Bespreking opgaven examen vwo wiskunde B

Dick Spaans en Joanna de Jager

Inverse van ln(x)

De functies f_p en g_p zijn gegeven door $f_p(x) = p\ln(x)$ en $g_p(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{p}}$, voor $p \neq 0$.
De functies f_p en g_p zijn elkaars inverse.

1 Bewijs dit.

figuur 1

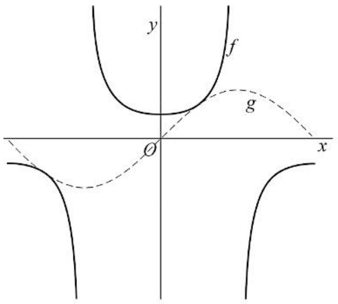
Het bepalen van de inverse van f_p bleek tamelijk rechttoe rechtaan, ook omdat de leerling het antwoord heeft. En natuurlijk is er nog het scenario van het bepalen van de inverse van g_p.

Gebroken sinusfunctie

De functie f is voor $-\pi < x < \pi$ gegeven door:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(2x)}$$

De functie g is gegeven door $g(x) = \sin(x)$.
In de figuur zijn de grafieken van f en g weergegeven.



8 Bewijs dat de grafieken van f en g elkaar in twee punten raken.

figuur 2

De opgave ‘Gebroken sinusfunctie’, zie figuur 2, is daarentegen een stevige bewijsopgave. Veel leerlingen verzuimden bij het oplossen van de vergelijking $f(x) = g(x)$ de tussenoplossing $\sin(x) = 0$ te noteren. Dat deze tussenoplossing vervolgens niet tot een eindoplossing leidde (omdat bij de grafiek van $f(x)$ een perforatie zit bij $x = 0$), is natuurlijk een ander punt, maar wel een mooi addertje onder het gras. De opgave vergde veel stappen, maar als je de hoofdlijn $f(x) = g(x)$ en $f'(x) = g'(x)$ vasthield was deze 8-puntsbewijsopgave wiskundig niet zo heel complex. Hij is desondanks wat benedengemiddeld gemaakt.

Scheve asymptoot

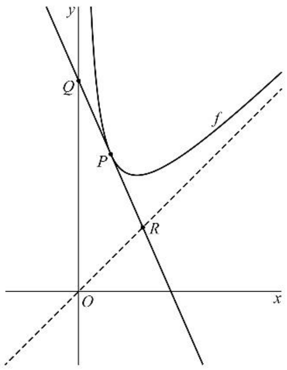
De functie f is gegeven door $f(x) = x + \frac{2}{x}$.

De grafiek van f heeft een verticale asymptoot met vergelijking $x = 0$ en een scheve asymptoot.

In onderstaande figuur is voor $x > 0$ de grafiek van f weergegeven.

De scheve asymptoot is gestippeld weergegeven.

figuur



Op de grafiek van f ligt een willekeurig punt $P(p,\ p + \frac{2}{p})$.

De raaklijn aan de grafiek van f in P snijdt de verticale asymptoot in punt Q en de scheve asymptoot in punt R. Zie de figuur.

15 Bewijs dat P het midden is van lijnstuk QR.

figuur 3

'Scheve asymptoot' is een bewijsopgave van vergelijkbaar kaliber, met parameter, waar leerlingen lekker hun hersens op konden kraken. Eerlijk gezegd lijkt deze opgave complexer dan 'Gebroken sinusfunctie', omdat je niet dat houvast hebt van $f(x) = g(x)$ en $f'(x) = g'(x)$, maar zelf de hoofdlijn moet ontwikkelen. En met een schuine en een verticale asymptoot (waarvan een doorsneeleerling op dat moment nog niet zo goed weet wat hij ermee aan moet) valt dat niet mee. Een logische volgende stap is de raaklijn aan P, met een vervelende richtingscoëfficiënt ($a = 1 - 2/p^2$) en een vervelende startwaarde ($b = 4/p$), waarmee dan ook nog eens gerekend moet worden om de coördinaten van R te berekenen.
Dit lijkt ons toch echt een abstractere en lastigere opgave dan opgave 'Gebroken sinusfunctie'. Toch bleek deze opgave landelijk gezien niet de slechtst gemaakte te zijn, met iets meer dan 50% van de behaalde punten. Een compliment aan de leerlingen die zich hier goed doorheen hebben geslagen.

Vlieger

Gegeven zijn voor $a > 0$ de punten $A(0, a)$, $B(1, 0)$, $C(0, -1)$ en $D(-1, 0)$.

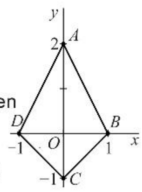
Vierhoek $ABCD$ is een vlieger.

In figuur 1 is de vlieger getekend voor $a = 2$.

De middelloodlijn van een lijnstuk gaat door het midden van dat lijnstuk en staat loodrecht op dat lijnstuk.

