Uitdagende Problemen
Nieuwsgierig?
Uitwerkingen

Jacques **Jansen**

Een boer met een kleine boerderij.
Begin met slechts een ei. Neem de helft en doe er de helft bij. Dan is de mand leeg. Stel dat het gaat om twee klanten. Begin dan met een eerstvolgend oneven aantal, dus drie eieren. De helft van drie met een half ei geeft twee eieren. Je houdt één ei over. En zo ga je weer verder. Je hebt echter precies drie klanten. Vermenigvuldig drie met twee en doe er een ei bij. Doe in de mand zeven eieren dan ben je met drie klanten helemaal los.

Bij precies vier klanten kom je uit met startgetal tweemaal zeven vermeerdert met een. Dus krijgen we met vier klanten 15 eieren. Bij vijf klanten krijg je $2 \cdot 15 + 1 = 31$.

Zo ontstaat de rij 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, ...

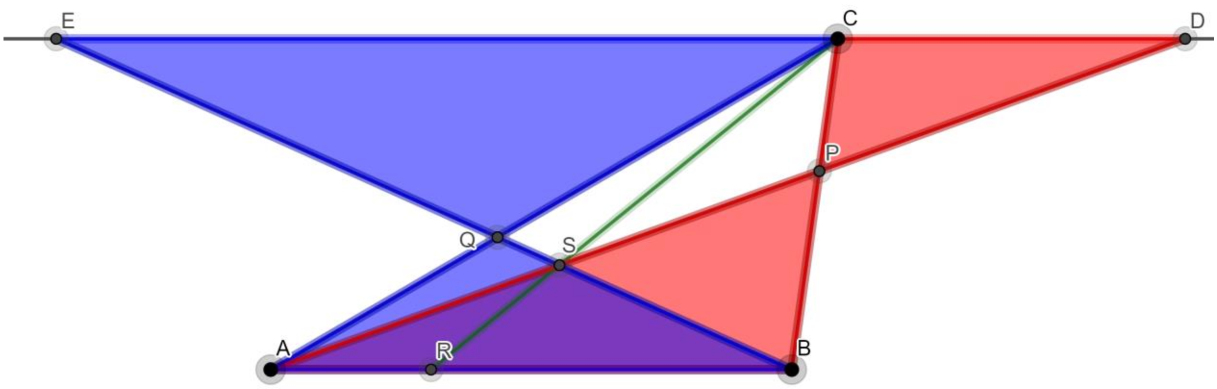
$N(1) = 1$, $N(2) = 3$,.... Je kunt het zien als machten van twee die verminderd zijn met een.

$N(1) = 2^1 - 1 = 1, N(2) = 2^2 - 1 = 3, N(3) = 2^3 - 1 = 7, ...$

$N(n) = 2^n - 1$. Bij precies n klanten heb je in het begin $2^n - 1$ eieren nodig.

(zie ook: http://www.rdzl.nl/beter_een_half_ei_raadsel/uitleg.html)

Driehoek met drie hoektransversalen
We gaan uit van een driehoek ABC waarbij $BP : PC = a : 1$ en $CQ : QA = a : 1$.
Trek door punt C een hulplijn l evenwijdig met lijnstuk AB. Verleng BQ en snij met lijn l. Noem het snijpunt E. Verleng AP en snij met lijn l. Noem het snijpunt D. Er zijn verschillende zandlopers te zien. In figuur 1 zijn o.a. een blauwe en een rode zandloper te zien. We moeten de verhouding van AR met RB zien te bepalen.



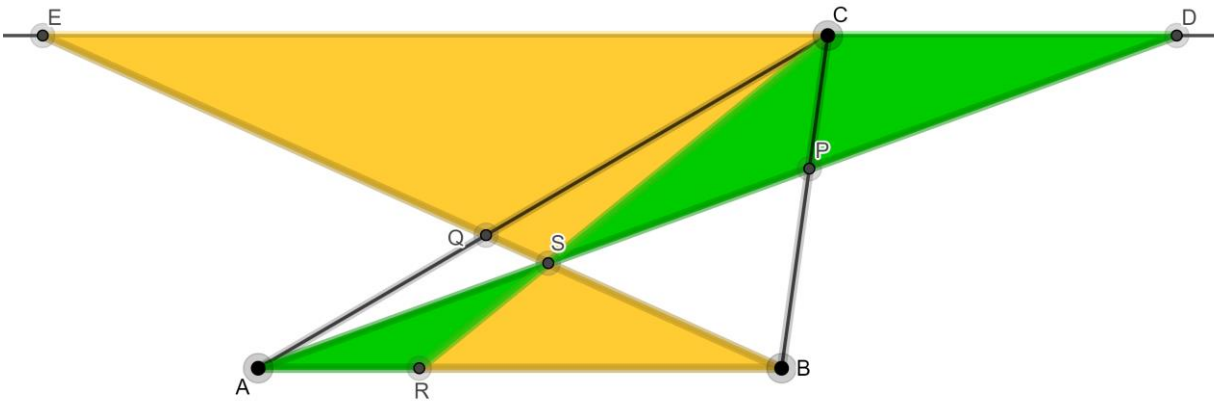
figuur 1

Kijken we naar de rode zandloper die samengesteld is uit twee gelijkvormige driehoeken dan leiden we daaruit af: $\frac{AB}{CD}=\frac{BP}{PC}=\frac{a}{1}$. Dus $AB=a\cdot CD$.

Kijken we naar de blauwe zandloper die samengesteld is uit twee gelijkvormige driehoeken dan leiden we daaruit af: $\frac{AB}{EC}=\frac{AQ}{QC}=\frac{1}{a}$. Dus $EC=a\cdot AB$.

Uit $AB=a\cdot CD$ en $EC=a\cdot AB$ volgt $\frac{CD}{EC}=\frac{1}{a^2}$. Er zijn nog meer zandlopers te zien.

De gele en de groene zandloper in figuur 2 hebben lijnstuk *RC*, dat door punt *S* wordt verdeeld, gemeenschappelijk. Daar maken we gebruik van.



figuur 2

Er geldt: $\frac{RB}{EC}=\frac{RS}{SC}=\frac{AR}{CD}$. Dus $EC\cdot AR=RB\cdot CD$. $\frac{AR}{RB}=\frac{CD}{EC}=\frac{1}{a^2}$

Stelling van Ceva (1647-1734)

Ben je daarvan op de hoogte dan is de stelling nu zeer toepasbaar. De drie hoektransversalen *AP*, *BQ* en *CR* gaan door één punt (concurrent). Dan geldt cyclisch geordend:

$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$. Invulling: $\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{1}\cdot\frac{AR}{BR}=1$. Dus $\frac{AR}{BR}=\frac{1}{a^2}$.