrijd, waar meer dan honderd landenteams bijeenkomen. Op twee achtereenvolgende dagen kregen de scholieren steeds drie opgaven voorgeschoteld, die ook voor professionele wiskundigen nog behoorlijk lastig kunnen zijn. Zij kregen steeds vier en een half uur de tijd om de opgaven op te lossen, waarbij voor elke opgave zeven punten te verdienen waren.

De resultaten van de individuele leerlingen zijn als volgt:

Zilver (25 pt)	Bas Capel	5 vwo, Gymnasium Apeldoorn
Brons (24 pt)	Daan de Groot	6 vwo, Dr. Nassau College Quintus, Assen
Brons (24 pt)	Mads Kok	6 vwo, Utrechts Stedelijk Gymnasium
Brons (23 pt)	Yanniek Nitescu	5 vwo, Huygens Lyceum, Eindhoven
Brons (22 pt)	Hylke Hoogeveen	6 vwo, Openbaar Lyceum Zeist
Brons (21 pt)	Lance Bakker	6 vwo, Katholieke Scholengemeenschap Hoofddorp

In totaal namen 618 scholieren deel, van wie 54 een gouden medaille kregen, 90 een zilveren medaille, en 170 een bronzen medaille. In het officiële landenklassement heeft China gewonnen, gevolgd door de Verenigde Staten en Zuid-Korea; Nederland is 29^e van de 112 deelnemende landen geworden.

Uitdagende problemen

Een gladde examenopgave

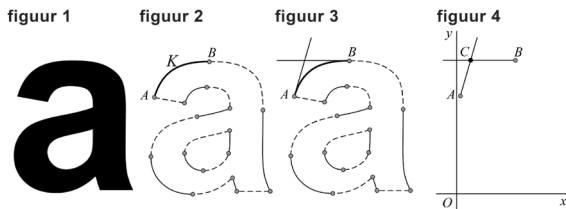
Bézierkrommen, dagelijkse praktijk voor de beeldredacteur van *Euclides*: alle krommen die in de figuren voorkomen, getekend met Illustrator®, zijn Bézierkrommen. Maar wat voor wiskunde zit daarachter? Jacques Jansen zocht het voor ons uit, geïnspireerd door een examenopgave van vorig jaar.

Inleiding

Ik werd getriggerd door de context van een eindexamenopgave bij wiskunde B eerste tijdvak in 2022, met de titel: 'Letter op het computerbeeldscherm', zie figuur 1 en 2.

Letter op het computerbeeldscherm

De rand van een letter op een computerbeeldscherm is een aaneenschakeling van meerdere krommen. Zo is de rand van de (uitvergroete) letter 'a' in figuur 1 gemaakt met behulp van zestien krommen, die je in figuur 2 ziet.



Elk van de zestien krommen kan met een formule worden beschreven. Computers hebben die formules nodig om de letters op het scherm te kunnen tekenen. Als voorbeeld bekijken we de kromme K tussen A en B , die in figuur 2 dikker is getekend.

We gaan ervan uit dat er vier gegevens bekend zijn:

- de coördinaten van A ;
- de coördinaten van B ;
- de richting van de raaklijn in A aan de kromme;
- de richting van de raaklijn in B aan de kromme.

Zie figuur 3. De vraag is nu hoe je uit deze vier gegevens een formule voor de kromme K maakt.

In figuur 4 zie je de punten A en B en de twee raaklijnen, geplaatst in een assenstelsel. Gegeven is dat A de coördinaten $(\frac{1}{13}, \frac{4}{3})$ heeft, B de coördinaten $(1, \frac{19}{10})$, dat de raaklijn in B horizontaal is en dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A gelijk is aan 4. Het punt C is het snijpunt van de twee raaklijnen en speelt een belangrijke rol bij de constructie van de kromme K .

3p 4 Bereken exact de x -coördinaat van C .

figuur 1

Verschillende vragen kwamen in mij op. De belangrijkste vraag: 'Is deze context niet geschikt voor een profielwerkstuk dan voor een examenopgave?'

Verder vroeg ik mij af: wat is de rol van punt C ? Immers er wordt meegedeeld dat die rol belangrijk is, zie de stam van vraag 4.

Om de kromme K te kunnen construeren, worden er, behalve de drie vaste punten A , B en C , drie bewegende punten P , Q en R gebruikt. Deze bewegen als volgt:

- Punt P beweegt voor $0 \leq t \leq 1$ met een constante snelheid over lijnstuk AC van A naar C . Er geldt: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AC}$
- Punt Q beweegt voor $0 \leq t \leq 1$ met een constante snelheid over lijnstuk CB van C naar B . Er geldt: $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{CB}$
- Terwijl punten P en Q bewegen, schuift punt R op het bewegende lijnstuk PQ van P naar Q . Er geldt: $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$

Het punt R doorloopt van $t = 0$ tot $t = 1$ een kromme van A naar B . Deze kromme wordt de **Bézierkromme** (van A , B en C) genoemd, en dat is kromme K uit figuur 2.

Figuur 4 is op de uitwerkbijlage uitvergroot weergegeven.

3p 5 Teken in de figuur op de uitwerkbijlage het punt R van de Bézierkromme dat hoort bij $t = 0,25$. Licht je werkwijze toe.

$\overrightarrow{OR}$ is uit te drukken in t , $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ en $\overrightarrow{OC}$. Er geldt voor elke waarde van t :

$$\overrightarrow{OR} = (1-t)^2 \cdot \overrightarrow{OA} + t^2 \cdot \overrightarrow{OB} + 2t(1-t) \cdot \overrightarrow{OC}$$

5p 6 Bewijs dit.

figuur 2

Wat is een Bézierkromme? Zie de stam van vraag 5. Gaan de vragen 4, 5 en 6 inderdaad over de letter A? (Her)kennen we die kromme tussen de punten A en B ? Hoort dat bij een tweedegraads, derdegraads,... functie?^[1] Laten we eerst eens nagaan waar de naam Bézier vandaan komt.



figuur 3 Pierre Bézier (l) en Paul de Casteljau (r)

De ontwerpers van CAD en speciale gladde krommen

Eén van de ontwerpers was de Franse ingenieur Pierre Bézier (1910–1999), zie figuur 3. Hij werkte voor Renault en legde mede de basis voor CAD (Computer Aided Design). Naar hem is een bepaald soort kromme genoemd die in tekenprogramma's voor de computer worden gebruikt. Bijvoorbeeld voor het tekenen van carrosserie-delen.

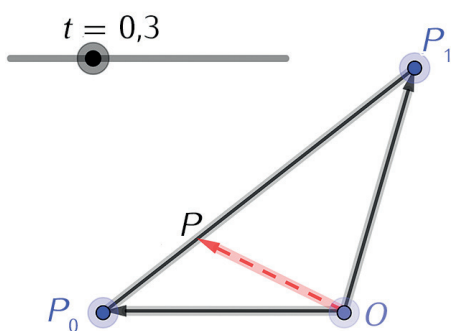
Een andere Franse ingenieur, Paul de Casteljau (1930–2022), werkte bij Citroën en is een ontwerper die een algoritme bedacht om punten van een Bézierkromme te construeren. Dat algoritme gaan we bespreken.

Het ontwerpen van Bézierkrommen - lineair

In GeoGebra kun je het algoritme makkelijk construeren. We hebben een polygoon nodig, een soort frame, met verplaatsbare controlepunten. We starten met twee controlepunten P_0 en P_1 in een assenstelsel en beschouwen hun plaatsvectoren, zie figuur 4. Een punt P kunnen we een baan laten beschrijven vanaf P_0 tot en met P_1 . In dit geval is de Bézierkromme niets anders dan het lijnstuk P_0P_1 : een lineaire kromme. Er geldt met behulp van eenvoudige vectormeetkunde dat

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP_0} + t(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}) = \\ &= (1-t) \cdot \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \overrightarrow{OP_1}\end{aligned}$$

waarbij $0 \leq t \leq 1$.

