Puzzel 97-5 **Wobien Doyer**
Het bijzondere getal 3 **Lieke de Rooij**

Behalve het getal van deze maand maart (3) zijn er op internet heel veel bijzonderheden over het getal 3 te vinden. Zie bijvoorbeeld: https://en.wikipedia.org/wiki/3

Bij deze puzzel speelt het getal 3 een bijzondere rol met eigenschappen die niet op bovengenoemde site staan. En een tip voor alle vragen: denk aan de titel van deze puzzel.
Het gaat om rekenkundige rijtjes van lengte 3.
Eerst bekijken we drie priemgetallen op onderling gelijke afstanden en noemen dat een **priem-trio**. Die vormen dus een rekenkundig rijtje. Bijvoorbeeld 5, 11, 17 met onderlinge afstand 6.
(Alleen 3, 5, 7 wordt wel een priem-drieling genoemd).

Opgave 1a
Welke priem-trio's zijn er die beginnen met 3 en eindigen met een getal kleiner of gelijk aan het nummer van deze jaargang van *Euclides*?
Uitwerking opgave 1a
Noem het trio a, b en c, dus hier $a = 3$. Dan is $c = 2b - a$.
Daaruit volgt dat als b eindigt op een 9, dan eindigt $2b$ op een 8 en c dus op $8 - 3 = 5$ en dus is c niet priem.
Uit $c = 2b - a$ volgt $b = \frac{1}{2}(a + c)$. Als $c \leq 97$ dan is $b = \frac{1}{2}(3 + c) \leq 50$, en dus $b \leq 47$ (48, 49 en 50 zijn niet priem).
b moet dus een priemgetal zijn tussen 5 en 47, niet eindigend op 9. Dat zijn er maar 11, waarvan er één ($b = 47$, met $c = 2 \cdot 47 - 3 = 91 = 7 \times 13$) niet voldoet:
De toegestane 10 trio's:

a	*b*	*c*
3	5	7
3	7	11
3	11	19
3	13	23
3	17	31
3	23	43
3	31	59
3	37	71
3	41	79
3	43	83

Het lijkt erop dat alle priemgetallen (>2) de eerste, maar ook de middelste (>3) van een priem-trio kunnen zijn. Een bewijs kennen we echter niet. Wel hebben we onderzocht dat het klopt tot 2.000.000.000.

Opgave 1b
Onderzoek of er priemgetallen zijn ($p > 5$) die niet het grootste getal van de drie van een priem-trio kunnen zijn. Geef daarvan alle voorbeelden voor $p \leq 61$, of laat zien dat alle priemgetallen tot en met 61 wel de laatste van een priem-trio kunnen zijn.
Uitwerking opgave 1b
We gebruiken de naamgeving uit opgave 1, dus we zoeken priemtrio's a, b, c met $c = p \leq 61$
We weten al uit opgave 1a dat $p = c =$ 7, 11, 19, 23, 31, 43, en 59 de laatste van een trio kunnen zijn.

Blijft over (met $c \leq 61$): $c = 13, 17, 29, 37, 41, 47, 53$ en 61.
We weten al dat deze niet lukken met $a = 3$.

In een priem-trio is het verschil tussen de eerste en de laatste altijd een 4-voud, dus $a \equiv c$ mod 4, en voor de middelste geldt $b = \frac{1}{2}(a + c)$
Voor elke te onderzoeken waarde van c zoeken we dus een begingetal a priem met $3 < a < c$ en $a \equiv c$ mod 4. Als dan $b = \frac{1}{2}(a + c)$ met b priem dan hebben we een oplossing.
We onderzoeken de waarden van $c = 13, 17, 29, 37, 41, 47, 53$ en 61:

$c = 13 \equiv 1 \; mod \; 4$. Dus a moet ook 1 mod 4 zijn, priem en $3 < a < 13$.
Dan blijft alleen $a = 5$ over. Dan is $b = \frac{1}{2}(a + c) = \frac{5+13}{2} = 9$, dus niet priem
13 kan dus niet het grootste getal van een priemtrio zijn.

$c = 17 \equiv 1$ mod 4. Dus a moet ook 1 mod 4 zijn, priem en $3 < a < 17$.
Dus $a = 5$ of 13. Met $a = 5$ lukt het: dan is $b = \frac{1}{2}(a + c) = \frac{5+17}{2} = 11$
17 is dus het grootste getal van het priemtrio 5-13-17

$c = 29 \equiv 1$ mod 4. Dus a moet ook 1 mod 4 zijn, priem en $3 < a < 29$
Dus $a = 5$, 13 of 17 . Met $a = 5$ lukt het: dan is $b = \frac{1}{2}(a + c) = \frac{1}{2}(5 + 29) = 17$
29 is dus het grootste getal van het priemtrio 5-17-29

$c = 37 \equiv 1$ mod 4. Dus a moet ook 1 mod 4 zijn, priem en $3 < a < 37$
Dus $a = 5$, 13, 17, of 29. Dan wordt $b = \frac{1}{2}(a + c)$= 21, 25, 27 of 33, dus geen van allen priem.
37 kan dus niet het grootste getal van een priemtrio zijn.

