



EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERaar

Vastgeroest

Alle columns van Ab van der Roest die tussen 2013 en 2022 verschenen zijn



Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

AB VAN DER ROEST SPECIAL

INHOUDSOPGAVE

AB VAN DER ROEST SPECIAL



IN DIT NUMMER

VASTGEROEST EUCLIDES 88-6 (2013)	4	EXAMENPERIKELEN EUCLIDES 92-1 (2016)	19
SNELHEID EN GEMIDDELDE SNELHEID EUCLIDES 88-7 (2013)	5	DE SCHULDIGE BLIK EUCLIDES 92-2 (2016)	20
TELEURSTELLING EUCLIDES 89-3 (2013)	6	LES VOORBEREIDEN EUCLIDES 92-3 (2016)	21
KANSREKENEN MET DE NADRUKE OP REKENEN EUCLIDES 89-4 (2014)	7	FUN-HOEKEN EUCLIDES 92-5 (2017)	22
DE INVLOED VAN REKENMACHINE EN GR EUCLIDES 89-6 (2014)	8	EEN CHINESE OPGAVE EUCLIDES 92-7 (2017)	23
GOED OF FOET? EUCLIDES 90-3 (2014)	9	EEN RAADSEL EUCLIDES 93-1 (2017)	24
KANS EN MEETKUNDE EUCLIDES 90-5 (2015)	10	VERWARRING ROND EXPONENTIËLE GROEI EUCLIDES 93-3 (2017)	25
DE UITDAGING EUCLIDES 90-6 (2015)	11	WISKUNDE OP STRAAT EUCLIDES 93-6 (2018)	26
GEZEUR! EUCLIDES 91-1 (2015)	12	VAKANTIEWERK EUCLIDES 93-7 (2018)	27
MET JESSE IN HET MATHEMATIKUM EUCLIDES 91-2 (2015)	13	KERST IN DE WISKUNDELES EUCLIDES 94-3 (2018)	28
HERMAN GAAT MET PENSIOEN EUCLIDES 91-3 (2015)	14	IK LEER HET NOOIT! EUCLIDES 94-4 (2019)	29
DE SCHADUWZIJDE VAN HET LERAAR ZIJN EUCLIDES 91-4 (2016)	15	EEN DOCENT DENKT SOMS ERG TRAAG EUCLIDES 94-6 (2019)	30
VREUGDEDANSJE EUCLIDES 91-5 (2016)	16	EEN DOT VAN EEN KANS EUCLIDES 94-7 (2019)	31
NOT THE DUTY, BUT THE BEAUTY EUCLIDES 91-6 (2016)	17	PROBLEMEN DIE NIET LOSLATEN EUCLIDES 95-4 (2020)	32
NEDERLAND – DUITSLAND: ABC-FORMULE OF PQ-FORMULE EUCLIDES 91-7 (2016)	18	HOE EEN VMBO-OPGAVE EEN VWO-OPGAVE WERD EUCLIDES 95-5 (2020)	33

Foto voorkant:
'Peine del Viento XVII.
Een sculptuur van de Spaanse beeldhouwer Eduardo Chillida (1924-2002).
Te zien in Museum Chillida Leku, Hernani, Spanje.
Foto: Tom Goris

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING
VAN WISKUNDELERAREN

24/7 EUCLIDES 95-6 (2020)	34
CORONATIJDEN I EUCLIDES 95-7 (2020)	35
CORONATIJDEN II EUCLIDES 96-1 (2020)	36
EEN ZOMER IN NEDERLAND EUCLIDES 96-2 (2020)	37
DE EERSTE LES NA DE KERSTVAKANTIE EUCLIDES 96-3 (2020)	39
FOUTEN MAKEN EUCLIDES 96-4 (2021)	40
IK LEER HET NOOIT! EUCLIDES 96-6 (2021)	41
BESCHUITBUS ALS OMWENTELINGSLICHAAM EUCLIDES 97-1 (2021)	42
ACHTERUITDENKEN EUCLIDES 97-2 (2021)	43
ZE ZIJN ER NOG! EUCLIDES 97-3 (2021)	44
GRRRRR.... EUCLIDES 97-4 (2022)	45
NEDERLAND ONTWIKKELINGSLAND? EUCLIDES 97-5 (2022)	46
HET GETALLENVOORBEELD EUCLIDES 97-6 (2022)	47
TAAL BIJ WISKUNDE EUCLIDES 97-7 (2022)	48
MIJN LAATSTE EUCLIDES 98-1 (2022)	49



Kort vooraf

Meer dan negen jaar verscheen met een soort van regelmaat de rubriek 'Vastgeroest'. De meeste daarvan zijn fraaie persoonlijke bespiegelingen over al dan niet wiskundige lotgevallen met leerlingen. Maar nu is Ab met pensioen en komen er dus ook geen nieuwe verhalen met leerlingen in de hoofdrol meer. Daarom stopt de rubriek 'Vastgeroest', hoewel we natuurlijk wel hopen dat Ab af en toe nog wel zijn geschreven licht laat schijnen over andere onderwerpen die hem interesseren, zoals knopen, kunst of religie.

Aanknopingspunten vinden om een Kort Vooraf voor deze Abspecial te schrijven is niet zo ingewikkeld: in de rubriek 'Vijf vragen aan' raadt Ab ons aan naar de knopen van Shinkichi Tajiri in Baarlo te gaan kijken. Als wederdienst kan ik dan Ab aanraden om naar het Museum Chillida Leku in de omgeving van San Sebastián te gaan. Knoopachtige sculpturen van Eduardo Chillida zijn daar te bewonderen.

En een woord van excuus is hier op zijn plaats. Het viel mij pas op bij het maken van deze special: we hebben twee keer een identieke Vastgeroest gepubliceerd. Maar die heet dan ook: 'Ik leer het nooit!... Excuus, Ab!

Vorig jaar was ik bij een openluchtvoorstelling van theatergroep Roestvrij uit Dwingeloo. Als toegangsbewijs kreeg je een sticker op je jas, die daarna op mijn lpadhoes terecht is gekomen. Die sticker is nu voor *Euclides* van toepassing:



Ab, dank je voor alle Vastgeroesten!

Tom Goris

Vastgeroest

[Ab van der Roest]

Als docent heb je van die vaste gewoontes bij de uitwerking van bepaalde sommen. Die gewoontes zijn soms zo vast, dat je nauwelijks openstaat voor andere methodes. Zo is voor velen vanzelfsprekend dat bij 'delen door een breuk' hoort: 'vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk'. Zo ook voor Ab van der Roest. In dit artikel vertelt hij hoe hij ontdekte dat het ook anders kan.

In een gesprek over wiskunde en wiskundeonderwijs werd me de vraag gesteld hoe ik zou reageren wanneer een leerling de volgende berekening zou doen:

$$\frac{9}{8} : \frac{3}{4} = \frac{9:3}{8:4} = 1\frac{1}{2}$$

Mijn eerste impuls was dat de leerling een fout maakte. Maar na even rekenen zag ik dat het antwoord goed was. Is het toevallig goed, of is deze methode altijd goed? Eerst nog een getallenvoorbeeld. Dit voorbeeld klopte ook en daarmee krijg je dan het vermoeden dat het altijd goed is. Hier komt de wiskunde om de hoek kijken, want van de voorbeelden naar een algemeen bewijs kan natuurlijk met behulp van algebra.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} = \frac{ad : cd}{bc : cd} = \frac{a : c}{b : d}$$

En dus altijd waar.

Ik gebruik hierboven: 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk' wat ook met algebra weer makkelijk te bewijzen is:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot bd}{\frac{c}{d} \cdot bd} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Ik kwam hierover in gesprek met een aantal docenten van groep 8 van een basisschool. Ik gaf hun het voorbeeld en vroeg: 'Goed of fout?' Ook hier de primaire reactie dat het fout was, maar aarzelend het toegeven dat het antwoord wel goed was. Op de vraag van mij of ze deze methode ook goed zouden rekenen op een proefwerk kwam een snelle reactie: 'Neel!'

Waarom iets fout rekenen als het goed is? Schiet de rekendocent tekort omdat hij onvoldoende wiskunde beheerst? De docent veronderstelde dat de leerling een trucje deed, terwijl de 'gewone' methode (vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk) een kwestie van inzicht was. Ik waag dit te betwijfelen.

Overigens is de methode gelijkwaardig met de vermenigvuldiging van breuken:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Tellers en noemers moeten met elkaar vermenigvuldigd worden.

Omdat vermenigvuldigen en delen

gelijkwaardige bewerkingen zijn, mag je dus ook gewoon tellers en noemers op elkaar delen. Ik veronderstel dat het voor kinderen zelfs makkelijker wordt. Zijn de uitkomsten niet meteen mooi, dan moeten teller en noemer met een getal vermenigvuldigd worden, zodat er een 'gewone' breuk uitkomt. Voorbeeld:

$$\frac{2}{7} : \frac{3}{5} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{2}{7} \cdot 15}{\frac{3}{5} \cdot 15} = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 3} = \frac{10}{21}$$

En we zien het vermenigvuldigen met het omgekeerde van de breuk weer terug.

Ik ken de didactiek van het rekenen niet, maar ik veronderstel dat de methode van het voorbeeld voor een leerling wel eens veel makkelijker kan zijn.

Vastgeroest

SNELHEID EN GEMIDDELDE SNELHEID

[Ab van der Roest]

Een verkeerde aanpak van een som kan inspirerend zijn. Eerstejaars studenten aan de universiteit van Wageningen krijgen in het kader van het differentiequotiënt de volgende som voorgelegd:

Gegeven is de functie:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$$

Bereken de gemiddelde toename van $f(x)$ op het interval $1 \leq x \leq 2$.

Een student pakte deze som verkeerd aan, maar zijn verkeerde aanpak was wel de aanleiding om nog eens goed over de opgave en zijn aanpak na te denken.

De uitwerking is:

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{5 - \frac{1}{2}}{1} = 3\frac{1}{2}$$

Er wordt dus naar een differentiequotiënt gevraagd. De student beantwoordde de vraag als volgt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x + 2 \\ \frac{f'(2) + f'(1)}{2} &= \frac{4 + 3}{2} = 3\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Antwoord goed, maar methode 'fout'. Uit een tweede getallenvoorbeeld bleek echter dat ook daarbij het antwoord op beide manieren hetzelfde was.

Is er een alternatieve manier gevonden? Is deze manier altijd geldig?

Dus de algebra er op los gelaten.

Neem de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ en het interval $[p, q]$.

De gemiddelde toename op dat interval berekenen we met:

$$\frac{f(q) - f(p)}{q - p} = \frac{(aq^2 + bq + c) - (ap^2 + bp + c)}{q - p} = \frac{a(q - p)(q + p) + b(q - p)}{q - p} = aq + ap + b$$

De 'verkeerde' methode geeft $f'(x) = 2ax + b$ en de gemiddelde toename wordt dan:

$$\frac{f'(q) + f'(p)}{2} = \frac{(2aq + b) + (2ap + b)}{2} = aq + ap + b$$

Het goede antwoord!

De methode klopt, maar is de methode algemeen geldend? Nee, want als je bijvoorbeeld $f(x) = x^3$ neemt, dan zie je al snel in dat het *niet* goed gaat.

Het is dus een bijzonder geval voor tweedegraads functies.

Dat dit een bijzonder geval is voor de tweedegraads functie, is meteen in te zien met de *middelwaardestelling*. Deze luidt:

Als de functie f voor $a < b$ voldoet aan de voorwaarden:

- f is continu op het gesloten interval $[a, b]$,
- f is differentieerbaar op het open interval (a, b) ,

dan is er een c tussen a en b waarvoor geldt:

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c)$$

Herschrijven geeft: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Omdat de afgeleide lineair is, is vanuit de middelwaardestelling duidelijk dat er een c bestaat waarvoor geldt dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan het differentiequotiënt op $[a, b]$. Maar het is meteen ook duidelijk dat $c = \frac{a+b}{2}$.

Over je vak praten is nuttig, maar soms ook een beetje ontluisterend. Toen ik over het bovenstaande in gesprek kwam met een natuurkundeleraar, en met een zekere trots vertelde wat ik ontdekt had, vertelde hij dat het in zijn vak gewoon was om zo de gemiddelde snelheid te bepalen.

De formule voor afgelegde weg (bij eenparig versnelde beweging) is:

$$s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\text{En: } v(t) = s'(t) = v_0 + at$$

De gemiddelde snelheid op het interval van $t = 0$ tot $t = u$ wordt dan:

$$\frac{s(u) - s(0)}{u - 0} = \frac{v_0 u + \frac{1}{2} a u^2}{u} = v_0 + \frac{1}{2} a u$$

En ook is:

$$\frac{s'(0) + s'(u)}{2} = \frac{(v_0) + (v_0 + au)}{2} = v_0 + \frac{1}{2} a u$$

TELEURSTELLING

Een leraar heeft regelmatig met teleurstellingen te maken. Het is als het ware een deel van zijn leven. Althans, zo ervaart Ab van der Roest het soms. Hieronder een illustratie van wat hij bedoelt.

Als deel van een algebrasom moesten havo 4-leerlingen $(x + 3)^2$ uitwerken. En ja, u raadt het al: velen deden dat door $(x + 3)^2 = x^2 + 9$ op te schrijven. Niet verrassend, maar wel irritant als elf van de 27 leerlingen dit niet goed doen. In de onderbouw is er over gesproken; het is herhaald en nog eens herhaald! Denk niet dat dit mijn teleurstelling was. Die kwam later. Op een cursus van het APS met als onderwerp reflecteren, zag ik het voorbeeld van een collega die zijn leerlingen liet beelddenken. Misschien de oplossing? Ik hoopte daarop.

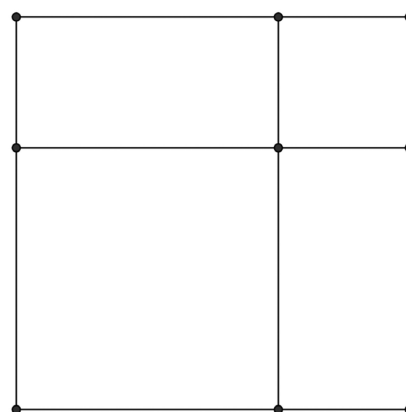
Mijn beginvraag aan de leerlingen was: 'Teken $3 + 5$ en 3×5 '. Eerst iedereen voor zichzelf; daarna kort overleg met elkaar en dan centraal. U merkt wel dat ik goed opgelet had bij de cursus! Grote verwarring was het gevolg. $3 + 5 = 8$ en $3 \times 5 = 15$; dit is rekenen en wat kun je daar nu bij tekenen? In het gesprekje dat volgde, kwam er toch iets uit. Sommigen werkten met getallenlijnen en maakten daarmee lengtes en oppervlaktes. Iemand die beter was in beelddenken, werkte met hokjes van de chocoladereep. Dat is echt mooi.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \\ \hline \end{array}$$

en

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

Met een blok chocolade kun je precies het optellen en vermenigvuldigen voorstellen. Vervolgens vroeg ik een kwadraat te tekenen en daarna $(x + 3)^2$. Je hoopt dan dat de leerlingen het volgende plaatje tekenen:



Als ze dit plaatje kunnen tekenen en daarbij denken aan $(x + 3)^2$, zullen ze het dubbelproduct niet meer vergeten.

Wat was nu mijn teleurstelling? De leerlingen vonden mijn les helemaal niets. Kinderachtig. Ze konden de link niet leggen tussen het merkwaardig product en het plaatje. Het denken in beelden lukte bij een enkeling, maar de meeste leerlingen stonden er niet voor open. Is dit nu omdat het te incidenteel gevraagd wordt? Is het omdat ik een verkeerde startvraag koos? Is het omdat ik het probleem van het vergeten dubbelproduct onvoldoende benadrukt heb? Ik weet het niet, maar ik stap over mijn teleurstelling heen en blijf proberen.

KANSREKENEN MET DE NADRUKE OP REKENEN

Bij het nakijken van toetsen komt Ab van der Roest steeds weer verrassende dingen tegen. Een antwoord dat voor de hand ligt wordt door leerlingen niet gegeven. Je krijgt een alternatief en bent dan verrast dat dit ook goed is.

Die verrassing wordt niet veroorzaakt door de gedachtegang van de leerling, want als ze voldoende opschrijven, dan zie je dat wel. De verrassing komt vooral door het rekenwerk. Het gaat over de volgende opgave: *Van een groep van 60 mannen zijn er vijf kleurenblind. We kiezen uit deze groep één voor één mannen totdat we een kleurenblinde hebben. Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans dat je meer dan vier mannen moet kiezen.*

De voorgestelde uitwerking van het correctievoorschrift is:

$$P(\text{niet-}) = \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{53}{58} \times \frac{52}{57} \approx 0,699 \text{ (n = niet-}$$

kleurenblind)

Alternatief van leerlingen: $P(\text{meer dan 4 mannen}) = 1 - P(1 \text{ man}) - P(2 \text{ mannen}) - P(3 \text{ mannen}) - P(4 \text{ mannen}) =$

$$1 - \frac{5}{60} - \frac{55}{60} \times \frac{5}{59} - \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{5}{58} - \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{53}{58} \times \frac{5}{57} \approx 0,699$$

Antwoorden kloppen en de redenering is makkelijk na te gaan. Klaar!

Maar als je de berekening ziet, is er toch wel wat werk te doen. Uitdagend sommetje voor de leerlingen: Laat zien dat

$$1 - \frac{5}{60} - \frac{55}{60} \times \frac{5}{59} - \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{5}{58} - \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{53}{58} \times \frac{5}{57} = \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{53}{58} \times \frac{52}{57}$$

zonder dat je het eindantwoord uitrekent.

Aanpak:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{5}{60} - \frac{55}{60} \times \frac{5}{59} - \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{5}{58} - \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{53}{58} \times \frac{5}{57} &= \\ \frac{55}{60} - \frac{55}{60} \times \frac{5}{59} - \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{5}{58} - \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{53}{58} \times \frac{5}{57} &= \\ \frac{55}{60} \left(1 - \frac{5}{59} - \frac{54}{59} \times \frac{5}{58} - \frac{54}{59} \times \frac{53}{58} \times \frac{5}{57} \right) &= \\ \frac{55}{60} \left(\frac{54}{59} - \frac{54}{59} \times \frac{5}{58} - \frac{54}{59} \times \frac{53}{58} \times \frac{5}{57} \right) &= \\ \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \left(1 - \frac{5}{58} - \frac{53}{58} \times \frac{5}{57} \right) &= \\ \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \left(\frac{53}{58} - \frac{53}{58} \times \frac{5}{57} \right) &= \\ \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{53}{58} \left(1 - \frac{5}{57} \right) &= \frac{55}{60} \times \frac{54}{59} \times \frac{53}{58} \times \frac{52}{57}. \end{aligned}$$

Na de toetsweek ga ik dit bespreken met de leerlingen en hoop dat ze net zo verrast zijn als ik weer was.

Een andersoortige verrassende uitkomst hoort bij de volgende situatie.

Stel je voor dat de meester van groep 7 een cadeau mag verloten onder de 30 leerlingen die in zijn klas zitten. Hoe kan hij dat het eerlijkste doen? Je mag kiezen uit twee mogelijkheden.

1. Elke leerling schrijft zijn naam op een papiertje. Deze papiertjes zijn natuurlijk allemaal gelijk en worden op precies dezelfde manier opgevouwen. Ze gaan in een hoge hoed. De meester van groep 7 wordt geblinddoekt en hij pakt er na drie keer roeren een papiertje uit. De leerling van wie de naam op het papiertje staat wint het cadeau.

2. De meester van groep 7 schrijft voor zichzelf een getal op (1-30). De leerlingen mogen nu om de beurt een getal noemen uit die serie en de meester houdt bij welke getallen genoemd zijn. De leerling die het getal als eerste raadt, krijgt het cadeau.

Welke methode is eerlijker?

De leerlingen hebben dan vaak het idee dat de eerste methode veel eerlijker is. Schrijf het uit en reken slim met de breuken en dan...

DE INVLOED VAN REKENMACHINE EN GR

Ab van der Roest mijmert over de goede oude tijd, terwijl hij het hedendaags gebruik van de rekenmachine aanschouwt.

Ooit zat ik op de lagere school; dat is de voorloper van de basisschool. We zaten in klassen en niet in groepen. De meester heette meester en de juf heette juf. Het leven was heel overzichtelijk. Ik hield van rekenen. Maakte niet uit of het hoofdrekenen, cijferen of iets anders was. Als er maar gerekend kon worden. Nadat we de tafels geleerd hadden, werd er gecijferd. Bij iets ingewikkelder sommen, sommen die uit meerdere bewerkingen bestonden, was de rekenvolgorde bepaald door Mijnheer Van Dalen Wacht Op Antwoord. (M staat voor machtsverheffen, V voor vermenigvuldigen, D voor delen, W voor worteltrekken, O voor optellen en A voor aftrekken.) Ik denk niet dat ik wist wat machtsverheffen en worteltrekken was, maar het regeltje was nu eenmaal zo. Ik zei al dat het leven zeer overzichtelijk was ...

De uitkomst van de opgave $9 - 3 + 4$ was daarom 2. Van de opgave $8 : 4 \times 2$ was de uitkomst 1. Vandaag zijn beide uitkomsten fout, $9 - 3 + 4 = 10$ en $8 : 4 \times 2 = 4$. Ik weet dat en ik accepteer dat. Als wiskundige zeg ik dan dat de eerste opgave geschreven kan worden als $9 + - 3 + 4$ en is het hopelijk voor iedereen duidelijk dat de uitkomst 10 is.

Ik worstel nog wel met de vraag wie besloten heeft om Mijnheer Van Dalen af te schaffen. Wanneer was dat? Ik heb wel eens begrepen dat de rekenvolgorde veranderde met de komst van de rekenmachine. Als het argument om de bewerkingsvolgorde te veranderen de rekenmachine is, vind ik het een slecht argument.

