Uitwerking puzzel 98-2
Samenhangende en niet samenhangende grafen, of zoals Sjoerd Zondervan het noemde: **“graafwerk”**

Wobien Doyer
Lieke de Rooij

We kwamen op het idee voor deze puzzel via het artikel ‘Netwerken percolatie en spelen tegen het toeval’ van Nicos Starreveld in *Euclides* 97.6, naar aanleiding van de Fieldmedaille van Hugo Duminil-Copin over faseovergangen. Daar gaat het o.a. over grafen met heel veel punten waarbij ze kijken naar de kans dat zo'n netwerk door een toevalproces al of niet uiteenvalt in meerdere losse componenten dan wel samenhangend is. Wij beperken ons echter tot kleinere netwerken.

Het gaat in deze puzzel om de vraag of een enkelvoudige graaf (=*graaf met maximaal één lijn tussen twee punten en geen lijn van een punt naar zichzelf*) met een gegeven aantal punten en lijnen al of niet samenhangend is.

Over grafentheorie en de gebruikelijke notaties en nomenclatuur is natuurlijk veel te vinden op internet. Dat geldt ook voor combinatoriek die voor deze puzzel nodig is. Zie bijvoorbeeld wikipedia.

Opgave 1.

a) Bereken hoeveel lijnen je minimaal moet hebben zodat een enkelvoudige graaf van 2, 3, 4 of 5 punten zeker samenhangend is. Geef daarvoor ook een formule om dit in het algemeen te berekenen voor een graaf van v punten.

Uitwerking Opgave 1a:
Als we zoveel mogelijk lijnen kwijt willen tussen v punten zonder dat de graaf samenhangend wordt dan moeten we 2 clusters maken, en binnen beide clusters alle punten met elkaar verbinden. Als we een punt in het kleinste cluster verplaatsen naar het grootste dan neemt het aantal lijnen toe, dus het aantal lijnen is maximaal als (zonder dat de graaf samenhangend wordt) het kleinste cluster nog maar uit één punt bestaat.

Het maximaal aantal lijnen dat we tussen $v-1$ punten kwijt kunnen is $\frac{(v-1)(v-2)}{2}$, en dus, als een graaf $\frac{(v-1)(v-2)}{2}$ lijnen heeft dan kan hij nog onsamenhangend zijn, maar met $\frac{(v-1)(v-2)}{2}+1$ lijnen is hij zeker samenhangend.

Je hebt dus minimaal $\frac{(v-1)(v-2)}{2}+1$ lijnen nodig om zeker te zijn dat de graaf samenhangend is.

Voor v = 2, 3, 4 en 5 punten is dat dus 1, 2, 4 en 7 lijnen.

b) Idem hoeveel lijnen je maximaal kan hebben zodat de graaf zeker niet samenhangend is. Weer voor v=2, 3, 4 of 5 en een formule voor v punten.

Uitwerking Opgave 1b:
Als je met zo weinig mogelijk lijnen een graaf samenhangend wil maken, dan moet je zorgen dat de lijnen een keten of een boom (dus zonder cykels) vormen die alle punten één keer aandoet.
Bij v punten heb je daarvoor $v-1$ lijnen nodig. Met $v-2$ lijnen is de graaf dus zeker niet samenhangend.
Voor v=2, 3, 4 of 5 dus 0, 1, 2 en 3.

Opgave 2

a) Bewijs of weerleg dat de complementaire graaf van een niet-samenhangende graaf altijd samenhangend is.

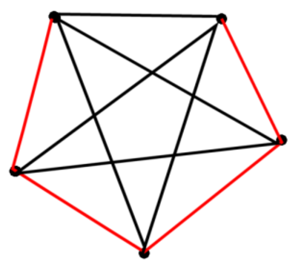
Uitwerking Opgave 2a:
Elke niet-samenhangende graaf bestaat uit $k > 1$ losse 'clusters' van losse punten of samenhangende groepjes. We laten zien dat de complementaire graaf hiervan samenhangend is.

