Olympiadepuzzel

Euclides 98 nummer 3

Faculteiten optellen

Opgave

Bepaal alle drietallen positieve gehele getallen (a, b, c) zodat $a \leqslant b \leqslant c$ en $a! + b! + c!$ een macht van 2 is (dus van de vorm 2^k voor zekere $k \geqslant 0$).

Uitwerking

We schrijven $a! + b! + c! = 2^k$. Merk op dat $a!$ een deler is van $b!$ en van $c!$, en dus ook van $a! + b! + c!$. Hieruit volgt dat $a!$ een deler is van 2^k. Daarom mag $a!$ geen factor 3 bevatten en moet dus gelden dat $a = 1$ of $a = 2$.

We bekijken eerst het geval $a = 1$. De vergelijking wordt dan $1 + b! + c! = 2^k$. Omdat $1+b!+c! \geqslant 1+1+1 = 3$, is $k \geqslant 2$ en is 2^k even. Precies één van $b!$ en $c!$ moet dus oneven zijn. Aangezien $b \leqslant c$ volgt hieruit dat $b = 1$ en $c \geqslant 2$. Nu moet c nog voldoen aan $2 + c! = 2^k$.

Als $c \geqslant 4$, dan is $c!$ deelbaar door 4. Daarom heeft $2 + c!$ rest 2 bij deling door 4. Anderzijds is $2 + c!$ een macht van 2 en minimaal 26, dus deelbaar door 4. Tegenspraak, dus $c = 2$ of $c = 3$. Voor $c = 2$ is $2 + c! = 2 + 2 = 4 = 2^2$, dus $(a, b, c) = (1, 1, 2)$ is een oplossing. Ook $(a, b, c) = (1, 1, 3)$ is een oplossing, want $2 + c! = 2 + 6 = 8 = 2^3$.

Nu bekijken we het geval $a = 2$. De vergelijking wordt dan $2 + b! + c! = 2^k$. Door opnieuw naar de rest bij deling door 4 te kijken, zien we dat b en c niet beide groter dan of gelijk aan 4 kunnen zijn. Omdat $a \leqslant b \leqslant c$ moet gelden dat $b = 2$ of $b = 3$.

In het geval $b = 2$ hebben we $4 + c! = 2^k$. Voor $c \geqslant 4$ is $c!$ deelbaar door 8. Daarom heeft $4+c!$ rest 4 bij deling door 8, terwijl 2^k minimaal 28 is en dus deelbaar is door 8. We hoeven dus alleen $c = 2$ en $c = 3$ te proberen. Dit geeft respectievelijk $4 + c! = 6$ en $4 + c! = 10$, wat beide geen tweemacht is.

Ten slotte bekijken we het geval $b = 3$. Nu is $8 + c! = 2^k$. Voor $c \geqslant 6$ is $c!$ deelbaar door 16, zodat $8 + c!$ rest 8 bij deling door 16 heeft. Omdat 2^k deelbaar is door 16, geeft dit geen oplossingen. Aangezien $c \geqslant b$, zijn de enige mogelijkheden dus $c = 3, 4$ en 5. Dan is $8 + c!$ respectievelijk gelijk aan 14, 32 en 128. Alleen $c = 4$ en $c = 5$ geven een oplossing.

Er zijn dus vier oplossingen: $(a, b, c) = (1, 1, 2), (1, 1, 3), (2, 3, 4)$ en $(2, 3, 5)$.

Inzenders met de juiste oplossing

Harm Bakker, Bart Bosma (buiten mededinging), Gé Groenewegen, Sharon Groot Zwaaftink, Hans Linders, Gerhard Meinen, Jos Remijn, Lieke de Rooij (buiten mededinging)

Winnaar van de cadeaubon

Gé Groenewegen