Olympiadepuzzel

Euclides 98 nummer 5

Een recursief logo

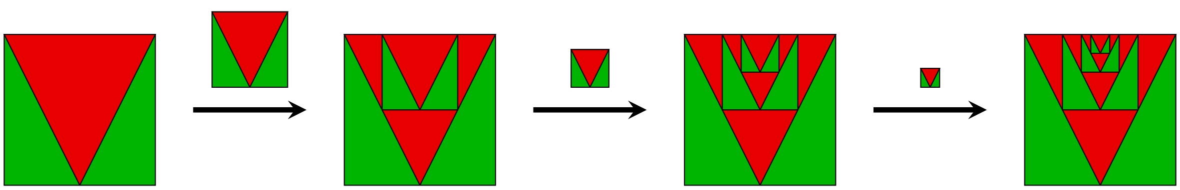
Opgave

Het logo van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren bestaat uit groene en rode vierkanten en driehoeken. In deze opgave bekijken we een variant op dit logo.

De linkerkant van het logo bestaat uit een groen vierkant met daaronder een gelijkbenige rode driehoek. We schuiven de rode driehoek in het groene vierkant. In deze opgave nemen we aan dat de driehoek precies in het groene vierkant past.

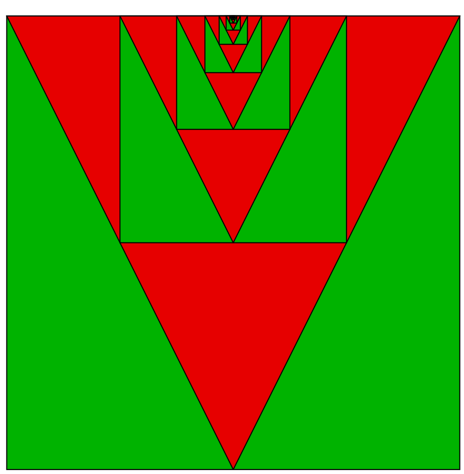
De figuur die zo ontstaat, verkleinen we zodat deze precies in de rode driehoek past. Dit geeft een figuur zoals in de tweede stap van onderstaande afbeelding. De figuur bestaat uit achtereenvolgens (van groot naar klein) een groen vierkant, een rode driehoek, nog een groen vierkant en nog een rode driehoek over elkaar heen.

In de volgende stap verkleinen we de vierkant-met-driehoek nogmaals, zodat deze precies in de kleine rode driehoek van de vorige stap past. Nu hebben we een figuur met drie vierkanten en drie driehoeken. Na nog zo'n stap hebben we een figuur met vier vierkanten en vier driehoeken.



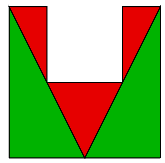
Dit proces herhalen we oneindig vaak. Een impressie van het resultaat zie je hieronder.

Welk deel van de figuur is rood gekleurd?



Uitwerking

Van het groene vierkant met de rode driehoek uit de eerste stap is in de uiteindelijke figuur nog het onderstaande zichtbaar.



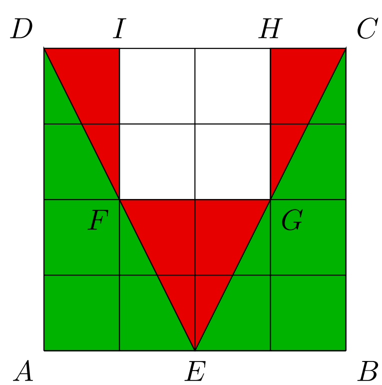
De uiteindelijke figuur bestaat uit oneindig veel verkleiningen van bovenstaande figuur. Alle kleinere figuren zijn gelijkvormig en hebben dus dezelfde verhouding tussen rood en groen. In de uiteindelijke figuur is de verhouding tussen rood en groen daarom ook gelijk aan de verhouding in bovenstaande figuur. Het is daarom voldoende om de verhouding in bovenstaande figuur te berekenen.

We stellen de zijden van het groene vierkant gelijk aan 4 en berekenen de oppervlakte van de groene en rode delen van bovenstaande figuur.

Laat A, B, C en D de hoekpunten van het vierkant zijn. We tekenen de figuur in een 4×4-rooster, zodanig dat A als coördinaten $(0, 0)$ heeft. Laat E het midden van zijde AB zijn. Dit is ook een hoekpunt van de onderste rode driehoek. Noem de andere hoekpunten van deze rode driehoek F en G. We tonen nu aan dat de y-coördinaat van F en G gelijk is aan 2.

De middens van de zijden DE en CE hebben respectievelijk coördinaten $(1, 2)$ en $(3, 2)$. Samen met de punten $(3, 4)$ en $(1, 4)$ vormen zij een vierkant.

Als de y-coördinaat van F en G kleiner is dan 2, dan heeft de witte uitsnede een kleinere breedte en grotere hoogte dan het zojuist geconstrueerde vierkant. Dat is in tegenspraak met het gegeven dat de witte uitsnede een verkleining van het groene vierkant is, en dus zelf ook een vierkant is. Als de y-coördinaat groter is dan 2, dan is de breedte juist groter dan de hoogte en is het wederom geen vierkant. We concluderen dat de y-coördinaat van F en G gelijk moet zijn aan 2. Dit zijn dus precies de eerdergenoemde roosterpunten $(1, 2)$ en $(3, 2)$.



We zien nu in bovenstaande figuur dat de groene driehoeken elk oppervlakte 4 hebben. De twee kleine rode driehoekjes hebben oppervlakte 1; de grotere rode driehoek heeft oppervlakte 2. In totaal is de oppervlakte van de groene driehoeken dus gelijk aan $4 + 4 = 8$, terwijl de oppervlakte van de rode driehoeken $1 + 1 + 2 = 4$ is. De verhouding tussen groen en rood is daarom gelijk aan $8 : 4$, ofwel $2 : 1$. We concluderen dat $\frac{1}{3}$ van deze figuur rood gekleurd is, en dus ook $\frac{1}{3}$ van de limietfiguur in de oorspronkelijke vraag.

Inzenders met de juiste oplossing

Rini van Bruchem, Rezi Goverde, Gé Groenewegen, Vicky Gwosdz, Hessel de Haan, Hans Linders, Jos Remijn, Matthijs Schukking, Piet Smal en Monica Woldinga

Winnaar van de cadeaubon

Piet Smal