Kies één van die clusters en noem die d. Dan hebben geen van de punten van d verbinding met punten buiten de cluster.
In de complementaire graaf hebben alle punten van d dus een verbinding met alle punten buiten de cluster, en via die buitenpunten ook met elkaar. Dus is de complementaire graaf samenhangend.

De complementaire graaf van een niet-samenhangende graaf is dus altijd samenhangend.

b) En omgekeerd: Bewijs of weerleg dat de complementaire graaf van een samenhangende graaf zeker niet samenhangend is.

Uitwerking Opgave 2b:
Zie voorbeeld: De zwarte en de rode graaf zijn elkaars complement, maar ze zijn beide samenhangend.
Dat zou niet kunnen als een complementaire graaf van een samenhangende graaf zeker niet samenhangend zou zijn.



In opgaven 3 en 4 laten we een graaf als volgt ontstaan:
We kiezen een kans p.

We beginnen dan met een enkelvoudige volledige graaf met *v* genummerde punten.

Nb: Omdat de punten zijn genummerd zijn er bijvoorbeeld 6 verschillende grafen met 4 punten en één lijn.

We gaan uit de volledige graaf waarmee we begonnen lijnen verwijderen. Elke lijn afzonderlijk heeft daarbij kans *p* om verwijderd te worden.
We willen nu de kans *P* weten dat de overblijvende graaf samenhangend is.

In opgave 3 is *p*=1/2, zodat alle mogelijke grafen met *v* punten dezelfde kans hebben, en *P* dus alleen afhangt van de aantallen mogelijke samenhangende en niet-samenhangende grafen.

Tip: Dit kan recursief als je de aantallen samenhangende grafen voor de kleinere waarden van *v* al kent. Niet-samenhangende grafen bestaan dan altijd uit 2 of meer kleinere samenhangende grafen of losse punten.

Opgave 3: Bepaal *P* als *p*=1/2

a) Bepaal het aantal samenhangende en het aantal niet-samenhangende verschillende grafen met 3 punten (*v*=3) en bereken vervolgens de kans *P*. Geef, zoals altijd, aan hoe je dit hebt bepaald.

Uitwerking Opgave 3a:
Algemeen: met *v* punten zijn er $\binom{v}{2} = \frac{v(v-1)}{2}$ verschillende lijnen mogelijk.

Dus als $v = 3$ dan zijn er $\frac{3(3-1)}{2}$ =3 verschillende lijnen mogelijk, die alle 3 ‘aan’ of ‘uit’ kunnen staan, dus zijn er 2^3= 8 verschillende grafen mogelijk.

Er is één graaf met 0 en één met 3 lijnen: één ‘lege’ graaf en één volledige graaf, dus samen 2 grafen, een samenhangend en een niet-samenhangend.

En er zijn 3 grafen met 1 lijn en 3 met 2 lijnen, dus samen 6 grafen, waarvan 3(met één lijn) niet-samenhangend en 3 (met 2 lijnen) samenhangend.

Dus 8 verschillende grafen, waarvan er 4 samenhangend zijn, en 4 niet-samenhangend, waarbij elke samenhangende graaf het complement is van een niet-samenhangende.

Er zijn dus evenveel samenhangende als niet-samenhangende grafen, en omdat elke graaf dezelfde kans heeft van 1/8 is de kans op een samenhangende graaf dus $P =$ ½.

Voor de volgende opgaven zullen we de aantallen samenhangende grafen van v punten $S(v)$ noemen en de aantallen onsamenhangende grafen $O(v)$.

Dus $S(3) = 4$ en $O(3) = 4$, waarin $S(3)$ het aantal samenhangende grafen met 3 punten is en $O(3)$ het aantal niet-samenhangende grafen met 3 punten.

b) Idem als v=4

Uitwerking Opgave 3b:

Als $v = 4$ dan zijn er $\frac{4(4-1)}{2} = 6$ verschillende lijnen mogelijk, die alle 6 'aan' of 'uit' kunnen staan, dus 2^6=64 verschillende grafen mogelijk.

