

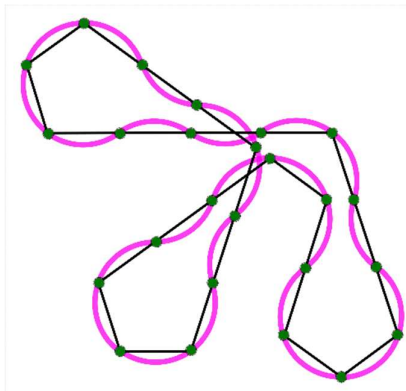
Uitwerking Puzzel 98-4 Schaatsbanen.

Wobien Doyer
Lieke de Rooij

Deze puzzel is op grond van een idee van Frans van Hoeve naar aanleiding van een opgave op de site van "Projecteuler". Daar staan vooral vraagstellingen die door programmeren kunnen worden opgelost. We geven hier een variatie waar programmeren niet nodig is.

Het gaat over circuits zonder scherpe bochten. Denk bijvoorbeeld aan een schaatsbaan. Harm Bakker associeerde het eerder met (speelgoed) treinbanen.

Zo'n circuit is opgebouwd uit een gegeven aantal cirkelbogen met gelijke straal en lengte.



Opeenvolgende bogen moeten vloeiend op elkaar aansluiten, ook de eerste en de laatste boog.

Zie het voorbeeld, afkomstig van Projecteuler, met 25 bogen van 72 graden. Daarin hebben we ook de bijbehorende koorden getekend.

We noemen de punten in het circuit waar twee bogen op elkaar aansluiten de aansluitpunten van het circuit. In de aansluitpunten komen altijd precies 2 bogen samen (en dus niet meer!).

En als je het circuit volgt vanaf een willekeurig aansluitpunt kom je precies één keer door elk aansluitpunt voordat je terug bent in het beginpunt. De bogen mogen elkaar buiten de aansluitpunten

wel kruisen maar je kan daar niet overstappen op de boog die je kruist.

We zullen de maten van een circuit beschrijven als $C(n, i)$, met n en i gehele positieve getallen. Daarbij is n het aantal bogen dat precies een hele cirkel vormt en i het totaal aantal bogen in het circuit. De hoek van de cirkelbogen is altijd $360/n$ graden. Het voorbeeld is dus $C(5, 25)$. Maar er zijn natuurlijk andere eenvoudigere voorbeelden van $C(5, 25)$ te bedenken. Bij de eerste opgave moet je n zelf kiezen.

Opgave 1

Welke waarden van n zijn mogelijk voor een circuit bestaande uit 15 bogen, dus $C(n, 15)$? Beschrijf of teken van elk een voorbeeld.

Uitwerking opgave 1

We kunnen bij elk aantal n bogen een cirkelvormige schaatsbaan maken door de cirkel te verdelen in n gelijke boogjes, met dus $i = n$. De schaatsbaan is dan een cirkel. Voor $i = 15$ is dus $C(15, 15)$ een oplossing. De koorden vormen dan een regelmatige 15-hoek.

Maar we kunnen ook een regelmatige 5-hoek of 3-hoek maken met respectievelijk 5 of 3 boogjes op elke zijde. Zie fig. 1.1 en 1.2.

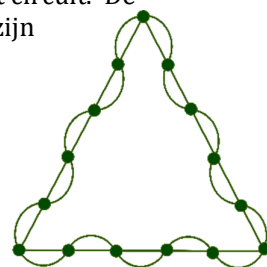
Maar er is er nog een die je kan zien als een variant op de driehoek, waarbij de hoeken worden afgerond.

Er zijn afwisselend 3 koorden in elkaars verlengde en 2 koorden waarop de draai gemaakt wordt (zie dikke punten).

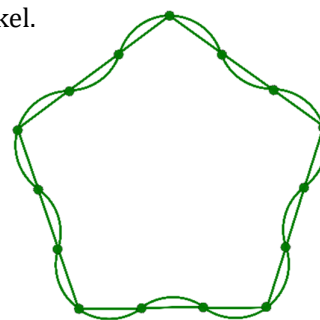
Omdat er in elke hoek van de driehoek een draai van 120 graden moet worden gemaakt moet de hoek van de bogen dus $120/3=40$ graden zijn.

Dan is $n=360/40=9$, dus een oplossing met $C(9, 15)$. Zie fig. 1.3.

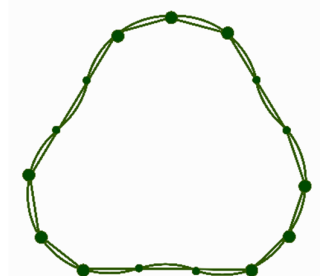
Merk op dat in al deze oplossingen steeds het aantal koorden in dezelfde richting achter elkaar oneven is. Het gevolg daarvan is dat de draai die gemaakt wordt na die koorden steeds een draai is in dezelfde richting als de vorige.



figuur 1.1



figuur 1.2



figuur 1.3

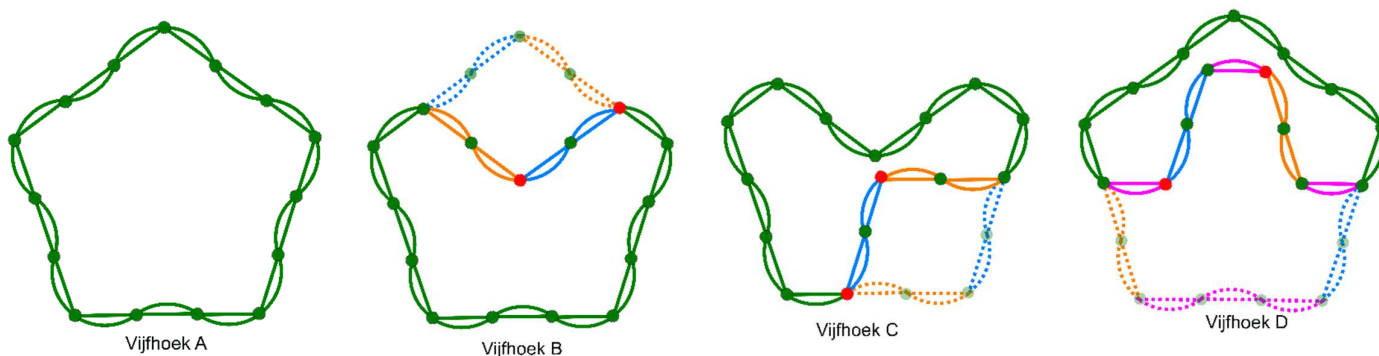
We komen hierop terug.

Meestal kan je bij gegeven n en i meerdere niet congruente circuits maken. Dat zijn dus circuits die niet door rotatie of spiegeling op elkaar passen. Het gaat dan alleen om de circuits, niet om waar of in welke richting je start.

Opgave 2: Welke niet congruente circuits kan je bedenken voor $C(5,15)$?

Uitwerking opgave 2

We zullen de figuren steeds zo kiezen, dat er meer (of evenveel) draaien rechtsom gaan dan linksom.



A: Het eerste circuit vonden we al in opgave 1.

B: We gaan uit van figuur A en kiezen 2 opeenvolgende richtingen (met de klok mee). Daarvan kleuren we twee aansluitende bogen blauw en twee oranje. Zie stippellijnen in figuur B. Daarna verwisselen we de volgorde van het blauwe en het oranje traject. Dat kan door ze te verschuiven zonder draaien. De bogen sluiten na de wisseling weer vloeiend op elkaar aan.

C: Voor C gaan we uit van B en kiezen twee opeenvolgende richtingen waarin nog niets is veranderd. Daarin herhalen we wat we deden bij B.