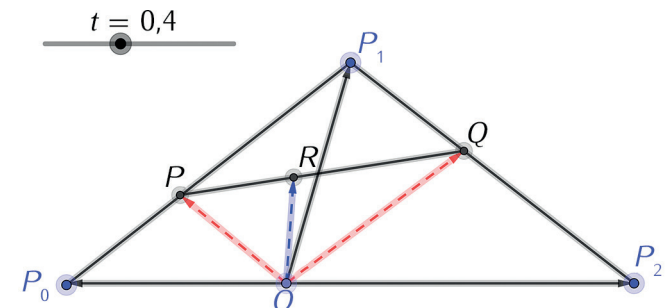


figuur 4

Kwadratisch

We breiden het aantal controlepunten uit met punt P_2 , zie figuur 5. Het frame is nu een driehoek geworden. Het polygoon $P_0P_1P_2$ zelf is dus een voorbeeld van een niet-gladde kromme. Het bevat een knik in punt P_1 . Het gaat ons echter om de te construeren kromme. We gaan nu

van een lineaire Bézierkromme over naar een kwadratische en dat wordt een gladde kromme.



figuur 5

Op het lijnstuk P_1P_2 nemen we nu een variabel punt Q zodat:

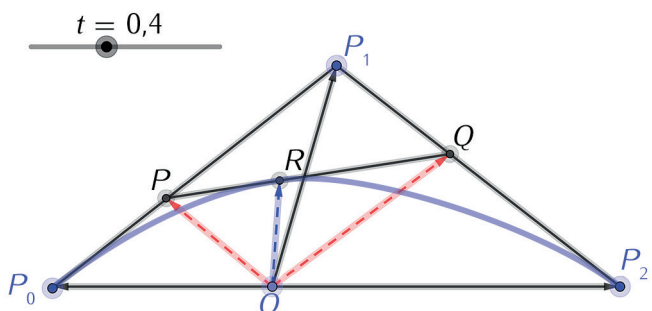
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1Q} = \overrightarrow{OP_1} + t(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}) = \\ &= (1-t) \cdot \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \overrightarrow{OP_2}\end{aligned}$$

Vervolgens nemen we op het verbindingslijnstuk PQ een variabel punt R zodat:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= (1-t)\overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{OQ} = \\ &= (1-t)((1-t) \cdot \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \overrightarrow{OP_1}) + t((1-t)\overrightarrow{OP_1} + t \cdot \overrightarrow{OP_2}) = \\ &= (1-t)^2 \cdot \overrightarrow{OP_0} + 2t(1-t) \cdot \overrightarrow{OP_1} + t^2 \cdot \overrightarrow{OP_2}\end{aligned}$$

waarbij $0 \leq t \leq 1$.

Dat punt R kan een gladde kromme beschrijven. Merk verder op dat de drie vectoren voorzien zijn van de gewichten $(1-t)^2$, $2t(1-t)$ en t^2 die opgeteld samen 1 zijn. De verbindingslijnen P_0P_1 , PQ en P_1P_2 zijn raaklijnen aan de Bézierkromme. In figuur 6 is het spoor te zien van punt R nadat de animatie in werking is gezet. Op het tijdstip $t = 0$ vertrekt het spoor vanuit controlepunt P_0 richting controlepunt P_1 , steeds wordt de richting aangepast aan het volgende controlepunt, in dit geval is dat eindpunt P_2 waarbij $t = 1$.

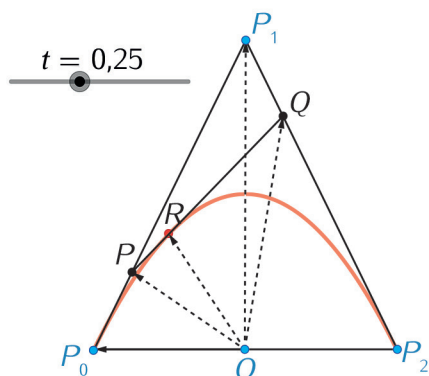


figuur 6

Een concreet voorbeeld

Ik kies voor een frame met de volgende drie controlepunten: $P_0(-1, 0)$, $P_1(0, 2)$ en $P_2(1, 0)$.

Naast de variabele punten P en Q is nu variabel punt R erbij gekomen. Zie het spoor van punt R in figuur 7, dit spoor is onze Bézierkromme.



figuur 7

We bepalen de formule ervan:

$$\overrightarrow{OR} = (1-t)^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2t(1-t) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ met } 0 \leq t \leq 1.$$

We verkrijgen:
$$\begin{cases} x = -(1-t)^2 + t^2 \\ y = 2t(1-t) \cdot 2 \end{cases}$$

Vervolgens:
$$\begin{cases} 2t = x+1 \\ y = 4t - 4t^2 \end{cases}$$

$$y = 2x + 2 - 4\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$$

$$y = 2x + 2 - x^2 - 2x - 1 = -x^2 + 1$$

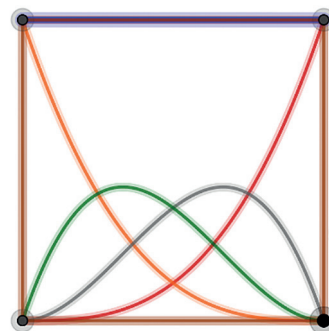
Kubisch

Als je je concentreert op de gewichten bij lineair en kwadratisch en denkend aan een algoritme, dan zal je de derde rode regel bij kubisch in onderstaand schema je niet verbazen. Er zijn nu vier controlepunten. De structuur van de driehoek van Pascal zien we erdoorheen schemeren.

Lineair	$1-t$	t			1 1
Kwadratisch	$(1-t)^2$	$2t(1-t)$	t^2		1 2 1
Kubisch	$(1-t)^3$	$3t(1-t)^2$	$3t^2(1-t)$	t^3	1 3 3 1

Deze t -termen worden Bernsteinpolynomen genoemd. Minder duur: Bernsteinveeltermen.

De vier Bernsteintermen zijn op te vatten als voorschriften van functies. In figuur 8 zien we de grafieken hiervan op het domein $[0, 1]$. We zien ook de paarse grafiek van de somfunctie met de formule $y = 1$.



figuur 8

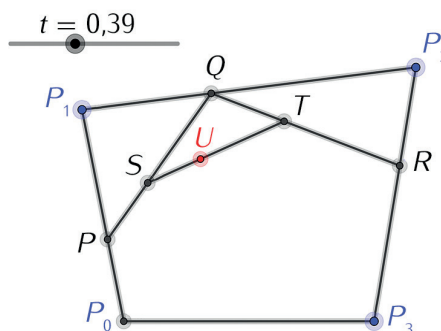
We hebben al vectoruitdrukkingen voor de lineaire en kwadratische Bézierkrommen en breiden die uit met de kubische:

$$\overrightarrow{OP} = (1-t) \cdot \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \overrightarrow{OP_1}$$

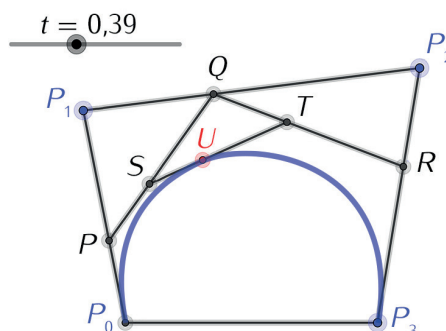
$$\overrightarrow{OR} = (1-t)^2 \cdot \overrightarrow{OP_0} + 2t(1-t) \cdot \overrightarrow{OP_1} + t^2 \cdot \overrightarrow{OP_2}$$

$$\overrightarrow{OU} = (1-t)^3 \cdot \overrightarrow{OP_0} + 3t(1-t)^2 \cdot \overrightarrow{OP_1} + 3t^2(1-t) \cdot \overrightarrow{OP_2} + t^3 \cdot \overrightarrow{OP_3}$$

Voor de kubische Bézierkromme zie de figuren 9 en 10 met de vier controlepunten.



figuur 9



figuur 10

Het controlepolygoon $P_0P_1P_2P_3$ geeft globaal het verloop van de Bézierkromme weer. Met de controlepunten kun je de vorm van de Bézierkromme beïnvloeden. Stel dat je bij de letter 'a' een stukje kubische kromme nodig hebt, dan kies je vier controlepunten en verplaats je ze zo dat je een stukje van de gewenste letter krijgt.