De grafen met 0, 1 of 2 lijnen zijn altijd onsamenhangend, dat zijn er 1+6+15=22
De grafen met 4, 5 of 6 lijnen zijn daarvan de complementen, en dus allemaal samenhangend. Dat zijn er ook 22.
We kijken dan naar de grafen met 3 lijnen. Dat zijn er 64-22-22=20.
Daarvan zijn de grafen die 3 punten met elkaar verbinden niet samenhangend. Dat zijn er 4.

De rest is wel samenhangend, en dat zijn er dus 20-4=16.

We hebben dus 22+4 =26 niet-samenhangende en 22+16=38 samenhangende grafen.
Dus $O(4) = 26$ en $S(4) = 38$ (en dus inderdaad 38+26=64 grafen)

Omdat ze allemaal even waarschijnlijk zijn is de kans op een samenhangende graaf $P = 38/64 = 19/32 \approx 0{,}5938$

Bij grotere aantallen punten wordt een uitwerking zoals hierboven nogal lang. We kiezen daarom nu een recursieve aanpak, waarbij de waarden van $S(v)$ van de kleinere aantallen punten gebruikt worden.
We laten zien hoe dat gaat aan de hand van het voorbeeld v=4 (waarvan we $S(v)$ al kennen), met uitleg over de methode die we gaan gebruiken voor de grotere aantallen punten:

Opnieuw v=4:

We gaan eerst $O(4)$ berekenen, dus we willen tellen hoeveel onsamenhangende grafen van 4 punten er zijn.

In al die onsamenhangende grafen zijn de punten dan verdeeld over 2 of meer samenhangende subgrafen.

We beginnen daarom met een inventarisatie van de verschillende manieren waarop we 4 in kleinere getallen kunnen splitsen. We noteren daarom alle mogelijke partities[1]) van de 4 punten in 2 of meer subgrafen van 1 of meer punten:

3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1.

Bijvoorbeeld voor 3+1 gaan we dan berekenen hoeveel grafen er zijn met een samenhangende subgraaf van 3 punten en een samenhangende subgraaf van 1 punt. Daarvoor moeten we weten:

a: hoeveel verschillende samenhangende grafen er zijn met 3 punten en hoeveel met 1 punt. Als we die aantallen vermenigvuldigen dan hebben we het aantal verschillende grafen dat mogelijk is als de verdeling van de punten over de partitie vastligt.

b: op hoeveel manieren kunnen we de 4 punten verdelen tussen de subgraaf van 3 punten en de subgraaf van 1 punt.

c: als we dat doen voor elke partitie en we tellen de resultaten op dan hebben we $O(4)$. Immers, elke onsamenhangende graaf van 4 punten bestaat uit 2 of meer samenhangende subgrafen.

Voor b: hebben we (meer in het algemeen) nodig:
als een partitie met x punten bestaat uit verschillende getallen, bv $p+q+r=x$ met $p>q>r$ dan is het aantal manieren waarop we met die partitie x punten kunnen verdelen als volgt te bepalen:
We kiezen p punten uit x, dat kan op $\binom{x}{p}$manieren.
We kiezen q punten uit de overgebleven $x-p$, dat kan op $\binom{x-p}{q}$ manieren.
En we kiezen r punten uit de overgebleven $x-p-q$, dat kan op $\binom{x-p-q}{r}=\binom{r}{r}=1$ manier.

Dus $a=\binom{x}{p}\cdot\binom{x-p}{q}\cdot\binom{r}{r}=\binom{x}{p}\cdot\binom{x-p}{q}$ als p, q en r verschillend zijn.