D: Voor D gaan we weer uit van A en kiezen 3 opeenvolgende richtingen. In de eerste kleuren we de twee laatste bogen blauw en in de derde de twee eerste bogen oranje (zie de gestippelde bogen). In de middelste kleuren we alle 3 de bogen roze. Door nu, aansluitend op de laatste groene boog, achter elkaar steeds aansluitend een roze, 2 oranje, 1 roze, 2 blauwe en 1 roze te verplaatsen zonder draaien, maken we het circuit weer sluitend en zijn alle bochten vloeiend.

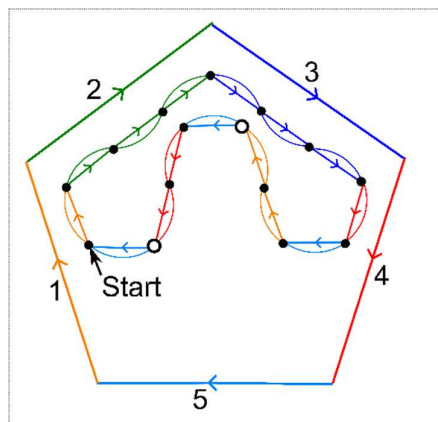
We vinden zo dus 4 verschillende schaatsbanen met $C(5,15)$.

Intermezzo voordat we beginnen met opgave 3 en 4:

Definities:

- Een serie vectoren achter elkaar in dezelfde richting tussen twee draaien noemen we een **traject**.
- Het laatste punt van een traject met een even aantal vectoren noemen we een **keerpunt**. (in de figuur aangegeven met een kringetje.)

Na opgave 1 merkten we op dat steeds de trajecten oneven waren. Dat geldt dus niet voor de vijfhoeken B, C en D hierboven. We bestuderen daarom de vijfhoek D nog eens.



In de figuur hiernaast is de omlooprichting rechtsom en de keerpunten zijn aangegeven met een kringetje. Om de schaatsbaan heen is een regelmatige 5-hoek getekend met genummerde vectoren, evenwijdig en in de kleur en richting van de koorden (vectoren) in de schaatsbaan.

Opmerking 1: Steeds als een traject een oneven aantal vectoren heeft, gaat de bocht voor en na dat traject dezelfde kant op, terwijl als dat aantal even is, de bochten voor en na dat traject tegengesteld is. Dat komt omdat als de koorden rechtdoor gaan de bogen om-en-om links en rechts van de koorden

lopen.

De omlooprichting van de bochten wisselt dus telkens na een keerpunt. Omdat het eindpunt van de schaatsbaan tevens het beginpunt is moet het aantal keerpunten in de baan altijd even zijn.

Opmerking 2: Zowel voor als na de keerpunten hebben de vectoren in de koorden dezelfde richting als de vectoren in de grote 5-hoek. Dat komt omdat tussen de keerpunten zowel de omlooprichting als de volgorde van de richtingen omgekeerd is

We zullen in opgave 3 en 4 gebruik maken van een aantal stellingen, waarvan het bewijs te vinden is aan het eind van de uitwerking.

- Stelling 1a: Voor de schaatsbanen die zichzelf niet kruisen geldt: Als n even is moet i ook even zijn en als n oneven is moet i oneven zijn. (zie bewijs blz. 9)
- Stelling 1b: Als $n=3, 4$ of 6 dan kunnen de schaatsbanen zichzelf niet kruisen. (zie bewijs blz. 9)
- Stelling 2: als $n=4$ dan zijn alle oplossingen viervouden. (zie bewijs blz.9)
- Stelling 3: geldige schaatsbanen met keerpunten zijn niet mogelijk als: $i \leq 2n$. (zie bewijs blz.11)
- Stelling 4: In de methode die we in opgave 3 bij $n = 5$ gebruiken om 2 oneven schaatsbanen met gelijke waarde van n samen te voegen om een even schaatsbaan te maken mogen de kruisingen niet samenvallen met een aansluitpunt. Stelling 4 laat zien dat dat niet gebeurt. (zie bewijs blz 12)
- Stelling 5: In opgave 4 gebruiken we nog een veel flexibelere manier van samenvoegen van 2 of meer schaatsbanen. Stelling 5 laat zien hoe dat kan. (zie bewijs blz.13)

Als n is gegeven zijn er meerdere waarden van i mogelijk.

Opgave 3: Welke waarden van i zijn mogelijk voor $n=3,4,5$ of 6 ? Licht je antwoorden toe.

Uitwerking opgave 3.

$n=3$

De kleinste oplossing is natuurlijk $i = 3$. Grotere oplossingen krijgen we door gelijkzijdige driehoeken te gebruiken waarvan de zijden een oneven aantal maal de lengte van de koorden zijn, zoals in figuur 3.1 (met $i = 9$). We krijgen zo voor elke waarde van x oplossingen met

$$i = 3 + 6x.$$

Omdat n priem is moeten er in elke richting even veel koorden zijn en dus is i altijd een 3-voud.

De vraag die dus nog beantwoord moet worden is of er ook even waarden van i mogelijk zijn, met $i = 6x$.

Uit de combinatie van stelling 1a en 1b blijkt: Als $n=3$ dan moet omdat n oneven i ook oneven zijn.

Meer mogelijkheden dan $i = 3 + 6x$ zijn er dus niet.

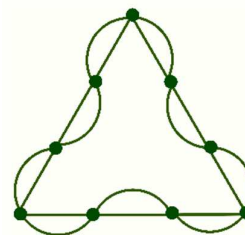
$n=4$.

De kleinste oplossing is $i = 4$. De koorden vormen dan een vierkant.

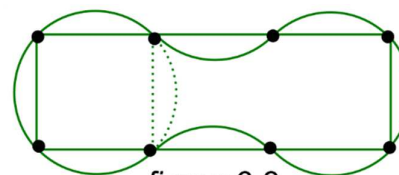
Het aantal koorden in de schaatsbaan omhoog moet gelijk zijn aan het aantal koorden omlaag, en het aantal koorden naar links moet gelijk zijn aan het aantal koorden naar rechts om de baan te sluiten op het beginpunt, dus moet het aantal koorden even zijn.

In figuur 3.2 is af te lezen dat door de figuur stapsgewijs bijvoorbeeld naar rechts uit te breiden we voor elke waarde van x krijgen: $i = 4x$.

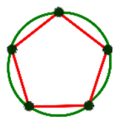
Volgens stelling 2 geldt: als $n=4$ dan zijn alle oplossingen viervouden. We vonden hierboven alle oplossingen voor $i = 4x$, en dat zijn dus ook alle oplossingen.



figuur 3.1



figuur 3.2



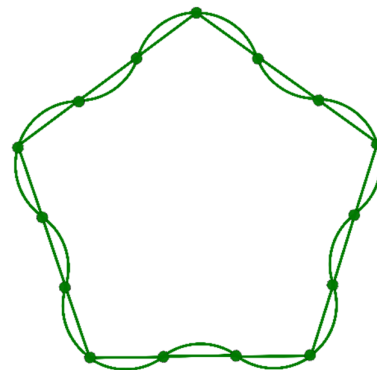
$n=5$, dus bogen van 72 graden. Nu kan de schaatsbaan wel met zichzelf kruisen.

De kleinste oplossing is $i = 5$. Omdat 5 priem is moeten er net als bij $n=3$ in elke richting evenveel koorden zijn om rond te komen, dus i moet een vijf-voud zijn. Als we, analoog met wat we deden voor $n = 3$, in een regelmatige vijfhoek de zijden in een oneven aantal even grote stukken verdelen, dan krijgen we oplossingen $i = 5 + 10k$.

Maar dat is niet alles. De schaatsbanen kunnen nu met zichzelf kruisen zonder dat de begin- en eindpunten van de kruisende takken samenvallen.