$c = 41 \equiv 1$ mod 4. Dus a moet ook 1 mod 4 zijn, priem en $3 < a < 41$
Dus $a = 5, 13, 17, 29$ .... Dan wordt $b = \frac{1}{2}(a + c)$ en dat lukt meteen met a=5 en b=23
41 is dus het grootste getal van het priem-trio 5-23-41

$c = 47 \equiv 3$ mod 4. Dus a moet ook 3 mod 4 zijn, priem en $3 < a < 47$
Dus $a = 7, 11, 19 \ldots \ldots$ met $a = 7$ lukt het niet (dan wordt $b = \frac{1}{2}(a + c) = 27$, dus niet priem.)
Maar met $a = 11$ hebben we $b = \frac{1}{2}(a + c)$ =29
47 is dus het grootste getal van het priem-trio 11-29-47.

$c = 53 \equiv 1$ mod 4. Dus a moet ook 1 mod 4 zijn, priem en $3 < a < 53$
Dus $a = 5, 13, 17, 29 \ldots \ldots$ Het lukt meteen met $a = 5$, en $b = \frac{1}{2}(a + c) = 29$
53 is dus het grootste getal van het priem-trio 5-29-53.

$c = 57 \equiv 1$ mod 4. Dus a moet ook 1 mod 4 zijn, priem en $3 < a < 57$
Dus $a = 5, 13, 17, 29 \ldots \ldots$ Het lukt meteen met $a = 5$, en $b = \frac{1}{2}(a + c)$ =31
57 is dus het grootste getal van het priem-trio 5-31-57.

$c = 61 \equiv 1$ mod 4. Dus a moet ook 1 mod 4 zijn, priem en $3 < a < 61$
Dus $a = 5, 13, 17 \ldots \ldots$ Het lukt niet met $a = 5$ (dan dan wordt $b = \frac{1}{2}(a + c)$=33, dus niet priem)
Maar met $a = 13$ hebben we $b = \frac{1}{2}(a + c)$ =37
61 is dus het grootste getal van het priem-trio 13-37-61.

Er zijn dus wel priemgetallen >5 die niet de laatste van een priem-trio kunnen zijn. Voor $c \leq 61$ zijn dat er precies twee: $c = 13$ en $c = 37$.

Voor opgave 2 beperken we ons niet tot priemgetallen, maar tot alle positieve gehele getallen van 1 tot en met *n*.
Daaruit kiezen we een geordende verzameling, zodanig dat er geen drie getallen in voorkomen die een rekenkundige rij vormen van lengte ≥ 3. Dus bijvoorbeeld niet 1, 2, 7, 9, 12 want 2, 7, 12 is een rekenkundige rij met verschil 5. Een verzameling die hier aan voldoet noemen we een R-vrije verzameling.
We kunnen zo'n R-vrije verzameling kiezen met een 'gretig' algoritme: Kies steeds het kleinste toegestane getal, dus start met 1.
Voor $n = 10$ krijg je zo bijvoorbeeld een R-vrije verzameling van 5 getallen: 1, 2, 4, 5 en 10.
Hierover is al veel onderzoek gedaan, ook met andere voorwaarden. Met name is onderzocht naar formules voor een bovengrens van het aantal toegestane getallen bij een gegeven waarde van *n*. Dat is meestal groter dan het aantal dat je vindt met het 'gretige' algoritme.

Opgave 2a: Bepaal met het 'gretige' algoritme de kleinste *n* waarbij er meer dan 8 getallen in de verzameling zitten.
Uitwerking opgave 2a:
We zetten de getallen in een tabel waarin we één voor één toegestane getallen toevoegen en verboden getallen afkruisen:
Vul in: 1 en 2, dan is 3 verboden.
Vul in: 4, dan is 7 (1-4-7) en 6 (2-4-6) verboden.
Vul in 5, dan is 9 (1-5-9), 8 (2-5-8) en 6 (4-5-6) verboden
Vul in 10, dan is 19 (1-10-19), 18 (2-10-18), 16(4-10-16), 15 (5-10-15) verboden.
Vul in 11, dan is 21 (1-11-21), 20 (2-11-20), 18 (4-11-18), 17(5-11-17), 12 (10-11-12) verboden.
Vul in 13, dan is 25 (1-13-25), 24 (2-13-24), 22 (4-13-22), 21(5-13-21), 15 (11-13-15) verboden.
Vul in 14, dan is 27 (1-14-27), 26 (2-14-26), 21 (4-14-24), 20 (5-14-23), 18 (10-14-18), 17 (11-14-17), 15 (13-14-15) verboden.
Vul in 28, en dan hebben we 9 getallen, dus meer dan 8 getallen in de verzameling.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	2	X	4	5	X	X	X	X	10
10	11	X	13	14	X	X	X	X	X	X
20	X	X	X	X	X	X	X	28		

28 is dus de kleinste *n* waarbij er meer dan 8 getallen in de verzameling zitten als je het 'gretige' algoritme gebruikt..

