Olympiadepuzzel

Euclides 97 nummer 6

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Cijfersommen

Opgave

Voor een positief geheel getal n schrijven we $S(n)$ voor de som van de cijfers van n. We definiëren de functie $f(n)$ op recursieve wijze door

$$f(n) = \begin{cases} n & \text{als } n \leqslant 9 \\ S(n) + f(S(n)) & \text{als } n \geqslant 10. \end{cases}$$

Er geldt bijvoorbeeld dat $S(123456789) = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$ en dus $f(123456789) = 45 + f(45) = 45 + 9 + f(9) = 45 + 9 + 9 = 63$.

Bestaat er een positief geheel getal n zodanig dat $f(n) = 2022$? Geef een getal n met deze eigenschap, of toon aan dat zo'n n niet bestaat.

Uitwerking

De mogelijke antwoorden voor n zijn alle n zodat $S(n) = 1986$, 2006 of 2012. Het is eenvoudig na te gaan dat deze n aan de voorwaarde voldoen: als $S(n) = 1986$, dan geldt dat

$$\begin{aligned} f(n) = &S(n) + f(S(n)) = 1986 + f(1986) = \\ &1986 + S(1986) + f(S(1986)) = 1986 + 24 + f(24) = \\ &1986 + 24 + S(24) + f(S(24)) = 1986 + 24 + 6 + f(6) = \\ &1986 + 24 + 6 + 6 = 2022. \end{aligned}$$

Op dezelfde manier kun je uitrekenen dat $f(2006) = 8 + f(8) = 16$ en $f(2012) = 5 + f(5) = 10$, zodat $f(n) = S(n) + f(S(n)) = 2022$ als $S(n) = 2006$ of 2012.

Er zijn oneindig veel getallen n met deze cijfersommen. Voor $S(n) = 1986$ kunnen we bijvoorbeeld het getal bestaande uit 1986 enen nemen, of een getal met 220 negens en een zes.

Hiermee hebben we de opgave opgelost door een mogelijke waarde voor n te geven met $f(n) = 2022$. Voor de volledigheid leggen we uit hoe je de mogelijke waarden voor $S(n)$ kan vinden en bewijzen we dat dit de enige mogelijkheden zijn.

Schrijf $m = S(n)$. Dan moet gelden dat $m + f(m) = 2022$. Door de waarde van $f(k)$ voor een paar getallen k uit te rekenen, zie je dat $f(k)$ meestal veel kleiner is dan k. Dat is te verklaren doordat $S(k)$ hooguit gelijk is aan 9 maal het aantal cijfers van k en dus kleiner is dan $9 \cdot ({}^{10}\log(k) + 1)$. Omdat $f(S(k))$ meestal nog veel kleiner is, is $f(k) = S(k) + f(S(k))$ meestal ook veel kleiner dan k. Als geldt dat $m + f(m) = 2022$, dan zal m dus iets kleiner zijn dan 2022. Door nu een aantal waarden van m uit te proberen, vind je een van de mogelijkheden 1986, 2006 of 2012.

We tonen nu aan dat dit de enige drie waarden van m zijn die voldoen aan $m + f(m) = 2022$.

Het is duidelijk dat $m \leqslant 2022$. Schrijf $m = 1000a + 100b + 10c + d$, waarbij a, b, c en d de cijfers van m zijn en eventueel ook 0 kunnen zijn. Dan is $S(m) = a + b + c + d \leqslant \max(1+9+9+9, 2+0+1+9, 2+0+2+2) = 28$. We onderscheiden vijf gevallen: $S(m) \leqslant 9$, $10 \leqslant S(m) \leqslant 18$, $S(m) = 19$, $20 \leqslant S(m) \leqslant 27$ en $S(m) = 28$.

