Olympiadepuzzel

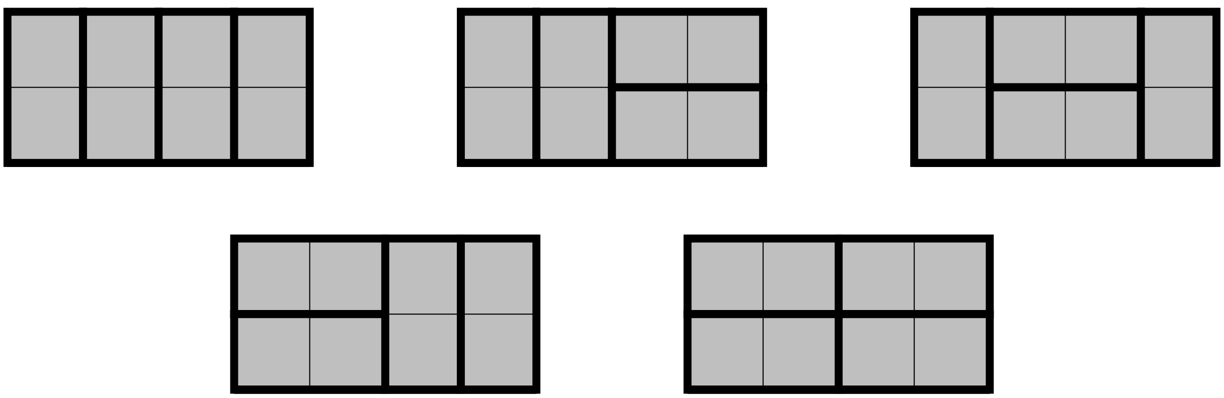
Euclides 98 nummer 1

Rechthoeken betegelen

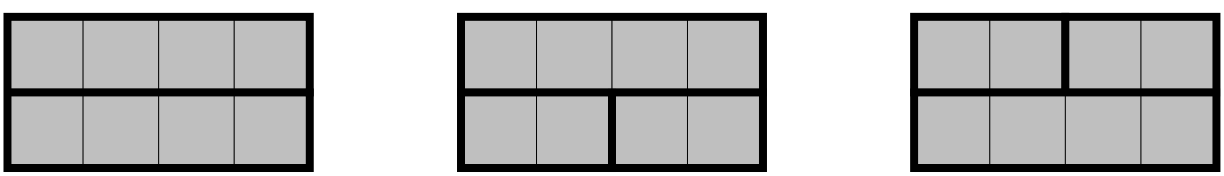
Opgave

In deze opgave bekijken we rechthoeken van $n \times 2$, waarbij n een positief geheel getal is. We gaan dergelijke rechthoeken betegelen met tegels van 2×1 en 4×1. De tegels kunnen staand of liggend gebruikt worden.

Er zijn vijf manieren om een 4×2-rechthoek te betegelen met tegels van 2×1:



Als je ook tegels van 4×1 mag gebruiken, dan zijn er nog drie extra mogelijkheden:

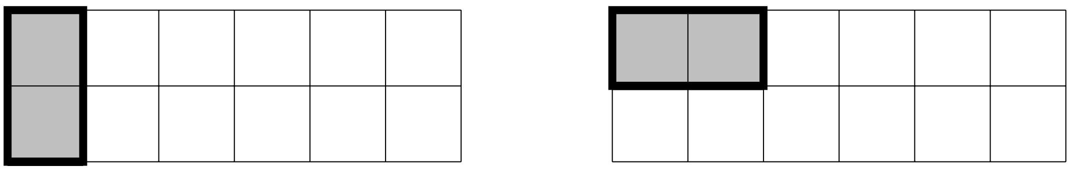


Betegelingen die elkaars spiegelbeeld zijn of door draaiing in elkaar overgaan, beschouwen we als verschillend.

(a) Bekijk eerst betegelingen waarbij we alleen 2×1-tegels gebruiken. Laat F_n het aantal betegelingen zijn van een $n \times 2$-rechthoek met 2×1-tegels. Er geldt bijvoorbeeld dat $F_1 = 1$ en $F_2 = 2$. Zoals we hierboven zagen, geldt ook dat $F_4 = 5$. Toon aan dat $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ voor alle $n \geqslant 1$. Het aantal betegelingen wordt dus gegeven door de Fibonacci-reeks. Hint: maak onderscheid of het vierkantje linksboven deel is van een liggende of van een staande 2×1-tegel.
(b) Nu bekijken we betegelingen waarin naast 2×1-tegels ook 4×1-tegels gebruikt mogen worden. Het aantal van zulke betegelingen van een $n \times 2$-rechthoek noemen we G_n. We zagen hierboven dat $G_4 = 8$. Bepaal G_{10}.