Lesgevend aan de eerstejaars studenten kwam ik de volgende vergelijking tegen: $x^{0,24} = 7$. Dit was voor menig student, ze doen de overstapcursus van wiskunde A naar wiskunde B, te moeilijk. Uiteraard was er uitgelegd dat $(a^p)^q = a^{pq}$ en met behulp van dit regeltje zou de opgave gemaakt kunnen worden. De oplossing van deze vergelijking

is $x = 7^{\frac{1}{0,24}} = 3320,8$. Toen ik dit uitlegde was mijn

beloning een zeer wazige blik. Een medestudent kwam te hulp: 'Ik doe in dit geval $x = \sqrt[0,24]{7} = 3320,8$, dit geeft hetzelfde antwoord en dat is dan toch ook goed?' De betekenis van $\sqrt[0,24]{7}$ deed er niet toe, want de GR accepteert dit en het goede antwoord komt te voorschijn. Ik legde uit dat $\sqrt[0,24]{7}$ wiskundig gezien geen enkele

betekenis heeft, maar wiskundige correctheid was totaal niet aan de orde, en werd ook nauwelijks geaccepteerd. Zo was het op de middelbare school geleerd, en dat was dus goed.

Een tweede voorbeeld kwam ik eerder tegen. Een leerling kreeg de opdracht de vergelijking van de lijn door de punten (1,4) en (4,10) op te stellen. In plaats van het

verwachte $rc = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{3} = 2$ en van daaruit de vergelijking

$y = 2x + 2$, pakte deze leerling de GR, voerde bij de lijsten de coördinaten in en koos voor *LinReg* en schreef de goede vergelijking op. 'Wat betekent *LinReg*?', vroeg ik aan deze leerling, waarop hij het antwoord schuldig bleef. Het goede antwoord was belangrijk en de leerling vond dat ik daar verder niet moeilijk over moest doen. Natuurlijk is het antwoord goed, want de best passende lijn door twee punten is de lijn door die twee punten. Het kostte me moeite het antwoord goed te keuren.

Als de rekenvolgorde veranderd is door de komst van rekenmachine, dan ben ik bang dat de wiskunde het gaat verliezen van de GR. Een apparaat dat de notatie verandert of de manier van antwoorden overhoop haalt, lijkt me niet wenselijk. Ik pleit er dus voor om de twee gegeven voorbeelden, ik bedoel de wiskundige en niet de rekenvoorbeelden, daarom fout te rekenen. Dat een apparaat fout gemaakt is of dat er misbruik gemaakt wordt van bepaalde functionaliteit van het apparaat, rechtvaardigt geen aanpassing van de wiskunde.

GOED OF FOUT?

Bij het nakijken van eindexamens blijkt Ab van der Roest toch niet zo rechtlijnig als hij denkt. Hij deelt zijn gedachten daarover met u.

Wiskundedocenten zijn in het algemeen vriendelijke mensen; streng doch rechtvaardig. Meesters in het binair denken; en beoordelen of een antwoord goed of fout is, dat is voor hen geen groot probleem. Het is sowieso gemakkelijk bij wiskundeopgaven: goed-fout en wat zou er tussen in moeten zitten? Dit is een beeld dat buitenstaanders kunnen hebben, en dat we zeker in stand moeten houden. Maar als ik examens nakijk, of als tweede corrector examens bekijk, dan is er een voortdurende strijd tussen het vriendelijke en het rechtvaardige. Opeens ben ik niet zo binair meer.

Ik geef een paar voorbeelden: In de vakspecifieke regels van het correctievoorschrift (cv) staat bij regel 1 dat voor elke rekenfout of verschrijving in de berekening één punt afgetrokken moet worden. Duidelijke taal, maar hoeveel moeite kost het mij, en niet alleen mij, niet om een leerling een punt in mindering te brengen die op een plaats in de berekening opeens een cijfer verwisselt:

$$g = \left(\frac{20}{12}\right)^{\frac{1}{8}} = 1,0695 \quad \text{dus } 6,6\%. \text{ Bij het tussenantwoord}$$

zijn de 5 en 9 verwisseld. Even niet opgelet bij het schrijven, of lezen, maar wiskundig alles goed! Het cv is duidelijk; de docent twijfelt, maar moet vanwege het rechtvaardig zijn de punt aftrekken. In ditzelfde kader worstel ik altijd met de normering als een leerling bij een integraal 'dx' vergeet. Er wordt een wiskundige notatiefout gemaakt en in het kader van regel 1 trek ik een punt af. Maar als tweede corrector zie ik nog al eens dat ik strenger ben dan mijn collega.

Een heel ander voorbeeld waar het cv wel ruimte laat: in mijn lessen over de normale verdeling hamer ik erop dat ik de wiskundetaal en de GR-taal gescheiden wil houden. Bij een toets voor het schoolexamen ben ik daar ook fel op en geef ik punten in mindering als een leerling dat niet doet. Ik wil dus niet dat een leerling opschrijft: $P(X \geq 3) = \text{normalcdf}(3.0, 10^{99}, 1.45, 0.533) = 0,0025$. Een uitwerking die ik de leerlingen leer, en waarvan ik zeg dat alleen die manier alle punten scoren is:

X = de reticulocytwaarde;
 X is normaal verdeeld met $\mu = 1,45$ en $\sigma = 0,553$;
 $P(X \geq 3) = 0,0025$;
met behulp van GR: $\text{normalcdf}(3.0, 10^{99}, 1.45, 0.533)$.

Maar een leerling die bij het examen alleen opschrijft $\text{normalcdf}(3.0, 10^{99}, 1.45, 0.533) = 0,0025$ krijgt toch van mij, en ook van de tweede corrector alle punten! Waarom toch, vraag ik mezelf vaak af. Het antwoord weet ik voor mezelf. De leerling leert niets meer van het examen en daarom is het niet nodig om punten af te trekken. Of, bijna elke collega in het land trekt er geen punten voor af, en waarom zal ik dat dan wel doen?

Beide motieven vind ik niet sterk van mezelf. Belangrijkste motief is dat je jouw leerling niet tekort wilt doen. Het is nodig dat er een standaard komt als het gaat om uitwerken van kans-opgaven. Op havo en vwo wordt eerst de stochast gedefinieerd, eventueel een schets gemaakt en het antwoord begint standaard met $P(X...)$. Een beschrijving van hoe de GR wordt ingezet, wordt als toelichting na het antwoord gegeven. Wiskunde is heldere denkstappen maken en opschrijven!

KANS EN MEETKUNDE

Een ongebruikelijke vraag blijkt met collega's samen toch snel op te lossen. Maar wat vindt de natuurkunde-collega er eigenlijk van? Ab van der Roest doet verslag.

Al een paar keer heb ik geschreven over situaties in de klas, maar er zijn nog andere manieren om te genieten van de wiskunde, zoals een gesprek met collega's. Op het internet kwam ik de volgende opgave tegen.

Neem een willekeurig vierkant $ABCD$. Kies in dit vierkant een willekeurig punt P . Bepaal de kans dat $\angle APB$ een scherpe hoek is.

Een inspirerende vraag, omdat kans en meetkunde gecombineerd worden. Dat past natuurlijk niet meer in ons schoolprogramma, want meetkunde hoort bij wiskunde B en kans bij wiskunde A en daar zit een schot tussen. Wiskunde D-leerlingen zouden het antwoord snel moeten kunnen vinden, maar ik denk dat wiskunde B-leerlingen het ook wel kunnen.

Met een paar collega's bespreek ik deze vraag. Ja, soms gaan de gesprekken ergens over! Na een schetsje gemaakt te hebben (zie figuur 1), was het antwoord makkelijk te vinden.

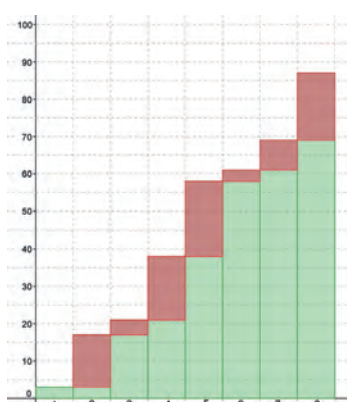
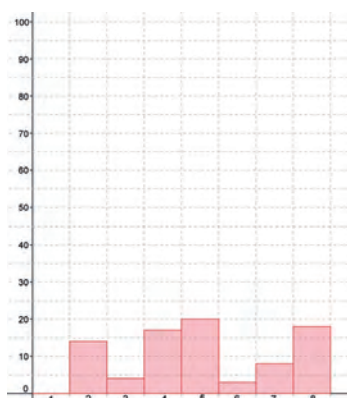
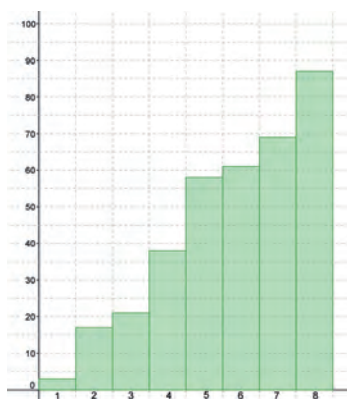
We kwamen op $\frac{4a^2 - \frac{1}{2}\pi a^2}{4a^2} = 1 - \frac{1}{8}\pi$. Mooi antwoord.

Je rekent het maar na, en als het niet lukt, stuur me een mail. Daarna kwam de volgende vraag bij ons op: 'Hoe groot is de kans dat $\angle APB$ gelijk is aan 90° ?' We konden niets anders bedenken dan dat die kans gelijk aan 0 moet zijn. Het is bijna een paradox. Je kunt oneindig veel punten P aanwijzen waarvoor geldt dat $\angle APB = 90^\circ$, en toch is de kans gelijk aan 0. We zullen het ermee moeten doen; weten dat de punten er zijn, maar toch een kans van 0 dat zo'n punt willekeurig aangewezen wordt. Mijn natuurkundecollega, die met onze wiskundegesprekken graag meedoet, was totaal niet onder de indruk. Je weet dat er deeltjes zijn, maar de exacte plaats van zo'n deeltje weten we niet. In de natuurkunde is dat sinds Heisenberg zijn onzekerheidsrelaties formuleerde heel gewoon! Wat is het toch goed, dat we als wiskundigen af en toe met toegepast wiskundigen praten. Vaak is dit verfrissend.

DE UITDAGING

Ab van der Roest daagt zijn leerlingen uit met een probleem. De opbrengst: geïnteresseerde leerlingen en een chocoladereep.

Een van de leuke kanten van het docentschap is dat er leerlingen zijn die je kunt uitdagen. Ik doe dat met een raadsel of een probleem dat ik zelf uiteraard heel goed begrijp en overzie. Het uitdagen gaat soms gepaard met een weddenschap en de standaardbeloning die ik vraag, is dan altijd een reep chocolade. Om een leerling echt te interesseren, moet je natuurlijk wel een goed probleem hebben. Deze week werd er me één gepresenteerd. Ik doe mee aan een docentontwikkelteam (DOT) in Nijmegen en Ton Konings presenteerde het.



Neem acht getallen tussen 0 en 100 en schrijf die op in volgorde van grootte. Neem van elk twee opeenvolgende getallen de verschillen en tel die bij elkaar op.

Als je wedt met je leerling dat je dit uit het hoofd sneller kan dan hij met een rekenmachine, dan is de winst echt voor jou. Aantrekkelijk dus!

Voorbeeld: een leerling kiest de getallen 3, 17, 21, 38, 58, 61, 69 en 87. Zodra die op volgorde staan, denk je twee keer diep na en zeg je: 84 is het antwoord. De leerling controleert dit met zijn rekenmachine:

$$17 - 3 = 14$$

$$21 - 17 = 4$$

$$38 - 21 = 17$$

$$58 - 38 = 20$$

$$61 - 58 = 3$$

$$69 - 61 = 8$$

$$87 - 69 = 18$$

En $14 + 4 + 17 + 20 + 3 + 8 + 18 = 84$. Het goede antwoord en sneller dan de leerling. Chocoladereep verdiend!

De leerling betreurt het verlies van de reep, maar krijgt een tweede kans. Als hij of iemand anders uit de klas kan uitleggen dat het antwoord via de som $87 - 3 = 84$ verkregen kan worden, dan hoeft er geen chocoladereep uitgekeerd te worden.

Je ziet het waarschijnlijk wel: $(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_8 - a_7) = a_8 - a_1$. Grafisch is het nog veel mooier, zoals het 'stripverhaal' in de figuur laat zien.

Met dit rekengrapje kun je in elke klas terecht, maar speciaal in 6 vwo. Het schijnt dat bovenstaande wetmatigheid Leibniz hielp bij het vinden van de hoofdstelling van de integraalrekening: noem het rijtje getallen de primitieve F , noem het verschilrijtje de functie f , noem de som de integraal, dan geldt: $F(\text{laatste}) - F(\text{eerste}) = \text{integraal van de functie } f$. Ik denk dat dit niet een manier is om de hoofdstelling uit te leggen, maar wel om achteraf nog eens het begrijpen te bekrachtigen, en om leerlingen op chocolade te trakteren.

GEZEUR!

Ab van der Roest activeert de voorkennis van zijn leerlingen. En al doorvragend krijgt hij een inzicht over de grondhouding van de docent.

Regelmatig krijg ik van mijn klas te horen dat ik veel te moeilijk doe. In dit stukje wil ik u meenemen naar zo'n les waarin de klacht weer geuit werd. Het is in een 4 havo-klas en ik geef er wiskunde B.

In een hoofdstuk waarin we stelsels gaan oplossen, begin ik met terug te halen wat de leerlingen al weten of zouden moeten weten. En gelukkig weten ze wel wat. Nadat ik op het bord geschreven had: $y = 2x - 3$ en ik vroeg 'waar denk je aan als je dit ziet', reageerde een leerling met 'een vergelijking' en een ander met 'een lijn' en weer een ander met 'aan beide kanten hetzelfde doen'. Mooi dat weten ze dus. Ik maakte van de vergelijking een tabelletje, zette een paar waardes voor x erin en ze rekenden de bijbehorende waardes van y uit en tekenden de lijn.

x	0	1	2
y	-3	-1	1

Een tweede lijn: $y = -x + 2$ werd op dezelfde manier getekend.

Op mijn vraag 'hoe bepaal ik het snijpunt?' kreeg ik een snelle en goede reactie: $2x - 3 = -x + 2$. 'Dat is goed', maar waarom? En dan ontstaat de ergernis. Leerlingen weten niet eenvoudig onder woorden te brengen waarom ze deze vergelijking moeten oplossen. Na lang doorzeuren, volgens leerlingen, komt er 'de x moet hetzelfde zijn'. Dat is wel waar, maar dat is niet de reden en zo ontstaat er een patstelling die doorbroken moet worden.

Na doorvragen komen we niet verder en moet ik helpen. De klas weet wel te vertellen dat in het snijpunt de x en de y hetzelfde zijn, want zo ligt het punt op beide lijnen. En dan valt het kwartje bij een van de leerlingen: het gaat er dus niet om dat de x gelijk is, maar dat de y gelijk is. Snijpunt wordt bepaald en we gaan naar het rekenen met stelsels. Mijn eerste opgave is:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

We bespreken dat de eerste vergelijking als grafiek ook een lijn is, en dat het oplossen van het stelsel hetzelfde is als het snijpunt van de lijnen vinden. Welke aanpak? Al snel krijg ik het advies om de eerste vergelijking te herschrijven in de vorm van $y = -\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$ en dan weer gelijk stellen. Kan het anders? 'Ja, want anders vraagt u er niet naar' is het antwoord. Hoe? Dit is weer een denkstap te ver. Ik haal het laatste stapje van de eerste opgave weer naar voren; we vonden $x = 1\frac{2}{3}$ en hoe berekenden we de bijbehorende y ? Het helpt niet echt, maar het is ook al bijna 15.30 uur. Ik zeg 'Ik weet y , kijk maar $y = x + 1$ '. Wat doen we dan? In de eerste vergelijking y vervangen door $x + 1$!

De opgave is klaar en de oplossing is gevonden, maar de beloning voor mij komt er als een leerling zegt: 'Eigenlijk zeg je ook hier dat de y in beide vergelijkingen hetzelfde is!' De grondhouding van de leraar moet misschien wel een beetje zeurderig zijn, gaat er door mijn hoofd...

MET JESSE IN HET MATHEMATIKUM

Tijdens een werkweek met 4 havo bezocht Ab van der Roest het *Mathematikum* in het Duitse Gießen. Vooraf was hij bang dat leerlingen niet geïnteresseerd zouden zijn, maar dat viel gelukkig mee. Vooral Jesse maakte het bezoek en ook zijn dag goed.

In het *Mathematikum* hangt een plaat met daarop de tekening van een parabool met vergelijking $y = x^2$. In de punten met coördinaten $(-10, 100)$, ..., $(-2, 4)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$, ..., $(10, 100)$ is een spijker geslagen. Over twee spijkers hangt een touwtje. Het verbeeldt als het ware een lijn tussen twee punten, één met een negatieve x -coördinaat en één met een positieve. Het snijpunt met de y -as kon afgelezen worden. Het touwtje is zo lang, dat ook de x -coördinaten van de punten aangegeven worden, zie figuur 1. Als het touwtje bijvoorbeeld hangt om een spijker in punt $(-5, 25)$ en om een in $(3, 9)$, dan snijdt deze de y -as in $(0, 15)$. Een touwtje om de spijker in $(-4, 16)$ en in $(1, 1)$ heeft als snijpunt $(0, 4)$.

Er was geen bijschrift en toen Jesse me vroeg wat de betekenis was, wist ik het niet meteen. Hij keek nog eens goed en riep toen: 'Ik weet het, het snijpunt van het touwtje is hetzelfde als het product van de x -coördinaten van de punten!' Nou ja, er moet wel een minteken bij. Is dit dan altijd waar? De mogelijkheden werden onderzocht, en steeds klopte het vermoeden. Een stelling moet bewezen worden en dat hebben we gedaan. We leenden een stukje papier en een pen van het *Mathematikum*. Het bewijs is niet moeilijk.

Neem de punten (a, a^2) en (b, b^2) . Van de lijn die door deze twee punten gaat stellen we de vergelijking op.

$$rc = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b + a)(b - a)}{b - a} = b + a.$$

Je krijgt dus $y = (b + a)x + n$. Het punt (a, a^2) invullen geeft: $a^2 = (b + a)a + n$ en $n = a^2 - ab - a^2 = -ab$.

Vergelijking van de lijn is dus $y = (b + a)x - ab$ en de stelling is bewezen. Een variant op dit bewijs (meer geschikt voor vwo-leerlingen). Bereken de snijpunten van de parabool $y = x^2$ en de lijn $y = ax + b$.

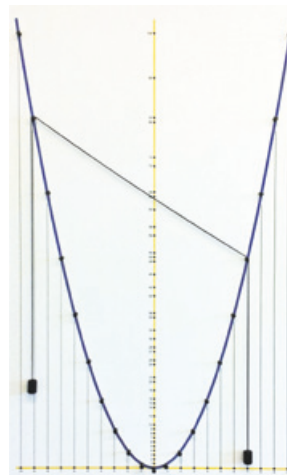
We gebruiken de substitutie methode en lossen de vergelijking $x^2 = ax + b$ op:

$$x^2 = ax + b$$

$$x^2 - ax = b$$

$$\left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 = b + \frac{1}{4}a^2$$

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}$$



figuur 1

We vermenigvuldigen de x -coördinaten met elkaar en dat geeft:

$$\left(\frac{1}{2}a - \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}\right)\left(\frac{1}{2}a + \sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}\right) = \frac{1}{4}a^2 - b - \frac{1}{4}a^2 = -b.$$

Klaar.

Dit is meteen ook in te zien als je bedenkt dat de som van de oplossingen van de algemene vergelijking van de

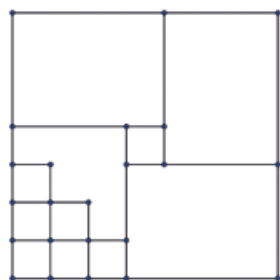
tweede graad $ax^2 + bx + c = 0$ gelijk is aan $-\frac{b}{a}$ is en het

product $\frac{c}{a}$.

In een werkweek zo met een leerling in gesprek over een stelling in de wiskunde vind ik een bijzonderheid. *Mathematikum* bleek voor veel leerlingen een goede keuze. Ze vonden het erg leuk en voor sommigen was het ook leerzaam. Het geeft inspiratie om te onderzoeken. Nu denkt u misschien dat het bijzondere leerlingen zijn. Dat zijn ze, want 's avonds kwam er een zeer verontwaardigde en boze beheerder van de jeugdhoeve klagende over mijn leerlingen en werden we bijna gesommeerd de koffers te pakken. De leerlingen hadden een stoel (die volgens hen kapot was) uit het raam gegooid en verbrand op het kampvuur. Een gedenkwaardige dag.

HERMAN GAAT MET PENSIOEN

Aan het einde van het schooljaar moet je soms afscheid nemen van collega's. Niets bijzonders, maar soms is dat het toch anders. Ab van der Roest vertelt over Herman.



figuur 1

Dit jaar gaat Herman stoppen. Hij is docent natuurkunde, met een meer dan gemiddelde belangstelling voor weetjes uit de wiskunde. Hij bevroagt me daar regelmatig op en hij verwacht van mij dat ik die weetjes ook ken en minstens erover kan praten.

Dat valt vaak wel tegen. Dit keer ging het over driehoeksgetalen. Je kunt driehoeksgetalen met een plaatje weergeven, zie figuur 1: Je ziet hier de driehoeksgetalen 3, 6 en 10. Als je twee dezelfde driehoeksgetalen op elkaar tekent (wel even 180° draaien), dan ontstaat een rechthoek. Dit leidt tot een formule van de driehoeksgetalen: $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Als $n = 2$, dan krijg je het driehoeksgetal 3 en daarom noemen 3 het tweede driehoeksgetal. 1 is het eerste.

Als we twee opvolgende driehoeksgetalen optellen, dan ontstaat een kwadraat. Bijvoorbeeld $10 + 6 = 16$. In het plaatje is het makkelijk te zien: het n -de opgeteld bij het $(n+1)$ -de geeft een vierkant van $n+1$ bij $n+1$.