Figuur 3.4 ontstaat als volgt:

Begin met een vijfhoek met $i = 5$ en een met $i = 15$ en nummer in beide vijfhoeken de koorden zodat de koorden met hetzelfde nummer aan elkaar evenwijdig zijn. We kleuren de trajecten van de kleine vijfhoek rood en die van de grote vijfhoek groen.



figuur 3.3

Nummer de rode trajecten van de figuur met $i=5$ achtereenvolgens **1,2,3,4,5** en de groene trajecten (3 lang) van die van de figuur met $i=15$ overeenkomstig **1,2,3,4,5**. Gelijke nummers zijn in dezelfde richting. We kiezen dan met opvolgende nummers om en om een rood traject en een groen traject tot we ze allemaal hebben gebruikt. Dus **1,2,3,4,5,1,2,3,4,5**.

We hebben dan in twee rondjes alle trajecten gebruikt dus 20 bogen en hebben een figuur $C(5,20)$.

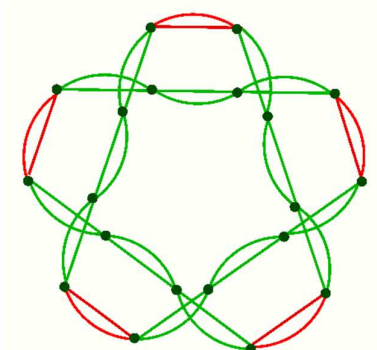
Op analoge manier maken we met $C(5,5)$ en $C(5,25)$ een figuur $C(5,30)$ en meer algemeen voor $i = 20$ -voud:

$C(5, 5 \cdot (2k + 1))$ en $C(5, 5 \cdot (2k + 3))$

of voor $i = 20$ -voud +10:

$C(5, 5 \cdot (2k + 1))$ en $C(5, 5 \cdot (2k + 5))$. ¹⁾

We hadden al 5-hoeken met een oneven aantal bogen per zijde $C(5, 5(2k + 1))$ vanaf $k=0$



figuur 3.4

Samen maakt dat alle 5-vouden behalve 10.

Van alle 5-vouden missen we dus alleen $i=10$. Daarvoor moeten er in elke richting 2 vectoren zijn. Na de start hebben we steeds keus uit 1 of 2 vectoren in dezelfde richting.

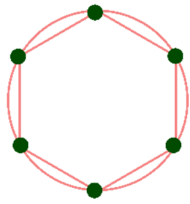
Als we steeds 1 kiezen dan sluiten we na 1 rondje aan op het beginpunt en hebben we $i = 5$.

Voor $i=10$ zouden we dus minstens een keer een traject van 2 bogen moeten kiezen, en dan hebben we een keerpunt.

Maar volgens stelling 3 zijn geldige schaatsbanen met keerpunten niet mogelijk als $i \leq 2n$, en we hebben $n=5$ en $i=10$.

$i = 10$ kan dus niet en dus zijn $i = 5$ of $15 + 5k$ met $k \geq 0$ alle mogelijke waarden van i .

¹⁾ Het is denkbaar dat er 10-vouden zijn waarvoor dit recept leidt tot kruisingen van de schaatsbaan die samenvallen met een aansluitpunt. Dat dat niet het geval is bewijzen we in stelling 4 op blz. 12.



$n=6$,

De kleinste oplossing is $i = 6$. Net als bij $n=4$ kunnen we in stappen de schaatsbaan naar rechts uitbreiden, waarbij er steeds 4 bogen bij komen. Zie figuur 3.5

Maar we kunnen ook 3 van de 6 zijden van de zeshoek verlengen, zodat er steeds 6 bogen bij komen. Zie figuur.3.6..

En tenslotte kunnen we de zo ontstane figuren weer in stappen naar rechts uitbreiden waarbij er steeds 4 bogen bij komen. Zie figuur 3.7

We hebben dus voor $n=6$ oplossingen voor :

* $i = 6 + 4x$ met $x \geq 0$ (6, 10, 14, 18, 22...)

* $i = 6 + 6x$ met $x \geq 0$ (6, 12, 18, 24...)

* $i = 12 + 4x$ met $x \geq 0$ (12, 16, 20, 22...)

Of: 6 en $10 + 2x$ met $x \geq 0$

Als $n=6$ zijn er geen kruisingen (stelling 1b)

Volgens stelling 1a geldt dan voor $n = 6$: omdat n even moet i ook even zijn.

Oneven oplossingen kunnen er dus niet zijn.

Van de even missen we alleen $i = 8$. Maar dan geldt volgens stelling 3:

Geldige schaatsbanen met keerpunten zijn niet mogelijk als: $i \leq 2n$.

Omdat $8 \leq 2 \cdot 6$ moeten dus alle trajecten een oneven aantal vectoren hebben, dus 1, 3, 5 of 7.

5 en 7 komen niet in aanmerking, want als je meer dan de helft van de vectoren in één richting gebruikt dan kan je nooit de schaatsbaan sluiten.

Steeds 1 kan ook niet, dan sluit je na 6 stappen de schaatsbaan en heb je $i=6$.

Er moet dus minstens één keer een traject met 3 voorkomen.

Zie figuur 3.8, als je start met 3 zijn de 5 vectoren die je over hebt niet genoeg om terug te komen bij de start.

$i = 8$ kan dus niet en we hebben dus alle oplossingen gevonden.

Opgave 4: Dit is een extra opgave buiten de puntentelling.

Kan je opgave 3 veralgemeniseren voor elke n ?

Uitwerking opgave 4:

Laat:

r = het aantal draaien rechtsom en l het aantal draaien linksom.

O_x = de oplossing die we krijgen door n maal een serie van $2x + 1$ bogen, steeds beginnend rechtsom en dan om-en -om linksom en rechtsom, achter elkaar te leggen.

Het aantal bogen is dan $i = n \cdot (2x + 1)$

v_k = de vector die hoort bij de k -de boog in O_0 . Dit zijn n even lange vectoren in N verschillende richtingen. We kiezen de lengte als eenheid, zodat de lengte van elke vector 1 is.

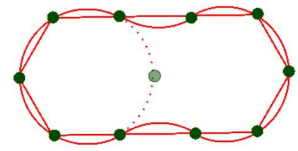
We roteren en/of spiegelen de schaatsbanen zo, dat v_1 horizontaal naar rechts wijst en $r \geq l$.

We noemen de oplossingen O_x de standaardoplossingen. Ze zijn geldig voor alle waarden van n .

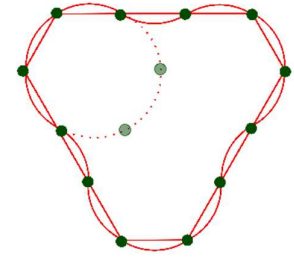
De standaardoplossingen leveren oplossingen waarbij i een oneven veelvoud is van n .

We kunnen voor alle getallen $n > 3$ nog één of meer soorten extra oplossingen vinden:

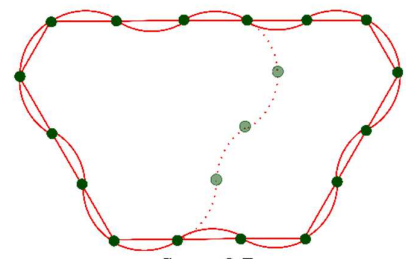
- Voor oneven n zagen we al in opgave 3 bij $n=5$ dat er behalve de oneven standaardoplossingen ook even oplossingen zijn. Dezelfde methode kunnen we gebruiken voor alle oneven waarden van n



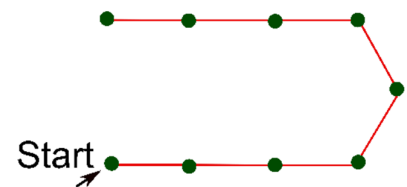
figuur 3.5



figuur 3.6



figuur 3.7



figuur 3.8

- Voor even getallen zagen we al in opgave 3 bij $n=4$ en $n=6$ dat we uit al gevonden oplossingen i nieuwe oplossingen $i+4$ konden maken en dat steeds konden herhalen. Dezelfde methode kunnen we gebruiken om reeksen oplossingen te maken voor alle even waarden van n .
- Voor getallen die niet priem zijn, dus te schrijven als $n = p \cdot q$ zullen we laten zien dat er dan oplossingen zijn met $i = p \cdot (q + 2x) = pq + 2px$ met $x \geq 0$.
- Maar we kunnen deze methoden ook als volgt combineren:

4.1: n oneven met $n \geq 5$: laat $n = 2m + 1$ een oneven getal ≥ 5 , dus $m > 1$.