Bij meerdere (zeg k) subgroepen van dezelfde grootte in de partitie moeten we de formule nog delen door $k!$

De waarden van van $O(v)$ die we gaan gebruiken zijn: $O(3)$=4 uit opgave 3a, $O(2)$=1 (met 2 punten kan je alleen een samenhangende graaf maken als je de 2 punten verbindt) en O(1)=1 (een los punt is altijd samenhangend en dat kan

[1]) Een partitie van een verzameling is een opdeling van de verzameling in niet-lege disjuncte deelverzamelingen

maar op één manier)
We passen dat toe op alle partities van v=4:
(3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1):

I. 3+1:
   a) S(3)=4 en S(1)=1 dus het product is $4 \cdot 1 = 4$.
   b) $\binom{4}{3} \cdot \binom{1}{1} = 4 \cdot 1 = 4$.
   c) Bij de partitie 3+1 is dus $a \cdot b = 4 \cdot 4 = 16$.

II. 2+2:
   a) S(2)=1 dus het product is $S(v) = 1 \cdot 1 = 1$
   b) $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{6}{2} = 3$.
   c) Bij de partitie 2+2 is dus $a \cdot b = 1 \cdot 3 = 3$

III. 2+1+1:
   a) S(2)=1 en $S(1) = 1$ dus het product is 1.
   b) $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 6$
   c) Bij de partitie 2+1+1 is dus $a \cdot b = 1 \cdot 6 = 6$

IV. 1+1+1+1:
   a) (1)=1 dus het product is $s(v) = 1^4 = 1$
   b) $\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot \frac{1}{4!} = 1$
   c) Bij de partitie 1+1+1+1 is dus $a \cdot b = 1$

We tellen de gevonden waarden van c) op: 16+3+6+1=26, dus O(4)=26.

Als $v = 4$ dan zijn er $\frac{4(4-1)}{2} = 6$ verschillende lijnen mogelijk, die alle 6 ‘aan’ of ‘uit’ kunnen staan, dus 2^6=64 verschillende grafen mogelijk.

Dan is $S(4) = 64 - O(4) = 64 - 26 = 38$. Dat klopt met onze eerdere berekening.

c) Idem als v=5

Uitwerking Opgave 3c:

We noteren alle mogelijke partities van de 5 punten in 2 of meer subgrafen van 1 of meer punten.

4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1

I. 4+1:
   a) . S(4)=38 en S(1)=1 dus het product is $38 \cdot 1 = 38$.

b) $\binom{5}{4}\cdot\binom{1}{1} = 5\cdot 1 = 5$

c) Het aantal niet-samenhangende grafen is dus $38\cdot 5 = 190$.

II. 3+2:

a) $S(3) = 4$ en $S(2) = 1$ dus het product is $4\cdot 1 = 4$.

b) $\binom{5}{3}\binom{2}{2} = 10\cdot 1 = 10$.

c) Het aantal niet-samenhangende grafenis dus $4\cdot 10 = 40$.

III. 3+1+1:

a) $S(3) = 4$ en $S(1) = 1$ dus het product is $4\cdot 1\cdot 1 = 4$.

b) $\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}\cdot\frac{1}{2!} = 10\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 10$.

c) Het aantal niet-samenhangende grafen bij deze partitie is dus $4\cdot 10 = 40$.

IV. 2+2+1:

a) $S(2) = 1$ en $S(1) = 1$ dus het product is $1\cdot 1\cdot 1 = 1$

b) $\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{1}{2}\cdot\ \frac{1}{2!} = 10\cdot 3\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = 15$.

c) Het aantal niet-samenhangende grafen is dus $1\cdot 5 = 15$.

V. 2+1+1+1:

a) $S(2) = 1$ en $S(1) = 1$ dus het product is 1

b) $\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}\cdot\ \frac{1}{3!} = 10\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{1}{3!} = 10$.

c) Het aantal niet-samenhangende grafen is dus $1\cdot 10 = 10$.

VI. 1+1+1+1+1: 5 losse punten kan maar op 1 manier.

In totaal hebben we nu $190 + 40 + 40 + 15 + 10 + 1 = 296$ niet-samenhangende grafen, dus O(5)=296

Als v=5 dan zijn er $\frac{5(5-1)}{2}$ =10 verschillende lijnen mogelijk die alle 10 ‘aan’ of ‘uit’ kunnen staan, dus 2^{10}=1024 verschillende grafen mogelijk.

dus $S(5) = 1024 - O(5) = 1024 - 296 = 728$

Omdat ze allemaal even waarschijnlijk zijn is de kans op een samenhangende graaf $P = 728/1024 = 91/128 \approx 0{,}7109$

d) En voor wie wil buiten de puntentelling ook voor v=6.