Polygonen met een willekeurig aantal controlepunten.

Wil je verder formaliseren dan kun je bij een frame van $(n + 1)$ controlepunten het ie Bernsteinpolynoom noteren

als $B_i^n = \binom{n}{i} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}$. Voor jou de uitdaging om een uitdrukking met somteken te vinden voor $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ die

de Bézierkromme beschrijft maar dat moeten we aan de leerlingen maar niet vragen.

Bij een Bézierkromme hoort een controlepolygoon met een willekeurig aantal controlepunten. De kromme begint in het eerste controlepunt op $t = 0$ en gaat in de richting van het tweede controlepunt, steeds wordt de richting aangepast aan het volgende controlepunt totdat de kromme aankomt bij het laatste controlepunt op $t = 1$.

Splines

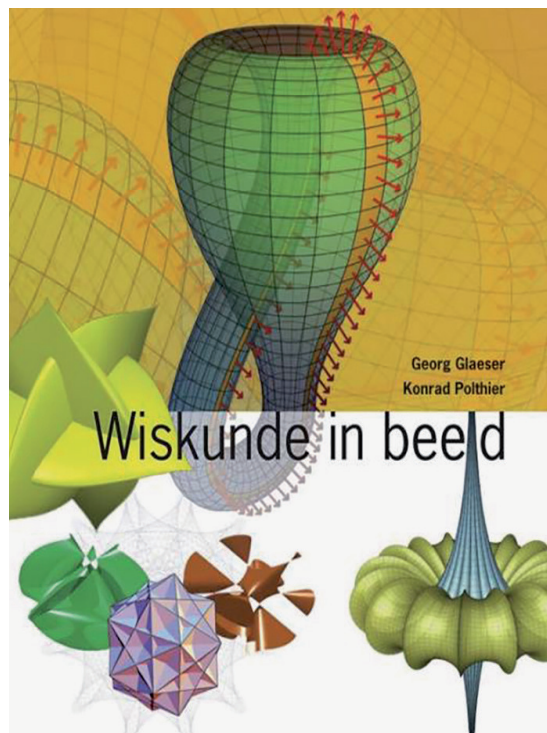
En dan hebben we nog de vakterm *splines*. Als je verschillende stukken Bézierkrommen met elkaar gaat verbinden, bijvoorbeeld bij het ontwerpen van een TrueType letter (TrueType is een standaard voor lettertypen, die eind jaren tachtig werd ontwikkeld door Apple en Microsoft), dan spreek je van splines.

Wat is de rol van punt C waarin verwezen wordt in examenvraag 4? Punt C is dus een van de drie controlepunten van het polygoon ACB in figuur 4 van het examen. Daar ontwikkelt zich een deel van een parabool.

Tot slot

Nog een laatste opmerking. Als ik terugdenk aan het werk van de twee ingenieurs, dan vermoed ik dat ze vast goed op de hoogte geweest zijn van de stelling van Karl Weierstrass (1815–1897), een Duitse wiskundige. De stelling zegt dat onder bepaalde omstandigheden een continue functie te benaderen is met andere eenvoudige functies. Die eenvoudige functies zijn vooral veeltermen. Voor de computer zijn ze zeer geschikt om mee te werken. Kijken we naar hun expressies dan is er sprake van optellen en vermenigvuldigen. We zijn aanbeland bij de numerieke wiskunde...

En voor wie meer wil lezen over dit onderwerp:



figuur 11 Wiskunde in beeld ^[2]

Noten

- [1] Jacques vroeg zich ook nog af: Kan ik of de leerlingen bij de gegeven bewegingsvergelijkingen in vraag 7 (niet afgebeeld in figuur 2) een formule afleiden van de baan van punt L? Het antwoord is ja en die uitwerking is te zien op de website.



vakbladeuclides.nl/991bezier

- [2] Glaeser, G. & Polthier, K. (2012). *Wiskunde in beeld*. Uitgeverij Veen Magazines

Over de auteur

Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde. Hij is sinds 2014 met pensioen.
E-mailadres: jacques.jansen@wxs.nl.

Grote verwachtingen

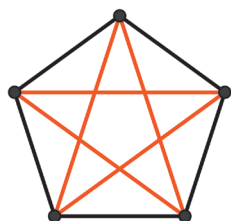
Grafen zijn belangrijk, zowel in toegepaste als in theoretische wiskunde. Allerlei netwerken kunnen worden gemodelleerd als grafen. Soms worden daarbij vragen gesteld over mogelijke kleuringen van de takken. In dit artikel bekijken we een spectaculair maar toegankelijk idee van de briljante probleemoplosser Erdős, waarin hij toeval gebruikt (in de vorm van kansrekening) om een deterministisch probleem op te lossen. De verwachtingswaarde speelt hierbij een glansrol.

Inleiding

Het is voor een wiskundige wel eens frustrerend dat je prachtige wiskunde, waarover je zelf heel enthousiast bent, zo zelden met anderen kunt delen. Des te fijner is het als je eens iets tegenkomt waarbij dat *wel* kan! (Er zijn gelukkig ook veel prachtige boeken en kanalen op YouTube waarin mooie wiskunde toegankelijk wordt gemaakt.) In dit artikel leg ik één van mijn favoriete bewijzen uit, een geweldig bewijs van de Hongaarse wiskundige Erdős. Dit bewijs berust op een zeer nuttige truc met verwachtingswaarden, die ik als docent heb geleerd uit *Getal & Ruimte*. Tot slot ga ik nog even in op de wereld van oneindig grote getallen en hun relatie met bewijzen en onbewijsbaarheid.

Monochrome deelgrafen

Stel we hebben vijf personen A, B, C, D, E . Personen A en B kennen elkaar, B en C kennen elkaar, C en D kennen elkaar, D en E kennen elkaar en E en A kennen elkaar. Alle andere paren kennen elkaar niet. We hebben deze situatie weergegeven in de linkergraaf in figuur 1.



figuur 1

De vijf punten representeren de vijf personen, de zwarte verbindingen (takken) representeren paren die elkaar kennen en de rode takken representeren paren die elkaar niet kennen. In het getekende geval in figuur 1 geldt voor ieder drietal punten dat één tak van de ene kleur is en

de andere twee takken van de andere kleur. Kortom, we hebben RRZ of ZZR .

Bij zes punten, zoals in de rechtergraaf, zijn er in totaal $\binom{6}{2} = 15$ takken. In figuur 1 zijn ze niet allemaal getekend. Nu kleuren we sommige takken zwart en de overige takken kleuren we rood. Hoe we dat ook doen, er is voor *iedere* mogelijke kleuring van de 15 takken met twee kleuren een drietal knopen te vinden zodat de drie takken tussen die drie knopen dezelfde kleur hebben (RRR of ZZZ). In totaal zijn er $2^{15} = 32\,768$ verschillende kleuringen, dus het is niet aan te raden dit feit voor iedere kleuring afzonderlijk te verifiëren... Hier is een eenvoudig bewijs.