De oplossingen O_x leveren $i = (2m + 1)(2x + 1)$ met $x \geq 0$, dus alle oneven veelvouden van n . (zie nog eens figuur 3.4)

De even oplossingen kunnen we op dezelfde manier maken als bij $n=5$ in opgave 3.

Dat levert een oplossing voor elke waarde met $i = n \cdot (2x + 1) + n \cdot (2y + 1) = 2n \cdot (x + y + 1)$ met $x > y$ en $y \geq 0$.

Dit zijn dus alle even veelvouden van n vanaf $4n$.

Dat $2n$ niet mogelijk is lieten we in opgave 3 al zien voor $n=5$. De redenering die we daar gaven is zonder verdere wijzigingen toepasbaar op elke oneven waarde van n door steeds 5 te vervangen door n en 10 door $2n$.

We hebben dus oplossingen voor i voor alle veelvouden van n behalve $2n$.²

4.2: n even met $n \geq 4$

laat $n = 2m$ met $m \geq 2$

We zagen hiervan al in opgave 3 voorbeelden met $m = 2$ en $m = 3$.

De kleinste oplossing is natuurlijk $i = 2m$, en O_x levert oplossingen $i = 2m \cdot (2x + 1)$ met $x \geq 0$.

Maar we zagen in opgave 3 bij $n = 6$ dat er meer mogelijkheden kunnen zijn.

De factor 2 zorgt dat er in alle richtingen evenwijdige koorden zijn.

In conclusie 2 op blz.3 constateerden we dat de richting van een traject altijd in dezelfde richting loopt als de corresponderende vector in de veelhoek die we om de schaatsbaan heen kunnen tekenen.

Dat betekent dat in een paar evenwijdige trajecten in de veelhoek er altijd één is waardoor de vectoren naar links lopen en één waardoor de vectoren naar rechts lopen.

Als we een paar evenwijdige richtingen kiezen kunnen we daarin in beide een traject kiezen en deze trajecten beide met 2 vectoren verlengen, zoals we ook deden bij opgave 3. Daarmee kunnen we, zo vaak als we willen de waarde van i met 4 vergroten.

Er is dus, als we voor $n = 2m$ een oplossing hebben voor $i = j$, ook een oplossing voor $i = j + 4k$

4.3 n is een product met $n = p \cdot q$ met $p > 2$ en $q > 2$ (p en q hoeven dus niet priem of oneven te zijn):

Laat $n = p \cdot q$ met $p > 2$ en $q > 2$:

Maak een serie van q opvolgende trajecten in de richtingen 1 tot en met q , met in totaal $q + 2x$ bogen.

Dat kan altijd, bijvoorbeeld eerst een traject van van $2q+1$ bogen, en vervolgens $q - 1$ trajecten van 1 boog, maar je kan de extra bogen ook meer geleidelijk toevoegen.

De resultante van alle vectoren in de serie opvolgende trajecten die we maakten noemen we $V1$.

Vervolgens herhalen we dezelfde serie van opvolgende trajecten, die dan natuurlijk over $360/p$ graden gedraaid zijn ten opzichte van de vorige serie. De vector $V2$ is weer de resultante van alle vectoren in de tweede serie. Natuurlijk is de lengte van $V2$ gelijk aan de lengte van $V1$ en is $V2$ $360/p$ graden gedraaid ten opzichte van $V1$.

We gaan zo door tot we p series hebben. De resultante van de vectoren $V1 - Vp$ is dan 0, en we zijn 360 graden gedraaid, dus hier sluit de schaatsbaan aan op het startpunt en hebben we een geldige schaatsbaan met $n = p \cdot q$ en $i = p \cdot (q + 2x) = n + 2px$ met $x \geq 0$.

²) We merkten in opgave 3 al op dat daarvoor bewezen moet worden dat de kruisingen niet samenvallen met een aansluitpunt. Zie daarvoor stelling 4 op blz. 12.

We kunnen, als $p \neq q$, natuurlijk de rollen van p en q verwisselen, en als n meer delers heeft wordt het aantal mogelijkheden snel groter.

Voorlopige conclusie: Als $n = p \cdot q$ met $p > 2$ en $q > 2$: dan kunnen we schaatsbanen maken met $i = n + 2px$ met $x \geq 0$.

4.4 Koppelen van verschillende schaatsbanen met dezelfde waarde van n .

We kiezen nu een andere, en veel flexibele manier van combineren van oplossingen.

In opgave 3 bij $n=5$ en in 4.1 hierboven gebruikten we daarvoor verschillende standaardoplossingen van oneven waarden van n om even oplossingen te krijgen.

In stelling 5 laten we zien dat het mogelijk is om 2 of meer verschillende schaatsbanen met gelijke waarde van n , die geen standaardoplossingen hoeven te zijn, aan elkaar te koppelen.

Er ontstaat dan een schaatsbaan waarvan i gelijk is aan de som van de waarden van i van de delen. We formuleren hier de stelling, die we bewijzen op blz. 13.

Stelling 5: We kunnen 2 schaatsbanen met dezelfde waarde van n koppelen als :

- a) De eerste schaatsbaan een traject heeft van minstens 3 koorden aan de buitenkant van de figuur, gevolgd door een oneven traject
- b) De tweede schaatsbaan een traject heeft van één koorde, ook aan de buitenkant van de figuur.

Een gevolg van de stelling is dat het mogelijk is om meer dan twee schaatsbanen te koppelen. Als de ontstane schaatsbaan na de eerste koppeling voldoet aan één van de 2 voorwaarden voor het koppelen dan kan je er een derde schaatsbaan aan koppelen die aan de andere voorwaarde voldoet.

Ook hoeven de te koppelen banen geen standaardoplossingen te zijn.

We gaan dit gebruiken om de schaatsbanen die we maakten in 4.3 aan elkaar te koppelen.

We vonden in 4.3: Als $n = p \cdot q$ met $p > 2$ en $q > 2$: dan kunnen we schaatsbanen maken met $i = n + 2px$ met $x \geq 0$.

Om te controleren of deze schaatsbanen gekoppeld kunnen worden moeten we nog even kijken hoe ze ontstaan zijn:

We maakten een serie van q opvolgende trajecten in de richtingen 1 tot en met q , met in totaal $q + 2x$ bogen en herhaalden die serie p maal.

De bedoelde serie trajecten ligt dus vast als $x = 0$, dan hebben alle trajecten één koorde. Dan kan de schaatsbaan worden gebruikt als "tweede" schaatsbaan uit de stelling.

In alle andere gevallen kunnen we de "extra" $2x$ bogen naar wens in tweetallen verdelen over de trajecten, en kunnen we trajecten maken die gebruikt kunnen worden zowel als "eerste" als "tweede" schaatsbaan uit de stelling. We kunnen dus altijd koppelen tenzij $x=0$ voor beide banen.

Tot zover bekeken we ontbindingen $n = p \cdot q$ met p en $q > 2$. We gaan nu kijken naar 2 verschillende delers van n , ook groter dan 2 en onderling priem. Dat lukt dus altijd als n geen priemgetal, macht van een priemgetal of $2x$ een macht van een priemgetal is.

We kiezen nu 2 verschillende banen, één met $i = n + 2px$ met $x \geq 0$ en één met $i = n + 2qy$ met $y > 0$, met $p > 2$ en $q > 2$ onderling priem. Deze banen kunnen we dus koppelen, met als resultaat een baan met $i = n + 2px + n + 2qy = 2n + 2(px + qy)$ met $x \geq 0$ en $y > 0$.