Uitwerking Opgave 3d:

We noteren alle mogelijke partities van de 6 punten in 2 of meer subgrafen van 1 of meer punten.

Dat zijn:

5+1, 4+2, 4+1+1, 3+3, 3+2+1, 3+1+1+1, 2+2+2, 2+2+1+1, 2+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1

I. 5+1:
   a) $S(5) \cdot S(1) = 728 \cdot 1 = 728$ || b) $\binom{6}{5} \cdot \binom{1}{1} = 6.$ || c) $728 \cdot 6 = 4368$

II. 4+2:
   a) $S(4) \cdot S(2) = 38 \cdot 1 = 38$ || b) $\binom{6}{4} \cdot \binom{2}{2} = 15.$|| c) $38 \cdot 15 = 570$

III. 4+1+1:
   a) $S(4) \cdot S(1)^2 = 38$ || b) $\binom{6}{4} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot \frac{1}{2!} = 15 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 15$
   c) $15 \cdot 38 = 570$

IV. 3+3:
   a) $S(3)^2 = 16$ || b)$\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} \cdot \frac{1}{2!} = 10$ || c) $16 \cdot 10 = 160$

IV. 3+2+1:
   a) $S(3) \cdot S(2) \cdot S(1) = 4$ || b) $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = 20 \cdot 3 = 60 \;\; 60 \cdot 4 = 240$

VI. 3+1+1+1:
   a) $S(3) \cdot S(1)^3 = 4$ || b) $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} \, {}^{1}/_{3!} = 20$ ||c) $4 \cdot 20 = 80$

VII. 2+2+2:
   a) $S(2)^3 = 1.$ || b) $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} \cdot {}^{1}/_{3!} = 15$ || c) $1 \cdot 15 = 15$

VIII. 2+2+1+1:
   a) $S(2)^2 \cdot S(1)^2 = 1$|| b) $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot ({}^{1}/_{2!})^2 = 45$ || c) $1 \cdot 45 = 45$

IX. 2+1+1+1+1:
   a) $S(2) \cdot S(1)^4 = 1$
   b) $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot {}^{1}/_{4!} = 15 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot {}^{1}/_{4!} = 15$
   c) $1 \cdot 15 = 15$

X. 1+1+1+1+1+1: Dit is een graaf met 6 losse punten, dus zonder lijnen. Daarvan is er precies 1.

In totaal hebben we $4368 + 570 + 570 + 160 + 240 + 80 + 15 + 45 + 15 + 1 = 6064$ niet-samenhangende grafen, dus $C(6) = 6064$

Het totaal aantal mogelijke grafen met 6 (genummerde) punten is $2^{15} = 32768$.

Als v=6 dan zijn er $\frac{6(6-1)}{2}$ =15 verschillende lijnen mogelijk, die alle 15 'aan' of 'uit' kunnen staan, dus 2^{15} verschillende grafen mogelijk.

Het aantal samenhangende grafen is dan $s(6) = 32768 - 6064 = 26704$

Omdat ze allemaal even waarschijnlijk zijn is de kans op een samenhangende graaf $P = 26705/32786 \approx 0{,}8145$

Nu gaan we eventueel een andere *p* gebruiken, zodanig dat *P*=1/2. Er is dan een andere strategie nodig dan bij opgave 3.

Opgave 4.

a) Bepaal voor *v*=3 bij welke *p* geldt *P*=1/2. Uiteraard ook weer met toelichting.

Uitwerking Opgave 4a:
We zagen in opgave 3a dat als $v = 3$ en $p = 1/2$, dan is *P*=1/2.
De oplossing van opgave 4a is dus: $p = 1/2$.