Dit kun je natuurlijk ook narekenen met de formule: $\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n+1)[n+n+2] = \frac{1}{2}(n+1)(2n+2) = (n+1)^2$. Of, als je een driehoeksgetal vermenigvuldigt met 8 en bij het antwoord 1 optelt, is het antwoord altijd een kwadraat. Met een tekening mooi te illustreren, zie figuur 2. Met de formule kan het natuurlijk ook: $8 \times \frac{1}{2}n(n+1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$. Dit is bij veel collega's wel bekend. Leuk om te gebruiken in een laatste les, of in een verloren kwartiertje. Stiekem wat algebra oefenen, of gewoon serieus in een les te behandelen. Herman wees me op een ander verband. Omdat de driehoeksgetalen gevonden worden met $\frac{1}{2}n(n+1)$, kunnen we het omgekeerde van een driehoeksgetal schrijven als

$$\frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$



figuur 2

Dit levert de volgende serie sommen op:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= \frac{2}{2} - \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} &= \frac{2}{3} - \frac{2}{4} \\ \frac{1}{10} &= \frac{2}{4} - \frac{2}{5} \\ \frac{1}{15} &= \frac{2}{5} - \frac{2}{6} \quad \text{enzovoorts.}\end{aligned}$$

Maar, dat was nog niet alles. Bekijk de som van de opvolgende omgekeerde driehoeksgetalen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6} &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} &= \frac{3}{5} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} &= \frac{4}{6} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} &= \frac{5}{7}\end{aligned}$$

Dit is een mooie regelmaat en de uitkomsten gaan richting 1. Nader onderzoek is geboden. Eerst de som bekijken en vervolgens de limiet nemen:

$$\sum_{i=2}^n \frac{2}{i(i+1)} = \sum_{i=2}^n \left(\frac{2}{i} - \frac{2}{i+1} \right) = 1 - \frac{2}{n+1}$$

Als we de som uitschrijven krijgen we afwisselend $+\frac{2}{i}$ en $-\frac{2}{i+1}$ en we houden dus alleen de eerste en de laatste term over. Als we de limiet nemen, dan zien we dat de oneindige som gelijk is aan 1. Toen we hier een paar weken geleden nog even over doorpraatten, wees hij me er op dat Martin Kindt er ook wel over geschreven heeft in de *Nieuwe Wiskrant* (www.fi.uu.nl/wiskrant/artikelen/323/323maart_wtbi60.pdf). Herman gaat met pensioen. Ik heb hem mijn e-mail adres gegeven, want ik ga deze weetjes missen. Na het schrijven van dit stukje vertelde Herman dat hij een boekje geschreven heeft: Uitgerekend! Met als ondertitel: het opzienbarende van getallen. Zie elders in deze *Euclides* een *Verschenen* van dit boekje. Zo kunt u ook genieten van de wiskundige kennis van Herman.

DE SCHADUWZIJDE VAN HET LERAAR ZIJN

Ab van der Roest bespiegelt de uitwerkingen van zijn leerlingen van een vraagstuk dat hij op een schriftelijke overhoring had gegeven. En dan blijkt dat het in de schaduw helemaal niet zo onaangenaam is.

De schaduwzijde van het leraar zijn, is het nakijken van schriftelijke overhoringen en repetities. Toch moet het gebeuren. Het is ook erg nuttig want dan kun je een inschatting maken van het kunnen van de leerling en vooral ook van hoe hij werkt. In een schriftelijke overhoring aan 4 vwo wiskunde A stond de volgende opgave:

In Frankrijk was er een enorme regenbui. In een paar uur tijd was er 300 mm regen gevallen. Boer Richard heeft een perceel van 2100 m². We nemen aan dat boer Richard dit water op kan vangen. Boer Richard heeft een zwembad van 25 m bij 15 m. Bereken hoe diep het zwembad moet zijn zodat al het water er precies in past.

Zeker geen contextrijke opgave, want de onmogelijkheid van deze situatie straalt er vanaf, maar mijn collega en ik wisten niet zo snel een betere context te bedenken. Nu ik er nog eens over nadenk, zou de vraag waarschijnlijk veel realistischer zijn met het dak van mijn tuinhuis en een regenton. Gelukkig zijn de leerlingen niet zo kritisch dat ze zeggen dat het een onmogelijke opgave is, omdat het water niet opgevangen kan worden.

Ik had voor mezelf het volgende nakijkmodel gemaakt: Hoeveelheid regen die valt is $0,3 \times 2100 = 630 \text{ m}^3$ (1 punt) De regen komt in het zwembad.

Volume zwembad = 630 m³

Volume = $l \times b \times d$; $630 = 25 \times 15 \times d$ (1 punt)

$$d = \frac{630}{375} = 1,68 \text{ m (1 punt)}$$

Drie stapjes en elk stapje is een punt waard.

De leuke kant van schriftelijke overhoringen nakijken is dat je tijdens het nakijken nieuwe ideeën krijgt. Het is dus niet alleen kommer en kwel. Tijdens het nakijken bedacht ik nog een alternatief dat helaas door geen enkele leerling werd gevonden: als er 300 mm = 30 cm regen op 2100 m² valt, en de totale hoeveelheid water op 375 m² terecht moet komen, dan is de waterkolom

$$\frac{2100}{375} \times 30 = 168 \text{ cm hoog.}$$

Een van mijn worstelingen is dat ik soms niet goed weet hoeveel ik punten ik moet geven. Het lijkt wel of ik dat steeds moeilijker ga vinden.

Voorbeeld 1:

300 mm = 0,3 m

$2100 \times 0,3 = 630 \text{ m}^3$

$630 : 25 : 15 = 1,68 \text{ m}$

Geen enkel woord ter toelichting. Eigenlijk staan er drie sommetjes en wat het voorstelt weet je niet, tenzij je de leraar bent die de som gemaakt heeft en de getallen herkent. Natuurlijk kun je bedenken dat de gedachtegang van de leerling goed is, maar is daarmee de som ook volledig goed beantwoord? Ik worstel dan tussen 1, 2 en 3 punten.

Voorbeeld 2:

Inhoud regen = $2100 \times 0,3 = 630 \text{ m}^3$

$25 \times 15 = 375 \text{ m}^2$; $630 : 375 = 1,68 \text{ m}$

het zwembad moet 1,68 m diep zijn

Er zijn meer woorden gebruikt, maar vooral de tweede regel zijn weer losse kreten. Mijn waardering is hoger dan bij voorbeeld 1, maar alle punten wil ik hier eigenlijk niet geven.

Voorbeeld 3:

300 mm regen

2100 m² perceel; 630000 mm in totaal = 630 m

Zwembad 25×15 ; dus het wordt $630 : 375 = 1,68$

Zwembad moet 1,68 m diep zijn

Ik denk dat er per ongeluk een redelijke waarde uit komt en dat is waarschijnlijk de reden waarom de leerling dit antwoord accepteert. Ik gaf 0 punten, want volgens mij begrijpt hij er niets van en doet maar wat.

Gelukkig zijn er ook leerlingen die het gewoon goed doen, maar bijna niemand schrijft het op met een begrijpelijke begeleidende tekst. En juist die begeleidende tekst helpt de leerling bij het denken en bij het leren. Kortom er is nog veel te leren.

Ab van der Roest stoeit met zijn leerlingen met de regels voor product en quotiënt van machten. Resultaten uit het verleden zorgden voor een verwarde toekomst. Maar uiteindelijk ook tot nieuwe inzichten.

Maakt u ze wel eens in de klas, vreugdedansjes? Ik niet echt en soms heb ik daar spijt van. Donderdag had ik zo'n les in 4 vwo. Het is een wiskunde A-groep en de leerlingen moeten nog erg wennen aan het feit dat ze in de bovenbouw terecht zijn gekomen. Of misschien moet ik zeggen dat ze erg moeten wennen aan het feit dat ze les van mij hebben. Ik vind het maken van sommetjes erg belangrijk, maar huiswerk leg ik uit, is iets dat vooral thuis moet gebeuren. De les is ergens anders voor. De lesstof ging over het rekenen met exponenten en de volgende regels kwamen langs:

- $a^p \times a^q = a^{p+q}$
- $a^p : a^q = a^{p-q}$
- $(a^p)^q = a^{pq}$

De regels werden besproken en verklaard. Nader toege-licht met enkele voorbeelden. Kortom het gewone werk en de leerlingen deden goed mee. Ik had het idee dat ze goed begrepen waar ze mee bezig waren. Totdat ik de opgave $2^p \times 3^q = \dots$ op het bord schreef. Hier werd flink over gesteggeld en het werd mij kwalijk genomen dat ik zei dat de som niet anders geschreven kon worden dan de opgave. Veel leerlingen, misschien allemaal wel, dachten dat er 6^{p+q} uit moest komen. Ze geloofden me niet dat dit antwoord fout was. Ik probeerde hen te overtuigen met een getallenvoorbeeld:

$$2^5 \times 3^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 = 6^3 \times 4 \neq 6^8.$$

Ze bleven volhouden dat de docent van de derde klas hen anders had verteld. Pas veel later begreep ik dat ze de opdracht verwarden met $5a \times 3b = 15ab$.

De exponenten zaten er toch minder goed in dan ik halverwege de les dacht. Daarom nog enkele opgaven bedacht: Is dit waar of nietwaar: $a^p \times b^p = (ab)^p$? Met een paar uitgeschreven voorbeelden besloten we dat het waar was. Uiteraard ook gewoon uitgeschreven met a en b ; je ziet de koppels ab ontstaan.

Daarna nog de volgende vraag gesteld: $2^a + 2^a = 2^{a+1}$, is dit waar en zo ja, is $3^a + 3^a = 3^{a+1}$ dan ook waar. Moeilijke vragen waar niet zo gemakkelijk een antwoord op kwam. Probeer eens met getallen, is dan mijn advies. Toen bleek dat de tweede uitdrukking niet waar was,

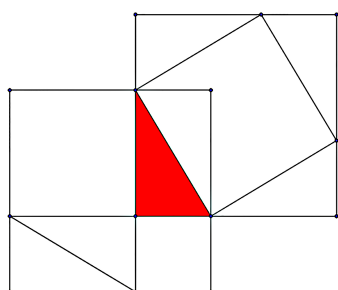
neem maar $3 + 3 \neq 9$. Dat de eerste uitdrukking wel waar was hebben we toen samen bewezen: $2^a + 2^a = 2 \times 2^a = 2^{a+1}$. Klaar denk je dan, maar niet helemaal, want meteen riep Hanna: voor 3^{a+1} heb je dus $3^a + 3^a + 3^a$ nodig. Tijd voor een vreugdedansje, maar ik deed het niet. Achteraf erg jammer...

VASTGEROEST

NOT THE DUTY, BUT THE BEAUTY

Ab van der Roest

Ab van der Roest was deze zomer op de CIEAEM conferentie (*International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching*, maar dan in het Frans). De openingszin inspireerde Ab tot een bespiegeling over de mogelijke missie van iedere wiskundedocent. Via een citaat uit 1865...



figuur 1

Not the duty, but the beauty. Dat waren woorden die gesproken werden bij de opening van een congres over wiskundendidactiek dat ik bijwoonde in de zomer van 2015. Een congres georganiseerd door CIEAEM in Aosta (Italië). Het kost een vakantieweek, maar wat krijg je daar veel voor terug. Het is goed mogelijk dat dit, naast de vakantie cursus georganiseerd door PWN, een vast onderdeel van mijn komende zomervakanties gaat worden. Terug naar de titel. Waarom schreef ik het op? Eerst natuurlijk omdat ik het wel herken. Maar ook omdat het door weinig leerlingen herkend wordt. Het is misschien wel een van de belangrijkste taken van de wiskundeleeraar om de schoonheid te laten zien. Enthousiasme als er iets moois gebeurt. Ik moest ook denken aan Multatuli. Dan denk je misschien dat het niets met wiskunde te maken heeft, maar dan vergis je je. Multatuli hield een soort dagboek bij, waarin hij allerlei waarnemingen noteerde. Deze aantekeningen werden door Multatuli *Ideeën* genoemd en genummerd. Ze betroffen allerlei waarnemingen. Nummer 529 gaat over de stelling van Pythagoras. Hij vond een fraaie bewijs, zie figuur 1.

Interessanter is echter wat Multatuli er aan toevoegde:

'Na dit bewijs gevonden te hebben, vernam ik dat er een werkje bestond, waarin dit onderwerp werd behandeld. Ik schafte my dat boekje aan en vond er myn demonstratie niet in. Ook meen ik dat geen der daarin voorkomende bewyzen zoo aanschouwelyk en helder is als 't myne. Wie beweerden mocht dat het reeds vroeger was gevonden, zou me verplichten met de opgave waar het gepubliceerd is? Professor Hofmann kende 't niet, en ook Strootman zou er

wel melding van gemaakt hebben, als 't hem bekend ware geweest. Hofmann schynt een speciale studie te hebben gemaakt zoowel van de propositie zelve, als van de literatuur over dit onderwerp. Ik hoop dat niemand vragen zal welk nut het heeft, te zoeken naar eenvoudiger bewyzen voor 'n bekende waarheid? Dit streven leidt tot helderheid van opvatting, en gewent ons aan duidelyke voorstelling. "Bien poser une question, c'est presque la résoudre." Dit geldt zoowel in menschkunde, moraal, politiek, enz. als in de eigenlyk gezegde wiskunde. De natuur kent al die onderscheidingen niet. Zy streeft -- onbewust -- met één middel naar één doel, en er is verband tusschen de helderheid van myn bewys voor de stelling van Pythagoras, en de eenvoudigheid der geloofsbelydenis die ik neerlegde in de vertelling over Lystermannetje.'

Not the duty, but the beauty is dus ook het credo van Multatuli.



figuur 2

NB Eens in de vier jaar is er geen CIEAEM conferentie, de hele internationale wiskundendidactiek wereld komt dan bij elkaar op het vierjaarlijkse grote ICME congres, dat dit jaar in Hamburg gehouden wordt. Zie www.icme13.org. En zien we daar niet een verwaaide Stelling van Pythagoras in het logo (figuur 2) staan?

NEDERLAND – DUITSLAND: ABC-FORMULE OF PQ-FORMULE

Ab van der Roest ziet een merkwaardig verschil in de manier waarop in Nederland en in Duitsland kwadratische vergelijkingen opgelost worden. En zo ontstaat er toch nog een beetje een Nederland – Duitsland deze zomer.

Bij Nederland – Duitsland denk je al snel aan een voetbalwedstrijd. Uitslag van te voren al bekend, want ‘we’ winnen zelden van Duitsland. We moeten op andere terreinen scoren. Misschien op het gebied van de wiskunde?

In Nederland zijn we helemaal vertrouwd met de *abc*-formule. Als een leerling een tweedegraads vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ moet oplossen grijpt hij, soms zonder nadenken, naar die bekende formule. Voor sommigen is het zo’n reflex, of misschien zo’n houvast, dat zelfs een vergelijking als $x^2 - 5x = 0$ ermee opgelost wordt.

Felix, een eerstejaars student uit Duitsland, studeert in Wageningen. Hij vroeg me of een tweedegraadsvergelijking ook met de *pq*-formule opgelost mocht worden. Dit was voor mij iets nieuws en er viel dus iets te leren. Hij legt me geduldig uit hoe die formule werkt. $x^2 + px + q = 0$ is de vergelijking waar de formule voor geldt.

Oplossingen zijn $x_{1,2} = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{2}p)^2 - q}$. Ziet er

moeilijker uit dan de ons bekende *abc*-formule. Een klein beetje herschrijven geeft een iets vriendelijker formule:

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q} \text{ en die formule wordt wel}$$

herkenbaar. Controle met een eenvoudige vergelijking, bijvoorbeeld $x^2 - 4x - 5 = 0$, laat zien dat de goede oplossingen gevonden worden. Het bewijs met kwadraat afsplitsen is niet moeilijk. Je kunt natuurlijk ook $a = 1$, $b = p$ en $c = q$ invullen in de *abc*-formule, er vanuit gaande dat die wel bewezen is.

Waarom wordt op een school in Duitsland de *pq*-formule geleerd en bij ons de *abc*-formule? Het bewijs, met behulp van kwadraat afsplitsen, van de *pq*-formule vind ik eenvoudiger dan het bewijs van de *abc*-formule. Maar is de toepasbaarheid dat ook? Neem bijvoorbeeld de vergelijking $2x^2 - 2x - 1 = 0$, dan is het bij ons rechtstreeks invullen. Een probleem is het ‘mooi schrijven’: $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

en de deling $\frac{2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Bij de *pq*-formule

is het invullen niet lastiger en je hoeft geen deling uit te

voeren: $x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$ en $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}$. Het

mooi schrijven is hier eenvoudiger, namelijk $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Je moet dan wel even de $(\frac{1}{2}p)^2$ in de gaten houden,

want de noemer is een kwadraat.

Ook bij een iets ingewikkelder vergelijking $7x^2 - 6x - 3 = 0$ is de *pq*-formule niet lastiger. Eerst herleiden tot

$$x^2 - \frac{6}{7}x - \frac{3}{7} = 0 \text{ en dan invullen geeft}$$

$$x_{1,2} = \frac{6}{14} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{36}{49} + \frac{12}{7}} = \frac{3}{7} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{36 + 84}{49}} =$$

$$\frac{3}{7} \pm \frac{1}{14}\sqrt{120} = \frac{3}{7} \pm \frac{1}{7}\sqrt{30}.$$

Waarom dan toch de *abc*-formule in Nederland?

Misschien omdat die formule makkelijker te programmeren is. Om benaderingen van de oplossingen te vinden, voldoet de *abc*-formule prima en is die makkelijker dan de *pq*-formule. Wanneer exacte antwoorden gevraagd worden is de *pq*-formule makkelijker. Zijn de Duitsers dan toch exacter dan de Nederlanders? Voorlopig is mijn conclusie dat we het ook hier verliezen van de Duitsers. Ik hoop dat ik iets mis en dat iemand me op een andere conclusie laat uitkomen.

VASTGEROEST

EXAMENPERIKELLEN

Ab van der Roest

De NVvW organiseert jaarlijks de cursus 'Hoe kijk je een examen na'. Ab van der Roest is een van de cursus-leiders en doet daar vooral de naam van zijn column geen eer aan...

'Het is weer klaar', verzucht ik. De examens zijn nagekeken. Elke keer weer een spannende bezigheid. Wat presteren *mijn* leerlingen. Let op het woordje 'mijn'. De leerlingen zijn dit jaar, zeker het laatste jaar een beetje van mij geworden. Daarom is het nakijken van een examen anders dan het nakijken van een andere toets. Het is erop of eronder.

Als ik weer terugkijk verbaast het me weer dat het nakijken van wiskunde geen exacte bezigheid is. De wereld om me heen wordt door de computer steeds exacter, maar de mensen nauwelijks. Als ik een wachtwoord met kleine letter invoer terwijl het een hoofdletter moet zijn, dan krijg ik geen toegang. Het moet exact kloppen. Maar als ik de gebruikte taal bij *WhatsApp* zie, dan wordt die alleen maar slordiger. Wiskunde is een exact vak, daar is iedereen het wel over eens, maar het maken en nakijken van examenopgaven is niet zo exact. Ik zal dat proberen te illustreren met een aantal opgaven uit de havo-examens. Eerst een voorbeeld uit wiskunde B, zie figuur 1.

3p 5 Lijn k en de grafiek van f hebben nog een ander punt gemeenschappelijk. Bereken in twee decimalen nauwkeurig de x -coördinaat van dit punt.

figuur 1

Duidelijke opdracht en mijn leerlingen weten wel hoe ze dat aan moeten pakken. Het correctievoorschrift is ook volledig duidelijk, zie figuur 2:

5	maximumscore 3	
	• De vergelijking $\sqrt{-3x+6} = -\frac{7}{4}x + \frac{7}{2}$ moet worden opgelost (voor $x \neq 2$)	1
	• Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden (voor $x \neq 2$)	1
	• $x \approx 1,02$	1

figuur 2

Maar bijna al mijn leerlingen beschrijven hoe de vergelijking opgelost moet worden met de GR en verdienen het punt dat bij het eerste bolletje hoort dus niet. Je

zou zelfs kunnen zeggen dat ze helemaal geen punten verdienen, want dat eerste punt is bedoeld voor leerlingen die goed beginnen en verdwalen in de algebra: kwadrateren aan beide kanten en dubbelproduct vergeten, of het kwadrateren van breuken verkeerd doen. Als een leerling helemaal fout begint, dan heeft hij geen recht op punten, ook al staat er nog wel iets goeds.

Het tweede voorbeeld komt uit wiskunde A en werd mij verteld door een collega. We herkenden in zijn voorbeeld precies hetzelfde als in het bovenstaande voorbeeld.

De opgave luidt, zie figuur 3:

3p 5 Bereken de kans dat bij de eerste 15 worpen hoogstens 2 keer 'raaf' wordt gegooid.

figuur 3

En het CV zegt, zie figuur 4:

5	maximumscore 3	
	• Het aantal keren X dat 'raaf' gegooid wordt, is binomiaal verdeeld met $n=15$ en $p=\frac{1}{6}$	1
	• Beschrijven hoe $P(X \leq 2)$ berekend kan worden	1
	• Het antwoord: 0,53 (of 53%) (of nauwkeuriger)	1

figuur 4

Ook duidelijk. Vraag en antwoord, je kunt er niets van zeggen. Maar wat schrijven de leerlingen op en hoeveel punten mag je dan geven? Bijna alle leerlingen schrijven op:

$\text{binomcdf}(15, \frac{1}{6}, 2) = 0,53$ en gaan naar de volgende opgave. Is de vraag dan correct beantwoord? Het eerste bolletje staat er niet en kan dus niet beloond worden. Beide voorbeelden hebben met *exact* te maken. Bij het nakijken zijn we opeens niet zo exact meer. We leren het de leerlingen goed aan, maar die zijn slordig met noteren. Deze slordigheid accepteren we niet bij de toetsen, maar op het examen opeens wel. 'Iedereen doet het en ik wil mijn leerlingen niet tekort doen', is het meest gehoorde motief.

Misschien dat het CvTE eens een brief uit moet laten gaan, waarin uitgelegd wordt dat wiskunde een exact vak is. Een te toetsen onderdeel van wiskunde is dan ook het *exact formuleren* en *volledig opschrijven*. Dat betekent dat als de eerste bolletjes bij deze voorbeelden niet vermeld zijn, dat de leerlingen dan geen punten krijgen, omdat ze verkeerd begonnen zijn. Ik denk dat de leerlingen dan heel snel leren exact te formuleren.

VASTGEROEST

Ab van der Roest

'DE SCHULDIGE BLIK'

Wie leert er het meest van een collegiaal lesbezoek?

Ab van der Roest heeft in ieder geval veel geleerd van het observeren van zijn collega.

Op mijn school wordt door de afdelingsleiding collegiaal lesbezoek gestimuleerd. Met mijn collega Theo-Jan sprak ik af dat we elkaars les zouden bezoeken. We kozen ervoor om in deze les een denkactiviteit centraal te stellen. Theo-Jan koos voor het bewijs van de *abc*-formule in vwo 3. In een eerdere les had hij het kwadraat afsplitsen behandeld. Dit werd in de geobserveerde les kort herhaald en vervolgens moesten de leerlingen werken aan het bewijs. In de rol van waarnemer zie je opeens dingen waar je in de rol van docent overheen kijkt. De worsteling van leerlingen met de algebra is in deze les veel groter dan ik verwachtte. Je realiseert je op dat moment dat je daar in je eigen les gewoon overheen kijkt en dat voorbeelden veel belangrijker zijn dan je zou willen. Daarnaast luistert het nauw hoe je iets verwoordt. Ik zal dit proberen te illustreren met een voorbeeld.