Er zijn R-vrije verzamelingen met meer dan 8 getallen met een kleinere *n* dan de *n* die je hebt gevonden bij opgave 2a (Dus niet met het 'gretige' algoritme).

Opgave 2b: Geef een voorbeeld van zo'n verzameling (hoe groter je verzameling en/of hoe kleiner *n*, hoe meer punten je krijgt voor de ladder).
Uitwerking opgave 2b:

De kleinste gevonden waarde voor *n* is *n*=20 met 9 getallen. Dat kan op verschillende manieren:
1, 2, 6, 7, 9, 14, 15, 18, 20 of:
1, 3, 6, 8, 12, 14, 15, 19, 20 of:
1, 3, 6, 7, 12, 14, 15, 19, 20.
Ook waren er oplossingen voor 10 of 11 getallen, bijvoorbeeld
10 getallen: 1, 2, 5, 7, 11, 16, 18, 19, 23, 24
11 getallen: 1, 2, 5, 7, 11, 16, 18, 19, 23, 24, 26

Sommige inzenders hadden door goed zoeken op internet een antwoord op opgave 2b gevonden. Dat was natuurlijk niet onze bedoeling. Maar ook het stimuleren om leuke wiskunde op internet te zoeken zou een doel van onze puzzels kunnen zijn.

We zien dat als je wel het ‘gretige’ algoritme gebruikt de *R*-vrije verzameling begint met paartjes van twee opvolgende getallen: 1, 2, 4, 5, … De vraag is of dat zo door gaat.

Opgave 2c: Bewijs (of geef een tegenvoorbeeld) dat de getallen in een *R*-vrije verzameling, verkregen met het ‘gretige’ algoritme altijd in paartjes van 2 voorkomen.
Uitwerking opgave 2c:
Inleiding:

Als we kijken naar het eerste stukje van de getallen die we krijgen met het ‘gretige’ algoritme, dan zien we steeds paartjes van twee: 1, 2; 4, 5; 10, 11; 13, 14; 28, 29......

Het is niet moeilijk te begrijpen dat er nooit 3 of meer opvolgende getallen worden ‘goedgekeurd’ door het algoritme: 3 opvolgende getallen vormen een rekenkundige rij.
We hoeven dus ‘alleen maar’ te bewijzen dat als een getal word goedgekeurd, ook het volgende getal wordt goedgekeurd.

We hebben dus een aantal paartjes en we moeten bewijzen dat de volgende getallen die door het algoritme worden ‘goedgekeurd’ opnieuw paartjes vormen. Volledige inductie ligt dus voor de hand.
We gaan daarom kijken welke getallen er worden afgekeurd als gevolg van de bestaande paartjes.
Als we de twee getallen nemen uit hetzelfde paartje vormen die een rekenkundige rij met hun opvolger en dus wordt de opvolger van een paartje afgekeurd, maar dat wisten we al.
We hoeven dus alleen te kijken naar 2 getallen uit 2 verschillende paartjes.
We zullen dan bewijzen dat elk tweetal paartjes ervoor zorgt dat 4 opvolgende getallen worden afgekeurd. De afgekeurde getallen vormen dus altijd blokjes van 4.
Maar dat is niet genoeg. Als we willekeurig blokjes van 4 afkeuren dan hoeven de overblijvende getallen niet perse paartjes te zijn. Dat is alleen zo als er regelmaat is in de begin- en eindpunten van die blokjes van 4.
We kunnen die regelmaat zoeken in de tabel die we maakten in opgave 2a: de getallen die voorafgaan aan de paartjes zijn 0, 3, 9, 12, 27.....
Allemaal 3-vouden dus.
Het laatste getal van de blokjes van 4 is dan een 3-voud, en het eerste dus ook.

Dat is genoeg om het bewijs rond te krijgen.

Stelling: De getallen in een *R*-vrije verzameling, verkregen met het ‘gretige’ algoritme zijn altijd in paartjes van 2 die worden voorafgegaan en gevolgd door een 3-voud.

We bewijzen dat met volledige inductie, we nemen daarbij steeds stappen van 3.