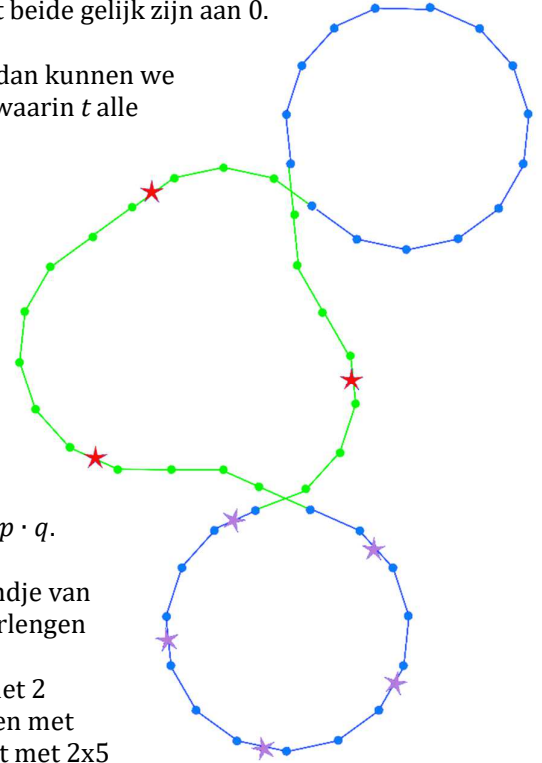
Als p en q onderling ondeelbaar zijn dan zijn er voor elk getal $t \geq pq$ gehele waarden x en y te vinden waarvoor $t = p \cdot x + q \cdot y$, en natuurlijk kunnen x en y niet beide gelijk zijn aan 0.

Gevolg: Als p en q onderling ondeelbaar zijn en beide delers van n , dan kunnen we schaatsbanen samenstellen met $i = 2n + 2(px + qy) = 2n + 2t$, waarin t alle gehele waarden $\geq pq$ kan aannemen. Ofwel, $i = 2n + 2p \cdot q + 2x$ met $x \geq 0$. Vanaf $2n + 2p \cdot q$ neemt i dus alle even waarden aan.

Bij oneven waarden van n kunnen we nog een stap verder: de schaatsbaan die we bij het samenstellen hebben gebruikt als eerste schaatsbaan heeft in één van de series waaruit hij is opgebouwd een traject met 3 of meer koorden, en omdat er minstens 3 series zijn om rond te komen is er zeker nog een traject met 3 of meer koorden aan een andere zijde van de schaatsbaan. Daaraan kunnen we nog een schaatsbaan met $i = n$ koppelen. We hadden schaatsbanen met alle even waarden vanaf $2n + 2p \cdot q$, dus nu ook nog van alle oneven waarden vanaf $3n + 2p \cdot q$.

Zie figuur: $n=15$, $i = 51$, gemaakt door 2 rondjes van 15 en een rondje van 21. Die laatste ontstaat door in een rondje van 15 3 trajecten te verlengen met 2 koorden.

Als je de koorden waarin de rode sterretjes staan alle 3 verlengt met 2 koorden dan wordt i vergroot met 2×3 stappen, en als je de koorden met de paarse sterretjes alle 5 met 2 koorden verlengt wordt i vergroot met 2×5 stappen. Je krijgt zo oneven waarden van i . Als je de bovenste gekoppelde cirkel verwijdert dan krijg je even waarden van i .



Maar als je 3 schaatsbanen zonder keerpunten koppelt dan is de som van de koorden in alle trajecten in dezelfde richting oneven en ≥ 3 . Dus als je een schaatsbaan construeert door in elke richting die som te nemen, dan heb je een geldige schaatsbaan zonder lussen, met dezelfde waarde van i als de schaatsbaan die ontstond uit het koppelen van 3 banen (je gebruikt dezelfde vectoren, maar in een andere volgorde).

In die schaatsbaan is in alle trajecten het aantal vectoren ≥ 3 , en dus kunnen we een kleinere schaatsbaan maken door alle trajecten 2 koorden korter te maken en dus i $2n$ kleiner.

Als je dat toepast op de oneven waarden van i als n oneven is dan krijgen we alle oneven waarden al vanaf $n + 2p \cdot q$ in plaats van vanaf $3n + 2p \cdot q$!

4.5 Conclusies:

Priemgetallen $p \geq 5$: i = alle veelvouden van p behalve $2p$

Getallen met 2 delers > 2 die onderling priem zijn: noem die delers p en q
a: vanaf $2n + 2p \cdot q$ neemt i alle even waarden aan.

b: als n oneven is: vanaf $n + 2p \cdot q$ neemt i ook alle oneven waarden aan.

Tweemachten (vanaf 4): alle 4-vouden vanaf n .

Machten van priemgetallen:

maak p series van p^{s-1} gelijke trajecten. Het aantal koorden per serie is dan $p^{s-1} + 2x$, dus $i = p(p^{s-1} + 2x) = p^s + 2px$. Dus vanaf $n = p^s$ alle oneven veelvouden van p .

We kunnen dat nog aanvullen door een rondje met $i=n$ aan te plakken, dus $i = 2n + 2px$, dus alle even veelvouden van p vanaf $2n$. (zelfde formule als priem!)

Producten van 2-machten met een macht van een priemgetal.

$n = 2^s \cdot p^t$ 2 series van $2^{s-1} \cdot p^t$ trajecten dus $i = 2 \cdot (2^{s-1} \cdot p^t + 2x) = 2^s \cdot p^t + 4x = n + 4x$.

Als $s = 1$ dan betekent $n + 4x$: alle oneven tweevouden vanaf n .

We kunnen er dan een rondje van n aan plakken, dan krijgen we $i = 2n + 4x$, dus alle 4-vouden. We hebben dan dus vanaf $2n$: $i = 2n + 2x$

Bewijzen van stellingen:

Stelling 1a: Voor de schaatsbanen die zichzelf niet kruisen geldt: Als n even is moet i ook even zijn en als n oneven is moet i oneven zijn.

Voor schaatsbanen die zichzelf niet kruisen kunnen we een berekening maken over even of oneven zijn van het aantal bogen. Laat l het aantal linker bogen in de schaatsbaan zijn en r het aantal rechterbogen. We weten dat n het aantal bogen is in 360 graden.

Bewijs:

Als een schaatsbaan zichzelf niet kruist verdeelt hij het terrein in een binnengebied en een buitengebied. Als je er rechtsom langs loopt met de schaatsbaan steeds aan je rechterhand heb je het buitengebied steeds aan je linkerhand. Hoeveel de schaatsbaan ook kronkelt, aan het eind heb je 360 graden meer rechtsom gedraaid dan linksom. Dus heb je n rechterbogen meer gevolgd dan linkerbogen.

Dus is $r - l = n$.

Het totaal aantal bogen dat je gevolgt hebt is $i = r + l$.

Dus als n even is dan is $r - l$ even en dus is ook $r + l = i$ even.

En als n oneven is dan is $r - l$ oneven en dus is ook $r + l = i$ oneven

QED.

Stelling 1b: Als $n=3, 4$ of 6 dan kunnen de schaatsbanen zichzelf niet kruisen.

Bewijs:

Bij de kleine waarden van n zijn er een paar (3, 4 en 6) die handig te tekenen zijn op een roosterpapier, 4 op rechthoekig roosterpapier en 3 en 6 op driehoekig roosterpapier.

In alle 3 de gevallen kunnen we de koorden gelijk nemen aan een roosterlijntje tussen 2 aangrenzende punten van het rooster. Dan komen alle begin – en eindpunten van de bogen op roosterpunten, en alle vectoren langs de roosterlijntjes. En omdat de koorden even lang zijn als de roosterlijntjes tussen 2 aangrenzende roosterpunten zijn alle roosterpunten op de schaatsbaan aansluitpunten.