Kwadraat afsplitsen

De opdracht is de vergelijking $x^2 - 6x + 8 = 0$ op te lossen met kwadraat afsplitsen. De vergelijking wordt herleid tot $(x - 3)^2 - 1 = 0$ en krijgt als motivatie: de -3 is de helft van -6 en de -1 wordt duidelijk uitgelegd met $(-3)^2 = 9$ en omdat je maar 8 hebt moet je er 1 van aftrekken. Volledig duidelijk, maar in het vervolg van de les blijkt deze uitleg niet helemaal toereikend.

Wanneer het algemene geval $ax^2 + bx + c = 0$ aan de orde komt wordt dit vrij snel herleid tot $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Maar dan volgt het kwadraat afsplitsen.

Het moet worden: $(x + \frac{1}{2}\frac{b}{a})^2 - \dots$ want je moet de helft van $\frac{b}{a}$ nemen, maar wat is de helft van een onbekend getal? Theo-Jan zei toen dat je voor $\frac{b}{a}$ gewoon $\frac{1}{2}$ zet, want je vermenigvuldigt met $\frac{1}{2}$, en daar keek hij even met een schuldige blik naar mij.

Om het einde van het bewijs te halen, werd er hier over een groot probleem voor sommige leerlingen heen gewalst. De leerling accepteert dat de helft nemen hetzelfde is als vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$, maar als waarnemer had ik het vermoeden dat hij dit niet echt begreep.

In het nagesprek was Theo-Jan het met mijn observatie eens. Ik kan hem niets verwijten, want, bedacht ik mezelf, dat doe ik ook regelmatig. Om iets te bereiken, moet je soms bepaalde probleempjes even negeren, omdat anders de voortgang in gevaar komt. Later repareer je het wel weer.

Aanvullen van de vergelijking

Een volgend probleem werd het aanvullen van de vergelijking. De eerdere opgave $x^2 - 6x + 8 = 0$ werd uitgewerkt als $(x - 3)^2 - 1 = 0$ maar didactisch was de uitwerking $(x - 3)^2 - 9 + 8 = 0$ beter geweest. Iets meer schrijfwerk, maar de -1 wordt duidelijker gemotiveerd. Je kunt ook kiezen voor de aanpak $x^2 - 6x = -8$ en dan van het lid voor het $=$ - teken het kwadraat af te splitsen. Dat is voor menig leerling misschien een makkelijkere methode. Je hoeft je niet druk te maken wat erbij of af moet, want je trekt het kwadraat er altijd vanaf. In je rol als docent moet je snel reageren als er iets niet helemaal duidelijk is. De leerling geeft aan dat het niet duidelijk is en je moet ook met die leerling verder naar een beoogd resultaat. In de rol van observant heb je veel tijd om over varianten na te denken. Een voorbeeld van zo'n variant is:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$$

Neem nu $2p = \frac{b}{a}$ en $q = \frac{-c}{a}$; de vergelijking wordt dan $x^2 + 2px = q$.

$$(x + p)^2 - p^2 = q$$

$$(x + p)^2 = \frac{p^2 + q}{1}$$

$$x = -p \pm \sqrt{p^2 + q}$$

Substitutie geeft:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} =$$

$$-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \text{ Het kwadraat}$$

afsplitsen wordt meer herkenbaar. Het substitueren geeft misschien andere moeilijkheden en dat de helft van $\frac{b}{a}$ gelijk is aan $\frac{b}{2a}$ blijft hier natuurlijk ook een mogelijk struikelblok.

Helft van b : a

Ik kom nog even terug op de helft van $\frac{b}{a}$. De helft nemen van $\frac{b}{a}$ betekent een $\frac{1}{2}$ ervoor zetten omdat je met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigt, zei de docent. Door deze opmerking dacht ik aan een bepaalde vorm van inconsequent handelen van mezelf.

Een vergelijking als $3x = 12$ herleiden tot $x = 4$ motiveer ik met *beide kanten delen door 3*. De vergelijking $\frac{1}{3}x = 4$ herleid ik tot $x = 12$ met de motivatie *beide kanten vermenigvuldigen met 3*. Als ik nu eens bij de eerste vergelijking *delen door 3*, of *vermenigvuldigen met $\frac{1}{3}$* zou gebruiken en bij de tweede consequent zou zeggen dat je *vermenigvuldigt met 3* of *deelt door $\frac{1}{3}$* , dan bereik ik misschien wel dat voor de leerlingen delen en vermenigvuldigen echt gelijkwaardig worden. Als je dus moet delen door 2 kun je ook vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$. Dit kan voorkomen dat ik een schuldige blik naar mijn collega werp, als hij bij mij observeert.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal. Dit schooljaar verblijft hij in China en zal hij ons van daaruit gaan berichten.
E-mailadres: rst@ichthuscollege.nl

LES VOORBEREIDEN

Columnist Ab van der Roest verblijft een jaar in China. Ook daar heeft hij mooie observaties van *wiskunde als menselijke activiteit*. Over de taal bijvoorbeeld: waarin vertalen meer hertalen blijkt te zijn.

結皮

Het voorbereiden van mijn lessen is er jaren bij ingeschoten. Druk, druk, druk, en daarom tien minuten voor de les even kijken waar het over moest gaan. De lessen waren niet slecht, denk ik, maar zeker niet goed. Les voorbereiden is vanzelfsprekend belangrijk en het smartbord en een jonge collega zorgden ervoor dat ik mijn lessen weer ging voorbereiden. De jonge collega deed vwo-4 wiskunde A voor de eerste keer en wekelijks namen we met elkaar de stof voor de volgende week door. Ik mocht mijn ervaring doorgeven, maar zij zorgde voor de vernieuwende ideeën. De kwaliteit van de les werd hier beter door, alhoewel de leerlingen dit niet altijd herkenden. Het smartbord, eigenlijk een collega die heel veel doet met het smartbord, gaven me een tweede impuls. De opzet van de les alvast op schijf zetten, zodat er voor de leerlingen een heldere lijn ontstond. Voorbeelden soms al deels gemaakt en dan alleen maar afmaken.

Filmpje alvast klaarzetten en een constructie met behulp van GeoGebra stap voor stap laten zien. Het lesgeven werd leuker, ondanks het feit dat het veel meer tijd kostte. Ik hoop dat de resultaten op termijn ook beter zullen worden.

Nu moet ik mijn les om een andere reden weer goed voorbereiden. Het enige bord dat ik heb is een whiteboard en wat stiften en jonge collega's heb ik hier niet. Er is een andere oorzaak. Hier in China werk ik met Amerikaanse boeken. En dat is een grote uitdaging. De wiskunde is niet anders, maar de notatie soms wel. In Nederland geven we bijvoorbeeld een lijnstuk aan met twee letters als AB , maar nu moet ik $\overline{AB}$ schrijven. Niet zo schokkend.

Wat belangrijk anders is, is dat de methode veel aandacht geeft aan definities. Daardoor wordt de wiskunde formeler. Als voorbeeld de tabel onderaan de pagina. Voor mijn leerlingen in Nederland vanzelfsprekende eigenschappen, maar geen van mijn leerlingen zal waarschijnlijk weten wat de naam van de eigenschap is. Ik noem de naam wel eens, maar ik laat het de leerlingen nooit leren. Is dat nutteloze

kennis, of moet ik me daar eens op bezinnen? Ik kan me voorstellen dat het leren van de namen van de eigenschappen helpt bij het onthouden van de eigenschappen. Kortom, niet alleen toepassen, maar ook het theoretisch kader. Een aparte paragraaf aan het einde van het hoofdstuk is *vocabulary*. Hier wordt vaak een schriftelijke overhoring (een quiz) over gegeven.

Een laatste voorbeeld waaruit blijkt dat woorden voor deze methode belangrijk zijn, zijn opgaven die aangegeven worden met *writing in math*. In het begin van het hoofdstuk wordt een voorbeeld gegeven dat gaat over verdubbeling van kortingscoupons. Na behandeling van de tabel en een aantal oefenopgaven volgt een schrijfopdracht: 'Hoe kun je de distributieve eigenschap gebruiken bij het berekenen van kortingen? Je antwoord bevat een voorbeeld van kortingscoupons in een supermarkt, en een kledingwinkel waar alle kleding hetzelfde kortingspercentage heeft.' Hier dus geen rechtstreeks rekenvoorbeeld, maar een toepassing uit de praktijk die beschreven moet worden. Ik denk dat dit goede opgaven zijn om de wiskunde dicht bij de leerling te krijgen. Het is niet alleen iets van de schoolboeken, maar van de dagelijkse praktijk. Bij het voorbereiden van de eerste lessen betrap ik mezelf erop dat ik niet zoveel met woorden doe. Hierover nadenkend, vind ik praten en schrijven met de juiste terminologie wel belangrijk. Misschien dat de leerling dan beter begrijpt wat hij leert en de wiskunde een klein beetje meer wiskunde gaat worden in plaats van sommetjes maken. Ook in China is veel te leren voor wiskundeleraren.

eigenschappen van de reële getallen

voor alle reële getallen a , b en c geldt:

eigenschap	optellen	vermenigvuldiging
commutatief	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
associatief	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
identiteit	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
inverse	$a + (-a) = (-a) + a = 0$	Als $a \neq 0$ dan $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$
distributief	$a(b + c) = ab + ac$ en $(b + c)a = ba + ca$	

FUN-HOEKEN

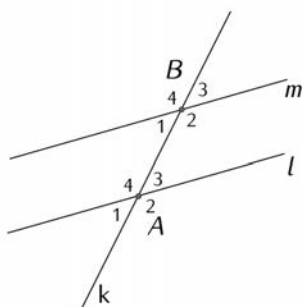
Columnist Ab van der Roest verblijft een jaar in China. Ook daar heeft hij mooie observaties van wiskunde als menselijke activiteit. Deze keer over FUN-hoeken. Wat dat zijn? Over een paar minuten weet u het en vergeet u het nooit meer.

結皮

MSG (Modular Study Group) is een instituut dat ouders helpt bij *homeschooling*. Het is geen reguliere school en kan ook geen diploma's verstrekken. Leerlingen krijgen ook maar een select aantal vakken aangeboden: wiskunde, *science* en Engels. Dit jaar mag ik hier wiskunde geven. We gebruiken een Amerikaanse methode (*Glencoe Mathematics*) die echt anders van opzet is dan de methodes die ik gewend ben in Nederland. Daarnaast komen de leerlingen uit diverse landen. Velen hebben een Amerikaanse achtergrond, maar anderen een Nederlandse of een Koreaanse. Vandaag was er bij de *Geometry*-les een nieuwe leerling uit Zuid-Afrika. Er zijn nu vier leerlingen die *Geometry* volgen, een uit Nederland, een uit Amerika, een uit Singapore en een dus uit Zuid-Afrika. De voertaal is Engels. Dit is niet altijd even makkelijk voor mij, maar in een overmoedige bui zei ik wel eens: 'Het is wiskunde en wiskunde is internationaal.' Maar de taal is toch wel erg belangrijk.

Z- en F-hoeken

We behandelden deze week het hoofdstuk 'Parallel and perpendicular lines'. En je voelt wel aan dat dan ook de overstaande hoeken, de Z-hoeken en de F-hoeken aan de orde komen. Het begrip Z-hoeken en F-hoeken is in de onderbouw volledig ingeburgerd en ik denk dat elke leraar deze termen gebruikt. Ik verbaas me dan ook dat dit op het examen niet is toegestaan. Deze begrippen komen niet voor in de officiële lijst van toegestane termen en de leerling moet congruentie gebruiken. De naamgeving is in deze methode totaal anders:



corresponding angles zijn bijvoorbeeld $\angle A_3$ en $\angle B_3$
alternate interior angles zijn bijvoorbeeld $\angle A_3$ en $\angle B_1$
alternate exterior angles zijn bijvoorbeeld $\angle A_1$ en $\angle B_3$
consecutive interior angles zijn bijvoorbeeld $\angle A_3$ en $\angle B_2$
vertical angles zijn bijvoorbeeld $\angle A_1$ en $\angle A_3$

Voor deze begrippen zijn geen evenwijdige lijnen nodig. Als die er wel zijn, dan volgt er eerst een postulaat, het *corresponding angles postulate*: Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn (een *transversal*) dan zijn elk paar *corresponding angles* congruent, en daarmee ook even groot. Opgemerkt moet worden dat de grootte van een hoek wordt aangegeven met $m\angle B_3$.

Stellingen

En dan volgt een drietal stellingen:

Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dan

- is elk paar *alternate interior angles* congruent
- is elk paar *consecutive interior angles* supplementair
- is elk paar *alternate exterior angles* congruent.

De bewijzen zijn niet moeilijk en nadat ik die had behandeld, vertelde ik de studenten dat we in Nederland deze begrippen niet gebruiken. We noemen het Z-hoeken en F-hoeken en in een tekening maakte ik duidelijk waarom. Ze vonden dat wel aardig en voelden zich achtergesteld bij de Nederlandse leerlingen, omdat die deze moeilijke woorden niet hoeven te leren.

Katherine uit Zuid-Afrika kwam met een nog andere reactie. Ze keek eens goed naar de schetsjes van mijn Z- en F-hoeken en vertelde dat ze in Zuid-Afrika deze woorden ook niet gebruikten. Daar hadden ze een veel mooier woord voor deze hoeken: FUN.

Wiskunde is FUN is uit mijn hart gegrepen en daarom, neem ik me voor, praat ik nooit meer over F-hoeken en Z-hoeken, maar over FUN-hoeken. Misschien dat dit ooit in de officiële terminologie opgenomen kan worden.



VASTGEROEST

EEN CHINESE OPGAVE

Ab van der Roest

Columnist Ab van der Roest verblijft een jaar in China. Ook daar heeft hij mooie observaties van wiskunde als menselijke activiteit. Deze keer werd Ab gefascineerd door een opgave in een Chinees wiskundeboek. En wiskunde mag dan wel een universele taal zijn, soms is het toch handig om de tekst bij de formules te kunnen lezen.

結皮

In een gesprek met een Chinese vrouw bleek dat ze lerares op een school in Kunming was. Brutaal vroeg ik haar of ik een paar wiskundelessen mocht bijwonen op haar school. Dezelfde dag kreeg ik een berichtje dat ik van harte welkom was. Ik kon vier verschillende lessen van vier leraren bekijken.

Bij het bezoek aan die school in Kunming, kreeg ik van de docent een lesboek mee. Het valt tegen om te begrijpen welke wiskunde er wordt behandeld, omdat ik geen Chinees kan lezen. Ik had verwacht dat het makkelijker zou zijn, maar de lay-out is heel anders dan we in Nederland gewend zijn. Voordeel hiervan is dat je zelf de sommen kan bedenken.

Ik kwam deze opgave tegen:

10. 判断下列各式是否成立:

$$\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}; \quad \sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}; \quad \sqrt{4\frac{4}{15}} = 4\sqrt{\frac{4}{15}}.$$

类比上述式子, 再写出几个同类型的式子. 你能看出其中的规律吗? 用字母表示这一规律, 并给出证明.

Mijn eerste reactie: 'Dit kan niet waar zijn!' Maar het staat in het boek en daarom maar eens proberen:

$$\sqrt{2\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \sqrt{4 \times \frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ook de andere beweringen zijn goed. Maar welke vraag staat er nu bij? Misschien deze: Laat zien dat je altijd het getal voor de breuk buiten de wortel kan zetten. Of: Je kunt hier een regel ontdekken. Formuleer de regelmaat en geldt die altijd? Ik denk dat ik het op deze houd: Zoals je ziet kun je de 'hele' voor het wortelteken zetten. Als dit de eerste drie elementen van een rij zijn, geef dan het vierde en het vijfde element. Geef een voorbeeld waarmee je laat zien dat je niet altijd de 'hele' voor het wortelteken kan zetten. (Makkelijk voorbeeld is $\sqrt{1\frac{1}{4}} = 1 \times \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.)

Er zijn oneindig veel voorbeelden te bedenken. Laat dit zien.

Dit laatste kan dan op de volgende manier:

$$\sqrt{n\frac{n}{p}} = \sqrt{\frac{np+n}{p}}. \text{ En de regel is: } \sqrt{n\frac{n}{p}} = n\sqrt{\frac{n}{p}} = \sqrt{\frac{n^3}{p}}.$$

Voor een geldige uitdrukking hebben we dus nodig dat $n^3 = np + n$ of $p = n^2 - 1$. Dit gaat natuurlijk fout als $n = 1$, maar voor gehele $n > 1$ is er altijd zo'n p te vinden.

Volgende week aan mijn lerares Chinees vragen wat de opgave nu was.

EEN RAADSEL

Columnist Ab van der Roest verbleef een jaar in China. Ook daar had hij mooie observaties van wiskunde als menselijke activiteit. Inmiddels is Ab weer terug, maar de rubriek doet zijn naam nog even eer aan. Deze keer wordt Ab gefascineerd door een leerling die van raadsels houdt.

結皮

Zijn raadsels gelijk te stellen aan wiskunde? Die vraag stelde ik mezelf toen Lucas me een raadsel wilde voorleggen. De oorzaak van de vraag was de vader van Lucas, want hij reageerde met de woorden: 'Pas op hij is een wiskundeleraar.' Een goed raadsel heeft zeker wiskundige kenmerken. Je moet logisch nadenken en er moet een eenduidig antwoord zijn.

Lucas is een jongen van tien jaar die ik in China ontmoette. Hij volgt thuisonderwijs en heeft grote belangstelling voor raadsels. Die belangstelling wordt misschien wel mede veroorzaakt door het thuisonderwijs, omdat er ruimte is in het lesprogramma en om zelf na te denken over wat hij allemaal wil leren.

Het raadsel een beetje aangepast in mijn woorden:

Vier mensen moeten in het donker een zeer woeste rivier oversteken. Er ligt een bouwvallige brug. Gelukkig hebben ze een zaklantaarn om de slechtste plekken te zien. De brug is zo slecht, dat er maar twee mensen tegelijk op de brug kunnen en de oversteektijd is beperkt. Helaas is er maar één zaklantaarn. Het tempo waarin de mensen kunnen bewegen verschilt nogal. Persoon *A* doet er 10 minuten over, persoon *B* doet er 5 minuten over, persoon *C* doet er 2 minuten over en persoon *D* heeft slechts 1 minuut nodig. Ze krijgen 17 minuten de tijd om over de brug te komen, maar pas op, de zaklantaarn moet altijd bij een persoon op de brug zijn en het tweetal dat op de brug is, moet bij elkaar blijven.

Ik wist het antwoord niet meteen. Eerlijk gezegd had ik een grote aanwijzing nodig om het antwoord te geven. Als je het raadsel nog nooit hebt gezien, moet je er nu maar even over nadenken. Aan het eind zal ik het antwoord geven.

Dit raadsel is zeker wiskundig. Ik voeg het toe aan mijn repertoire. Ik zal het dan ook het raadsel van Lucas noemen. Prima voor een les over nadenken. Ik dacht in een bepaalde richting, en kon die niet loslaten. Ik had opnieuw moeten beginnen, maar het lukte me niet. Toen de vader me een tip gaf, was ik meteen op de goede weg. Terugdenkend aan dit voorval realiseerde ik me dat ik bijgeschoold werd in probleem oplossen. (Misschien

kan ik het wel opnemen in het lerarenregister.) Als je vastloopt, probeer dan een andere route. Lukt het nog steeds niet, ga dan elkaar helpen door over het probleem te praten.

Veel collega's fleuren de lessen al op met vraagstukken en raadsels. Als inleiding op een onderwerp of soms zo maar om de tijd te vullen. Zeker geen verloren tijd, omdat leerlingen nieuwsgierig gemaakt worden en actief aan het denken worden gezet.

Oplossing

Eerst gaan *C* en *D* samen naar de overkant en gaat bijvoorbeeld *C* terug. Dit kost 4 minuten. *D* is dan overgestoken en *A*, *B* en *C* zijn nog aan de eerste zijde. Vervolgens gaan *A* en *B* samen naar de overkant. Dit kost 10 minuten en in 14 minuten zijn *A*, *B* en *D* overgestoken. Nu gaat *D* terug om *C* op te halen wat 3 minuten tijd kost. In totaal gebruiken ze dus precies 17 minuten.

VERWARRING ROND EXPONENTIËLE GROEI

Columnist Ab van der Roest verbleef een jaar in China. Inmiddels is Ab al weer een tijd terug in Nederland, maar zijn mooie observaties van wiskunde als menselijke activiteit, ijlen nog een tijdje na Ab raakte gefascineerd door een opgave in een Amerikaans lesboek. En nog meer door de mogelijke uitkomsten ...

結皮

De Amerikaanse lesboeken zorgen af en toe voor verwarring bij mij. Deze week zijn exponentiële en logaritmische functies aan de beurt. De notatie van de logaritme is iets anders, de basis staat niet als superscript voor log, maar als een subscript achter log: $\log_b(x)$ in plaats van $^b\log(x)$, maar dat is de verwarring niet.

Een multiplechoiceopgave die ik bespreek gaat over exponentiële groei en luidt als volgt:

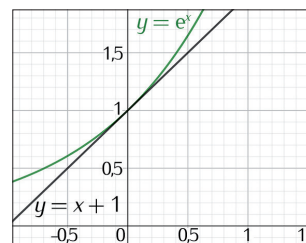
In het jaar 2000 bestond de vogelpopulatie in een bepaald gebied uit 10.000 vogels. Het aantal vogels neemt exponentieel toe met een groeifactor van 9% per jaar. Voorspel de grootte van de populatie in 2005.

Een eenvoudige opgave, denk je dan: bereken $10.000 \times 1,09^5 = 15.386$. Maar dat antwoord staat er niet bij. Er is wel de keuzemogelijkheid 15.683 en dan denk ik aan een drukfout.

Nadere bestudering van de theorie geeft deze mogelijke uitwerking: $10.000 \cdot e^{0,09 \cdot 5}$ en dat antwoord zat wél bij de keuzemogelijkheden.