Ieder punt heeft $6 - 1 = 5$ burens. Er zijn maar twee kleuren voor de vijf takken uit het gegeven punt, dus daarvan zijn er minstens drie zwart of minstens drie rood. In de rechtergraaf in figuur 1 heb ik het punt rechtsonder genomen en het geval genomen dat minstens drie van de vijf takken uit dat punt zwart zijn. Laten X, Y, Z de andere eindpunten zijn van die drie takken. Nu zijn er twee mogelijkheden: ofwel zijn de drie takken tussen X, Y, Z alle drie rood en dan zijn we klaar, ofwel is minstens één van de drie takken tussen X, Y, Z zwart. Zeg dat de tak XY zwart is, dan zijn de drie takken tussen X, Y en het punt rechtsonder alle drie zwart. Daarmee is ook in dit tweede geval het bewijs klaar.

Het is tijd voor een beetje terminologie. Een graaf met n punten waarbij alle $\binom{n}{2}$ takken zijn getekend, heet de volledige graaf K_n . In de linkergraaf van figuur 1 staat dus K_5 . De driehoeken waarover we spraken zijn K_3 's. We kleuren de $\binom{n}{2}$ takken van de graaf K_n met k kleuren. Dit noemen we een k -kleuring van de (takken van de) graaf K_n . We waren op zoek naar een *monochrome* K_3 , dus een driehoek waarvan alle drie takken dezelfde kleur hebben. Dit gaan we generaliseren naar monochrome

volledige deelgrafen K_m van K_n (voor zekere $m < n$), dus deelverzamelingen van m punten zodat alle $\binom{m}{2}$ verbindingen tussen die m punten dezelfde kleur hebben.

Bijvoorbeeld hebben we zojuist gezien dat iedere 2-kleuring van een K_6 minstens één monochrome K_3 bevat. Aan de andere kant bestaat er een 2-kleuring van de K_5 die geen enkele monochrome K_3 bevat.

Het bewijs van Erdős

We kunnen nu het prachtige bewijs van Erdős presenteren. We illustreren dit argument aan de hand van één typisch geval. Je kunt vervolgens zelf andere gevallen uitwerken.

We nemen $n = 20$, dus we hebben de volledige graaf K_{20} . Deze graaf heeft $\binom{20}{2} = 190$ takken. Die 190 takken kleuren we in $k = 3$ kleuren. (In totaal zijn er $3^{190} \approx 10^{91}$ kleuringen. Ter vergelijking, in het zichtbare deel van het universum zijn er 'slechts' ongeveer 10^{80} protonen...). Erdős

beweert dat er voor minstens één van die kleuringen geen enkele monochrome deelgraaf K_5 bestaat. Een K_5 heeft $\binom{5}{2} = 10$ takken en een K_{20} bevat $\binom{20}{5} = 15\,504$ volledige deelgrafen K_5 . Voor ten minste één 3-kleuring van de 190 takken van K_{20} geldt dus dat voor elke van de 15 504 volledige deelgrafen K_5 in K_{20} de tien takken van die K_5 niet allemaal dezelfde kleur hebben. Neem even een momentje om dit door te laten dringen.

Het spectaculaire aan Erdős' bewijs is dat hij niet een heel bijzondere 3-kleuring van K_{20} gaat construeren, maar juist een 'willekeurige' 3-kleuring bekijkt! (Meer hierover na dit bewijs.) 'Willekeurig' betekent hierbij het volgende: bij elke tak van K_{20} (190 in totaal) gooien we een eerlijke dobbelsteen. Bij 1 of 2 ogen kleuren we de tak rood, bij 3 of 4 ogen kleuren we de tak geel en bij 5 of 6 ogen kleuren we de tak blauw. Kortom, voor een gegeven tak heeft iedere kleur kans $\frac{1}{3}$ en de kleuring van de 190 takken van K_{20} gebeurt onafhankelijk van elkaar.

Hoeveel monochrome K_5 's verwachten we nu in K_{20} ? Neem eerst een vaste K_5 . Die heeft $\binom{5}{2} = 10$ takken. De kans dat deze tien takken allemaal rood zijn is $\frac{1}{3^{10}}$. De kans op 'alle 10 geel' en op 'alle 10 blauw' is even groot. De kans dat K_5 monochroom is, is dus $3 \cdot \frac{1}{3^{10}} = \frac{1}{3^9} = \frac{1}{19683}$.

Er zijn in totaal $\binom{20}{5} = 15\,504$ K_5 's in K_{20} , dus het verwachte aantal monochrome K_5 's is dus $\frac{15\,504}{19683}$.

Als we het aantal monochrome K_5 's noteren als S , dan is S een toevalsvariabele. Bij de ene kleuring kun je een andere waarde krijgen voor S dan bij een andere kleuring. Het is verschrikkelijk ingewikkeld om de kansen

$P(S = 0)$, $P(S = 1)$, $P(S = 2)$, ..., $P(S = 15\,504)$ uit te rekenen, maar we weten al dat

$$0 \cdot P(S = 0) + 1 \cdot P(S = 1) + 2 \cdot P(S = 2) + \dots = \frac{15\,504}{19683}.$$

Stel nu dat $P(S = 0)$ gelijk was aan 0. Dan stond er aan de linkerkant een gewogen gemiddelde van de getallen 1, 2, 3, Dat gewogen gemiddelde was dan minstens gelijk aan 1. Bewijs: Als we p_i schrijven voor $P(S = i)$ en N voor 15 504, dan geldt

$$1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \dots + N \cdot p_N \geq 1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + \dots + 1 \cdot p_N = 1.$$

Het getal rechts is echter kleiner dan 1 en dus concluderen we met Erdős dat $P(S = 0)$ niet gelijk aan 0 kan zijn!

Kortom, $S = 0$ komt echt voor onder de 3^{190} verschillende 3-kleuringen van K_{20} . Dit bewijst Erdős' stelling dat er 3-kleuringen bestaan van de 190 takken van K_{20} zodat geen enkele K_5 in K_{20} monochroom is. Bonusopgave: je kunt zelfs concluderen dat er minstens $\frac{4179}{19683} \cdot 3^{190}$ van die kleuringen bestaan.

Met hetzelfde argument kun je nu bewijzen dat er een 3-kleuring bestaat van K_{10} zodat geen enkele K_4 in K_{10} monochroom is. Algemener: er bestaat een k -kleuring van K_n zodat geen enkele K_m in K_n monochroom is voor $(n, k, m) = (6, 2, 4), (11, 2, 5), (4, 3, 3), (10, 3, 4), (5, 4, 3), (14, 4, 4), (33, 4, 5)$, etcetera.

Lang leve de verwachtingswaarde!

We gaan terug naar het voorbeeld met $n = 20$ knopen, $k = 3$ kleuren en deelgrafen met $m = 5$ knopen. Ik schreef dat het zo opmerkelijk is dat Erdős *niet* een heel speciale 3-kleuring van de K_{20} construeert, maar 'in tegendeel' juist een 'willekeurige' kleuring gebruikt. Hij gebruikt dus kansrekening om een deterministische conclusie te trekken! In feite heeft Erdős in de berekening van de verwachtingswaarde $\frac{15\,504}{19683}$ van S alle 3^{190} kleuringen tegelijkertijd meegenomen, ieder met haar eigen (minuscule) kansje. (Dit doet me denken aan quantumcomputers, die ook heel veel gevallen tegelijkertijd kunnen doorrekenen.) De S is niet een vast getal, maar een toevalsvariabele die voor de 3^{190} verschillende kleuringen met bepaalde kansen verschillende waarden kan aannemen. Waarom berekende Erdős een verwachtingswaarde? Ten eerste omdat je uit $E(S) < 1$ kunt concluderen dat $P(S = 0)$ niet 0 is, maar positief en dat $S = 0$ dus echt voorkomt onder de vele 3-kleuringen van K_{20} . Ten tweede deed Erdős dat omdat de verwachtingswaarde (in tegenstelling tot de volledige kansverdeling $P(S = s)$ voor $s = 0, 1, 2, \dots, 15\,504$) gemakkelijk uit te rekenen is. We hadden 15 504 K_5 's en iedere K_5 had kans $\frac{1}{19683}$ op 'succes' (dus op 'monochroom zijn'). De verwachtingswaarde van het aantal successen (monochrome K_5 's) is daarmee $\frac{15\,504}{19683}$. Intuïtief voelt dat goed, maar waarom is >

het eigenlijk zo? De definitie van de verwachtingswaarde van S is

$$0 \cdot P(S = 0) + 1 \cdot P(S = 1) + 2 \cdot P(S = 2) + \dots,$$

maar vaak in de wiskunde is de definitie van een concept niet de gemakkelijkste manier om er daadwerkelijk mee te rekenen. Je berekent bijvoorbeeld de afgeleide van $f(x) = x^{-3} \cdot \sin(x)$ ook niet direct uit de definitie van de afgeleide als een limiet, maar met de vertrouwde eigenschappen van ('rekenregels' voor) de afgeleide van producten, enzovoorts.