Behalve dat dat handig is betekent het ook dat het niet mogelijk is dat de schaatsbaan zichzelf kruist zonder dat er een aansluitpunt is op beide kruisende takken.

Immers beide kruisende takken lopen langs de roosterlijntjes en kunnen elkaar dus alleen kruisen in een roosterpunt. Maar alle roosterpunten op de schaatsbaan zijn aansluitpunten, dus is het kruispunt een aansluitpunt op beide takken.

In onze definitie van een geldige schaatsbaan staat dat de bogen elkaar alleen mogen kruisen buiten de aansluitpunten dus kunnen de takken elkaar niet kruisen.

QED.

Stelling 2: als $n=4$ dan zijn alle oplossingen viervouden.

We bewijzen hiervoor eerst een hulpstelling:

In elke schaatsbaan geldt:

Als we de n verschillende richtingen van de schaatsbaan op volgorde nummeren van 1 tot en met n , dan is voor elke twee opvolgende richtingen p en $p+1$ het aantal vectoren ofwel voor beide even ofwel voor beide oneven.

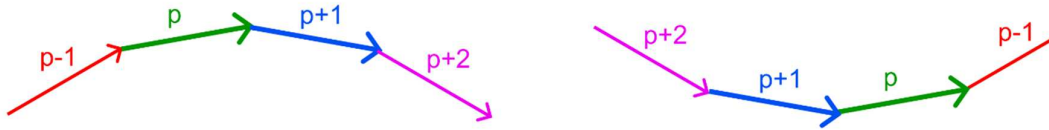
De schaatsbaan kan de richtingen p en $p+1$ diverse keren, en op verschillende manieren volgen, zowel rechtsom als linksom, en met of zonder keerpunten.

We zullen alle verschillende manieren nalopen en steeds een even aantal bogen vinden in richting p en $p+1$ samen. Dan zijn ze dus of beide even of beide oneven.

Bewijs: (we tellen alleen de koorden in p en $p+1$)

A: zonder keerpunten:

Linksom of rechtsom: zowel het aantal koorden in p als in $p+1$ oneven, dus samen even.



B: keerpunt rechtsom in p of linksom in $p+1$:

Rechtsom: even aantal in p en 0 in $p+1$, dus samen even

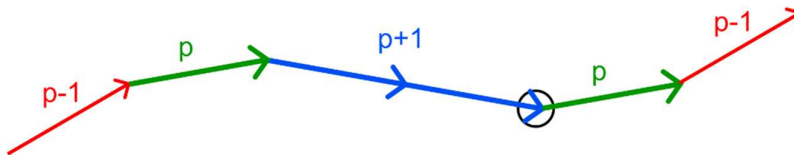
Linksom: even aantal in $p+1$ en 0 in p , dus samen even.



Het zal duidelijk zijn dat plaatjes linksom en rechtsom steeds elkaars spiegelbeeld zijn. We zullen hierna steeds alleen het plaatje rechtsom afbeelden en beschrijven.

C: keerpunt rechtsom in $p+1$ (of linksom in p). Er zijn dan 2 mogelijkheden meteen daarna een oneven aantal of meteen daarna een even aantal:

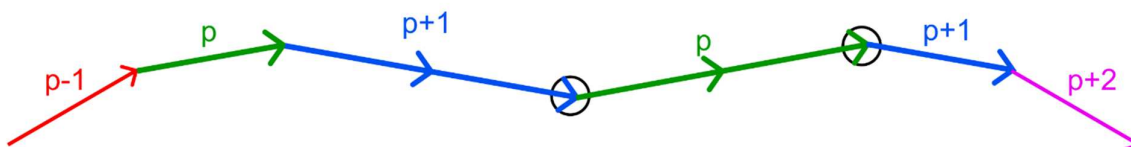
C_1 meteen na $p+1$ oneven: Dan hebben we 2 oneven aantallen in richting p en 1 even aantal in richting $p+1$. Dat is dus samen even.



C_2 meteen na $p+1$ weer even: dan komen weer terug in richting $p+1$. Maar natuurlijk is het aantal keerpunten achter elkaar eindig.

Als het aantal keerpunten achter elkaar even is dan zijn er, zoals in het plaatje hieronder, zowel in richting p als in de richting $p+1$, een oneven aantal en verder even aantallen. Het totaal is dan even.

Als het aantal keerpunten achter elkaar oneven is dan zijn er, zoals in het plaatje hierboven, in de richting p twee oneven aantallen koorden en verder even aantallen en in de richting $p+1$ alleen even aantallen. Het totaal is dan weer even.



We hebben daarmee aangetoond dat in elke schaatsbaan voor elke twee opvolgende richtingen p en $p+1$ geldt: het aantal vectoren in de richting p en het aantal vectoren in richting $p+1$ in de hele schaatsbaan is altijd even.

Bewijs van de Hoofdstelling 2: als $n=4$ dan zijn alle oplossingen viervouden.

Als $n=4$ zijn er alleen vectoren omhoog en omlaag, en vectoren naar links en naar rechts, passend in een vierkantenrooster. Dan kan de schaatsbaan alleen sluiten als het aantal vectoren omhoog gelijk is aan het aantal vectoren omlaag en het aantal vectoren naar rechts gelijk is aan het aantal vectoren naar links.

Volgens de hulpstelling is de som van het aantal vectoren omhoog en het aantal vectoren naar rechts even. Dan is het totale aantal vectoren in de schaatsbaan de som van 2 gelijke even getallen en dus een viervoud.

QED.

Stelling 3: geldige schaatsbanen met keerpunten zijn niet mogelijk als: $i \leq 2n$.

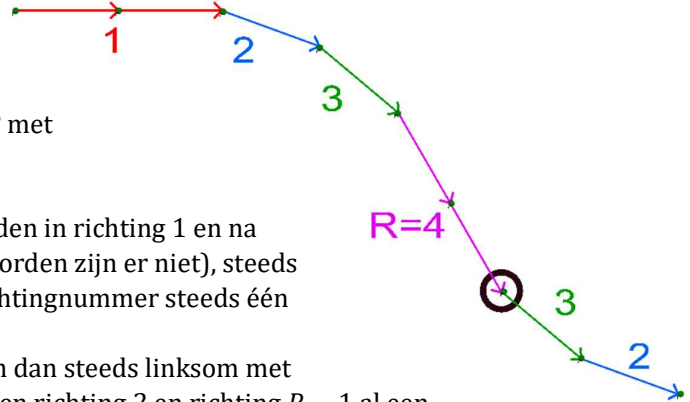
We bewijzen dat uit het ongerijmde:

Stel er is een schaatsbaan met n richtingen waarin in elke richting niet meer dan 2 koorden zijn, en er zijn keerpunten.

Zoals we zagen in het intermezzo tussen opgave 2 en 3 (bovenaan blz 3) is het aantal keerpunten altijd even.

Als er keerpunten zijn dan zijn er dus minstens 2, en omdat een schaatsbaan met alleen keerpunten alleen maar zigzaggend steeds in 2 opvolgende richtingen gaat en nooit sluit moeten er ook koorden zijn zonder keerpunt.

Kies het beginpunt direct voor een keerpunt rechtsom en noem dat richting 1. Nummer de richtingen rechtsom. Er is dan dus een keerpunt in richting 1, en een tweede in richting R met $1 < R \leq n$.



We kunnen dat maar op één manier doen: 2 koorden in richting 1 en na het keerpunt bij elke stap steeds één koorde (3 koorden zijn er niet), steeds rechtsom tot het tweede keerpunt, waarbij het richtingnummer steeds één groter wordt.

Bij het tweede keerpunt 2 koorden in richting R en dan steeds linksom met richtingnummers die steeds dalen. Omdat we tussen richting 2 en richting $R - 1$ al een koorde hebben gebruikt kan er geen keerpunt meer komen, dus moeten we door tot en met richting 2. Daar kunnen we niet meer verder, omdat zowel de koorden in richting 1 als in richting 2 de koorden op zijn.