Wie maakt de denkfout? De schrijver van het boek of ik ... In een gesprekje met collega Kellie bleek dat zij vond dat ik de fout maakte. Omdat een discreet gegeven continu gemaakt wordt, moet je werken met groeifactor $e^{0,09}$. Ik begreep haar opmerking niet meteen, want de functies $y = 10.000 \cdot 1,09^t$ en $y = 10.000 \cdot e^{0,09t}$ zijn toch beide continu, maar ze bedoelde dat, wanneer je een jaarlijks toenamepercentage hebt en je wilt tussentijds een waarde berekenen, je met de tweede functie moet werken. Het heeft te maken met samengestelde interest. Ik was niet tevreden met haar antwoord, en een dag later, onder het hardlopen, speelde haar opmerking door mijn hoofd. Vreemd, een jaarlijkse toename van 9%, continu maken en dan opeens in vijf jaar tijd 297 extra vogels. En, hoe komt de schrijver van het boek trouwens bij $e^{0,09}$? Al lopend kon ik dat wel bedenken. De eerste orde

benadering van e^x rond $x = 0$ is $e^x = 1 + x$ en dat past natuurlijk prima bij 'een toename met $p\%$ is vermenigvuldigen met $1 + \frac{p}{100}$ '. Maar zo'n eerste orde benadering is maar goed op een klein interval zoals te zien is in figuur 1.



figuur 1

Een aantal schatten voor een tijdseenheid kleiner dan één is goed te doen met de functie $e^{\frac{p}{100}}$ als p niet te groot is. Als $t > 1$, of als p groot is, dan wordt het oppassen.

Ik sprak hierover met Walt. Hij is Amerikaan en vertelde me dat dit gewoon is in Amerika. Samengestelde interest wordt altijd berekend met de formule

$$A = B \times e^{\frac{p}{100}}$$
waarbij B het beginbedrag is, p het jaarlijks rentepercentage en A het bedrag dat je krijgt.

In Nederland krijgen we, als we 1000 euro op de bank zetten, en het rentepercentage is 2%, na een jaar 1020 euro. Maar in Amerika geven ze je 1020,20 euro. Het verschil is niet zo groot dat je daarvoor verhuist naar Amerika.

Ik vind het een mooie toepassing van raaklijn bij exponentiële groei. Het begrip Taylorreeks kun je hierbij noemen, maar is niet echt nodig om te behandelen.

Het is me helder geworden. Mijn verwarring is weg, maar je denkt dan wel, net als Obelix soms over een andere groep mensen zegt: 'Rare jongens die Amerikanen'.

'RARE JONGENS DIE AMERIKANEN.'

'WISKUNDE OP STRAAT'

Ab van der Roest kwam wiskunde tegen tijdens een wandeling, maar leed in eerste instantie aan gezichtsbedrog...

Lang geleden zei Wim Sonneveld in een conference: 'De humor ligt op straat mijnheer Sonneberg, de humor ligt op straat!' Hier moet ik soms aan denken als ik wiskunde op straat tegenkom. Kom je wiskunde dan op straat tegen? Ja, ik wel.

Laatst liep ik samen met mijn vrouw het laatste stukje van het Trekvogelpad, een langeafstandswandeling van Bergen aan Zee naar Usselo bij Enschede. Meer dan 400 km wandelen, maar niet achter elkaar. Bij Eibergen kwamen we langs een grenssteen, vlakbij de Mllumse Molen. Mijn vrouw is van de foto's en ik vroeg haar een foto te maken van de steen. Misschien kan ik hem nog eens gebruiken. Ze vroeg me wat ik er dan mee zou gaan doen. Het kan een leuk sommetje worden. Drie cirkels in een vierkant en dan de leerlingen uit laten rekenen hoeveel procent de cirkels (met binnengebied) innemen van het vierkant.



figuur 1 Grenssteen met het wapen van de Heer van Borculo

Onder het wandelen bleef ik denken aan dat vierkant met zijn cirkels. Op een paneel dat er bij stond, werd uitgelegd dat het wapen van de Heer van Borculo was afgebeeld. Maar niet die Heer hield mij bezig, maar het vierkant. Het klopt natuurlijk niet, want die drie cirkels passen helemaal niet op deze manier in een vierkant. Thuis heb ik de foto rechtgetrokken en duidelijk is te zien dat het niet om een vierkant gaat, maar om een rechthoek. Het perspectief bedriegt hier.



figuur 2 Zelfde foto als figuur 1, maar dan rechtgetrokken

Als de lengte $4r$ is, dan is de breedte $(2 + \sqrt{3})r \approx 3,732r$. De breedte is dus maar 6,7% minder dan de lengte en dat zie je vanuit een bepaald standpunt dus niet. Mooi gesprek met leerlingen denk ik dan. De twee opstaande zijden moeten natuurlijk netjes verticaal zijn, anders vindt er een vertekening plaats. De som die ik in gedachten had, wordt dan ook opeens veel moeilijker. Hij kan natuurlijk nog steeds, maar de leerling zal nu eerst moeten bedenken hoe de hoogte van de rechthoek uitgerekend moet worden. Een havo 4 leerling moet dat wel kunnen. Ik ben wel benieuwd hoeveel leerlingen, als ze de eerste foto krijgen dezelfde fout maken als ik maakte en van een vierkant uitgaan. Overigens kan in elke klas de vraag gesteld worden: 'Wat zie je op deze foto?' Ik neem aan dat antwoorden dan zullen variëren van een steen, tot een wapen en, omdat de wiskundeleraar de vraag stelt, drie cirkels en Elke leerling zal dan kunnen inzien dat het zeker niet om een vierkant gaat. Zet ze maar aan het tekenen en ze zullen het ontdekken.

Zomaar een stukje wiskunde onder een wandeling en met Wim Sonneveld zeg ik: 'De wiskunde ligt op straat, maar je moet het wel willen zien.'

Onderdeel van de vakantie van veel leraren is achterstallige klussen wegwerken. Dit vakantiewerk levert soms mooie inzichten op die alles met de wiskundeles te maken hebben. Ik zal dit illustreren met het werk van Arnoud en Steef. Omdat ik een nieuwe keuken had gekocht, moesten er enkele aanpassingen worden gedaan. Dat deed Arnoud voor me. Tot mijn grote verbazing was zijn aanpak totaal anders dan verwacht. Arnoud begon eerst met kratjes, ladekastjes en dergelijke neer te zetten. Waarom? Nou verklaarde Arnoud, dan weet ik precies waar mijn gereedschap staat en grijp ik nooit mis. Het kost even tijd, maar die tijd win ik snel terug. Deze manier van werken projecteer ik sindsdien op het oplossen van wiskundige problemen. Wiskunde bestaat voor een deel uit gereedschappen die nodig zijn om problemen mee aan te pakken. Gereedschap als oplossen van vergelijkingen, differentiëren, integreren, meetkundige stellingen en ga zo maar door. Ik vertel mijn leerlingen dat dit vaardigheden zijn, die op zichzelf belangrijk zijn, maar veel belangrijker als gereedschap om een groter probleem op te lossen. Als je weet welk gereedschap je hebt, en waar het opgeslagen is, dan lukt het oplossen van die grotere problemen waarschijnlijk wel. Ik vertel er dan bij dat de leerlingen mijn gereedschapskist uit mijn schuur niet als voorbeeld moeten nemen. Daarin ligt alles kris kras door elkaar en ik verlies veel tijd met zoeken welk gereedschap

ik nodig heb en waar het ligt. Voor veel leerlingen is dit een eyeopener die ze zelf niet bedacht zouden hebben, maar waar ze de relevantie van inzien. Geleerd van een klusjesman en toegepast door een wiskundeleraar. Kan het mooier?

Steef kwam later aan bod. Hij betegelde de badkamer bij mijn dochter. De regel van de bouwmarkt is: oppervlakte van de muur en dan 10% extra. Deze regel werkt echter niet altijd. Ik laat je een voorbeeld zien: de tegel heeft als afmetingen $30\text{ cm} \times 60\text{ cm}$. In dit voorbeeld ga ik uit van een muur van $1,62\text{ m}$ bij $2,20\text{ m}$. Oppervlakte is dan $3,56\text{ m}^2$ en 10% erbij geeft $3,92\text{ m}^2$. De oppervlakte van één tegel is $0,3 \times 0,6 = 0,18\text{ m}^2$. Dat betekent dat je 22 tegels nodig hebt. Onzin zegt Steef. Elke tegelzetter ziet dat je er 24 nodig hebt; drie naast elkaar en acht boven elkaar. Voor een tegelzetter is het vanzelfsprekend dat je symmetrisch te werk gaat en dat betekent dat je wel 18 van de 24 tegels moet snijden.

Thuis het verhaal proberen te reproduceren en het klopt. Natuurlijk klopt het, want Steef is de vakman. Lijkt me een goede denkopdracht voor jezelf en voor de leerlingen van vmbo. Ik denk dat elke klas het aan kan.

KERST IN DE WISKUNDELES

De laatste les voor de kerstvakantie. Voor iedereen die er tegenop ziet: die les zou zomaar eens meer indruk kunnen maken dan je denkt.

Een didactisch kerstverhaal van Ab van der Roest.

De laatste lessen voor een vakantie vind ik altijd de moeilijkste lessen die ik moet geven. Met het woordje *moet* wil ik benadrukken dat het echt anders is dan gewoon. Bijna alle lessen geef ik met vreugde, maar die lessen! Het gezeur van de leerlingen om een film te kijken, of iets 'leuks' te doen. Moet je nagaan. Het hele jaar doen we leuke wiskunde en dan de les voor de vakantie iets leuks doen!

Ik werk op een christelijke school en de dag voor de kerstvakantie worden er kerstvieringen georganiseerd. In het verleden mochten leerlingen na de viering naar huis, maar sinds onderwijstijd een erg belangrijk begrip is geworden, worden er na een viering gewoon weer lessen gegeven. Ik moest dus aan de bak in mijn vwo 4 klas wiskunde A. En dan iets leuks doen met leerlingen die alleen maar geïnteresseerd zijn in de vakantie. Mijn definitie van iets leuks doen is: verrassende wiskunde buiten het boek om. Dan moet je iets zoeken.

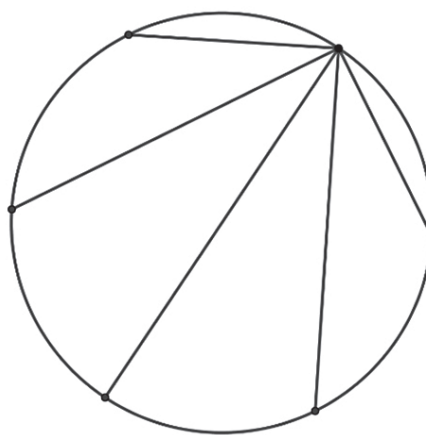


figuur 1 Davidster en ster van Salomo

In Israël zag ik bij een ruïne twee verrassende afbeeldingen, zie figuur 1. De linker is natuurlijk heel bekend: de Davidster of zoals we in de wiskunde zeggen de hexagoon. Maar er vlak naast lag een steen met een pentagram. De gids vertelde me dat het de ster van Salomo wordt genoemd.

Bij kerst denken we aan de geboorte van Jezus, die ook wel de blinkende morgenster wordt genoemd. Daarnaast kennen we waarschijnlijk allemaal het verhaal van de ster van Bethlehem. Dit was de reden waarom ik in mijn 'leuke' les iets over regelmatige sterren wilde doen. Bij de Davidster tellen we zes lijnstukken, voor het gemak noem ik ze lijnen, en bij de ster van Salomo vijf. Dat is vanzelfsprekend als je bedenkt dat het een zeshoek en een vijfhoek is. Het aantal hoekpunten is respectievelijk zes en vijf.

We gaan dit modelleren door de punten op een cirkel te leggen en dan het maximale aantal lijnen te tellen, zie figuur 2.



figuur 2

Dit aantal kunnen we tellen door de lijnen uit de punten gewoon te tellen: $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$, of door iets slimmer te kiezen: zes punten met elk vijf lijnen geeft 30 lijnen. Maar omdat je ze dubbel telt moet je door twee delen; dus je krijgt dan $\frac{1}{2} \times 30 = 15$ lijnen. Je kunt ook zeggen dat je voor elke lijn twee eindpunten nodig hebt en dat geeft dat je er steeds twee van de zes moet kiezen

en dat kan op $\binom{6}{2} = 15$ manieren.

Dan maken we de stap naar n punten op de cirkel. Het aantal lijnen wordt dan $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$.

Uiteraard ook de somrij $\sum_{k=1}^n k$, en uiteraard

wordt het verhaal van de jonge Gauss dan ook verteld. Een les waar de leerlingen behoorlijk actief kunnen zijn, maar waar ook niet te veel van hen wordt gevraagd. De presentatie van de stof deed ik via het bord en ze mochten meeschrijven als ze wilden, maar moesten wel meedenken. De les verliep niet vlekkeloos en ik hield er geen kerstgevoel aan over.

Maar, toen ik twee jaar later wiskunde A moest geven aan 6 vwo, deed ik een belangrijke ontdekking. Een som uit het boek leek wel een beetje op het verhaal dat ik had gehouden op de laatste dag voor de vakantie. Dat wist ik niet, maar dat wist wel een jongen uit de groep, Guido, die in de vierde klas niet bepaald de makkelijkste leerling was. Hij zei: 'Mijnheer dat is precies hetzelfde als u toen deed met de sterren. Ik vond dat zo'n mooie les, kunnen we dat nog een keer doen?'

Een toetsvraag die niet oplevert wat je er van verwacht, het overkomt ons allemaal vast wel eens. Zo ook Ab van der Roest...

Herken je dit? Je maakt een toets, maar je wilt niet alleen maar letterlijk terugvragen. Je stelt dus vragen waarbij je van tevoren denkt: 'Hier ga ik commentaar op krijgen.' Maar nadat de klas de toets gemaakt heeft blijft het commentaar achterwege en bij het nakijken wordt zo'n vraag door een groot deel van de groep goed gemaakt. Je vraagt je dan af, of de vraag toch goed was, of toch te veel herkenbaar. Maar, gelukkig heeft niemand schade geleden.

Het tegenovergestelde komt ook veel voor. Je stelt een vraag op de toets waarvan je verwacht dat leerlingen die meteen en zonder veel nadenken kunnen beantwoorden. Je hebt de stof behandeld, de leerlingen hebben ermee geoefend en je beschouwt de vraag als bijna uit de categorie reproduceren, maar zeker als toepassen in een bekende situatie. Maar bij het corrigeren van de toets blijken de meeste leerlingen allerlei wegen in te slaan die jij niet van tevoren bedacht hebt. Niet zo erg, maar bijna geen enkele leerling komt tot het goede antwoord en na deze vraag worden de resterende vragen onder grote tijdsdruk gemaakt. Eigenlijk is de toets een beetje verknoeid door die ene vraag en je vraagt je vertwijfeld af of je ooit zult leren om de toetsvragen goed in te schatten.

Na bijna 40 jaar ervaring kan ik nog steeds niet goed inschatten of een toets zulke vragen bevat. Bij de laatste toetsweek was er weer zo'n toets, die me de verzuchting bezorgde: 'Ik leer het nooit!'

vwo-5 wiskunde B. In de methode *Getal & Ruimte* wordt behandeld dat de lijnen $l: ax + by = c$ en $k: px + qy = r$ samenvallen als $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$.

Ik probeer de leerlingen bij dit stukje stof op het spoor te krijgen dat dit niets nieuws is, maar dat we dat al lang weten. Want uitgaande van 'evenwijdige lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt' is meteen in te zien dat $-\frac{a}{b} = -\frac{p}{q}$ en dat is eenvoudig te herleiden tot $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$.

Door deze evenredigheid en 'het gelijk zijn' van de vergelijkingen moet die evenredigheid ook gelden voor c en r . Mijn advies aan de leerlingen is dan om deze regel niet apart te gaan leren (denk aan onze beperkte geheugen-capaciteit), maar om te gebruiken wat al lang in ons

systeem aanwezig is.

Dan de toetsvraag die letterlijk uit de toetsbundel komt:

De lijn k snijdt de assen in de punten $A(p+2, 0)$ en $B(0, 2p-2)$.

De lijn l snijdt de assen in de punten $C(2p, 0)$ en $D(0, q+1)$.

Bereken algebraïsch voor welke p en q de lijnen samenvallen.

Juist omdat ik de leerlingen geadviseerd heb niet meteen naar de in het boek gehanteerde formule te grijpen, maar eerst eens goed na te denken en te vertrouwen op veel eerder opgedane kennis verwachtte ik het eenvoudige antwoord: $p+2 = 2p$ en $2p-2 = q+1$ want als lijnen samenvallen hebben ze dezelfde snijpunten met de x -as en y -as.

Helaas! Alle leerlingen schreven $k: \frac{x}{p+2} + \frac{y}{2p-2} = 1$ en $l: \frac{x}{2p} + \frac{y}{q+1} = 1$ op.

Deze vergelijkingen werden herleid tot

$k: (2p-2)x + (p+2)y = 2p^2 + 2p - 4$ en

$l: (q+1)x + 2py = 2pq + 2p$ waaruit de volgende evenredigheid verscheen:

$$\frac{2p-2}{q+1} = \frac{p+2}{2p} = \frac{2p^2+2p-4}{2pq+2p}$$

En de oplossing van deze evenredigheid was na veel dwalen voor bijna niemand te doen. Die lastige p en q zaten elkaar in de weg. De makkelijkste conclusie zou zijn dat die leerlingen zo dom zijn, maar dat is te kort door de bocht. Daarom mijn verzuchting dat ik het nooit leer. Maar er kwam toch nog een staartje aan dit verhaal. Bij de bespreking van de toets knalde opeens door de klas: 'Het is zo simpel, wat ben ik stom.' Ik was het niet die dat riep.

EEN DOCENT DENKT SOMS ERG TRAAG

Zetten denkopgaven altijd aan tot denken? Soms pas na een tijdje en met een herformulering, ontdekte Ab van der Roest.

In vwo-5 kwam bij wiskunde B de volgende opgave, gemarkeerd met een D van 'denkopgave' aan de orde:

Gegeven is dat de derdegraadsfunctie $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ twee extreme waarden heeft.

Toon aan dat hieruit volgt dat $b^2 > 3ac$

Toon aan dat elke derdegraadsfunctie precies één buigpunt heeft en dat voor het geval de derdegraadsfunctie twee toppen A en B heeft voor het buigpunt C geldt dat $2x_C = x_A + x_B$.

De leerlingen kregen de opdracht hieraan te werken, maar het lukte Heidie niet om dit probleem zelfstandig en met haar buurvrouw op te lossen. Omdat ze niet de enige was, heb ik na enige tijd deze opgave klassikaal besproken.

Wat me opviel is dat de opbouw van de som niet dwingt tot denken, maar meteen stuurt naar de algebra. De grafiek heeft twee toppen, dus moet de afgeleide gelijkgesteld aan 0 twee oplossingen hebben. Omdat de afgeleide een tweedegraadsfunctie is, komt meteen de discriminant in beeld en het eerste onderdeel is klaar. Rekenen met onbekende coëfficiënten is in vwo 5 blijkbaar al denken!

Het b-onderdeel van de opgave stuurt opnieuw, zonder dat een leerling lang na hoeft te denken, meteen naar de tweede afgeleide. $6ax + 2b = 0$ is een lineaire vergelijking en om dat $a \neq 0$ is er altijd precies één oplossing

$$x_C = \frac{-b}{3a}.$$

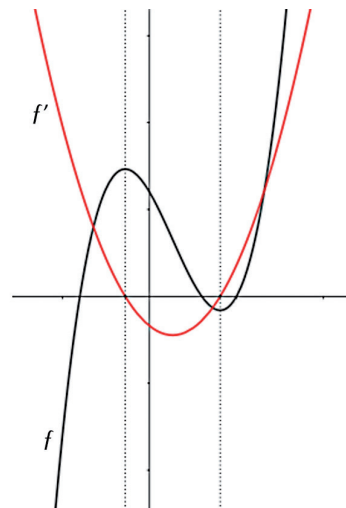
Bij het eerste onderdeel is al naar de discriminant van de vergelijking $3ax^2 + 2bx + c = 0$ gekeken en de oplossingen van deze vergelijkingen zijn dus met de a , b , c - formule te vinden: $x_{A,B} = \frac{-2b \pm \sqrt{D}}{6a}$.

Optellen van de oplossingen geeft het gevraagde. Klaar. Samen met Heidie die de vraag stelde een bevredigend antwoord geproduceerd.

Totdat...

ik een week later een wiskunde A les voorbereide voor 6 vwo. Het hoofdstuk heet 'Toepassingen van de differentiaalrekening' en bij de voorkennis grijpen de schrijvers

terug naar hellinggrafieken. Er moet een hellinggrafiek van een derdegraadsfunctie met twee toppen getekend worden, zie figuur 1.



figuur 1

Vanzelfsprekend is dit een parabool met twee snijpunten met de x -as. Vanwege de symmetrie is de x_{top} precies het gemiddelde van de x -waarden van die snijpunten en vanzelfsprekend hoort hierbij de maximale/minimale helling en dus het buigpunt. Het duurde dus een week totdat ik echt ging denken en het toont maar weer aan hoe moeilijk het is om goede denkopgaven te maken.

Ik vermoed dat de opgave veel beter had kunnen luiden:

Gegeven is dat de derdegraadsfunctie

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ twee extreme waarden heeft.

Toon aan dat voor het buigpunt C geldt dat $2x_C = x_A + x_B$ met x_A en x_B de x -coördinaten van de toppen.

Mogelijk dat deze opgave echt tot denken aan zou zetten en dat er op deze manier meerdere antwoorden zouden ontstaan die tot een gesprek met de klas zouden leiden. In ieder geval wordt vermeden dat de opgave naar een bepaalde oplossing stuurt.

EEN DOT VAN EEN KANS

Wiskundige denkactiviteiten die je overkomen. Je moet ze dan wel herkennen en vooral meenemen naar de bijeenkomst van je docent-ontwikkelteam (dot). Het overkwam Ab van der Roest.

Denkactiviteiten

In *Euclides* past natuurlijk geen beschouwing over het woord 'dot'. Maar in de omgeving waar ik opgroeide werd de uitdrukking 'een dot van een kans' soms gebruikt om aan te geven dat het om een heel mooi buitenkansje ging. Iets wat je zomaar overkomt en waar je snel gebruik van moet maken.