Opmerking: Als *p* groter wordt, dan wordt de kans dat lijnen worden verwijderd groter, en krijgen we dus minder lijnen. Dat betekent dat de kans op niet-samenhangende grafen groter wordt.
Omgekeerd, als *p* kleiner wordt worden er minder lijnen verwijderd, en dus wordt de kans op samenhangende lijnen groter.
Zolang we kijken naar kansen $(0 \leq p \leq 1)$ geldt dus: de functie die *P* uitdrukt in *p* is een dalende functie. Er kan dus maar één oplossing zijn!
Hier hebben verschillende inzenders zich mee vergist.

b) Idem voor *v*=4.
Uitwerking Opgave 4b:
We zagen in opgave 3b dat als $p = 1/2$ het gevolg is dat $P = 19/32$, dus iets groter dan ½.
Ook zagen we dat er bij *v*=4 er 26 niet-samenhangende grafen zijn en 38 samenhangende grafen.
Er zijn dus meer samenhangende grafen dan niet-samenhangende en dus is, als alle grafen dezelfde kans hebben, de kans op een samenhangende graaf groter dan die op een niet-samenhangende. Om die kansen gelijk te krijgen moeten we dus meer lijnen verwijderen, zodat er meer grafen niet-samenhangend worden.

We moeten dus de kans *p*, die bepaalt of een lijn wordt verwijderd, een beetje groter maken.

We kunnen kiezen of we kijken naar de samenhangende of naar de niet-samenhangende grafen, want als de ene kans ½ is, is de andere dat natuurlijk ook. Ik kies dan voor niet-samenhangend, dat zijn er minder.

We zagen in 3b:

De grafen met 0, 1 of 2 lijnen zijn altijd onsamenhangend, dat zijn er 1+6+15=22.
En van de grafen met 3 lijnen zijn er 4 onsamenhangend. We hoeven dus alleen te kijken naar grafen met 0, 1, 2 of 3 lijnen.

Laat p de kans zijn op het verwijderen van een lijn.

Er is 1 graaf met 0 lijnen en die is niet samenhangend. Om die te krijgen moet 6x een lijn worden verwijderd, dus de kans is p^6

Er zijn 6 grafen met 1 lijn en die zijn niet-samenhangend.
Om die te krijgen moet 5x een lijn worden verwijderd en 1x een lijn niet worden verwijderd. Dat kan op 6 verschillende manieren.

De kans is dus $6 \cdot p^5 \cdot (1-p)$

Er zijn 15 grafen met 2 lijnen, en die zijn niet-samenhangend.

Om ze te krijgen moet 4x een lijn worden verwijderd en 2x een lijn niet worden verwijderd. Dat kan op 15 manieren.

De kans is dus $15 \cdot p^4 \cdot (1-p)^2$

Er zijn 20 grafen met 3 lijnen, en daarvan zijn er 4 niet-samenhangend.
Om ze te krijgen moet er 3x een lijn worden verwijderd en 3x niet. Dat kan op 20 manieren die allemaal kans $p^3 \cdot (1-p)^3$ hebben De kans op één van de 4 niet-samenhangende is dus $4p^3 \cdot (1-p)^3$

De totale kans op een niet-samenhangende graaf te krijgen is dus

$$p^6 + 6 \cdot p^5 \cdot (1-p) + 15 \cdot p^4 \cdot (1-p)^2 + 4p^3 \cdot (1-p)^3$$

Om p zo te kiezen dat die kans ½ zoeken we dus een oplossing van de vergelijking:

$$p^6 + 6 \cdot p^5 \cdot (1-p) + 15 \cdot p^4 \cdot (1-p)^2 + 4p^3 \cdot (1-p)^3 = ½\,,$$

We kunnen dit grafisch oplossen, eventueel na de vergelijking te herleiden tot:

$$6p^6 - 12p^5 + 3p^4 + 4p^3 - ½ = 0$$

We vinden dan een nulpunt voor $p \approx 0{,}5489$ (het enige positieve nulpunt, en zoals verwacht iets groter dan 1/2), dus voor $p = 0{,}5489$ wordt de waarde van $P \approx 1/2$