Dat betekent dat de schaatsbaan hier moet aansluiten op het startpunt.

Er zijn 2 mogelijkheden:

ofwel $R < N$: dan zijn er geen koorden in één of een aantal aansluitende richtingen en kan de schaatsbaan niet sluiten (zie figuur)

Ofwel $R = N$: dan sluit de schaatsbaan na één stap in richting R op het punt na de eerste stap na de start zonder keerpunt.

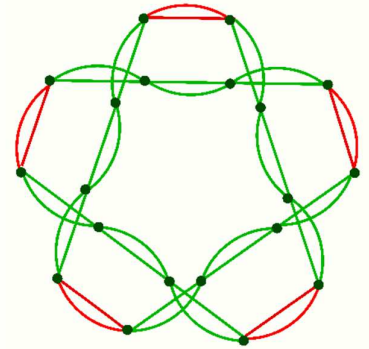
In beide gevallen is er geen schaatsbaan met keerpunten.

QED.

Stelling 4:

Bewijs voor de methode zoals gebruikt in de uitwerkingen van opgave 3 voor $n=7$ en van opgave 4.1 voor oneven waarden van n . Het bewijs veronderstelt dat we steeds het verschil tussen de beide schaatsbanen zo klein mogelijk houden, dus voor i is viervoud: grote figuur $2k+3$ koorden per traject en kleine figuur $2k+1$ ($k \geq 0$) koorden per traject.

Voor i is viervoud +2: grote figuur $2k+5$ koorden per traject en kleine figuur $2k+1$ ($k \geq 0$) koorden per traject.

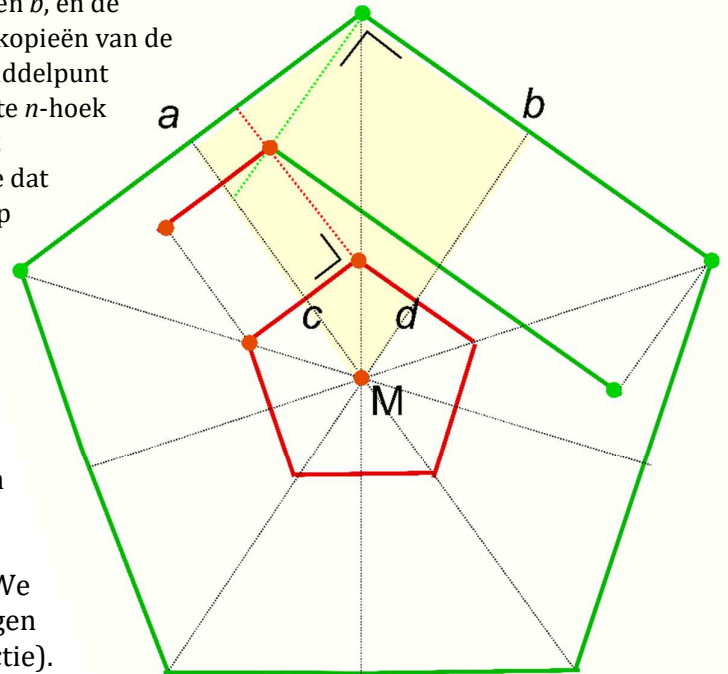


figuur 3.4

We beginnen met een constructie: Teken de grote n -hoek en alle loodlijnen uit de hoekpunten op de overstaande zijden. Die snijden elkaar in het middelpunt M van de n -hoek.

Teken dan de kleine in dezelfde stand als de grote, en met hetzelfde middelpunt.

Noem 2 opvolgende trajecten van de grote n -hoek a en b , en de corresponderende kleine n -hoek c en d . We gaan nu kopieën van de trajecten van de kleine n -hoek evenwijdig van het middelpunt wegschuiven en kopieën van de trajecten van de grote n -hoek evenwijdig naar het middelpunt toeschuiven tot de 2 kopieën op elkaar aansluiten. In de figuur hebben we dat gedaan met de trajecten c en b . Het punt waarop ze op elkaar aansluiten kunnen we vinden door in het bovenste punt van de kleine n -hoek een loodlijn op te richten op c en in het bovenste punt van de grote n -hoek een loodlijn op te richten op b .



We kunnen daarna alle trajecten van de samengestelde figuur vinden door herhaald te spiegelen in de loodlijnen uit de hoekpunten van de n -hoeken op de overstaande zijden. Maar we hebben voor het vervolg alleen het lichtgeel gekleurde deel van bovenstaande figuur nodig. We beelden dat hieronder af (Niet dezelfde afmetingen als in de figuur hierboven, wel dezelfde constructie).

Doordat we alleen het gele deel afbeelden zien we van de trajecten steeds alleen de helft. We geven dat aan met de zwarte punten (dat zijn dus geen aansluitpunten).

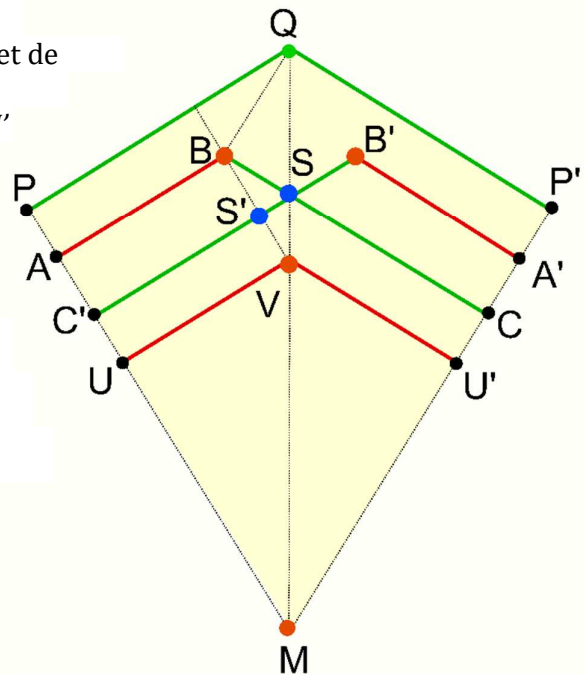
PQ en QP' zijn de helft van de trajecten a en b , UV en VU' de helft van de trajecten c en d .

Zoals we hierboven aangaven kiezen we voor de grote figuur $2k+3$ of $2k+5$ koorden per traject en voor de kleine figuur $2x+1$ ($k \geq 0$) koorden per traject.

Voor de halve trajecten is dat voor $PQ = \frac{(2k+3)}{2} =$

$k + \frac{3}{2}$ of $PQ = \frac{(2k+5)}{2} = k + \frac{5}{2}$

Voor UV is dat $UV = \frac{(2k+1)}{2} = k + \frac{1}{2}$.



Het verschil tussen het aantal koorden in PQ en UV is dus 1 of 2.

We hebben de halve trajecten AB en BC gespiegeld en de nieuwe halve trajecten $A'B'$ en $B'C'$ genoemd.

Dan is dus $AB = UV$ en $C'B' = PQ$. Op $C'B'$ liggen de punten S , het punt waar de trajecten elkaar kruisen, en S' , het snijpunt van $C'B'$ en de loodlijn uit V op PQ . We moeten dus bewijzen dat S niet op een aansluitpunt van $C'B'$ ligt. (vanwege de symmetrie is er dan ook geen aansluitpunt van BC in S)

Het verschil tussen het aantal koorden in de trajecten $C'B'$ en AB is gelijk aan het verschil tussen PQ en UV en dat verschil is 1 of 2, dus $S'B'$ is 1 of 2 koorden. B' is het eindpunt van een traject en zeker een aansluitpunt.

Tussen S' en B' zijn dus precies 1 of 2 koorden. S kan dus alleen een aansluitpunt zijn als S samenvalt met S' of B' of als $S'S = SB'$.