Deze gedachte kwam in me op toen we met ons dot bij elkaar waren. Met negen collega's van verschillende scholen uit Wageningen en omgeving vormen we een dot: een docentontwikkelteam, en de deelname hieraan is een dot van een kans. Nadat we een tweetal jaargangen nadachten over het organiseren van denkactiviteiten zijn we tot het inzicht gekomen dat denkactiviteiten je ook vaak overkomen. Je kunt goed nadenken over de inhoud en vooral over het begin van je les, maar daarna overkomen je veel dingen. Hierbij aansluiten geeft mogelijkheden tot denkactiviteiten. Sinds dit jaar ruimen we op onze bijeenkomsten tijd in om zulke 'hoogtepunten' uit onze lessen met elkaar te bespreken. Dit zijn zeker niet de slechtste momenten van onze bijeenkomst.

Stelling van een leerling

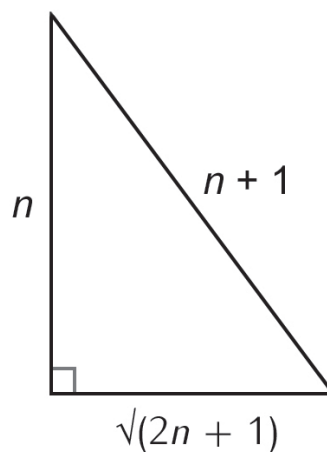
Een voorbeeld van Niels hield ons wel even bezig. Een leerling had tegen hem gezegd, toen hij met de stelling van Pythagoras bezig was: 'Mijnheer je hoeft toch helemaal niet te kwadrateren, je kunt gewoon optellen en dan de wortel trekken'. Dit veroorzaakte een denkactiviteit. In plaats van $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ krijg je dan $c = \sqrt{a + b}$. Pas op, je moet wel goed kijken wat je als a en b moet kiezen.

Dat kan niet goed zijn, is je eerste gedachte. Maar, hoe komt die leerling dan aan deze uitdrukking? Wel, hij gaf een paar voorbeelden: $3 = \sqrt{4+5}$ en $5 = \sqrt{12+13}$. Geef de leerling maar ongelijk.

Hoe je dit aanpakt is dan het onderwerp van gesprek. Een tegenvoorbeeld is snel gevonden: (8, 15, 17) of (6, 8, 10) voldoen aan Pythagoras, maar niet aan de stelling van de leerling. Je kunt dan stoppen, of de dot van de kans aangrijpen om wat algebra te doen. Wanneer klopt de stelling van de leerling?

Wanneer klopt het?

Een manier om pythagoreïsche drietallen te vinden kan met de afbeelding in figuur 1.



figuur 1

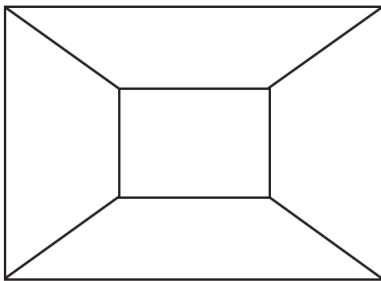
Noem een rechthoekszijde n en de hypotenusa $n + 1$. Met de stelling van Pythagoras vind je dat de andere rechthoekszijde $\sqrt{2n+1}$ moet zijn. Beschouw nu de oneven kwadraten en je krijgt pythagoreïsche drietallen. Bijvoorbeeld als $2n + 1 = 121$, dan is $n = 60$ en je vindt dan (60, 61, 11). Hier klopt de stelling van de leerling weer, want $11 = \sqrt{60+61}$.

Maar merk nu meteen op dat $n + 1 = \sqrt{2n+1}$. Hiermee tonen we aan dat de stelling van de leerling altijd klopt voor de op deze manier gevonden drietallen. Een iets ander bewijs gaat als volgt. Noem $\sqrt{2n+1} = a$, dan is $a^2 = 2n + 1$ en $n = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}$. Gebruik nu de stelling van de leerling: neem de wortel van de som van twee zijdes: $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2} + 1 = a^2$ en constateer dat je na worteltrekken de derde zijde hebt.

Blijft over: zijn er andere Pythagoreïsche drietallen dan $(n, n + 1, \sqrt{2n+1})$ en zo ja hoe vinden we die? Ook dat is niet zo moeilijk te ontdekken, maar tijdens onze dot-bijeenkomst hebben we dat laten liggen.

Problemen die niet loslaten

Vlak voor de kerstvakantie kreeg ik van een collega het volgende probleem: Neem een A4 (een A3 mag ook) papier en verdeel dat op de volgende manier in vijf stukken met dezelfde oppervlakte:



Kan dit? Natuurlijk kan dat, was mijn snelle reactie. Ik ging aan het rekenen, maar het viel toch niet mee. En zo nam ik het probleem mee de vakantie mee. Ik kreeg als het ware een probleemvakantie door mijn collega, wat ik overigens helemaal niet erg vond. Voor je verder leest: probeer het eerst zelf eens!

De afmetingen van een A4 zijn 297 mm bij 210 mm. De rechthoek in het midden gaf ik de afmetingen a mm bij b mm, met de lengte van de lange zijde a en van de korte zijde b . De oppervlakte van het A4 is dus $297 \times 210 = 62370 \text{ mm}^2$.

Dat levert de volgende vergelijkingen op:
 $a \cdot b = 62370/5 = 12474 \text{ mm}^2$ (rechthoek in het midden)
 en $\frac{1}{2}(a + 297) \cdot \frac{1}{2}(210 - b) = 12474 \text{ mm}^2$
 ('lange' trapezium).

Hier een stelsel van maken, haakjes uitwerken en invullen $b = 12474/a$ geeft de vergelijking

$$210a - (297 \times 12474)/a = 0.$$

Dit is te herleiden tot $a^2 = (297 \times 12474)/210$ en $a \approx 132,82$ en $b \approx 93,92$.

Het kan! Maar, de antwoorden op elkaar delend, geeft ongeveer $\sqrt{2}$ en dat is een bekende verhouding bij een A4. Is er dan een slimmere aanpak mogelijk? Kunnen we ook los van de A4 iets zeggen? Het probleem kan dus nog niet losgelaten worden.

Ja dat kan. Uitgaande van gelijkvormigheid, kun je zeggen dat *oppervlakte kleine rechthoek* vijf keer zo klein is als

oppervlakte papier. Dus de zijdes zijn

$$\frac{1}{5}\sqrt{5} \times 297 \approx 132,82 \text{ en } \frac{1}{5}\sqrt{5} \times 210 \approx 93,92.$$

Dit overtuigt natuurlijk niet en daarom meteen een algemeen geval. We nemen nu een papier met lengte a en breedte b en verdelen dit op de manier zoals hierboven is getekend. Uitgaande van gelijkvormigheid zijn de zijdes van de rechthoek

respectievelijk $\frac{1}{5}\sqrt{5} \times a$ en $\frac{1}{5}\sqrt{5} \times b$. Oppervlakte van de rechthoek is dan keurig $\frac{1}{5}ab$.

Nu moeten we aantonen dat de oppervlakte van een trapezium ook $\frac{1}{5}ab$ is. Eén trapezium is genoeg,

want vanwege de symmetrie hebben ze alle dezelfde oppervlakte.

De oppervlakte berekenen we met een welbekende

formule:

$$\frac{1}{2}(a + \frac{1}{5}\sqrt{5}a) \times \frac{1}{2}(b - \frac{1}{5}\sqrt{5}b) = \frac{1}{4}(ab - \frac{1}{5}ab) = \frac{1}{5}ab.$$

Klaar.

Na de vakantie praatten we nog even door over de opgave. Moet er sprake zijn van gelijkvormigheid? Ik dacht van niet, maar na beter te hebben gekeken, ging ik twijfelen. Dus ook hier maar weer gaan rekenen. Stel de zijde van het papier weer a en b , en de zijdes van de rechthoek x en y . Nu moet gelden dat de oppervlaktes van alle trapezia gelijk zijn. Dit leidt tot de volgende vergelijking:

$$\frac{1}{2}(x + b) \times \frac{1}{2}(a - y) = \frac{1}{2}(y + a) \times \frac{1}{2}(b - x).$$

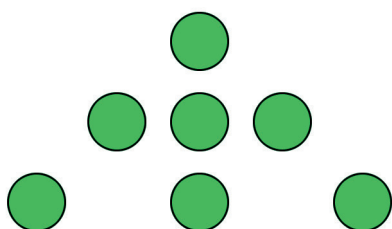
Dit is te herleiden tot $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ en de noodzaak van

gelijkvormigheid is bewezen.

Wat een geweldige problemen kunnen wiskundeleraars toch hebben! Toen ik aan mijn collega vroeg hoe hij bij dit probleem gekomen was, verzuchtte hij: mijn vrouw! Janita, de vrouw van mijn collega, wilde voor een Bijbelstudie een A3 verdelen volgens bovengenoemde schets, omdat ze een werkvorm met placemats wilde toepassen. Mijn collega moest dat maar even opknappen. Zo zie je dat werkvormen geweldige problemen kunnen veroorzaken. Problemen die niet makkelijk loslaten, maar waar we ten volle van kunnen genieten.

Hoe een vmbo-opgave een vwo-opgave werd

‘Opa, kun je me helpen met wiskunde’, was de vraag aan mijn collega Cock, gesteld door zijn kleindochter. Ze zit in de eerste klas vmbo en ‘snapte er niets van’. Cock, een zeer ervaren docent bovenbouw havo en vwo, dacht dat helpen wel even te doen. Het probleem was het volgende:

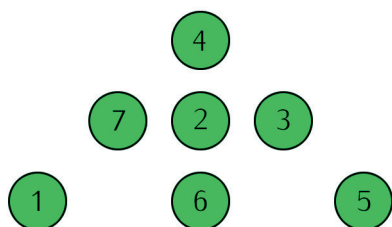


figuur 1

Zet de getallen 1 t/m 7 in het rooster van figuur 1 zodat de som van drie getallen op de tweede en derde rij en de som in de drie ‘spaken’ gelijk is. Cock overschatte zichzelf enigszins en schreef het antwoord niet direct op. Na een kop koffie vond hij meerdere oplossingen.

Toen hij de volgende dag op school deze anekdote vertelde, vroegen we ons eerst af hoe de docent deze som zou uitleggen. Als bovenbouwdocenten konden we niets anders bedenken dan door proberen en kijken hoe het uitkomt. Natuurlijk niet de 6 en de 7 naast elkaar enzovoort.

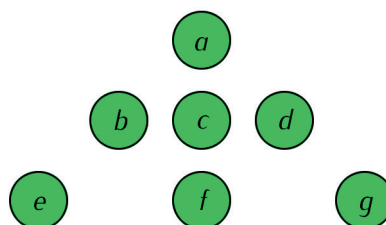
Ik behandelde deze week in vwo-4 het combinatoriek hoofdstuk en zag een mooie opgave voor deze klas. De opgave wordt nu: beredeneer hoeveel oplossingen er zijn. In groepjes van drie of vier werd er een lesuur hard gewerkt. Na 40 minuten heb ik de resultaten geïnventariseerd en tot mijn verbazing waren er groepjes die nog geen enkele oplossing hadden. Ik heb hen maar niet verteld dat het een opgave voor vmbo-1 was... Twee groepjes wisten me te vertellen dat er twaalf verschillende oplossingen waren.



figuur 2

De uitleg hierbij: 7, 2 en 3 van de tweede regel kunnen op $3!$ manieren verwisseld worden. Om de optelling constant te houden wisselen de cijfers van regel drie mee. Je kunt ook de regels twee en drie verwisselen. Er zijn dus $2 \times 3! = 12$ mogelijkheden, zie figuur 2.

Prima, maar waarom moet de 4 bovenaan staan? Dat bleef een vraagteken.



figuur 3

De volgende les kwam ik er kort op terug. Ik had ter voorbereiding de cirkeltjes letters gegeven, zie figuur 3, en bedacht dat $a + b + c + d + e + f + g = 28$. En dat $(a + b + e) + (a + c + f) + (a + d + g) + (b + c + d) + (e + f + g) = a + 2(a + b + c + d + e + f + g) = a + 56$ deelbaar door 5 moet zijn.

Dan moet gelden $a = 4$.

Voor ik dit aan de klas presenteerde, bleek dat Joanne er thuis ook over na had gedacht. Haar redenering kreeg uiteraard voorrang. Ze isoleerde één getal. De andere zes moeten dan twee aan twee opgeteld steeds dezelfde uitkomst hebben. Dat is het geval bij de paren (1, 7) (2, 6) en (3, 5). Een andere mogelijkheid is er niet. Een mooie redenering. Later bedacht ik dat ze ook 1 of 7 had kunnen isoleren, maar dan waren de rijssommen niet gelijk, maar dat heb ik laten zitten.

Ik was tevreden met mijn resultaat. De leerlingen hadden zich op een andere manier beziggehouden met de wiskunde. Weliswaar geen maatschappelijk relevant probleem bij de kop gehad, maar toch een opdracht waar je buiten het boek tegen aan kunt lopen.

Ik leerde: Houd de vragen als ‘opa (of oma, mama, papa), kun je me helpen?’ goed in de gaten.

De titel is geen sommetje uit het rekendeel, maar een gedachte die bij mij opkwam, toen ik midden in de nacht, rond 2.30 uur wakker werd. Leraar ben je altijd, 24 uur per dag en 7 dagen in de week, en niet alleen tussen 8.00 en 17.00 uur. Overigens was het geen negatieve gedachte, want ik kreeg hem na een soort van aha-erlebnis.

“Dus geen regels leren, maar plaatjes leren.”

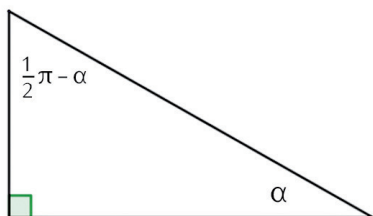
In vwo-5 ben ik bezig met goniometrie. Veel leerlingen vinden het een lastig onderwerp door de veelheid aan regels die ze moeten leren. Ik probeer hen duidelijk te maken dat ze geen regels hoeven te leren, maar dat ze schetsjes moeten tekenen en goed moeten kijken. Ik teken dus voortdurend eenheidscirkels op het bord en laat dan bijvoorbeeld zien dat $\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$. Dus geen regels leren, maar plaatjes leren. Exacte waarden met behulp van de tekendriehoeken en daarnaast de eenheidscirkel.

Bij de toetsen merk ik dat de meeste leerlingen toch alleen maar de regels leren. Ze vinden dat makkelijker en het staat ook nadrukkelijk in het boek: ‘Leer deze formules uit je hoofd!’ Het lijkt wel of het boek meer gezag heeft dan ik.

Maar onze methode kent in ieder geval één situatie waarbij het leren van de regels echt lastiger is:

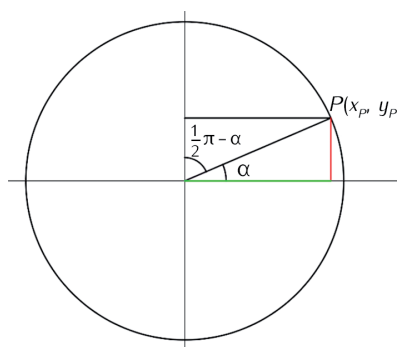
$$\sin(\alpha) = \cos(\alpha - \frac{1}{2}\pi) \text{ en } \cos(\alpha) = \sin(\alpha + \frac{1}{2}\pi).$$

Een keer + en een keer –, dat vraagt om verwarring. Op de toets worden hier veel fouten mee gemaakt. Deze fouten vind ik, met mijn plaatjes kijken onnodig. Kijk maar in een rechthoekige driehoek, zie figuur 1.



figuur 1

Je ziet nu onmiddellijk dat $\sin(\alpha) = \cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$ en $\cos(\alpha) = \sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$. Nu geen lastig plus- of minteken. Toch pakken de leerlingen het niet. Misschien omdat ze er weer een extra tekening bij moeten onthouden. Hoe kan ik het aanpakken? Ik kwam er niet uit tot ik midden in de nacht wakker werd. Het kan ook gewoon met de eenheidscirkel, was mijn gedachte. Pratend met een collega over mijn vondst heb ik mijn uitleg iets bijgesteld. Ik teken de eenheidscirkel op de standaardmanier, zie figuur 2.



figuur 2

Daarna teken ik de hoek $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ en je ziet meteen

in de rechthoek dat $\sin(\alpha) = \cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$ en

$$\cos(\alpha) = \sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha).$$

Oneigenlijk gebruik, want $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ is geen gerichte hoek. Maar ik hoop dat ik dat kan uitleggen.

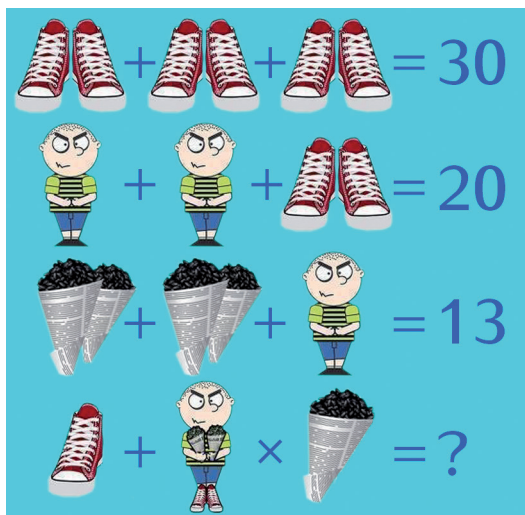
Vreemd is wel dat zo'n manier van uitleggen midden in de nacht opkomt. Helemaal niet vervelend, maar wel leraar 24/7...

Vastgeroest Coronatijden

Ab van der Roest

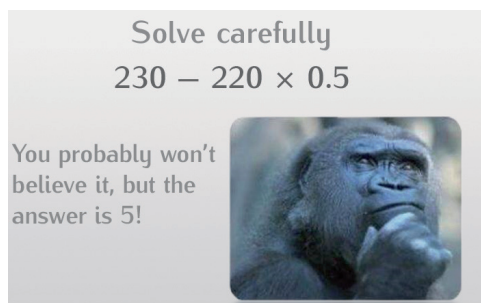
Als leraar hebben we het zwaar tijdens de coronatijden. Natuurlijk niet zo zwaar als personeel in de gezondheidszorg, maar toch. Wat is een leraar zonder leerlingen? Ja, digitaal via Zoom hebben we contact. Ik geef mijn les en leerlingen stellen vragen. Ik stel hen vragen, dus het lijkt heel wat. Maar die vragende gezichten zie ik niet. En dat is toch precies wat je nodig hebt wanneer je lesgeeft. Je vertelt iets en als je vraagt of iedereen het begrepen heeft, krijg je zelden tot nooit reactie. Je zou je kunnen voorstellen dat je goed kunt uitleggen, maar bij een toets krijg je dan de echte reactie. Vragende gezichten, daar kun je op inspelen.

Toch is het niet alleen kommer en kwel. Opeens krijgen de leden van de hardloopclub respect voor docenten: we hebben een vitaal beroep. Als ze zelf hun kinderen moeten helpen met wiskunde, zitten ze vaak snel onthand. Maar nog een andere ontwikkeling. Er gaan opeens allerlei logische puzzels rond in de appgroep en de wiskunde-leraar mag het beslissende woord spreken. Een paar voorbeelden, misschien heb je ze al een keer gezien.



figuur 1

Op de plaats van het vraagteken moet staan: 43.
Bruikbaar in elk leerjaar en de eerste vijf minuten van de digitale les zijn voorbij.



figuur 2

Deze ga ik in vwo-4 wiskunde A gebruiken.

En ten slotte de volgende die me heel veel hoofdbreken kostte. Het antwoord? Je hebt het misschien al gezien is natuurlijk 79.

4	6	15	105
10	21	120	
	?	321	
	5920		

figuur 3

Ondanks de vreemde omstandigheden dus ook positieve ontwikkelingen en laten we proberen die ook altijd te zien.

Zondag 15 maart ontstond er opeens activiteit in de groepsapp van het personeel van het Ichthus College te Veenendaal. Voor ons was dat zeer vreemd, omdat we zondags zeer terughoudend zijn in gebruik van app en mail. Op die middag kregen we een mail van de voorzitter van het college van bestuur dat er maandag geen lesgegeven zou worden en dat de docenten dinsdag op school werden verwacht.

Gewone lesrooster

Dinsdag een korte bijeenkomst in de aula en daarna moesten de secties aan de gang om plannen te maken hoe er lesgegeven zou worden. Uitgangspunt van de directie was dat het gewone lesrooster vanaf woensdag in stand zou blijven. We kregen het advies Itslearning en Zoom te gebruiken. Er was van Zoom meteen een korte instructie beschikbaar en als sectie besloten we dat we vanuit huis of vanuit het lokaal vooral Zoom zouden gaan gebruiken. Het grote voordeel is dat leerlingen mij als docent konden horen en dat ze konden zien wat ik op het bord projekteerde en schreef. In principe bleef de les hetzelfde, alleen in een leeg lokaal. Geen ordeproblemen, geen geklets tussendoor, maar wat de leerlingen wel deden, dat weten alleen de leerlingen. Ik controleerde de ingelogde deelnemers en liet hen af en toe huiswerk inleveren via Itslearning.

Verschillende collega's waren sceptisch over de werkwijze. Hoe kan een leerling, zittend achter zijn computer, laptop, tablet of telefoon, nu serieus met een les meedoen? Ik had die huiver helemaal niet. Mijn redentie was de volgende: een leerling komt graag naar school, meestal om iets te leren, maar vooral ook voor de sociale contacten. Wanneer die contacten wegvallen, is de situatie zo anders, dat ze maar gaan meedoen met de les. Er zijn natuurlijk uitzonderingen. Verschillende leerlingen heb ik nooit tot bijna nooit ingelogd gezien bij wiskunde. Bij navraag bleek dat er ook leerlingen zijn die het liever helemaal zelf uitzoeken met behulp van het boek en YouTube- filmpjes. Kan natuurlijk ook. Er zijn ook leerlingen die gewoon elke dag bij de boomkweker gaan werken, omdat ze school al lang niet zagen zitten.

Vermoeiend

De eerste dagen waren erg vermoeiend. Niets anders dan les voorbereiden en huiswerk controleren. Geen puf voor andere dingen. Totdat je opeens merkt dat ook deze manier van werken gewoon gaat worden. Dan moet je goed bij de les blijven, want wanneer je vervlakt, gaan leerlingen afhaken. Een les op afstand moet veel beter zijn dan een gewone les heb ik gemerkt. In een gewone les kan een aarzeling, of een foutje of verschrijving veel makkelijker gerepareerd worden dan in de les op afstand.