Voor $a = 2$ gaat de middelloodlijn van lijnstuk AB niet door D.

figuur 1



16 Bereken exact voor welke waarde van a de middelloodlijn van lijnstuk AB wél door D gaat.

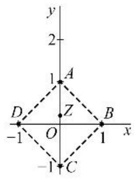
figuur 4

Vraag 16, zie figuur 4, vormt een mooie combinatie van meetkunde en analyse. Het concept loodrecht kon hier zowel via het inproduct van richtingsvectoren als de loodrechtregel, dat het product van twee richtingscoëfficiënten gelijk moet zijn aan -1, ingezet worden. In het tweede geval liepen de leerlingen het risico verstrikt te raken, met de a als symbool voor de richtingscoëfficiënt maar ook als parameter, zeker

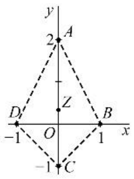
daar die laatste *a* verwerkt moet worden in die eerste. Toch gold voor deze opgave die loodrechtregel als hoofdlijn en was de rest de uitwerking daarvan.
Leerlingen bleken de meeste moeite te hebben gehad met de twee vragen van opgave 'Vlieger' (40%). 'Ik kan geen "*a*" meer zien', gaf een leerling op de site aan, vermoedelijk doelend op deze opgave.

In de hoekpunten van de vlieger bevinden zich puntmassa's:
- in punt A met gewicht 2;
- in zowel B als D met gewicht 1;
- in punt C met gewicht a.

figuur 2



figuur 3



In figuur 2 zijn de vlieger, de puntmassa's en het zwaartepunt Z van de puntmassa's getekend voor het geval $a = 1$.
In figuur 3 zijn de vlieger, de puntmassa's en het zwaartepunt Z getekend voor het geval $a = 2$.

Wanneer a groter wordt, verschuift het punt $A(0, a)$ over de y-as omhoog en neemt het gewicht in C toe. Ook het zwaartepunt Z van de vier puntmassa's verandert dan van plaats. Wanneer a onbegrensd toeneemt, nadert het zwaartepunt Z tot een vast punt P.

17 Bewijs dat de y-coördinaat van dat punt P gelijk is aan 1.

figuur 5

De laatste vraag ging over een zwaartepunt, zie figuur 5. Dat onderwerp is in het huidige programma alleen eerder in 2018-I voorgekomen, maar het is dan ook een 'klein' onderwerp. Tegelijkertijd is het een onderwerp dat ook in de natuurkunde wordt behandeld (*moment* = *kracht* × *arm*) en in feite met intuïtie dan wel boerenslimheid op te lossen is.

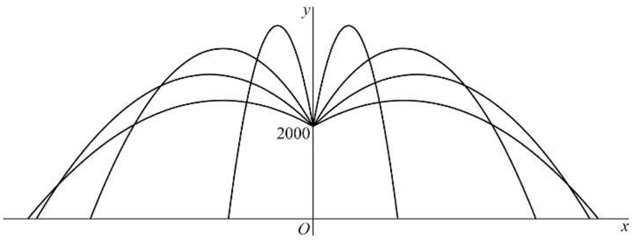
Vulkaan

Een vulkaan kan op verschillende manieren tot uitbarsting komen. Bij een zogenoemde plinische uitbarsting wordt de druk binnen de vulkaan steeds groter totdat de vulkaan met groot geweld tot uitbarsting komt. Bij de uitbarsting worden brokken gesmolten steen weggeslingerd die lavabommen worden genoemd.

In een model van de baan van een lavabom wordt ervan uitgegaan dat op het moment van de uitbarsting alle lavabommen een snelheid hebben van 210 meter per seconde. Een tweede uitgangspunt is dat elke lavabom een parabolische baan beschrijft. De hoogte van de vulkaan ten opzichte van de grond is 2000 meter.

In figuur 1 zie je de banen van een aantal lavabommen die in het vlak door de x-as en de y-as bewegen.

figuur 1



De bewegingsvergelijkingen van een lavabom hangen af van de richting waarin de lavabom tijdens de uitbarsting wordt weggeslingerd. In het model worden de volgende bewegingsvergelijkingen als uitgangspunt genomen:

$$\begin{cases} x(t) = 210\cos(\alpha)\cdot t \\ y(t) = 2000 + 210\sin(\alpha)\cdot t - 4{,}9t^2 \end{cases} \qquad (1)$$

Hierbij is α de hoek die de baan van de lavabom op het moment van wegslingeren maakt met een horizontale lijn, waarbij $0 < \alpha < \pi$.
Verder is t de tijd in seconden (waarbij $t = 0$ het moment van wegslingeren is) en zijn $x(t)$ en $y(t)$ in meters.

figuur 6

Deze opgave begint met een uitleg van een bepaald soort uitbarsting (de ‘plinische’ uitbarsting); de beginsnelheid van 210 m/s komt tot uiting in de formules $x(t)$ en $y(t)$, maar er hoeft niet mee gerekend te worden. Ten slotte bevat de opgave drie keer ‘uitgangspunt’ of ‘ervan uitgegaan’. Kortom: een dergelijk verhaal vergt behoorlijk wat van de begrijpend-lezen-vaardigheden van leerlingen en zou daarom in een wiskunde-A-examen niet misstaan. Wij denken dan ook dat leerlingen die minder taalgevoel hebben of dyslectisch zijn bij dit soort talige opgaven in het nadeel zijn.

Over de auteurs

Dick Spaans is wiskundedocent op het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel. E-mailadres: *spa@kwcollege.nl*
Joanne de Jager is wiskundedocent op het Metis Montessori Lyceum in Amsterdam en is sinds 2019 bestuurslid van de NVvW. E-mailadres: *j.dejager@nvvw.nl*