De alternatieve berekening van de verwachtingswaarde

$E(S)$ als $N \cdot p$ met $N = 15\,504$ en $p = \frac{1}{19683}$ berust op het volgende. (Dit is de truc die ik uit *Getal & Ruimte* heb geleerd, zij het in een andere context.)

Nummer de N deelgrafen K_5 van K_{20} als $1, \dots, N$. Definieer de toevalsvariabele S_i voor $i = 1, \dots, N$ als volgt: $S_i = 1$ als de i -de deelgraaf K_5 monochroom is ('succes') en $S_i = 0$ als die i -de deelgraaf K_5 niet monochroom is ('mislukking'). De verwachtingswaarde van S_i is:

$$E(S_i) = 0 \cdot P(S_i = 0) + 1 \cdot P(S_i = 1) = P(S_i = 1) = p.$$

Even nadenken en je ziet dat het totaal aantal successen gelijk is aan $S = S_1 + S_2 + \dots + S_N$. En nu komt het belangrijkste punt. Er geldt:

$$E(S_1 + \dots + S_N) = E(S_1) + \dots + E(S_N),$$

zelfs als de toevalsvariabelen $S_1, \dots, S_N$ afhankelijk zijn!

Ieder jaar weer blijkt in het college vakdidactiek dat de meeste studenten dit niet weten en ten onrechte denken dat de afhankelijkheid roet in het eten zou gooien. Heel jammer, want het is een buitengewoon nuttige regel! Het geeft ons hier het gewenste $E(S) = p + \dots + p = Np$. Als van de ballen in een vaas een fractie p rood is, dan is bij het trekken van N ballen de verwachtingswaarde van het aantal rode ballen gelijk aan Np . Dit is duidelijk voor trekken met terugleggen, maar met de beschreven truc bewijs je dat dit ook geldt voor trekken zonder terugleggen! (Over roet gesproken: als N mensen lootjes trekken voor Sinterklaas en zij allemaal hun lootje trekken en tegelijkertijd openen, dan is de verwachtingswaarde van het aantal personen dat het eigen lootje trekt gelijk aan $N \cdot \frac{1}{N} = 1$. Dit bewijs je met precies hetzelfde argument.)

Van Erdős naar Ramsey

Aan het begin van het artikel zagen we twee typen uitspraken. Aan de ene kant zagen we dat er een 2-kleuring van een K_5 bestaat zonder monochrome K_3 . Aan de andere kant: iedere 2-kleuring van een K_6 heeft een monochrome K_3 . De stelling van Erdős dat er een 3-kleuring van de K_{20} bestaat zonder monochrome K_5 's is van het eerste type. Maar stel nu dat we n (veel?) groter nemen dan 20, geldt dan misschien wel dat iedere 3-kleuring van K_n een monochrome K_5 heeft?

Het antwoord is 'ja'. Als n groot genoeg is, dan heeft iedere 3-kleuring van K_n minstens één monochrome K_5 . Hoe groot 'groot genoeg' is voor dit voorbeeld weet ik helaas niet.

De stelling kan nog verder worden gegeneraliseerd. De Engelse wiskundige Ramsey bewees in 1930 dat iets vergelijkbaars geldt voor ieder aantal kleuren en voor iedere grootte m van de volledige deelgrafen K_m van K_n : voor iedere k en m bestaat er een N zodat voor iedere $n \geq N$ en voor iedere k -kleuring van de volledige graaf K_n een monochrome deelgraaf K_m van K_n bestaat. Voor sommige k en m is de beste (kleinste) waarde van N bekend. We hebben bijvoorbeeld gezien dat $N = 6$ voor $(k, m) = (2, 3)$. Voor $(k, m) = (2, 4)$ is bekend dat $N = 18$ de beste waarde is. Dus iedere 2-kleuring van K_{18} bevat een monochrome K_4 , maar er bestaat een 2-kleuring van K_{17} zonder monochrome K_4 . (Erdős' aanpak is helaas niet sterk genoeg om dit laatste te bewijzen.) Voor $(k, m) = (2, 5)$ is de minimale waarde van N nog niet bekend.

Bewezen onbewijsbaarheid

We representeren de n punten van de volledige graaf door de getallen $1, \dots, n$. Een tak in de volledige graaf K_n wordt volledig bepaald door de twee eindpunten $a, b \in \{1, \dots, n\}$. Algemener kunnen we deelverzamelingen van i verschillende elementen in $\{1, \dots, n\}$ bekijken. (Het takken-geval is $i = 2$.) In plaats van takken van K_n kunnen we de $\binom{n}{i}$ deelverzamelingen van $\{1, \dots, n\}$ met i elementen kleuren met k kleuren. Paris en Harrington generaliseerden in 1977 Ramsey's stelling naar dit soort kleuringen. Dit is uiteindelijk een bewering dat er voor ieder 3-tal positieve gehele getallen (i, k, m) een positief geheel getal N bestaat met een bepaalde eigenschap. Het is een bewering die te formuleren is binnen de wereld van de (positieve) gehele getallen. Laten we haar PH noemen. De bewering PH is vooral interessant vanwege de meta-stelling over de mogelijke bewijzen van PH. Deze meta-stelling (een stelling over een stelling) is ook bewezen door Paris en Harrington. De meta-stelling zegt dat PH niet te bewijzen is 'binnen de wiskunde van de gehele getallen', hoewel PH zelf wel in die wereld leeft! Paris en Harrington bewezen dat je PH alleen kunt bewijzen door voorbij de natuurlijke getallen door te tellen: $0, 1, 2, \dots, \omega$, waarbij ω de 'kleinste' oneindigheid is. Maar we moeten nog verder! Ieder kind weet wat na oneindig komt: oneindig plus 1. Dus we tellen verder: $\omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega^2, \dots, \omega^3, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots$.

Is het niet geweldig dat van deze kinderfantasie legitieme wiskunde te maken is? Is het niet wonderlijk dat je hiermee gewone natuurlijke getallen beter kunt begrijpen (zoals je reële getallen beter kunt begrijpen door complexe

getallen)? En is het niet magnifiek dat we in de wiskunde stellingen kunnen bewijzen *over* bewijzen? Een prachtige introductie tot deze zaken is *Roads to Infinity* van Stillwell ^[1].

Noten

- [1] Stilwell, J. (2010), *Roads to Infinity*.
A K Peters Ltd.