Daarnaast laat je jezelf soms door leerlingen verleiden om een deel te 'verkleetsen'. Dat is via Zoom bijna niet te doen. De spontaniteit verdwijnt.

De lessen gaan dus wel door, maar alle rand gaat eraf. Geen gala voor de examenklassers. Geen examen met de nodige stress en gemeenschapszin. Geen waarmaken van de eindspurt, want de wedstrijd wordt ruim voor de inish geneutraliseerd. Dat doet pijn voor de leerlingen. En ook bij mij. Ik kan de resultaten van mijn leerlingen, die ik meestal mijn resultaten noem, niet vergelijken met die van collega's. Geen Wolf. Is de wolf eindelijk regelmatig waargenomen in Nederland, mag Cito hem niet loslaten!

Toetsen op school

Ook wat betreft de toetsen nam de directie beslissingen die de meeste collega's konden waarderen. Uiteraard komen de beslissingen meestal tot stand door de collega's te raadplegen. De toetsen gaan gewoon door op school. We veranderen het PTA niet voor de examenklassen. We laten geen toetsen thuis maken, omdat de zuiverheid niet te borgen is. En zo snellen we naar het einde van het schooljaar. Want ondanks de andere manier van lesgeven, gaat de tijd snel om. Wat wel vreemd is, dat de energie die je normaal in allerlei zaken steekt opeens weg lijkt te lekken. Plannen maken voor volgend jaar doe je bijna nog niet. Je hoofd zit, zeker in het begin, zo vol van de coronamededelingen, dat er bijna geen ruimte meer is voor andere dingen. Je moet jezelf op een zeker moment tot de orde roepen en weer starten. Natuurlijk weten we nog niet hoe de anderhalf meter op scholen gaat werken, maar dat laat onverlet dat leerlingen weer een keer naar school komen. Dat er dus wel weer lesgegeven zal worden.

Waardering

Waren deze weken alleen negatief te duiden? Dat zeker niet. Na een tweetal weken lesgeven met behulp van Zoom zeiden we als collega's tegen elkaar dat dit een prima methode is voor de examenklasleerlingen in de tijd tussen laatste toets en examen. Je kunt dan de les combineren met leerlingen die aanwezig willen zijn en met leerlingen die liever thuis werken. Als er facultatief lesgegeven wordt, moeten leerlingen soms zo lang wachten op een voor hen nodige les, dat ze het er maar bij laten zitten. Met Zoom zou dat probleem opgelost zijn.

Wat verder als positief te duiden is, is het feit dat je merkt hoe mooi het is dat de leerlingen er zijn. Soms verfoei je ze, omdat ze te veel kletsen en niet goed meedoen en met van alles bezig zijn behalve met jouw les, maar wat mis je ze. Wat worden dagen mat als je geen leerlingen ziet en spreekt. Een nieuwe waardering voor je eigen bezig zijn, is misschien wel het mooiste gevolg van de coronacrisis.

Een zomer in Nederland

Zomervakantie in Nederland is helemaal geen straf. Je moet natuurlijk wel je ogen goed open houden, want er is veel te zien. Uiteraard beperk ik me voor *Euclides* tot zichtbare wiskunde. Soms loop je er zomaar tegenaan. Bij een wandeling in mijn eigen omgeving zag ik het volgende kunstwerk (figuur 1).



figuur 1

Dodecaëder

Een dodecaëder. Enig zoekwerk op het internet geeft de volgende beschrijving: 'Het kunstwerk 'Oneness of all' maakt deel uit van Beeldenroute 2017 langs de Grebbelinie. Het kunstwerk is gemaakt door Ton Kroes en heeft de vorm van een dodecaëder, een wiskundige vorm die is opgebouwd uit twaalf gelijkvormige vijfhoeken. Als een kazemat staat het object op de wal van het Fort aan de Buursteeg en ziet het uit naar samenwerking ongeacht ras, geaardheid of geloof. De dodecaëder, eigenlijk het kleine broertje van de geodetische koepel, is opgebouwd uit houten ribben met daarop een OSB-plaat. Het is bekleed met zeil en zink.' Het deed me denken aan een andere toevalligheid die ik zag in het Rijksmuseum van Oudheden in Leiden (figuur 2).



figuur 2 Dodecaëder uit de Romeinse tijd. Gevonden bij Elst.

Ook een dodecaëder, maar wel uit een totaal andere tijd. Het is uit de Romeinse tijd en gevonden bij Elst in de Betuwe. De functie is onbekend. Er zijn verschillende vindplaatsen, maar die liggen allemaal ten zuiden van de Alpen. Een hypothese is dat het een instrument is om de zaaidatum van wintertarwe te bepalen.

Band van Möbius

Waar ik ook toevallig tegen aanliep was het sieraad in figuur 3. Het was in het Designmuseum in Den Bosch en je ziet een kunstzinnige band van Möbius. Maakster is Emmy van Leersum. Ik had nog nooit van haar gehoord, ik ben niet zo van de design, maar ook hierbij helpt het internet: 'Van Leersum volgde een opleiding aan het Instituut voor Kunstnijverheidsonderwijs te Amsterdam (1958-1962), waar ze les kreeg van onder meer Marinus Zwollo, en aan de University College of Arts, Craft and Design te Stockholm (1962-1963).' Het werk van Van Leersum moest autonoom zijn en daarom gebruikte ze meetkundige vormen. Een sieraad wordt zo een kunstwerk op zichzelf, zonder dat het gedragen wordt.



figuur 3

Strakke vormen

Deze zomer ging ik soms ook bewust op zoektocht. Naar aanleiding van de nieuwsbrief van *Ars et Mathesis*^[1] bezocht ik Bredevoort. Daar in de Koppelkerk, op de boven-galerij, was een mooie tentoonstelling *Beauty & Geometry* met werk van Han Lammers. Een beeldend kunstenaar die geïnspireerd is door strakke vormen, zie figuur 4.



figuur 4

Prachtig hoe hij de icosaeëder plaatst in het centrum van de kubus. Daarnaast de *Imploded Cube* waarbij twee imploded piramides afgezaagd zijn. De kunstenaar schrijft zelf: 'De *Imploded Cube* is mijn voorstelling van een geïmplodeerde kubus waar twee hoeken vanaf zijn en ernaast liggen. Het ontwerp is overduidelijk een kubus terwijl er weinig hoeken van 90° inzitten.'



figuur 5

Knopen

Figuur 5 is de brug naar de volgende wiskunstontmoeting. Een klaverbladknoop. Een knoop is een gesloten kromme in de ruimte. Hier (figuur 5) is de kromme gemaakt van zinken koper profiel 100×100 mm. Knopen zijn wiskundig interessant, maar ook erg kunstzinnig. Dat was de reden dat ik naar Baarlo in Limburg ging. Op Hoog Catharijne staat een knoop en met wat zoekwerk vond ik de naam van Shinkichi Tajiri. Daarna kwam Baarlo in beeld, want in dat dorp heeft de Japanse kunstenaar gewoond. Hij heeft veel kunstwerken gemaakt, geïnspireerd op knopen. Hij schonk dan een tweede exemplaar aan het dorp. Er staat nu een achttal knopen opgesteld (figuur 6).



figuur 6

Het verschil tussen de platte knoop en de oudewijvenknoop. Als we een echte wiskundige knoop willen hebben, moeten we de knoop natuurlijk wel sluiten. In gedachten maak ik dus een paar extra verbindingen. Bij het inrijden en bij het uitrijden van Baarlo zijn de knopen nauwelijks te missen (figuur 7).



figuur 7

Moet je nu helemaal naar Baarlo, of naar een tentoonstelling om knopen te zien? Nee hoor, houd je ogen maar open. Deze zag ik in Apeldoorn (figuur 8).



figuur 8



figuur 9

En toen we 's avonds uit eten gingen op de Markt van Terborg, zag ik, vlak voor het nagerecht, aan de overkant van de straat de knoop van figuur 9. Dit kunstwerk heeft als titel *De Knop* en werd vervaardigd door Bernard Engelbarts. Vakantie in eigen land is dus helemaal geen straf als je je ogen goed openhoudt.

Noot

- [1] Zie www.arsetmathesis.nl. De *Ars et Mathesis*-dag 2020 is onder voorbehoud van coronamaatregelen op zaterdag 21 november in de Cleveringazaal in het Kamerlingh Onnes Gebouw van de Universiteit van Leiden. Programma en aankondigende nieuwsbrief volgen op de website.

Vastgeroest

De eerste les na de kerstvakantie

De eerste les van het nieuwe jaar verliep voor mijn leerlingen een beetje verrassend. In het kader van 'wiskunde is echt iets anders dan een som uit een wiskundeboek' had ik de volgende opdracht op het smartbord geprojecteerd:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2019}+\sqrt{2020}} =$$

Een opgave die je elk jaar weer kunt gebruiken in bijna elke klas. Eerlijk gezegd heb ik de opgave van een collega gekregen en wilde hem gewoon als aardigheidje presenteren. Voor ik deze opgave projecteerde had ik eerst een bord vol wenskaarten geprojecteerd en de klas reageerde dat ze zoiets wel erg burgerlijk vonden. Waarop ik met mijn som kwam.

Op het spoor van regelmaat

Wat ik eerst alleen als een leukigheidje wilde presenteren, veranderde ter plekke in een voorbeeld van probleemaanpak. Eerst even de drie puntjes toegelicht en toen leerlingen individueel en even later in groepjes laten werken. Het probleem was te groot. 2019 termen bij elkaar optellen is wel erg veel tikwerk voor de rekenmachine. Een groepje leerlingen onder leiding van Sabine veronderstelde dat er $\sqrt{2020}-1$ uit zou komen. Waarom, was mijn vraag. Toen bleek dat de rekenmachine toch geholpen had. Ze had de eerste twee termen opgeteld en de decimalen van $\sqrt{3}$ herkend. Een term verder leverde een 1 op en de som van de eerste acht termen een 2. Regelmaat was ontdekt.

Gaat het altijd zo?

Maar, wie garandeert ons dat het echt zo verder gaat, is dan natuurlijk de vraag van elke wiskundeleraar. En dan blijft het stil, want dat garandeert voorlopig niemand. Mijn eerste interventie was dat bij zo'n onmogelijke opgave gekeken moet worden waar het op lijkt en wat we wel kunnen. Dat was snel bedacht. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ moesten

we omschrijven als $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, door teller en noemer met

hetzelfde te vermenigvuldigen. Meteen gingen ze weer aan de slag, maar het leverde niets op. Dubbelproduct was na de kerstvakantie weer heel ver weg. De aanwijzing was dus dat we teller en noemer met hetzelfde zouden vermenigvuldigen en dat de noemer een net getal zou worden. Maar door het dubbelproduct bleven we met een wortel zitten.

Interventie

Weer tijd voor interventie. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ is een merkwaardig product. Zijn er daar meer van? En toen begon het kwartje te vallen en werd het antwoord snel gevonden. Sabine kreeg haar gelijk, waarmee ze uiteraard zeer tevreden was. Ik kreeg mijn klas aan het denken, waarmee ik uiteraard tevreden was. Misschien een leuke les voor na de kerstvakantie. Wel een kleine aanpassing maken!

Vastgeroest

Fouten maken

Je doet het niet graag, maar het overkomt me nogal eens. En jou misschien ook wel: fouten maken. In de 'Vastgeroest' van *Euclides* 96-2 maakte ik zo'n fout. Een Möbiusband, schreef ik, maar dat klopte helemaal niet. Er zitten twee slagen in de band. Te snel, en niet zorgvuldig genoeg gekeken.

In de klas overkomt me dat ook wel eens. Een voorbeeld hiervan is een opgave in vwo-4 bij wiskunde-A, zie figuur 1. Je kent de opgave misschien wel.



Eva ontgrendelt vaak haar smartphone en zet hem direct daarna weer op stand-by. Op de foto hiernaast zie je de telefoon van Eva waarop zij net haar pincode heeft ingevoerd. Er zijn duidelijk vier vingerafdrukken zichtbaar.

b Hoeveel pincodes zijn er mogelijk?

c Volgens Luuk is het voor Eva beter om slechts drie verschillende cijfers te gebruiken in haar pincode, want bij drie vingerafdrukken zijn er meer pincodes mogelijk. Laat met een berekening zien dat Luuk gelijk heeft.

figuur 1

Bij het bespreken van deze opgave wilde ik het totaal aantal codes berekenen in plaats van het aantal mogelijkheden bij vier of drie vette vingerafdrukken, en maakte het mezelf en de klas erg lastig. Beter lezen hield ik mezelf voor en gaf een complement aan de leerling die de opgave wel beter gelezen had.

Maar nu de fout van de Möbiusband. Eén van mijn docenten, ik mag tegenwoordig Dirk tegen hem zeggen, wees me erop en daagde me uit om terug te komen op de Möbiusband. Die uitdaging pak ik graag aan, omdat de Möbiusband weleens in de klas gebruik om de leerlingen 'vreemde' dingen te laten zien. Het is een band met één zijde en één rand. Ik gebruik hiervoor meestal een kassastrook, zie figuur 2.



figuur 2

Toen ik een keer over die mooie band praatte in een klas, vroeg ik hun wat er gebeurt als je de band in de lengterichting doorknipt. Menige leerling dacht dat het twee banden zouden worden en de verbazing was best groot toen het er maar één bleek te zijn. Maar nu nog een keer knippen, is dan de volgende vraag. Verrassing is compleet als dat wel twee banden blijken te zijn. Voor jou misschien bekend, maar weet je ook wat er gebeurt als we drie slagen in de band maken en dan ongeveer 1 cm uit de kant knippen? Volg het pad en je komt bij het beginpunt uit. Knip de rest van de band door, zodat je alleen de rand overhoudt en bekijk die afgeknipte rand en je ziet dat we dan weer bij *Euclides* 96-2 terecht zijn gekomen.

'Ik leer het nooit!'

Toetsvragen maken

Herken je dit? Je maakt een toets, maar je wilt niet alleen maar letterlijk terugvragen. Je stelt dus vragen waarbij je van tevoren denkt: 'Hier ga ik commentaar op krijgen.' Maar nadat de klas de toets gemaakt heeft blijft het commentaar achterwege en bij het nakijken wordt zo'n vraag door een groot deel van de groep goed gemaakt. Je vraagt je dan af, of de vraag toch goed was, of toch te veel herkenbaar. Maar, gelukkig heeft niemand schade geleden. Het tegenovergestelde komt ook veel voor. Je stelt een vraag op de toets waarvan je verwacht dat leerlingen die meteen en zonder veel nadenken kunnen beantwoorden. Je hebt de stof behandeld, de leerlingen hebben ermee geoefend en je beschouwt de vraag als bijna uit de categorie reproduceren, maar zeker als toepassen in een bekende situatie. Maar bij het corrigeren van de toets blijken de meeste leerlingen allerlei wegen in te slaan die jij niet van tevoren bedacht hebt. Niet zo erg, maar bijna geen enkele leerling komt tot het goede antwoord en na deze vraag worden de resterende vragen onder grote tijdsdruk gemaakt. Eigenlijk is de toets een beetje verknoeid door die ene vraag en je vraagt je vertwijfeld af of je ooit zult leren om de toetsvragen goed in te schatten.

'Ik leer het nooit!'

Na bijna veertig jaar ervaring kan ik nog steeds niet goed inschatten of een toets zulke vragen bevat. Bij de laatste toetsweek was er weer zo'n toets, die me de verzuchting bezorgde: 'Ik leer het nooit!'

Vwo-5 wiskunde B. In de methode *Getal & Ruimte* wordt behandeld dat de lijnen $l: ax + by = c$ en $k: px + qy = r$ samenvallen als $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$. Ik probeer de leerlingen bij dit stukje stof op het spoor te krijgen dat dit niets nieuws is, maar dat we dat allang weten. Want uitgaande van 'evenwijdige lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt' is meteen in te zien dat $-\frac{a}{b} = -\frac{p}{q}$ en dat is eenvoudig te herleiden tot $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$. Door deze evenredigheid en 'het gelijk zijn' van de vergelijkingen moet die evenredigheid ook gelden voor c en r . Mijn advies aan de leerlingen is dan om deze regel niet apart te gaan leren (denk aan onze beperkte geheugencapaciteit), maar om te gebruiken wat al lang in ons systeem aanwezig is. Dan de toetsvraag die letterlijk uit de toetsbundel komt:

De lijn k snijdt de assen in de punten $A(p + 2, 0)$ en $B(0, 2p - 2)$.

De lijn l snijdt de assen in de punten $C(2p, 0)$ en $D(0, q + 1)$.

4p Bereken algebraïsch voor welke p en q de lijnen samenvallen

Juist omdat ik de leerlingen geadviseerd heb niet meteen naar de in het boek gehanteerde formule te grijpen, maar eerst eens goed na te denken en te vertrouwen op veel eerder opgedane kennis, verwachtte ik het eenvoudige antwoord: $p + 2 = 2p$ en $2p - 2 = q + 1$ want als lijnen samenvallen hebben ze dezelfde snijpunten met de x -as en y -as.

Helaas!

Alle leerlingen schreven $k: \frac{x}{p+2} + \frac{y}{2p-2} = 1$ en

$l: \frac{x}{2p} + \frac{y}{q+1} = 1$ op. Deze vergelijkingen werden herleid tot

$k: (2p - 2)x + (p + 2)y = 2p^2 + 2p - 4$ en

$l: (q + 1)x + 2py = 2pq + 2p$ waaruit de volgende evenredigheid verscheen:

$$\frac{2p-2}{q+1} = \frac{p+2}{2p} = \frac{2p^2+2p-4}{2pq+2p}.$$

En de oplossing van deze evenredigheid was na veel dwalen voor bijna niemand te doen. Die lastige p en q zaten elkaar in de weg.

'Het is zo simpel'

De makkelijkste conclusie zou zijn dat die leerlingen zo dom zijn, maar dat is te kort door de bocht. Daarom mijn verzuchting dat ik het nooit leer. Maar er kwam toch nog een staartje aan dit verhaal. Bij de bespreking van de toets knalde het opeens door de klas: 'Het is zo simpel, wat ben ik stom.' Ik was het niet die dat riep....

Beschuitbus als omwentelingslichaam

Bij het voorbereiden van een les over de inhoud van omwentelingslichamen kwam ik deze advertentie van een grote winkelketen tegen. Ik probeer aan te haken bij bestaande kennis en daarom vraag ik eerst naar de inhoud van een cilinder. En welke cilinder kent bijna elk mens: de beschuitbus. Wat me verraste in de advertentie, was niet de korting of de prijs, maar het volume van de bus. 1,7 liter leek me veel en ik zocht de afmetingen van de bus op bij de site van Brabantia. En toen ontstond er meteen een ander doel van de les...

25% KORTING
brabantia
beschuitbus
Platinum
 1,7 liter
 online 0710570
1075 8.06
bewaarbus
Platinum
 1,4 liter
 online 0710590
995 7.46



Brabantia garantie
 10 jaar

Afmetingen

Breedte: 11 cm
 Lengte: 11 cm
 Hoogte: 23,5 cm
 Inhoud: 1,7 liter
 Diameter: 11 cm

De informatie die ik vond heb ik naast de advertentie gezet. Nadat ik het thema van de les, het volume van omwentelingslichamen, aan de klas had gepresenteerd en daarbij mijn associatie met de beschuitbus had uitgelegd, liet ik bovenstaande afbeeldingen zien. Wat valt op? Het duurde niet lang of een leerling riep dat hij breedte en lengte onzinnige informatie vond. Dat is goede kritiek. Wat verder? Ik moest een beetje de weg wijzen. Wat is het volume en klopt dat met de afmetingen? Oh, hoe bereken je het volume?

$V = \pi r^2 h$ wist iemand naar voren te brengen. Maar dat geeft een antwoord dat nergens op lijkt: $V = 2232 \text{ cm}^3$. Maar Noah wist dat we natuurlijk de binnenmaten moeten hebben en niet de buitenmaten. We schatten de dikte op 0,5 cm en de hoogte op 22 cm en dat gaf het juiste volume.

“Ik verheug me nu al op de les van de koektrommel en de beschuitbus.”

Kunnen we nu ook de hoogte van de kleine bus berekenen?, was mijn volgende vraag. Als we ervan uitgaan dat de bussen van hetzelfde materiaal zijn gemaakt en dezelfde diameter hebben, dan kan dat. Maar klopt deze vooronderstelling? 'Ja', zei Cees, 'wij hebben hier thuis deze bussen.' Wat is dan de beste manier van berekenen? De leerlingen gingen weer aan de gang met diameter 10 cm enzovoort, maar is dat nodig? Nee, kijk maar:

$$V_{\text{beschuitbus}} = \pi r^2 \cdot 23,5 = 1700 \text{ en}$$

$$V_{\text{voorraadbus}} = \pi r^2 \cdot h = 1400.$$

$$\text{Dus } h = \frac{1400}{1700} \cdot 23,5 = 19,4 \text{ cm.}$$

De les ging over omwentelingslichamen, maar het doel van een deel van de les werd kritisch lezen en rekenen. Daarnaast de wiskunde thuis brengen, in de voorraadkast. Ik verheug me nu al op de les van de koektrommel en de beschuitbus. Waar die over gaat? Een lijnstuk van punt (0, 5) tot (22, 5) wordt gewenteld om de x-as en om de y-as. Welk omwentelingslichaam heeft het grootste volume? Toen ik zondagmorgen mijn beschuitje at, moest ik aan Cees denken: Eet hij nu een beschuitje uit die mooie bus?

Achteruitdenken

Deze week kwam ik er in de les weer eens achter dat hoe ik denk, niet gewoon is voor de leerlingen. Hierdoor komt het nogal eens voor dat ik ergens overheen stap, zonder dat ik in de gaten heb dat de leerling een probleem heeft. Een leermoment in het bijna laatste jaar docentschap. Maar het spreekwoord zegt dat we hier nooit te oud voor zijn.

Wat ik met 'achteruit denken' bedoel zal ik proberen te illustreren met een voorbeeld.