I: Inductie veronderstelling: Voor een geheel getal n geldt: alle getallen $\leq 3n$ in de R-vrije verzameling, verkregen met het 'gretige' algoritme bestaan uit paartjes van 2 opvolgende getallen, voorafgegaan en gevolgd door een 3-voud dat niet in de R-vrije ruimte zit.
II: Inductie begin: Zoals we zagen in opgave 2a zijn de eerste 2 getallen een paartje 1, 2 die voorafgegaan en gevolgd worden door 0 en 3, dus 3-vouden. Alle getallen ≤ 3 in de R-vrije verzameling ≤ 3 vormen dus een paartje van 2 opvolgende getallen, voorafgegaan en gevolgd door een 3-voud.
De inductieveronderstelling is dus waar voor n=1.

III: Te bewijzen: Als de inductieveronderstelling waar is voor $n = i$, dan is hij ook waar voor $n = i + 1$.

IV: Bewijs: Als de inductieveronderstelling waar is voor $n = i$ dan zijn dus alle getallen in de R-vrije verzameling $< 3i$ paartjes van 2 opvolgende getallen, voorafgegaan en gevolgd door een 3-voud.

Het 'gretige' algoritme zorgt ervoor dat het eerstvolgende getal $> 3i$ in de R-vrije ruimte het eerste getal getal is dat geen rekenkundige rij vormt met 2 getallen uit de R-vrije ruimte $\leq 3i$.
We kijken dus welke rekenkundige reeksen kunnen worden gevormd met 2 getallen $\leq 3i$ uit de R-vrije ruimte en één getal $> 3i$.

De eerste 2 getallen uit zo'n reeks kunnen niet uit hetzelfde paartje afkomstig zijn, want dan is het derde getal $\leq 3i$. Ze komen dus uit 2 verschillende paartjes.
Stel die twee getallen zijn afkomstig uit de paartjes die volgen op $3a$ en $3b$, met $a < b \leq i$
Er zijn dan met die 2 paartjes 4 rekenkundige rijtjes te maken:
$3a + 2, 3b + 1,\ 6b - 3a$
$3a + 1, 3b + 1,\ 6b - 3a + 1$
$3a + 2, 3b + 2,\ 6b - 3a + 2$
$3a + 1, 3b + 2,\ 6b - 3a + 3$
De derde termen van de rekenkundige rijtjes vormen dus een blokje van 4 opvolgende getallen, beginnend en eindigend met een 3-voud.

Voor de getallen $3i + 1$ en $3i + 2$ zijn er dus 2 mogelijkheden: ofwel ze behoren allebei tot zo'n blokje, ofwel ze behoren geen van beiden tot zo'n blokje.

Als ze wel tot zo'n blokje horen, dan hoort $3i + 3$ ook tot dat blokje, en dus bevat de R-vrije ruimte geen getallen $3i + 1$, $3i + 2$ of $3i + 3$ en zijn dus de getallen $\leq 3i$ in de R-vrije verzameling dezelfde als de getallen $\leq 3(i + 1)$ in de R-vrije verzameling.
De inductieveronderstelling is dan dus ook waar voor $n = i + 1$.

Als ze niet tot zo'n blokje horen, dan zit, volgens het 'gretige' algoritme $3i + 1$ in de R-vrije verzameling.
$3i + 2$ zit niet in een rekenkundige rij met 2 getallen $\leq 3i$, en ook niet in een rekenkundige rij met één getal $\leq 3i$ en $3i + 1$, dus ook $3i + 2$ zit in de R-vrije verzameling.
Tenslotte, omdat $3i + 2$ en $3i + 2$ in de R-vrije verzameling zitten kan $3i + 3$ er niet in zitten.
De getallen $\leq 3(i + 1)$ in de R-vrije verzameling zijn dus dezelfde getallen $\leq 3i$ in de R-vrije verzameling plus $3i + 1$ en $3i + 2$.
De inductieveronderstelling is dan dus ook waar voor $n = i + 1$.

De inductieveronderstelling is dus, als hij waar is voor $n = i$ altijd ook waar voor $n = i + 1$.
QED

P.S. Er waren maar enkele inzenders die dit bewijs op een goede manier hadden opgesteld. Ook hier was er een oplossing op internet te vinden1). Dat gebruikt getallen die beginnen met 0,1,… Dan krijg je natuurlijk dezelfde rij die wij krijgen, maar dan alles 1 kleiner.

Dan blijkt dat als je die getallen in het 3-tallig talstelsel schrijft, de rij begint met 0,1,10,11,100,101,........

Steeds getallen met alleen nullen en enen, dus geen tweeën.

Daarmee valt te bewijzen dat je inderdaad nooit toegestane getallen kan krijgen die ergens een 2 hebben, en dat je ook precies alle getallen krijgt zonder een 2. En als gevolg komen alle getallen in R voor in paartjes van 2.

Het voordeel hiervan is dat je van elk willekeurig getal direct kan bepalen of het in de rij R voorkomt.

---

[1]) https://math.stackexchange.com/questions/3901878/terms-of-stanley-sequences