Over de auteur

Jeroen Spandaw is gepromoveerd en gehabiteerd in de algebraïsche meetkunde, waarna hij heeft gewerkt als docent wiskunde en natuurwetenschappen in het voortgezet onderwijs. Sinds 2007 werkt hij als universitair docent en wiskundelerarenopleider aan de TU Delft.
E-mailadres: J.G.Spandaw@tudelft.nl

Roest rust (niet) Dodecaëder

Ab van der Roest

Er zijn van die voorrechten die alleen pensionado's hebben. Een dagje naar Leiden. Zomaar wat dwalen in de stad, in de hortus en in enkele musea. En daar in het museum van oudheden: een dodecaëder: een regelmatig twaalfvlak met als zijvlakken vijfhoeken, zie figuur 1.



figuur 1

Op de hoekpunten bolletjes. Eerste vraag die je dan aan een leerling vanaf de brugklas kan stellen is het aantal bolletjes te bepalen. Vervolgens kun je doorgaan met de platonische lichamen. Er zijn er maar vijf en dat is makkelijk in te zien. Maar het blijft altijd iets om je over te verwonderen. Plato (427 tot 347 voor Christus) wist al te bewijzen dat er slechts vijf van die regelmatige lichamen zijn. De vijf lichamen bepaalden zijn wereldbeeld. De dodecaëder is dan het alomvattende, de kosmos. De dodecaëder die ik in het museum zag heeft als vindplaats Elst in de Betuwe. Er is er ook één gevonden bij Hartwerd in Friesland. Ze worden gedateerd in de Romeinse tijd (150 tot 400 na Christus). Ook in België zijn er dodecaëders gevonden. De bekendste is die van Tongeren. Wiskundig gezien zijn er geen raadsels aan de dodecaëders, maar historisch gezien wel. Tot vandaag toe zijn er diverse speculaties, maar zeker geen zekerheid van het nut. Hieraan moest ik denken toen ik twee weken later een



figuur 2

speeltuintje zag met daarin het speeltoestel van figuur 2.

Jawel, dodecaëders die creatief gestapeld zijn. Mooie strikvraag kun je maken met de formule van Euler voor veelvlakken:

$$H + V = R + 2 \quad (H, R, V \text{ staan respectievelijk voor aantal hoekpunten, vlakken en ribben}).$$

De leerling controleert de formule voor bijvoorbeeld een kubus en voor de dodecaëder. Maar dan de 'geschakelde' dodecaëders. Bij de onderste twee vallen twee vlakken samen en verdwijnen er dus vijf hoekpunten en vijf ribben. Klopt dit wel met de formule van Euler? Zo blijf ik toch maar bezig met wiskunde en met vragen die ik nooit zal stellen aan mijn leerlingen. Maar ik stel mezelf ook de vraag: 'Hoe zal dat over 2000 jaar zijn als deze speeltoestellen opeens opgegraven worden? Zullen ze dan net zo raadselachtig zijn als die dodecaëders in Leiden en Tongeren?' Raadsels, maar gelukkig niet voor wiskundigen.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde in ruste.
E-mailadres: a.b.vanderroest@ziggo.nl

Verenigingsnieuws

Jaarvergadering/studiedag 2023

Tweede uitnodiging

Dit is de tweede uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 4 november 2023**.

Aanvang: 10:00 uur

Sluiting: 16:15 uur

Plaats: Lichtus College,
Vondellaan 4, 3906EA Veenendaal

Thema van de studiedag: Wiskunde en de jeugd van tegenwoordig



De jeugd van tegenwoordig is goed thuis in de digitale wereld en is ondernemend. Hoe kunnen docenten die vaardigheden en al die moderne digitale hulpmiddelen benutten bij het leren van wiskunde? Dat zijn vragen waar we voor staan en het is belangrijk om elkaar te inspireren met mogelijke antwoorden. Op online platforms is hierover al veel gaande. Enkele dagen na de onrust over ChatGPT werden daar leuke voorbeelden gedeeld voor gebruik in de wiskundeles.

De jeugd van tegenwoordig beweegt zich makkelijk in de digitale wereld en wil snel resultaat zien. Dat vlugge en vluchtige verenigt zich niet makkelijk met het leren van wiskunde. Bovendien heeft een aantal leerlingen, mede als gevolg van de pandemie, moeite met concentratie, zorgvuldig lezen en metacognitieve vaardigheden zoals plannen en het leren van fouten. Met welke werkvormen krijgen we de leerlingen áán? Welke activerende start van de wiskundeles krijgt de neuzen de goede kant op? Hoe zorgen we ervoor dat ze plezier krijgen in wat er op het programma staat? Vragen die we tijdens deze studiedag aandacht zullen geven.

De jeugd van tegenwoordig beweegt zich makkelijk in de digitale wereld en de wiskunde beweegt ook mee. De huidige samenleving vraagt om vaardigheden rond big

data, algoritmisch denken en digitale geletterdheid. Deze begrippen zijn grotendeels nieuw en nauw verbonden met wiskunde. Hoe geven wij dat in ons onderwijs handen en voeten? In de wiskundeles zijn we vaak bezig met het vertalen van problemen naar formules in x en y . Is dat de wiskunde die nog nodig en urgent is? Er staan enkele curriculumvernieuwingen voor de deur. Wat gaan die inhouden? Tijdens de studiedag zullen we ook aandacht hebben voor de wiskunde van tegenwoordig en de curricula van de nabije toekomst.

We nodigen wiskundedocenten en andere betrokkenen uit om kennis en ervaringen te delen rond wiskunde en de jeugd van tegenwoordig. We hopen dat deze studiedag weer een unieke gelegenheid biedt om elkaar te ontmoeten en te inspireren! Heb je ideeën voor een workshop? Dan horen we die graag. Mail naar studiedag@nvww.nl

Sharon Calor,

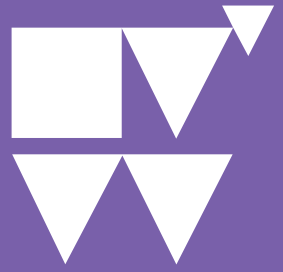
Margot Rijnierse en Michiel Doorman

10.00-11.00 uur – Jaarvergadering (concept) agenda

- 1 Opening door de voorzitter, Ebrina Smallegange
- 2 Jaarrede van de voorzitter
- 3 Notulen van de jaarvergadering van 5 november 2022
- 4 Jaarverslagen 2022/2023
 - 4.1 Jaarverslag van de NVvW
 - 4.2 Jaarverslag van *Euclides*
- 5 Financiën.
 - 5.1 Jaarrekening en balans 2022/2023
 - 5.2 Verslag kascommissie
 - 5.3 Decharge van het bestuur
 - 5.4 Begroting en vaststelling contributie
 - 5.5 Benoeming nieuwe kascommissie
- 6 Bestuursverkiezing

Aftredend zijn Ebrina Smallegange en Kees Garst.

Het bestuur nodigt leden uit zich te melden wanneer zij belangstelling hebben voor een plaats in het bestuur (E-mailadres: secretaris@nvww.nl). Tot 28 dagen na het verschijnen van deze uitnodiging kunnen bestuurskandidaten eveneens schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden.
- 7 Rondvraag
- 8 Sluiting van de jaarvergadering



Studiedag

De studiedag, met plenaire lezingen, workshops, lunch en markt en gelegenheid om elkaar te ontmoeten begint om 11.00 uur en eindigt rond 16.15 uur.

Nieuwe leden

De studiedag is een uitstekende gelegenheid voor nieuwe leden om kennis te maken met de vereniging. Attendeer daarom je collega op het bestaan van deze studiedag. Ieder die een collega-niet-lid meeneemt ontvangt een presentje.

Kosten

De studiedag is gratis voor leden (inclusief lunch). Niet-leden zijn welkom tegen betaling van een bijdrage in de kosten van € 87,50. Hiermee ben je tevens gratis lid van de vereniging tot 1 augustus 2024 inclusief alle faciliteiten, waaronder zeven nummers van de lopende jaargang van *Euclides*, mogelijkheid tot deelname aan de verenigingswerkgroepen en gratis gebruik van de helpdesk t.b.v. advisering in arbeidszaken.

Aanmelding

Aanmelden kan vanaf half september.
Voor de organisatie is het van belang dat je je op tijd

aanmeldt. Ook dit jaar gaat de aanmelding weer geheel digitaal via de site van de vereniging. Daarop staat t.z.t. het volledige programma, inclusief de workshops waar je een keuze uit kunt maken.