Uitwerking

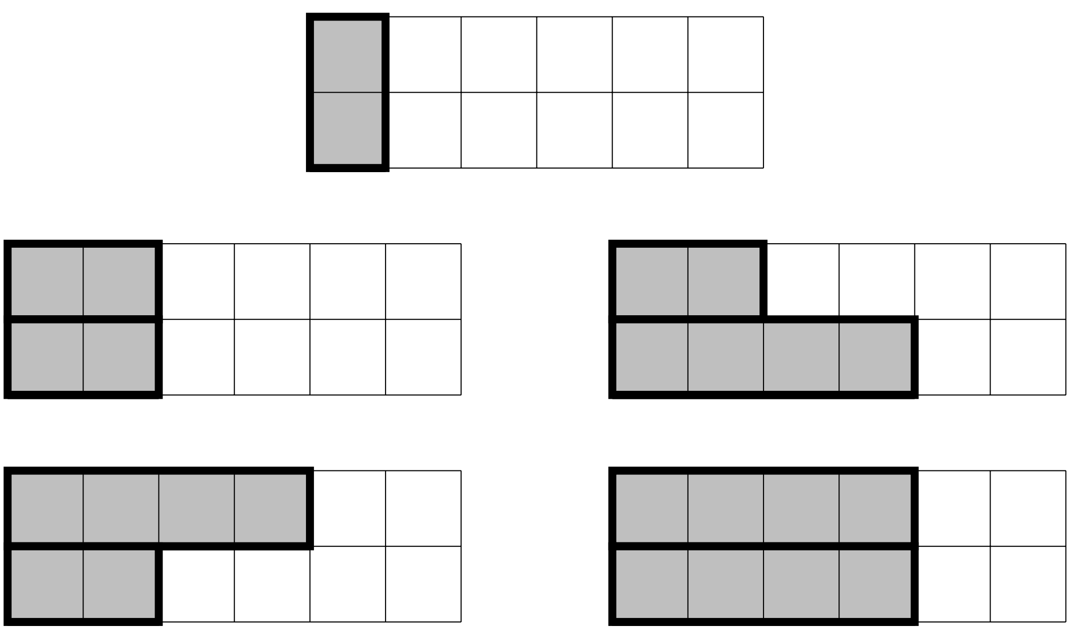
(a) Er zijn twee soorten betegelingen van een $(n+2) \times 2$-rechthoek met 2×1-tegels: betegelingen waarbij het vierkantje linksboven deel is van een staande tegel, en betegelingen waarbij het deel is van een liggende tegel.



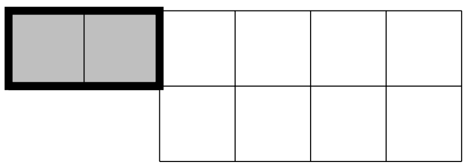
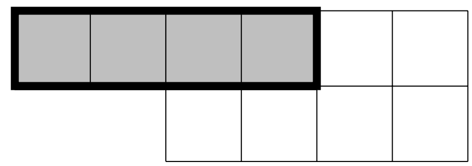
In het eerste geval is het aantal betegelingen gelijk aan het aantal manieren om de resterende $(n+1) \times 2$-rechthoek te betegelen, oftewel F_{n+1}. In het tweede geval moet het vierkantje linksonder ook deel zijn van een liggende tegel. Er resteert dan een $n \times 2$-rechthoek, met F_n mogelijke betegelingen.

In totaal zijn er dus $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ betegelingen, dus $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ voor alle $n \geqslant 1$.

(b) We onderscheiden opnieuw de mogelijkheden voor het vakje linksboven. Dit kan deel zijn van een staande 2×1-tegel, van een liggende 2×1-tegel of van een liggende 4×1-tegel. In het tweede en het derde geval zijn er twee mogelijkheden voor het vakje linksonder: dit vakje kan deel zijn van een liggende 2×1-tegel, of van een liggende 4×1-tegel.



Laat H_n het aantal betegelingen met 2×1- en 4×1-tegels zijn van een $n\times 2$-rechthoek waaruit linksonder twee vakjes verwijderd zijn. Zo'n rechthoek minus twee vakjes heeft twee soorten betegelingen:

Het aantal betegelingen met 2×1- en 4×1-tegels van een $n \times 2$-rechthoek waaruit juist linksboven twee vakjes verwijderd zijn, is natuurlijk ook gelijk aan H_n.

We zien dat

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2} + H_{n-2} + H_{n-2} + G_{n-4}$$

en

$$H_n = G_{n-2} + H_{n-2}$$

voor alle $n \geqslant 5$.

Hiermee kunnen we recursief alle waardes van G_n en H_n berekenen uit G_1, G_2, G_3, G_4, H_3 en H_4. De waardes van G_1, G_2, G_3, G_4, H_3 en H_4 kun je vinden door alle mogelijkheden te tekenen.

Dit geeft de volgende resultaten:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G_n	1	2	3	8	14	30	55	115	220	447
H_n			1	3	4	11	18	41	73	156

Het antwoord is dus $G_{10} = 447$.

Inzenders met de juiste oplossing

Gé Groenewegen, Frans van Hoeve, Hans Linders en Lieke de Rooij

Winnaar van de cadeaubon

Lieke de Rooij