Gonio

In 4 vwo heb ik met gonio de formule $\cos(x) = -\cos(\pi - x)$ uitgelegd. Ik doe dat altijd met de eenheidscirkel en spiegel dan een driehoekje uit het eerste kwadrant in de y -as. Leerlingen zien wat er gebeurt en geven aan dat ze het begrijpen. Totdat ze dit zelf moeten toepassen. In een bijles behandelde ik $\cos(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\pi) = -\cos(x)$. Ik herleidde de vergelijking tot $\cos(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\pi) = \cos(\pi - x)$ om daarna de argumenten aan elkaar gelijk te stellen en tegengesteld te maken. Jo-Anne sputterde heftig bij de eerste stap. 'Waarom mag dat?' Ik schetste de eenheidscirkel met de driehoek en zijn spiegelbeeld en zei dat daaruit blijkt dat $\cos(x) = -\cos(\pi - x)$. Volgens Jo-Anne had het niets met de opgave te maken. Toen bedacht ik pas, dat ik de gevonden formule beter kon schrijven als $-\cos(x) = \cos(\pi - x)$. Het achteruit denken, dat je de vergelijking van achteren naar voren mag gebruiken, was voor Jo-Anne duidelijk een stap te veel, want toen ik het laatste opschreef was het haar meteen duidelijk wat ik deed.

Derdegraadsfuncties

Een tweede voorbeeld was ook in 4 vwo wiskunde B. De leerlingen moesten aan een praktische opdracht werken over derdegraadsfuncties. De moeilijkste vraag was: 'een derdegraadsfunctie heeft drie snijpunten met de x -as; neem twee van de nulpunten en bereken het gemiddelde, zeg m ; bewijs dat de raaklijn aan de grafiek in het punt met $x = m$, door het derde snijpunt gaat.'

Groot probleem is dat de derdegraadsfunctie lastig is te ontbinden in factoren. Dus starten met $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ is niet zo handig. Wat wel kan is dat je begint met $f(x) = a(x - b)(x - c)(x - d)$ en zo je nulpunten alvast een naam geeft. De meeste leerlingen kwamen hier niet aan toe. Snijpunten met de x -as dus

$f(x) = 0$ is geen enkel probleem, maar snijpunten geven en zo een functievoorschrift maken is duidelijk een andere opdracht. Ook hier is het achteruit denken te lastig.

Ik leerde deze week dus weer heel veel en ga dat de komende tijd jaar in praktijk brengen. Overigens was de uitwerking bij de praktische opdracht bij de meeste leerlingen fout. Ik denk dat ze internet afgespeurd hebben en toen vonden ze:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ heeft als nulpunten $x = a \vee x = b \vee x = c$. Uitgaande van de eerste twee nulpunten is $x_m = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ en dan maken we de raaklijn in bijbehorend punt. Deze heeft de vergelijking $y = ax + b$.

Nu weten we dat de vergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = ax + b$ drie oplossingen heeft, waarvan er twee dezelfde zijn (raakpunt) en zo kon bewezen worden dat de raaklijn precies door het derde snijpunt gaat. Er is nog veel uit te leggen want de driedubbele rol van a , b en c wordt duidelijk niet herkend.



Anders denken: voor een wiskundeleraar is meteen duidelijk wat hier staat, maar een leerling zal hierover na moeten denken

Ze zijn er nog!

Fractals

Soms somber ik wat over mijn leerlingen: gemakzuchtig, weinig nieuwsgierig, consumerend en geen initiatief nemend. En dan denk ik zelfs af en toe dat het vroeger beter was. Een totale misgedachte en ik verklaar dat die ontstaat, omdat je de mooie dingen het langste onthoudt. Zo had ik eens een groepje leerlingen dat fractals wilde programmeren. Het was toen de pc nog in de IBM-schoenen stond en programmeren nog veel door leerlingen werd gedaan. Ze wisten niet wat ze met complexe getallen moesten. We maakten een deeltje: ik zou complexe getallen uitleggen en zij zouden het programmeren aan mij uitleggen. Menig vrijdagmiddag op school met hen gezeten en docent en leerling genoten.

Een stapje meer

Maar, ze zijn er ook nu nog. Bij wiskunde-b heb ik de *abc*-formule bewezen met behulp van kwadraat afsplitsen en toen kwam de vraag of er ook zo'n soort formule voor derdegraads vergelijkingen bestaat. 'Jawel, de formule van Cardano, maar die valt buiten de lesstof en het is best een beetje lastig om die zomaar te bewijzen', was mijn reactie. 'Maar ik wil dat wel een keer doen voor de geïnteresseerde leerlingen in een extra uur', zei ik in de vooronderstelling dat niemand dat zou willen. Tot mijn grote verbazing waren er vier leerlingen die daar graag wat extra tijd voor over hadden. Ze zijn er dus nog, die leerlingen die best een stapje meer willen doen.

Cardano

Bij de voorbereiding op deze lessen sla ik mezelf een paar keer voor mijn hoofd. Misschien herken je het wel: jarenlang weet je al iets, maar een net andere kijk geeft meteen een mooi inzicht. Het gaat over het oplossen van tweede-graadsvergelijkingen $ax^2 + bx + c = 0$. De oplossingen zijn eenvoudig te vinden: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Nu kun je bij het afleiden van de formule van Cardano gebruiken dat de som van de oplossingen $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ en het product $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Dit is eenvoudig na te gaan en vóór de Mammoetwet was het gewone schoolkost. Maar nu pas keek ik eens beter naar de som en het product. Natuurlijk heb je daar de *abc*-formule helemaal niet voor nodig. Bij ontbinden krijg je $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + (-x_1 - x_2)x + x_1x_2$. Het herleiden van $ax^2 + bx + c = 0$ geeft meteen $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ waaruit je meteen de som en product kunt aflezen. Geen schokkende ontdekking, maar wel schokkend dat ik me dit pas na ruim 40 jaar realiseer. 'Ze zijn er nog!' slaat in eerste instantie op die leerlingen, maar ook op de, voor velen van ons vanzelfsprekende, weetjes die ik nu pas ontdek.

Grrrrr ...

De eerste weken zitten er weer op. Zelfs na 42 jaar ervaring maken nieuwe klassen me altijd een beetje zenuwachtig. In de vakantie maak ik me altijd een beetje zorgen. Zullen ze aanspreekbaar zijn? Zullen ze hun huiswerk maken? Zullen ze hun spullen in orde hebben? En dit jaar kwam de vraag er nog bij of ze grote 'corona-achterstanden' hebben. En zoals elk jaar zijn deze vragen geheel overbodig. Zoals elk jaar zitten er in elke nieuwe klas weer twintig tot dertig nieuwsgierige mensen. Niet altijd nieuwsgierig naar wiskunde, maar toch. Binnen twee weken is er weer een mooie groep gevormd, waar ik als leraar deel vanuit mag maken.

Eén puntje blijft lastig in de vierde klassen. De grafische rekenmachine. De GR en af en toe maak ik daar maar in gedachten de Grrrrr van. Je herkent misschien wel zo'n vierde klas. Johan heeft een GR van broer of zus die ongeveer tien jaar geleden de school verliet. 'Nee, Johan deze grafische rekenmachine mag niet meer. Hij heeft geen lampje!' 'Maar', sputtert Johan nog even, 'hij ziet er toch bijna hetzelfde uit!' Nauwelijks uit te leggen. Geertje heeft hem in bestelling, maar de GR is nog niet geleverd. Verschillende leerlingen komen met een lege GR. Hij loopt zo snel leeg, hoe kan dat toch? Examenstand is het euvel en dat is snel te verhelpen.



Dan volgen de eerste lessen. Lastig duidelijk te maken dat de onderbouwrekenmachine niet mag, want we moeten van begin af aan werken met de examenmachine. En dat is dus alleen een GR. Maar de rekenmachine uit de onderbouw is zo vertrouwd en wat we in het begin doen kan makkelijk met dat apparaat. Hoe overtuig ik mijn leerlingen dat ze

“Na 25 jaar tweede fase, kunnen we de GR wel wegdoen en aansluiten bij wat de maatschappij gebruikt.”

op de toets meteen op achterstand zijn als ze niet met de GR geoefend hebben? Worstelingen van de eerste weken, maar je weet dat het overgaat. Volhouden dus.

Of, afschaffen die GR. Maar wat dan? Je wilt toch realistische modellen kunnen behandelen. En, behandel de normale verdeling zonder GR! Overstappen naar GeoGebra en Excel en Wolfram Math en VU-stat of R is een redelijke optie. Natuurlijk zullen de leerlingen hier eerst vertrouwd mee moeten raken, maar dat komt wel goed. Nu gebruiken we een duur apparaat en de leerlingen zien nauwelijks het nut hiervan. Als toets en examen het enige nut is, is dat ook mager. En daarom na 25 jaar tweede fase, kunnen we de GR wel wegdoen en aansluiten bij wat de maatschappij gebruikt.

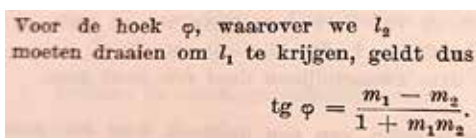
Graag vermeld ik nog een keer dat de klassen heel werkbaar zijn. De meeste leerlingen letten goed op en maken trouw hun huiswerk. Mijn laatste les is dus: maak je in de vakantie niet al te druk over hoe de klassen zullen zijn, want mijn ervaring leert, dat het bijna altijd meevalt.

Nederland ontwikkelingsland?

Op de jaarvergadering van de NVvW is er de laatste jaren altijd een boekenstand van het Wereldwiskunde Fonds. De doelstelling van het WwF is 'Ondersteuning van wiskundeonderwijs dat direct of indirect ten goede komt aan leerlingen op middelbare schoolniveau in ontwikkelingslanden door middel van financiële bijdragen aan projecten.' En daarom worden er boeken verkocht.

Weet, dat er juweeltjes tussen zitten die voor weinig te koop zijn. Zo keek ik in een boekje (uit 1961 en toen was het de zesde druk) over analytische meetkunde van Dr. P.G.J. Vredenduin.

Daarin zag ik iets wat ik niet wist: de hoek tussen twee lijnen kunnen we uitrekenen met behulp van de formule in figuur 1.



figuur 1

Nog nooit gezien, want ik gebruik de formule

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{r}_l \cdot \vec{r}_m|}{|\vec{r}_l| |\vec{r}_m|}$$

of het verschil van de richtingshoeken. De hedendaagse formule met de $\cos(\varphi)$ is niet makkelijk om te schrijven naar een tangens.

Met de gonioformules is het gestelde makkelijk te bewijzen:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)}$$

Deel nu teller en noemer door $\cos(\alpha)\cos(\beta)$ en je krijgt

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

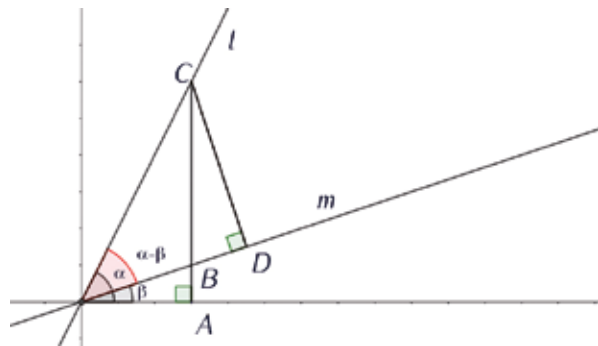
Gebruik nu dat de richtingscoëfficiënt gelijk is aan de tangens van richtingshoek en de formule is bewezen.

Maar in een meetkundeboek verwacht je een meer meetkundig bewijs. Dat ging niet vanzelf, maar gelukkig is het toetsweek en tijdens het surveilleren is er tijd genoeg om schetsjes en krabbels te maken. Het woordje *dus* triggerde me heel erg. In het boek staat het bewijs niet. Het is dus makkelijk of het wordt tot de algemene kennis gerekend. Ik moest het dus zelf doen en het lukte!

Het kan en als je het zelf wilt ontdekken, moet je nu stoppen met lezen.

Zonder het algemene geval geweld aan te doen kunnen we de lijnen door O tekenen, zie figuur 2.

De richtingshoeken zijn respectievelijk α en β en de richtingscoëfficiënten a en b .



figuur 2

We nemen $OA = 1$ en daarom is $AC = a$ en $AB = b$

$$\text{In figuur 2 kun je zien dat } \tan(\alpha - \beta) = \frac{CD}{OD} \quad (1)$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ODC$ geeft

$$OD^2 = OC^2 - CD^2 = 1 + a^2 - CD^2 \quad (2)$$

Verder zien we: $\triangle BDC \sim \triangle BAO$ en dat geeft de volgende evenredigheid:

$$\frac{DC}{AO} = \frac{BC}{BO} \text{ waaruit volgt dat } DC = \frac{a-b}{\sqrt{1+b^2}}.$$

Vervolgens substitueren we CD in formule (2):

$$OD^2 = 1 + \frac{a^2 - b^2}{1+b^2} = \frac{(a-b)^2}{1+b^2}$$

Nu vullen we dit in, in formule (1):

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{CD}{OD} = \frac{\frac{a-b}{\sqrt{1+b^2}}}{\frac{a-b}{\sqrt{1+b^2}}} = \frac{a-b}{ab+1}$$

waarmee de formule bewezen is. Omdat de hoek tussen twee lijnen een niet-stompe hoek is, komen er nog absoluutstrepen omheen.

Eén van de doelstellingen van het Wereldwiskunde Fonds is het stimuleren van het wiskundeonderwijs in ontwikkelingslanden. Door de boekenverkoop werd ik gestimuleerd om een bewijs te geven. Op zeker moment zal ik dit ook een keer in de klas behandelen. En zo merk je maar, Nederland kunnen we ook tot de ontwikkelingslanden rekenen.

Het getallenvoorbeeld

Op een toets voor wiskunde A in 4 havo stond de volgende vraag:

Toon aan dat de formule $t = 0,1 \cdot \sqrt{\frac{2x}{9,81}}$ te schrijven is als

$t = 0,045 \cdot \sqrt{x}$. Je herkent de vraag misschien wel, want hij komt uit een bij velen bekende bundel.

Doel van deze opgave is dat leerlingen een wortelvorm kunnen herleiden. Ik verwacht dus een antwoord als

$$t = 0,1 \cdot \sqrt{\frac{2x}{9,81}} = 0,1 \cdot \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{9,81}} = 0,1 \cdot \frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{\sqrt{9,81}} = 0,1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9,81}} \sqrt{x} = 0,045 \sqrt{x}.$$

Uiteraard is in de les aandacht geweest voor deze herleidingen en is daarbij verteld dat een getallenvoorbeeld niet voldoende is. Toch zijn er leerlingen die op de toets bij voorbeeld 4 voor x invullen en laten zien dat het bij beide formules hetzelfde antwoord oplevert. Er wordt meteen een aantal decimalen achterover gedrukt, maar daar bekommert de gemiddelde 4-havo-leerling zich niet om.

Om leerlingen te overtuigen dat één of twee getallenvoorbeelden nog niets zeggen over een bewering, gebruik ik het voorbeeld dat twee getallen bij elkaar optellen precies hetzelfde is als de twee getallen met elkaar vermenigvuldigen. Kijk maar: $2 + 2 = 2 \times 2$ en $0 + 0 = 0 \times 0$. De klas sputtert dan meteen en geven als tegenvoorbeeld twee en vijf. Dat ze dan mij meteen helpen door hun handelen onderuit te halen, hebben ze niet meteen in de gaten.

“Nadenken over fouten die leerlingen maken en daardoor weer nieuwe gedachten krijgen, dat ga ik zeker missen.”

Oppervlakkig denkend over mijn bewering, dacht ik dat er maar twee voorbeelden zijn waar de bewering waar voor is. Er zijn er echter oneindig veel. Ga maar na. Twee getallen bij elkaar optellen en dezelfde getallen met elkaar vermenigvuldigen is de vergelijking $a + b = a \times b$ oplossen. Deze vergelijking is te herleiden tot $a \cdot b - a = b$ en vervolgens tot $a = \frac{b}{b-1}$.

Kies nu voor b achtereenvolgens 3, 4, ... en je vindt respectievelijk $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, En $3 \times 1\frac{1}{2} = 3 + 1\frac{1}{2}$ en

$$4 \times 1\frac{1}{3} = 4 + 1\frac{1}{3}, \text{ enzovoort.}$$

Dit levert dus een oneindig veel voorbeelden die de valse bewering ondersteunen. Toen ik dit besprak in de klas, was er best veel aandacht voor en tegelijkertijd deden we weer een mooi stukje algebra.

Toetsen nakijken vind ik altijd vervelend werk en dat ga ik niet missen. Maar het nadenken over fouten die leerlingen maken en daardoor weer nieuwe gedachten krijgen, dat ga ik zeker missen.

Wat een getallenvoorbeeldje toch met je kan doen!

Taal bij wiskunde

In de afgelopen week was er een drietal momentjes in mijn lessen die met taal te maken hebben. Eigenlijk vier, maar het moment waarop ik een vraag totaal verkeerd las, druk ik liever achterover. Maar docenten moeten eerlijk zijn en daarom begin ik maar met het vierde voorval. In 4 vwo stond in een oefenopgave de volgende vraag: 'In welke maand was het aantal bezoekers per dag op de reguliere website voor het eerst minder dan 5000 meer dan op de mobiele website?' Minder en meer in één vraag vraagt natuurlijk om moeilijkheden, en zo'n vraag zou je niet moeten stellen. Maar helaas de vraag stond in de opgave. Wiskundig herleiden we het probleem tot $R = M + 5000$ of tot $M = R + 5000$. Een bron voor verwarring en ik ging dus het verkeerde pad in.

Reflectie

Nee dit voorval heb ik niet in gedachte. In dezelfde oefentoets moest er met behulp van lineair extrapoleren een waarde uitgerekend worden.

Gemiddeld aantal dagen ziekteverzuim per jaar			
	2005	2010	2013
55 – 65 jaar	10,5	11,0	10,4

Het ziekteverzuim in 2045 moest geschat worden. Niet zo moeilijk. We kijken naar de laatste twee kolommen en zeggen dat er een afname met 0,2 per jaar is. In 2045, 32 jaar na 2013, vinden we dan $10,4 - 32 \times 0,2 = 4,0$. Maar een tweede vraag stond er in de opgave bij: 'Geef commentaar'. Dit deed Micha verzuchten dat zo'n vraag bij wiskunde nog nooit gesteld was. Op een of andere manier was er in de onderbouw nog nooit gereflecteerd op een verkregen antwoord en daarom vinden veel leerlingen dat zo'n vraag helemaal niet bij wiskunde gesteld mag worden. Taal gebruiken bij wiskunde is voor hen heel ongewoon. Jammer, want dan blijft wiskunde iets van boekjes en niet van dagelijks leven.

Limieten

Een ander voorval gaat over limieten. Bij asymptoten en perforaties gebruiken we het limietbegrip. Leerlingen worden er vertrouwd mee gemaakt bij gebroken functies. Maar bij logaritmische en exponentiële functies kunnen we

de limieten ook gebruiken. Een opgave over $f(x) = \ln(x^2)$ was aan de orde en dat was aanleiding om ook even over $f(x) = \ln(x)$ na te denken. Verschil tussen limiet naar een getal en limiet van bovenaf en onderaf naar een getal. Een leerling die waarschijnlijk een beelddenker is, begreep niets van 'bovenaf'. We kijken toch naar x en die staat op de horizontale as. Probleem was weg toen ik van links en van rechts introduceerde. Wat ik altijd zeg, is verwarrend voor sommige leerlingen. Taal kan hier problemen geven.

“Taal gebruiken bij wiskunde is voor leerlingen heel ongewoon.”

Kruispunt en snijpunt

Het laatste over kruisende lijnen. Nou ja, snijdende lijnen wordt er dan bedoeld. Een snijpunt wordt zelden een kruispunt genoemd, maar lijnen die snijden worden wel vaak door leerlingen als kruisend aangeduid. Ik leg dan uit dat we een kruispunt bij de Zandstraat en de Rondweg wiskundig een snijpunt moeten noemen en daar waar de A12 over de Rondweg gaat is wiskundig gezien een kruispunt. Overigens heeft zo'n kruispunt helemaal geen naam in de Nederlandse taal. Zo merk je maar weer dat de taal niet zo vanzelfsprekend is. En dan doet de GR ook nog een duit in het zakje. Hoe bepalen we het snijpunt van twee grafieken? Ja, precies met 'calc intersect' en dat terwijl een intersection een kruispunt is...

Vastgeroest

Mijn laatste

Ab van der Roest

Ik ben gestopt met lesgeven en ik stop daarom ook met mijn verhalen. Ik ga geen oude verhalen ophalen, je zou me al snel een oude zeur vinden. Als ik geen nieuwe contacten met leerlingen heb, heb ik dus ook niets meer vertellen.

Een leven zonder lesgeven is nauwelijks voor te stellen. Ik ben 42,5 jaar leraar geweest en heb in die tijd altijd geheel of gedeeltelijk voor de klas gestaan. En dan krijg ik nu een leven zonder bel, zonder nakijkwerk en zonder leerlingen. Uitleggen van de wiskunde alleen nog aan mijn kleinkinderen. Ik ga de bel niet missen, dat weet ik wel zeker. De contacten met leerlingen en collega's wel, dat weet ik ook zeker. Als wiskundeleraar hebben we zo'n mooie baan. Elke dag ontmoet je zo'n 150 jonge mensen en kun je met hen over van alles praten. Soms is het voetballen, een andere keer homoseksualiteit of mijn geloof. Soms gaat het over moeilijke thuissituaties en soms over de vreugdevolle dingen van het leven. Als leraar kun je veel voor leerlingen betekenen, en heel af en toe krijg je het terug. Zomaar in een zinnetje of in een gebaar. Eigenlijk gaat het dan zelden over wiskunde, maar veel meer over al die andere zaken die in het lesgeven mee kunnen komen.

Wordt mijn leven nu een leven zonder wiskunde? Nee, zeker niet. Hoe je het wendt of keert, de wiskunde komt je altijd tegen. Loop je in Elburg, dan zie je opeens de volgende steen:



Zoiets loop je niet zomaar voorbij.

“Elke dag ontmoet je zo'n 150 jonge mensen en kun je met hen over van alles praten.”

Ben je in Barcelona en kijk je vol verwondering naar de Sagrada Familia, dan valt je oog op



Toen ik dit zag, heb ik 's avonds meteen een magisch vierkant van vier bij vier gemaakt. Drie bij drie is redelijk eenvoudig, maar vier bij vier is even puzzelen. Als we zomaar op straat deze wiskunde tegen kunnen komen, dan begrijp je wel dat de wiskunde voor mij niet stopt. Vastgeroest wel, alhoewel de hoofdredacteur er in ieder geval nog eentje achtergehouden heeft. Die komt nog in nummer 3.

Bedankt voor het lezen en reageren. Geniet van je mooie vak en ik hoop te genieten van mijn pensioen. Tot ziens.

Over de auteur

Ab van der Roest was docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal.

E-mailadres: a.b.vanderroest@ziggo.nl