Markt

Naast alle workshops is er ook een uitgebreide markt waar je je hart kunt ophalen aan boeken, rekenmachines, spellen, wiskunst en alle wiskundemethodes.

Certificaat

Wil je een certificaat ontvangen, vermeld dan bij je aanmelding ook voorletters en geboortedatum. Het certificaat wordt na afloop van de studiedag digitaal toegestuurd.

Dus reserveer in je agenda: NVvW-dag op zaterdag 4 november 2023.

Via de nieuwsbrief en de website krijg je nadere informatie over wat je kunt verwachten op deze dag. Voor meer praktische informatie over de organisatie kun je je wenden tot Heleen van der Ree (hoofdbureau@nvvw.nl).

Het bedrogen oog

Henk Rozenhart



De meeste mensen kennen wel het WIEL van Jeroen Henneman op het dak van het belastingkantoor bij station Sloterdijk in Amsterdam. Maar wat veel mensen niet weten is dat elders in Amsterdam nog twee van dit soort objecten te zien zijn. Het gaat om, zoals Jeroen het zelf noemt, opstaande tekeningen. Ze zijn dus plat (2d) maar vanuit bepaalde standpunten bekeken lijken ze ruimtelijk (3d). Het gaat om de DOOS, op de Buitenveldertselaan en om de SCHAKELBAND op het stadionplein. Deze laatste is in het donker heel fraai verlicht en lijkt dan echt in de lucht te zweven. Nu alle leerlingen een mobiele telefoon hebben, is het wellicht een leuk idee om eens een staande tekening te maken en te proberen of je het 3d effect op foto kunt vastleggen.

Frits Göbel 1933 – 2023

Creatieve, complexe puzzels

Frits Göbel: een bijzondere man, jarenlang bedenker van creatieve complexe vraagstukken voor *Euclides* aan wie we als voormalig hoofdredacteurs goede herinneringen bewaren. Marja toog in 2002 naar Enschede om Frits, destijds gepensioneerd universitair docent wiskunde, te vragen of hij de puzzelrubriek nieuw leven zou willen inblazen. Ze werd er bijzonder hartelijk ontvangen door Frits en zijn vrouw Adrieke en tot haar vreugde reageerde hij positief. Het werd de start van een jarenlange plezierige samenwerking. Zijn puzzelrubriek bevatte complexe puzzels waarbij hij prachtige handgetekende figuren als illustraties maakte. Het waren plátjes, letterlijk en figuurlijk.

Een weliswaar kleine maar zeer fanatieke schare van wiskundedocenten liet zich door zijn puzzelrubriek uitdagen en plezieren. Deze groep streed met elkaar in de ladder waarbij naast de hoogste eer ook kerst-, zomer- en ladderprijzen verdiend konden worden. Frits beoordeelde de inzendingen, was altijd zeer blij als er snelle en correcte reacties kwamen.

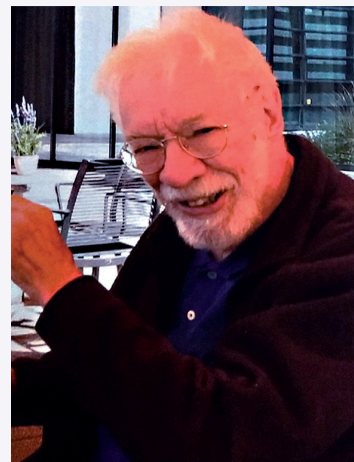
Zorgvuldig en punctueel

Frits was zorgvuldig, punctueel, formuleerde zo precies mogelijk en verwachtte van ons als redactie hetzelfde – overigens volkomen terecht. Een enkele keer raakte Frits geïrriteerd over kwesties die zijn rubriek betroffen. Hij bracht zijn misnoegen over bijvoorbeeld ‘miezerige veranderingen’ of ‘onnodig toegevoegde illustraties’ in

die gevallen duidelijk en ongezouten naar voren, overigens zonder dat het de samenwerking vertroebelde. Een voorbeeld vind je in het volgende citaat uit 2009: ‘Ik heb zojuist *Euclides* ontvangen. In de rubriek Recreatie viel mijn oog meteen op de afschuwelijke tekening die bij de Bissectrice-puzzels staat. Ik kan me niet herinneren dat ik hier een tekening bij wilde hebben. In feite heb ik de opgaven zó geformuleerd dat die ook niet nodig is. In principe mag er dan toch wel een tekening bij, maar *niet* zoiets.’

Het tekent de precisie en zorgvuldigheid waarmee hij zijn rubriek samenstelde.

We zijn Frits enorm erkentelijk geweest voor de negen jaar waarin hij de puzzelrubriek voor *Euclides* verzorgde. Desondanks meende de redactie in 2011 dat het tijd werd voor verandering van (puzzel)spijs; met wat toegankelijker opgaven wilden we een grotere groep puzzelende collega's aanspreken. Frits heeft ons verzoek destijds gerespecteerd en zijn rubrieksopvolgers gesteund met materiaal en inspiratie. Groot.



Nationale Wiskunde Dagen (NWD) 2024



Als wiskundeleraar wil je van tijd tot tijd nieuwe ideeën opdoen om creatief en actief met je vak bezig te kunnen blijven. Dat kun je doen door te luisteren naar een goed verhaal, door actief mee te doen in werkgroepen of door met collega's van gedachten te wisselen. Tijdens de Nationale Wiskunde Dagen (NWD) heb je die gelegenheid volop. Twee dagen lang.

De 30^e editie van de NWD zal plaatsvinden op vrijdag 5 april en zaterdag 6 april 2024.

Inschrijven

De inschrijving voor de NWD is in december 2023. Op de website wordt de procedure voor inschrijven gepubliceerd, <https://www.uu.nl/onderwijs/nationale-wiskunde-dagen>

Olympiadepuzzel 99-1

Delers van faculteiten

Esther Bod



De Nederlandse Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor leerlingen van havo en vwo.



Alle leerlingen van klas 1 t/m 5 met belangstelling voor wiskunde kunnen meedoen aan de eerste ronde. Deze wordt altijd in januari gehouden op alle deelnemende scholen. De speelse maar uitdagende opgaven testen je creativiteit en wiskundig inzicht. Meer informatie is te vinden op www.wiskundeolympiade.nl.

Zoals bekend staat $n!$ voor het product $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$. Uiteraard is $n!$ deelbaar door alle positieve gehele getallen kleiner dan of gelijk aan n . Sommige faculteiten zijn ook deelbaar door de eerstvolgende grotere getallen. Zo is $5!$ deelbaar door 6 en is $7!$ deelbaar door 8, 9, en 10. Sterker nog, $7!$ is deelbaar door $8 \cdot 9 \cdot 10$.

We zeggen dat 7 een *deelbaarheidspotentie* van 3 heeft omdat $7!$ deelbaar is door het product van de 3 (maar niet 4) gehele getallen volgend op 7. Net zo heeft 5 een deelbaarheidspotentie van 1 en heeft 6 een deelbaarheidspotentie van 0. In het algemeen definiëren we de deelbaarheidspotentie van een positief geheel getal n als het grootste getal k zodat $n!$ deelbaar is door $(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+k)$.

Bepaal het kleinste positieve gehele getal n met een deelbaarheidspotentie van 4.

Inzenden oplossingen

Stuur je oplossing uiterlijk 13 oktober naar euclides@wiskundeolympiade.nl. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een cadeaubon van € 20,-.