We gaan die 3 mogelijkheden na:

1: S valt samen met S' : S' ligt op de loodlijn uit V op PQ . Als S ook op die loodlijn ligt dan maakt BC een rechte hoek met PQ en dus ook met AB . Er zijn dus 2 opvolgende trajecten die een rechte hoek met elkaar maken, dus $n=4$.

2: S valt samen met B' : Dan valt het traject waarop $B'A'$ ligt en dat waarop BC ligt samen en vallen dus de grote en de kleine figuur samen (dit is het limietgeval als n naar oneindig nadert).

3: $S'S = SB'$: Vanwege de symmetrie is $SB' = SB$ dus in de rechthoekige driehoek $S'SB$ is de schuine zijde BS gelijk aan de rechthoekszijde $S'S$. Dat kan alleen als B en S' samenvallen. Maar dan valt het traject waarop AB ligt en dat waarop $C'S'$ ligt samen en vallen dus de grote en de kleine figuur samen.

S valt dus niet samen met S' of B' en $S'S \neq SB'$, dus S kan geen aansluitpunt zijn. QED

Stelling 5:

Vooraf:

We gaan eerst een andere manier gebruiken voor het samenvoegen van 2 of meer schaatsbanen dan we gebruikten in opgave 3 bij $n=5$ en in opgave 4.1 voor het samenvoegen van 2 verschillende schaatsbanen.

We vonden een alternatieve methode waarbij de samen te voegen banen geen standaardoplossingen hoeven te zijn (dus niet noodzakelijk alle trajecten even lang), en we kunnen ook meer dan 2 banen samenvoegen. We noemen dit het koppelen van schaatsbanen.

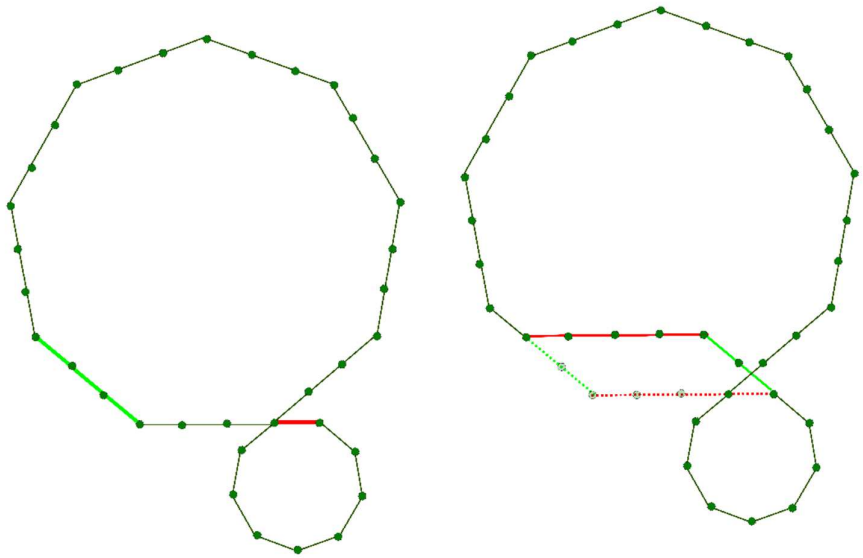
Intermezzo: Dit is dus een veel flexibelere manier om schaatsbanen met dezelfde n te koppelen. We zullen laten zien dat daarvoor alleen nodig is dat de ene schaatsbaan een oneven traject heeft van minstens 3 koorden en wordt gevolgd door nog een oneven traject aan de buitenkant van de figuur. De andere schaatsbaan moet een traject hebben van 1 koorde, ook aan de buitenkant van de figuur. Dat betekent dat als het resultaat van het koppelen opnieuw één van die twee kenmerken heeft er nog een derde (of meer) schaatsbaan met het andere kenmerk aan gekoppeld kan worden.

Het is nog de moeite waard om op te merken dat als je 2 banen zo koppelt het aantal linkerbochten gelijk is aan het aantal rechterbochten. Bij het bewijs van stelling 1a bekeken we het verschil tussen het aantal rechterbochten r en het aantal linkerbochten l en bepaalden $r - l$. Het is duidelijk dat altijd moet gelden $r - l = k \cdot n$. Hier is $k = 0$.

We laten eerst zien hoe de methode werkt, daarna bewijzen we dat er geen kruisingen zijn die samenvallen met een aansluitpunt.

In de linker figuur hebben we 2 banen met $n=9$, een met $i=27$ en een met $i=9$, het groene traject is oneven met minstens 3 koorden en het rode traject heeft één koorde. De rest van de figuur is hier erg regelmatig, maar dat hoeft niet.

We leggen de figuren zo tegen elkaar aan dat de oneven opvolger van het groene traject aansluit op het rode traject met één gezamenlijk hoekpunt. Er valt dus een kruispunt samen met een aansluitpunt en dat mag niet volgens onze spelregels.



De tweede figuur laat zien dat dat te verhelpen is door eerst de groene kleur te verwijderen behalve in de onderste 2 koorden, en de rode kleur uit te breiden met het oneven traject dat volgt op het groen. Vervolgens schuiven we het groene traject naar rechts tot het aansluit op het eind van het rode, en we verschuiven het rode traject schuin omhoog tot het aansluit op het overgebleven deel van het (voormalige) groene traject om de baan weer te sluiten.

En dan nu de stelling en het bewijs:

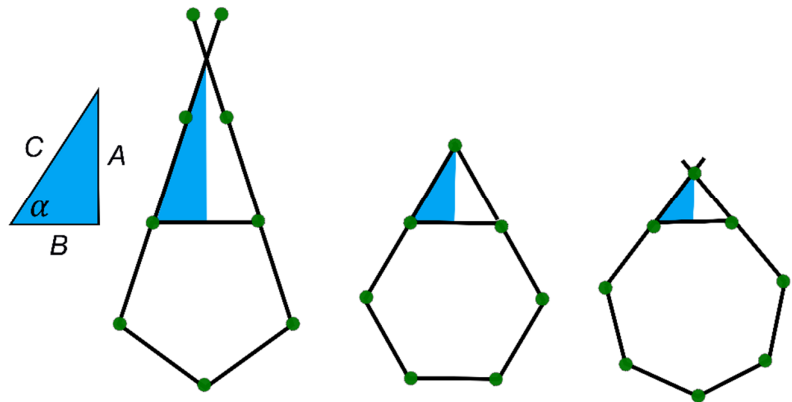
Stelling 4: Als we schaatsbanen koppelen volgens bovenstaand recept dan valt de kruising niet samen met een aansluitpunt.

Voor $n = 5, 6$ en 7 bekijken we de cosinus van α in de blauwe driehoeken:

Als we de lengte van de koorden op 1 stellen dan is $B = \frac{1}{2}$ en dus:

Voor $n = 5$: $\alpha = 72^\circ$: $\cos \alpha \approx 0,3090$ dus $C : B \approx 1 : 0,3090 \approx 3,2360$

Met $B = \frac{1}{2}$ dus $C \approx 3,2360 : 2 \approx 1,6180$ is dat niet in een aansluitpunt.



Voor $n = 6$: $\alpha = 60^\circ$: $\cos \alpha = \frac{1}{2}$
dus $C : B = 2$

Met $B = \frac{1}{2}$ dus $C = 1$. Dat is dus in een aansluitpunt.

Voor $n > 6$: $C : B < 2$

Met $B = \frac{1}{2}$ dus $C < 1$. Dat is dus niet in een aansluitpunt.

De kruisingen vallen dus alleen samen met aansluitpunten als $n=6$.

We wisten al dat voor $n=6$ alle kruisingen samenvallen met aansluitingen, maar voor alle andere waarden vanaf $n=5$ valt met deze methode nooit een kruising samen met een aansluitpunt. QED.