Stel dat $S(m) \leqslant 9$. Dan is $f(S(m)) = S(m)$ en dus

$$m + f(m) = m + S(m) + f(S(m)) = m + 2S(m) = 1002a + 102b + 12c + 3d.$$

Dit moet gelijk zijn aan 2022. Omdat $102b + 12c + 3d \leqslant 117 \cdot 9 = 1053$, moet a gelijk zijn aan 1 of 2. Als $a = 1$, dan geldt dat $102b + 12c + 3d = 1020$. Uit $12c + 3d \leqslant 15 \cdot 9 = 135$ volgt nu dat $b = 9$. Dit is in tegenspraak met $S(m) \leqslant 9$. Als $a = 2$, dan is $102b + 12c + 3d = 18$ en dus $b = 0$ en $12c + 3d = 18$. We vinden als oplossingen $c = 0$ en $d = 6$, of $c = 1$ en $d = 2$. Dit geeft $\boxed{m = 2006}$ of $\boxed{m = 2012}$.

Stel nu dat $10 \leqslant S(m) \leqslant 18$. Dan is $S(S(m)) \leqslant 9$ en dus $f(S(m)) = S(S(m)) + f(S(S(m))) = 2S(S(m))$. Schrijf $S(m) = 10 + e$ met $0 \leqslant e \leqslant 9$. Dan is $S(S(m)) = 1 + e$ en dus $S(S(m)) = S(m) - 9$. Dit geeft

$$\begin{aligned} m + f(m) &= m + S(m) + f(S(m)) \\ &= m + S(m) + 2S(S(m)) \\ &= m + 3S(m) - 18 \\ &= 1003a + 103b + 13c + 4d - 18 = 2022 \end{aligned}$$

Op dezelfde manier als hierboven vinden we dat $a = 1$ of $a = 2$. Als $a = 1$, dan vinden we opnieuw dat $b = 9$. Hieruit volgt dat $13c + 4d = 110$. De enige oplossing met $0 \leqslant c, d \leqslant 9$ is $c = 6$ en $d = 8$. Dan is echter $S(m) = S(1968) = 24 > 18$. Er zijn dus geen oplossingen voor m. Voor $a = 2$ krijgen we $103b + 13c + 4d = 34$ en dus $b = 0$. De enige oplossing is $c = d = 2$, maar ook $m = 2022$ voldoet niet aan $10 \leqslant S(m) \leqslant 18$.

Als $20 \leqslant S(m) \leqslant 27$, dan geldt wederom dat $S(S(m)) \leqslant 9$. Dit geval gaat volledig analoog aan het geval $10 \leqslant S(m) \leqslant 18$, alleen is nu $S(S(m)) = S(m) - 18$. We vinden uiteindelijk $a = 1$, $b = 9$ en $13c + 4d = 128$ met de oplossing $c = 8$ en $d = 6$, zodat $\boxed{m = 1986}$. Met $a = 2$ krijgen we $b = 0$ en $13c + 4d = 52$. Hiervan is de enige oplossing $c = 4$ en $d = 0$, maar $m = 2040$ voldoet niet aan $20 \leqslant S(m) \leqslant 27$.

Nu resteren nog de gevallen $S(m) = 19$ en $S(m) = 28$. In beide gevallen is $S(S(m)) = 10$ zodat $f(S(S(m))) = 1 + f(1) = 2$. Dit geeft

$$m + f(m) = m + S(m) + f(S(m)) = m + S(m) + S(S(m)) + f(S(S(m))) = m + S(m) + 12$$

zodat moet gelden dat $m + S(m) = 2010$. Hieruit volgt dat $S(m) = 19$ en $S(m) = 28$ respectievelijk $m = 1991$ en $m = 1982$ geven, maar in beide gevallen is $S(m) = 20$ en voldoet m dus niet aan de voorwaarden.

De mogelijke waarden voor m zijn dus 1986, 2006 en 2012.

Inzenders met de juiste oplossing

Han Baumer, P. X. Dillo, Gé Groenewegen, Sharon Groot Zwaaftink, Mitchel van Heesch, Hans Linders, Astrid Prent, Jos Remijn, Matthijs Schukking, Piet Smal, Ruud Stolwijk, Monica Woldinga en Sjoerd Zondervan

Winnaar van de cadeaubon

Monica Woldinga