Terugblik puzzel nr. 7

In de opgave van vorige keer waren we op zoek naar het aantal oplopende getallen n zodat $n + 2023$ een aflopend getal is. Bij zo'n soort opgave is het belangrijk om zorgvuldig en systematisch te werk te gaan. Als je (een groep van) mogelijkheden voor n over het hoofd ziet, kom je op een te laag antwoord uit; als je daarentegen een van

de voorwaarden vergeet, vind je waardes voor n die niet voldoen. De inzenders leiden relaties af tussen de cijfers van n en van $n + 2023$. De voorwaarde dat n oplopend is, legt beperkingen op de mogelijke waarden voor de cijfers van beide getallen. Deze kun je vervolgens verder aanscherpen door te gebruiken dat $n + 2023$ aflopend is. Op deze manier kun je het aantal mogelijkheden voor n steeds verder beperken tot een klein aantal opties waarvan je kunt controleren of ze aan alle voorwaarden voldoen. Er blijken 46 getallen n te zijn die aan de voorwaarden voldoen.

Met dank aan oud-olympiadedeelnemers Aimée Jacobs en Kati Overbeeke voor het nakijken van de inzendingen. De juiste oplossing (inclusief toelichting) is te vinden op de website, samen met de namen van de drie inzenders die deze oplossing gevonden hadden. De cadeaubon van deze editie gaat naar Matthijs Schukking.



vakbladeuclides.nl/991olympiadepuzzel

Ars et Mathesis Lustrumprijsvraag 2023

Video over wiskunde en kunst

Ars et Mathesis is een stichting van liefhebbers van kunst die is geïnspireerd door wiskunde. We bestaan 40 jaar en organiseren iedere 5 jaar een lustrumprijsvraag.

De opdracht is deze keer om een korte video te maken van maximaal 90 seconden. De enige eis is dat er een verband is met zowel wiskunde als met kunst (schoonheid). De video mag zowel horizontaal als verticaal gefilmd zijn. Je kunt individueel deelnemen maar ook als groep, bijvoorbeeld als klas.

Je kunt je inzending opsturen uiterlijk tot en met 15 oktober 2023. Alle genomineerden worden uitgenodigd voor de Ars et Mathesis dag op zaterdag 18 november 2023 in Leiden.

Meer informatie:

<https://www.arsetmathesis.nl/prijsvragen/>

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie

Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Rogier Bos
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn, voorzitter
Tanja Groenendaal
Ernst Lambeck
Martijn Schouw
Constantijn Tilanus

Inzenden bijdragen

Tom Goris,
Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden.
Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie.
Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvbw.nl

Voorzitter

Ebrina Smallegange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Heleen van der Ree, Feantersdyk 4 - i, 9264 TN Earnewâld
Tel. 06-155 045 76 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau, Tel. 0345 531 324
E-mail: evers.rechtspositie@gmail.com
Vermeld bij je contact je lidnummer en telefoonnummer.

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt met ingang van 1 augustus 2018

- leden: € 87,50
- leden, digitale Euclides € 73,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WvF (jaarlijks): € 2,50

Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen Euclides niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang

Personen (niet-leden van de NVvW): € 90,00

Instituten en scholen: € 150,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00

Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkwijk 63, 3901 EC Veenendaal,
Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.

Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2023/2024

Za
23/09

UTRECHT

Symposium: Een bonte verzameling
Organisatie: werkgroep Geschiedenis NVvW

Vr
29/09

UTRECHT

Onderwijs meets onderzoek
Organisatie: NVvW, Freudenthalinstituut en SLO

Di
10/10

NIEUWEGEIN

Landelijk congres 'Actualisatie kerndoelen'
Organisatie: SLO

Za
04/11

VEENENDAAL

NVvW jaarvergadering en studiedag

Do
21/03

LANDELIJK

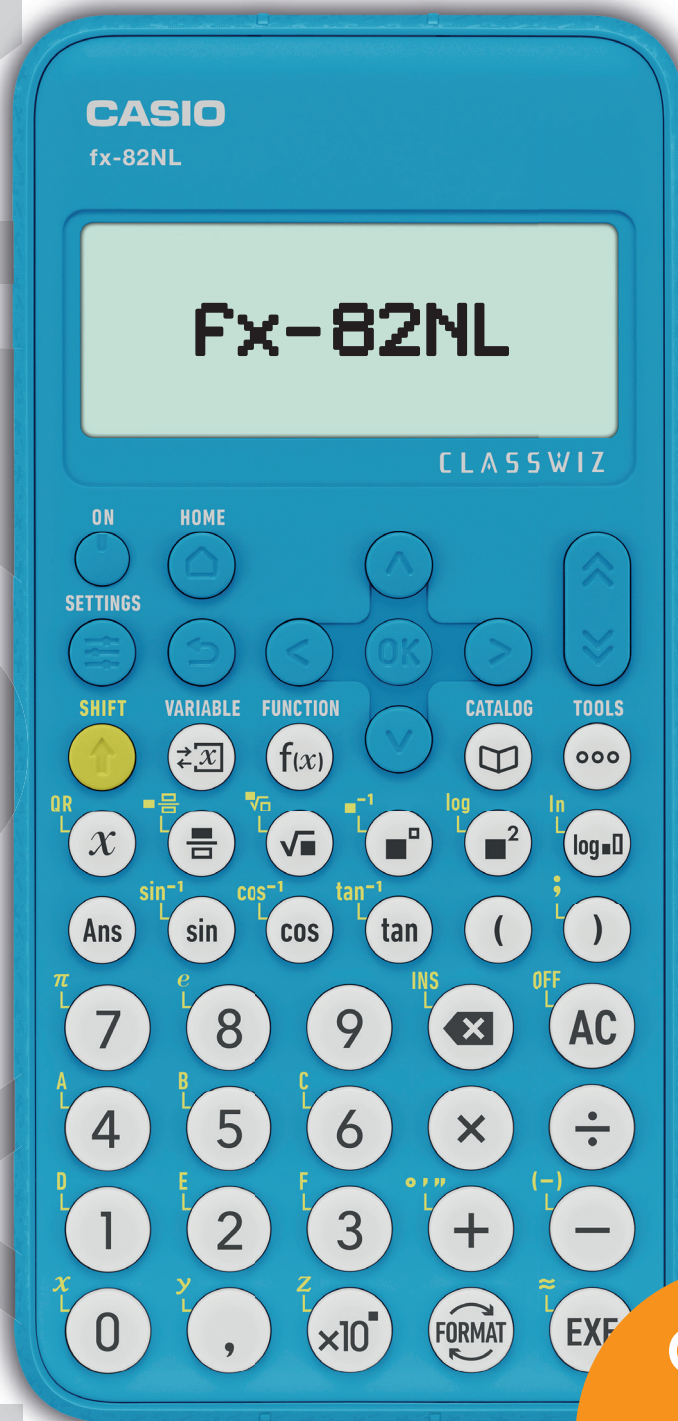
Op de scholen: W4Kangoeroewedstrijd, wereldwijde wiskundewedstrijd
Organisatie: Stichting Wiskunde Kangoeroe

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook vakbladeuclides.nl

JAARGANG 99

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
2	25 oktober 2023	21 augustus 2023
3	13 december 2023	9 oktober 2023
4	31 januari 2024	13 november 2023
5	13 maart 2024	2 januari 2024
6	1 mei 2024	26 februari 2024
7	19 juni 2024	22 april 2024

CASIO®



Opvolger van:
fx-82MS
fx-82EX

**Voor Nederlands
curriculum gemaakt**

Zomertip!



Ontwerp je
eigen geocache
met je klas!



Bij Geocaching wordt er gebruik gemaakt van GPS coördinaten. Ga met jouw klas op avontuur en maak jullie eigen multi-cache! Houden jullie meer van raadsels en schatzoeken? Ontwerp dan een toffe mystery cache!



- Stippel je unieke route uit – dit kan overal zijn.
- Bedenk raadsels en cryptische aanwijzingen.
- En verstop een cache met leuke verrassingen.



Op noordhoff.nl/geocaching vind je alles wat je nodig hebt om samen met je klas je eigen geocache te ontwerpen!

Of scan de QR code
en ga direct aan de slag!



Noordhoff

Brengt je verder